

---

# Instrumentación electrónica

---

## Material complementario

PID\_00257315

Ferran Reverter Cubarsí

---

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 3 horas

---



**Ferran Reverter Cubarsí**

El encargo y la creación de este recurso de aprendizaje UOC han sido coordinados por el profesor: Carlos Manuel Monzo Sánchez (2019)

Primera edición: febrero 2019  
© Ferran Reverter Cubarsí  
Todos los derechos reservados  
© de esta edición, FUOC, 2019  
Avda. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona  
Diseño: Manel Andreu  
Realización editorial: Oberta UOC Publishing, SL

*Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño general y la cubierta, puede ser copiada, reproducida, almacenada o transmitida de ninguna forma, ni por ningún medio, sea éste eléctrico, químico, mecánico, óptico, grabación, fotocopia, o cualquier otro, sin la previa autorización escrita de los titulares del copyright.*

# Índice

<b>Introducción</b> .....	5
<b>Objetivos</b> .....	6
<b>1. Módulo 1</b> .....	7
1.1. Propagación de errores .....	7
1.2. Característica dinámica .....	10
<b>2. Módulo 2</b> .....	14
2.1. Características estáticas de los amplificadores operacionales .....	14
2.2. Características dinámicas de los amplificadores operacionales ..	17
<b>3. Módulo 3</b> .....	21
3.1. Filtros para convertidores de señal .....	21
<b>4. Módulo 4</b> .....	24
4.1. Linealización de termistores (NTC) .....	24
<b>Bibliografía</b> .....	29



## Introducción

El material de este documento está destinado a complementar la información y los conceptos explicados en los módulos 1, 2, 3 y 4 de la asignatura Instrumentación electrónica correspondiente al máster de Telecomunicaciones de la UOC.

La elaboración de este material complementario ha sido motivada principalmente por dos razones. Por un lado, los comentarios o dudas de los estudiantes de los últimos semestres sobre determinados conceptos. Dado que estos comentarios o dudas han sido reiterativos en algunos conceptos específicos, se ha considerado conveniente mejorar y ampliar las explicaciones correspondientes. Un ejemplo que generaba estas dudas a los estudiantes es el concepto de propagación de errores tratado en el módulo 1.

Por otro lado, también tenemos la experiencia académica y profesional del nuevo profesorado involucrado en la asignatura. Teniendo en cuenta esta experiencia, se ha considerado oportuno introducir nuevos conceptos o ampliar algunos de los existentes. Un ejemplo sería el concepto ganancia-ancho de banda de un amplificador operacional, que no se trataba con la profundidad deseada en el módulo 2.

Los conceptos recogidos en este material complementario se acompañan de ejemplos al final de cada una de las subsecciones. Estos ponen en práctica los conceptos, fórmulas, circuitos, etc. introducidos previamente con el objetivo de facilitar su comprensión.

El contenido de este documento se ha estructurado en función de los módulos complementados, de modo que los apartados 1, 2, 3 y 4 proporcionan la información adicional asociada a los módulos 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

## Objetivos

Los objetivos que debe alcanzar el estudiante mediante este material complementario son los siguientes:

- 1.** Saber aplicar la ley de propagación de errores en medidas de instrumentación electrónica.
- 2.** Entender la respuesta dinámica de los sistemas de medida de primer y segundo orden e identificar las diferencias.
- 3.** Saber analizar los efectos de las limitaciones en continua de un amplificador operacional a su salida.
- 4.** Entender el concepto de ganancia-ancho de banda de un amplificador operacional y saber analizar sus efectos.
- 5.** Saber aplicar los conceptos de filtrado en los convertidores de señal, en particular para determinar la relación señal-ruido que causa el aliasing.
- 6.** Entender los diferentes métodos para linealizar la respuesta de un sensor de temperatura tipo NTC.

## 1. Módulo 1

### 1.1. Propagación de errores

En el campo de la instrumentación electrónica se realizan frecuentemente **medidas indirectas**, es decir: la magnitud de interés  $Y$ , que está relacionada matemáticamente con otras  $N$  magnitudes  $X_i$ , se determina a partir de la medida directa de  $X_i$ . Por ejemplo: el valor de una resistencia eléctrica puede ser determinado a partir de las medidas directas de la caída de tensión y de la corriente circulante y aplicando, posteriormente, la ley de Ohm. Dado que la medida de las magnitudes  $X_i$  tiene asociada un error o incertidumbre ( $\Delta X_i$ ), el valor calculado de  $Y$  a partir de  $X_i$  también tendrá asociado un error o incertidumbre ( $\Delta Y$ ) que dependerá de  $\Delta X_i$ .

Supongamos que la magnitud  $Y$  está relacionada funcionalmente con las magnitudes  $X_i$  de la siguiente manera:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (1)$$

Para determinar  $\Delta Y$  a partir de  $\Delta X_i$  debemos aplicar **la ley de propagación de errores o incertidumbres**. Esta ley se puede aplicar con una suma normal de las diferentes contribuciones, es decir:

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| \Delta X_i \quad (2)$$

Donde  $\left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|$  es el valor absoluto de la derivada parcial de  $f$  respecto de  $X_i$ . Pero la ley también se puede aplicar haciendo una suma cuadrática de la siguiente manera:

$$\Delta Y = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|^2 \Delta X_i^2} \quad (3)$$

La expresión [2] considera el peor caso, mientras que la expresión [3] considera un caso estadísticamente más probable, haciendo que el valor de  $\Delta Y$  obtenido a partir de [2] sea superior a aquel estimado mediante la aplicación de [3]. Si hacemos un paralelismo con el tráfico viario, podríamos entender que la expresión [2] considera que todos los semáforos que hay en un determinado trayecto están en rojo, mientras que la expresión [3] asume que solo algunos están en rojo y, por tanto, la duración del trayecto es menor. Desde el punto

#### Error o incertidumbre

En el campo de la instrumentación electrónica, el concepto de error ha sido y todavía es ampliamente utilizado, pero actualmente el concepto de incertidumbre está más aceptado. En este documento, ambos conceptos se utilizan como sinónimos.

de vista de instrumentación electrónica, se recomienda aplicar la expresión [3] si las medidas de  $X_i$  son independientes entre ellas, por ejemplo: cuando estas se han llevado a cabo con instrumentos diferentes.

### Ejemplo

Para determinar el valor de una resistencia eléctrica se mide la caída de tensión ( $V$ ) y la corriente que circula en ella ( $I$ ). Estas medidas proporcionan los siguientes valores:  $V = 1,215 \text{ V} \pm 15 \text{ mV}$  e  $I = 1,055 \text{ mA} \pm 25 \text{ } \mu\text{A}$ . Calculad el valor de la resistencia y su incertidumbre aplicando la ley de propagación de incertidumbres.

### Solución

En primer lugar, el valor de la resistencia se puede obtener aplicando directamente la ley de Ohm:

$$R = \frac{V}{I} = 1.152 \text{ } \Omega \quad (4)$$

Para determinar el valor de la incertidumbre ( $\Delta R$ ) asociada a la medida indirecta de esta resistencia, debemos calcular inicialmente las derivadas parciales:

$$\frac{\partial R}{\partial V} = \frac{1}{I} \quad (5)$$

$$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{V}{I^2} \quad (6)$$

Si ahora aplicamos la expresión [2], el resultado es:

$$\Delta R = \left| \frac{\partial R}{\partial V} \right| \Delta V + \left| \frac{\partial R}{\partial I} \right| \Delta I = \frac{1}{I} \Delta V + \frac{V}{I^2} \Delta I = 42 \text{ } \Omega \quad (7)$$

Donde  $\Delta V = 15 \text{ mV}$  y  $\Delta I = 25 \text{ } \mu\text{A}$ . En el caso de aplicar la expresión [3], el resultado sería el siguiente:

$$\Delta R = \sqrt{\left| \frac{\partial R}{\partial V} \right|^2 \Delta V^2 + \left| \frac{\partial R}{\partial I} \right|^2 \Delta I^2} = \sqrt{\left( \frac{1}{I} \right)^2 \Delta V^2 + \left( \frac{V}{I^2} \right)^2 \Delta I^2} = 31 \text{ } \Omega \quad (8)$$

Por lo tanto, el resultado de esta medida indirecta de resistencia se expresará como:  $R = 1.152 \text{ } \Omega \pm 42 \text{ } \Omega$  (o  $\pm 31 \text{ } \Omega$ ). Si las medidas de tensión y corriente se hacen con aparatos diferentes (es decir, un voltímetro y un amperímetro, respectivamente) tiene más sentido expresar el resultado como  $1.152 \text{ } \Omega \pm 31 \text{ } \Omega$ .



La ley de propagación de errores o incertidumbres también es válida para cuantificar los efectos de la tolerancia de unos determinados componentes electrónicos (por ejemplo: resistencias o condensadores) en una determinada expresión que depende de estos componentes. En este caso, si los diferentes componentes que intervienen en la expresión provienen de lotes de fabricación diferentes, se puede aplicar la expresión [3], ya que se puede asumir que las diferentes fuentes de error son independientes. En cambio, si los componentes son del mismo lote de fabricación (por ejemplo, dos resistencias fabricadas consecutivamente una tras otra) es preferible aplicar la expresión [2], ya que no se puede asegurar que las fuentes de error sean independientes. En caso de duda, os aconsejamos aplicar la expresión [2], ya que considera el peor caso.

### La tolerancia

La tolerancia es la incertidumbre de un determinado componente respecto a su valor nominal. Por ejemplo: una resistencia eléctrica con un valor nominal de 1 kΩ puede tener una tolerancia del 10 % y, por tanto, su valor real puede estar comprendido entre 900 y 1.100 Ω.

### Ejemplo

Dos resistencias  $R_1$  i  $R_2$  con una tolerancia del 10 % se interconectan en serie. Si  $R_1 = 1$  kΩ y  $R_2 = 1$  kΩ, determinad el valor de la resistencia equivalente ( $R_{eq}$ ) y su incertidumbre ( $\Delta R_{eq}$ ).

### Solución

En primer lugar, el valor de  $R_{eq}$  puede obtenerse directamente haciendo la suma, ya que las resistencias están en serie:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 = 2.000 \Omega \quad (9)$$

Para determinar el valor de  $\Delta R_{eq}$  debida a la tolerancia de  $R_1$  y  $R_2$  ( $\Delta R_1$  y  $\Delta R_2$ , respectivamente) debemos calcular inicialmente las derivadas parciales:

$$\frac{\partial R_{eq}}{\partial R_1} = 1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial R_{eq}}{\partial R_2} = 1 \quad (11)$$

Aplicando la expresión [2], el resultado es el siguiente:

$$\Delta R_{eq} = \left| \frac{\partial R_{eq}}{\partial R_1} \right| \Delta R_1 + \left| \frac{\partial R_{eq}}{\partial R_2} \right| \Delta R_2 = \Delta R_1 + \Delta R_2 = 200 \Omega \quad (12)$$

donde  $\Delta R_1 = \Delta R_2 = 10\% \cdot 1$  kΩ. Aplicando la expresión [3], el resultado sería el siguiente:

$$\Delta R_{eq} = \sqrt{\left| \frac{\partial R_{eq}}{\partial R_1} \right|^2 \Delta R_1^2 + \left| \frac{\partial R_{eq}}{\partial R_2} \right|^2 \Delta R_2^2} = \sqrt{\Delta R_1^2 + \Delta R_2^2} = 141 \Omega \quad (13)$$

Por lo tanto, la resistencia equivalente se expresa como:  $R_{eq} = 2.000 \Omega \pm 200 \Omega$  (o  $\pm 141 \Omega$ ). En función de si las resistencias empleadas son del mismo lote de fabricación o no,

habrá que usar el resultado de [12] o [13], respectivamente. En caso de duda, es preferible utilizar el resultado obtenido mediante [12].

Según el resultado obtenido en [12], la resistencia equivalente tiene una incertidumbre relativa expresada en porcentaje (es decir:  $\frac{200}{2.000} \cdot 100 = 10\%$ ) que es igual a la tolerancia de las resistencias  $R_1$  y  $R_2$ . Matemáticamente, esto se puede demostrar de la siguiente manera. En primer lugar, expresamos:

$$\Delta R_{eq} = \Delta R_1 + \Delta R_2 \quad (14)$$

A ambos lados de la expresión previa, dividimos entre  $R_{eq}$  obteniendo:

$$\frac{\Delta R_{eq}}{R_{eq}} = \frac{\Delta R_1 + \Delta R_2}{R_{eq}} \quad (15)$$

Dado que  $R_1 = R_2$  y  $\Delta R_1 = \Delta R_2$ , la expresión [15] se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta R_{eq}}{R_{eq}} = \frac{2\Delta R_1}{2R_1} = \frac{\Delta R_1}{R_1} \quad (16)$$

Que reafirma la hipótesis de partida.

## 1.2. Característica dinámica

Los **sistemas de primer orden** presentan una función de transferencia en la que el denominador es un polinomio de primer orden en el dominio de Laplace. Estos sistemas son bastante habituales en el campo de la instrumentación electrónica, en particular aquellos que tienen una respuesta de tipo pasa-bajo. Algunos ejemplos de sensores y circuitos que se comportan como tal son los siguientes: (1) un sensor resistivo térmico, con una resistencia de salida que depende de la temperatura aplicada, y (2) un amplificador operacional compensado internamente en frecuencia. Estos sistemas de primer orden, ante una entrada de tipo escalón, presentan una salida  $y$  con una respuesta transitoria que se puede expresar de la siguiente forma:

$$y(t) = Y_F(1 - e^{-t/\tau}) \quad (17)$$

Donde  $Y_F$  es el valor final de la variable  $y$  en régimen estacionario y  $\tau$  es una constante de tiempo que determina la velocidad de respuesta del sistema. Por ejemplo, en un circuito electrónico formado por una resistencia ( $R$ ) y un condensador ( $C$ ), esta constante de tiempo vale  $R \cdot C$ . Un sistema con una  $\tau$  pequeña es preferible desde el punto de vista de velocidad, pero no en cuanto a ruido  $y$ , en consecuencia, en cuanto a variabilidad de las medidas en estado

estacionario. Dicho de otro modo, un valor pequeño de  $\tau$  tiene asociado una frecuencia de corte mayor y, por tanto, el sistema es más susceptible a ruido y a interferencias.

La figura 1 muestra la típica respuesta dinámica de un sistema de primer orden pasa-bajo ante una entrada de tipo escalón. El tiempo que pasa desde la aplicación del escalón hasta que el sistema proporciona una salida con un determinado error respecto al valor final se conoce como **tiempo de establecimiento** ( $t_s$ ). Cuanto menor sea el error, más largo será el tiempo de establecimiento. Por ejemplo, si  $t_s = T$ , se obtiene un error relativo del 37 %, que obviamente es un valor elevado. Por otro lado, si  $t_s = 4,6\tau$ , se obtiene un error relativo del 1 %. Estos valores se pueden obtener matemáticamente a partir de la expresión [17] o gráficamente mediante la figura 1. La tabla 1 muestra cuánto debe valer el tiempo de establecimiento en función de  $\tau$  para que el error debido a la respuesta dinámica sea de un determinado porcentaje. Observad que para disminuir el error relativo un factor de 10 hay que esperar 2,3  $\tau$  más. Por otra parte, la respuesta de la figura 1 no presenta sobreoscilaciones; estas son típicas de sistemas con un orden superior a 1.

Figura 1. Respuesta transitoria de un sistema de primer orden pasa-bajo ante una entrada de tipo escalón.

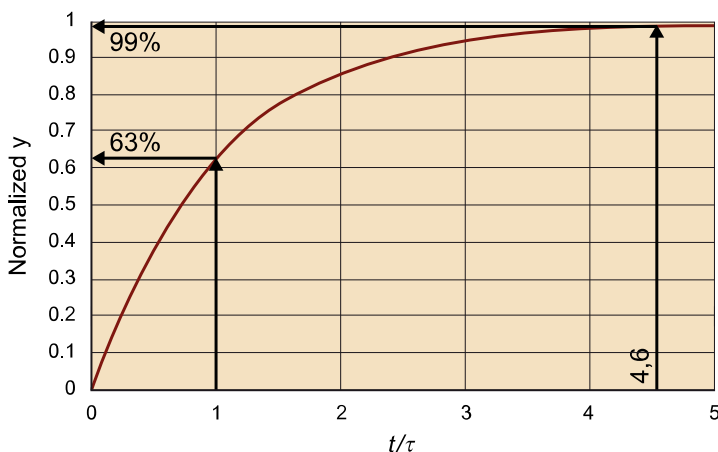


Tabla 1. Relación entre el tiempo de establecimiento y el error relativo debido a la respuesta dinámica de un sistema de primer orden tipo pasa-bajo.

Error relativo (%)	Tiempo de establecimiento
10	2,3 $\tau$
1	4,6 $\tau$
0,1	6,9 $\tau$
0,01	9,2 $\tau$

### Ejemplo

Un determinado sistema electrónico alimentado con baterías realiza una medida de la concentración de monóxido de carbono cada diez minutos, y se duerme entre medida y medida con el fin de alargar la vida de las baterías. Cuando se activa la alimentación del sistema para llevar a cabo la medida, la tensión de salida ( $v_o$ ) del circuito acondicionador,

que será posteriormente digitalizada por el convertidor analógico-digital, evoluciona dinámicamente en el dominio del tiempo de la siguiente manera:

$$v_o(t) = V_F(1 - e^{-t/\tau}) \quad (18)$$

Donde  $V_F$  es el valor final de tensión y  $\tau$  es la constante de tiempo. Hallad la expresión algebraica (en función de  $\tau$ ) del tiempo de establecimiento para que el error relativo debido a la respuesta dinámica sea del 5 %. Calculad el valor numérico de este tiempo de establecimiento si  $V_F = 1$  V y  $\tau = 10$  ms.

### Solución

Si se desea que el error relativo sea del 5 %, debe cumplir lo siguiente:

$$\left| \frac{V_F(1 - e^{-t_s/\tau}) - V_F}{V_F} \right| \cdot 100 = 5\% \quad (19)$$

Al aislar  $t_s$  de la expresión anterior se obtiene:

$$e^{-t_s/\tau} = 0,05 \rightarrow -t_s = \tau \ln 0,05 \rightarrow t_s = 3\tau \quad (20)$$

Al ser  $\tau = 10$  ms, el tiempo de establecimiento vale 30 ms.

Los **sistemas de segundo orden** presentan una función de transferencia en la que el denominador es un polinomio de segundo orden en el dominio de Laplace. La respuesta dinámica de estos sistemas depende de dos parámetros: (1) el factor de amortiguamiento ( $\delta$ ), que cuantifica en qué medida las oscilaciones de la salida decaen temporalmente cuando el sistema experimenta un cambio en su entrada, y (2) la frecuencia natural no amortiguada ( $\omega_0$ ), que corresponde a la frecuencia a la que oscilaría la salida del sistema si no existiera la amortiguación ( $\delta = 0$ ). La situación observada con más frecuencia en un sistema real es aquella en la que  $0 < \delta < 1$  (conocido como **régimen bajo-amortiguado**) con una salida que presenta oscilaciones amortiguadas antes de llegar al estado estacionario. En estas condiciones, ante una entrada de tipo escalón, el sistema presenta una salida  $y$  con respuesta transitoria que se puede expresar de la siguiente manera:

$$y(t) = Y_F(1 - C \cdot e^{-\delta\omega_0 t} \sin(\omega_n t + \theta)) \quad (21)$$

Donde  $Y_F$  es el valor de la variable  $y$  en régimen estacionario y

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} \quad (22)$$

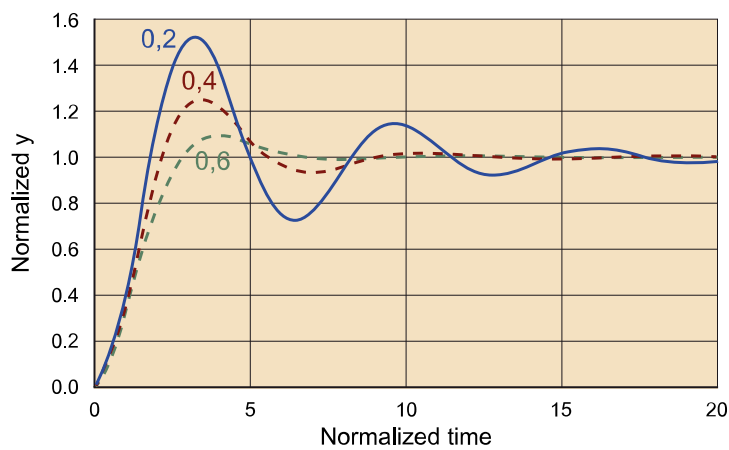
$$\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - \delta^2} \quad (23)$$

$$\theta = \cos^{-1}\delta \quad (24)$$

La variable  $\omega_n$  de la expresión [23] se conoce como frecuencia natural amortiguada.

La figura 2 muestra la típica respuesta dinámica de un sistema de segundo orden pasa-bajo ante una entrada tipo escalón y por diferentes valores del factor de amortiguamiento. Esta respuesta, a diferencia de lo que ocurre en la figura 1, sí presenta sobreoscilaciones que incrementan al disminuir el valor de  $\delta$ . La sobreoscilación de un sistema se cuantifica generalmente calculando el error relativo (en porcentaje) entre el valor máximo obtenido y el valor final en régimen estacionario.

Figura 2. Respuesta transitoria de un sistema de segundo orden bajo-amortiguado ante una entrada de tipo escalón, por diferentes valores del factor de amortiguamiento.



### Ejemplo

Dado el comportamiento de la figura 2, calculad la sobreoscilación cuando  $\delta = 0,2$ .

### Solución

Según la figura 2, por  $\delta = 0,2$ , la respuesta dinámica presenta un valor máximo (normalizado) de 1,53. Por lo tanto, dado que el valor final en régimen estacionario es 1, la sobreoscilación vale:  $(1,53 - 1)/1 \cdot 100 = 53 \%$ .

## 2. Módulo 2

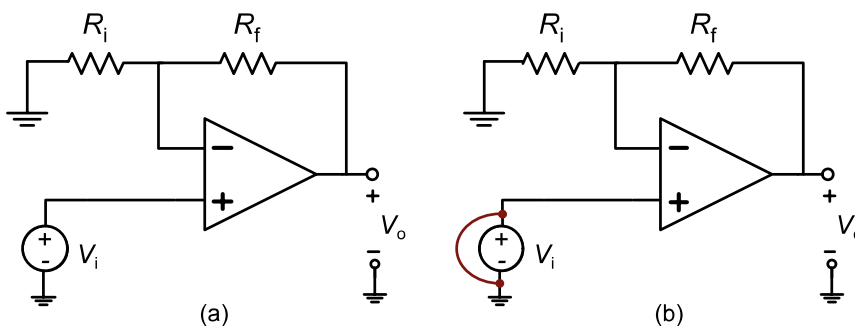
### 2.1. Características estáticas de los amplificadores operacionales

Los amplificadores operacionales (AO) presentan varias limitaciones en continua que provocan que la tensión de salida presente un error en continua respecto al valor esperado. Entre estas limitaciones, las más críticas suelen ser la **tensión de offset de entrada** ( $V_{io}$ ) (en inglés, *input offset voltage*) y las **corrientes de polarización** ( $I_{b+}$  e  $I_{b-}$ ) de la entrada no inversora e inversora, respectivamente. Para analizar los efectos de estas limitaciones a la salida del AO, es recomendable tener en cuenta los siguientes pasos:

- Eliminar las fuentes independientes del circuito.
- Sustituir el AO por su modelo real que incluye  $V_{io}$ ,  $I_{b+}$  e  $I_{b-}$ .
- Aplicar el teorema de superposición y analizar independientemente los efectos de  $V_{io}$ ,  $I_{b+}$  e  $I_{b-}$  en la salida.
- Calcular la magnitud del error en la salida sumando, tal y como se indicará más adelante, las diferentes contribuciones.

A continuación, el método de análisis anterior es aplicado al amplificador no inversor de la figura 3(a). Tal como indica el paso a), en primer lugar hay que eliminar la fuente independiente  $V_i$  que, al tratarse de una fuente de tensión, se debe cortocircuitar, como podéis ver en la figura 3(b).

Figura 3. (a) Amplificador no inversor con una ganancia  $1+R_f/R_i$ , (b) con la fuente independiente eliminada.



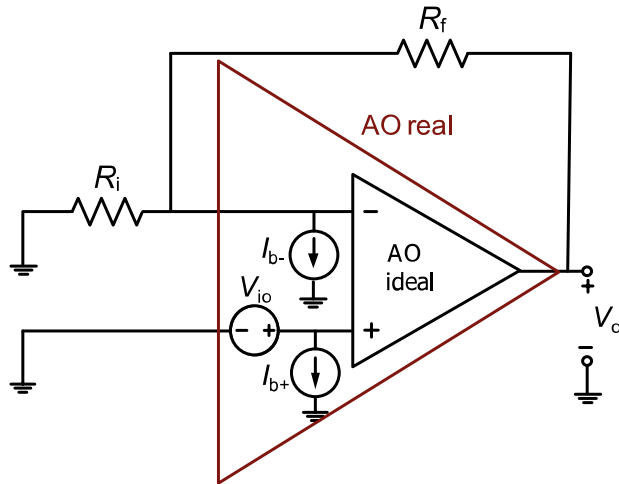
En segundo lugar, hay que sustituir el AO por su modelo real, marcado en rojo en la figura 4, y que incluye  $V_{io}$ ,  $I_{b+}$  e  $I_{b-}$ . En cuanto a la polaridad de  $V_{io}$ ,  $I_{b+}$  e  $I_{b-}$ , puede escogerse la de la figura o la opuesta, pero es importante que las fuentes

#### Corrientes de polarización

Los fabricantes de AO no proporcionan directamente estas corrientes, sino que dan la media de las dos (en inglés, *input bias current*,  $I_B$ ) y el valor absoluto de la diferencia (en inglés, *input offset current*,  $I_{io}$ ). Estas corrientes se relacionan así entre ellas:  $I_{b+} = I_B \pm I_{io}/2$  e  $I_{b-} = I_B \mp I_{io}/2$ .

de corriente  $I_{b+}$  e  $I_{b-}$  tengan la misma polaridad entre ellas. En tercer lugar, hay que aplicar el teorema de superposición y analizar independientemente los efectos de  $V_{io}$ ,  $I_{b+}$  e  $I_{b-}$  a la salida, tal como muestra la figura 5.

Figura 4. Amplificador no inversor de la figura 3(b) considerando el modelo real del AO que incluye  $V_{io}$ ,  $I_{b+}$  e  $I_{b-}$ .



En la figura 5(a), donde se analizan los efectos de  $V_{io}$ , podemos ver que esta tensión está amplificada por el factor  $1 + R_f/R_i$ . De hecho, los circuitos de las figuras 3(a) y 5(a) son equivalentes, pero en el segundo caso la tensión que pasa a la salida amplificada por el factor  $1 + R_f/R_i$  es la  $V_{io}$ , en lugar de  $V_i$ . Por lo tanto, la tensión de salida se puede expresar como:

$$V_{O,1} = V_{io} \left( 1 + \frac{R_f}{R_i} \right) \quad (25)$$

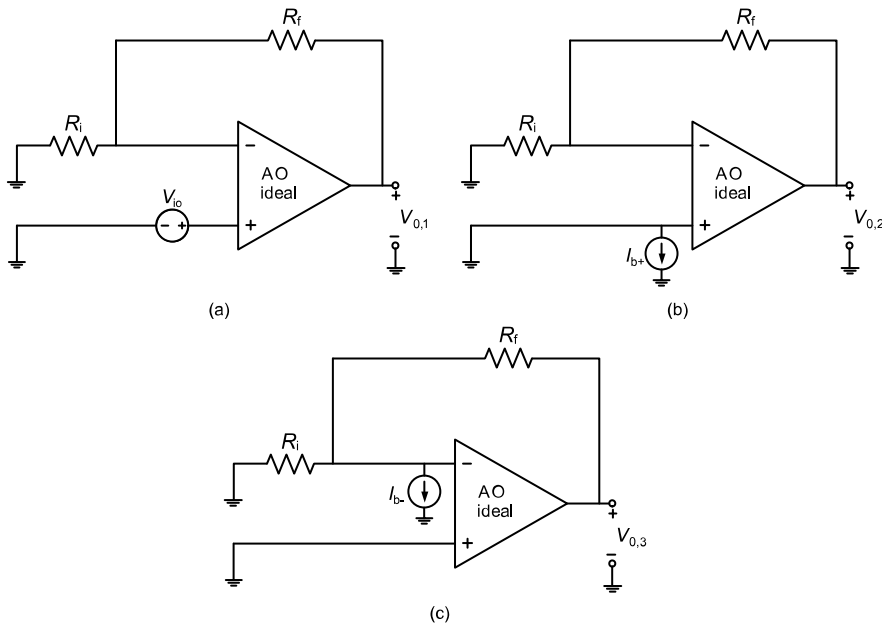
En la figura 5(b), donde se analizan los efectos de  $I_{b+}$ , podemos ver que esta corriente no circula a través de ninguna resistencia y, por tanto, la entrada no inversora del AO está a cero voltios, de modo que la tensión de salida vale:

$$V_{O,2} = 0 \left( 1 + \frac{R_f}{R_i} \right) = 0 \quad (26)$$

Por último, en la figura 5(c), donde se analizan los efectos de  $I_{b-}$ , podemos observar que esta corriente circula por la resistencia de realimentación y genera una tensión de salida igual a:

$$V_{O,3} = I_{b-} \cdot R_f \quad (27)$$

Observad que en el circuito de la figura 5(c) la resistencia  $R_i$  es superflua, ya que el terminal del izquierdo se encuentra conectado a masa y en el terminal de la derecha está la masa virtual generada por la realimentación negativa del amplificador operacional.

Figura 5. Análisis de los efectos de (a)  $V_{io}$ , (b)  $I_{b+}$  y (c)  $I_{b-}$  sobre la tensión de salida.

El último paso es el cálculo de la magnitud del error en la salida como suma de las diferentes contribuciones. Estas deben sumarse de la siguiente manera:

$$V_{O,T} = \pm (|V_{O,1}| + |V_{O,2} + V_{O,3}|) \quad (28)$$

Entre las contribuciones de  $I_{b+}$  e  $I_{b-}$  es posible (pero no ocurre en el caso analizado anteriormente) que haya cierta compensación de sus efectos y, por esta razón, las tensiones de salida respectivas ( $V_{O,2}$  y  $V_{O,3}$ ) se suman tal cual. Ahora bien, estos efectos se deben sumar en valor absoluto con aquellos generados por la  $V_{io}$  para considerar el peor caso en el que los efectos en modo tensión y en modo corriente tienen el mismo signo. Por último, dado que no conocemos la polaridad real de  $V_{io}$ ,  $I_{b+}$  e  $I_{b-}$ , el resultado del error de salida puede ser positivo o negativo y, por ello, el signo “ $\pm$ ” está al principio de la expresión [28]. Teóricamente no podemos saber a priori qué polaridad (positivo o negativo) tendrá este error de la tensión de salida. Experimentalmente, por cada unidad testada de un determinado modelo de AO, se obtendría un error particular (positivo o negativo) que estaría comprendido dentro del margen definido por [28].

### Ejemplo

Dado el circuito de la figura 3(a) con  $R_f = 1 \text{ M}\Omega$ ,  $R_i = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $V_{io} = 1 \text{ mV}$ ,  $I_B = 80 \text{ nA}$  e  $I_{io} = 20 \text{ nA}$ , calculad el error de tensión en mV en la salida del AO.

### Solución

Aplicando las ecuaciones [25], [26] y [27] y la expresión de  $I_{b-}$  dada en la tabla informativa del subapartado 2.1. (Corrientes de polarización), se obtiene lo siguiente:



$$V_{O,1} = V_{io} \left( 1 + \frac{R_F}{R_i} \right) = 1 \text{ mV} \cdot 101 = 101 \text{ mV} \quad (29)$$

$$V_{O,2} = 0 \quad (30)$$

$$V_{O,3} = I_{b-} \cdot R_F = \left( I_{B\mp} \mp \frac{I_{io}}{2} \right) 1 \text{ M}\Omega = [70,90] \text{ mV} \quad (31)$$

Donde el valor mínimo y máximo del intervalo obtenido en [31] resultan de considerar el signo “-” y “+” en el valor de  $I_{b-}$ , respectivamente. Asumiendo ahora el máximo valor obtenido en [31] y aplicando [28], la tensión de error en la salida del AO vale, en el peor caso, lo siguiente:

$$V_{O,T} = \pm (101 + 10 + 90) = \pm 191 \text{ mV} \quad (32)$$

Si asumimos una tensión de fondo de escala de 5 V, la tensión de error anterior representa un error relativo del  $\pm 4\%$ . Obviamente, en el mercado se dispone de AO con prestaciones más buenas en cuanto a  $V_{io}$ ,  $I_{b+}$  e  $I_{b-}$  para disminuir este error.

## 2.2. Características dinámicas de los amplificadores operacionales

Una de las principales limitaciones dinámicas de los AO es su **respuesta en frecuencia**. Supongamos el amplificador no inversor de la figura 3(a) con una relación de resistencias tal que  $1 + R_f/R_i = 100$ . Esta ganancia de 100 es la que proporciona el circuito si en la entrada existe una tensión continua o de baja frecuencia; por ejemplo, si en la entrada tenemos conectado un sensor de temperatura. Ahora bien, si un sensor de ultrasonidos que proporciona una tensión con una frecuencia de 40 kHz está conectado en la entrada, no podemos asegurar de forma inmediata que el circuito en cuestión proporcione una ganancia de 100. Esto es debido a que la ganancia real del circuito depende de la frecuencia que queramos amplificar. Por regla general, cuanto mayor sea la frecuencia, menor será la ganancia real del amplificador, y actuará como un filtro pasa-bajo a pesar de querer un circuito amplificador pasa-todo.

Para describir esta limitación de los AO, los fabricantes proporcionan un parámetro que recibe diferentes denominaciones: *unity-gain frequency*, *gain-bandwidth product* o *bandwidth*, siendo el segundo el más habitual. El **producto ganancia-ancho de banda** implica que el producto entre la ganancia (en continua) del circuito y el ancho de banda es constante. Por lo tanto, hay un **compromiso** claro entre estos dos valores. Un circuito amplificador con una ganancia (en continua) elevada tendrá un ancho de banda menor y, en consecuencia, podrá amplificar por la ganancia esperada solo a frecuencias bajas.

### Compromiso ganancia-ancho de banda

En el mercado podemos encontrar amplificadores operacionales especiales llamados CFA (*current feedback amplifier*) donde este compromiso entre la ganancia y el ancho de banda no existe y, por tanto, estos se pueden ajustar de forma independiente. En contrapartida, sin embargo, los CFA no presentan buenas características estáticas.

Por otra parte, un circuito amplificador con una ganancia (en continua) reducida tendrá un ancho de banda mayor y, por tanto, podrá amplificar por la ganancia esperada hasta frecuencias más altas.

Matemáticamente, la relación anterior puede expresarse de la siguiente manera:

$$f_T = G_{dc} \cdot f_c \quad (33)$$

Donde  $f_T$  es el producto ganancia-ancho de banda proporcionado por el fabricante,  $G_{dc}$  es la ganancia del circuito en continua (determinada por la relación de resistencias) y  $f_c$  es la frecuencia de corte (o el ancho de banda) del circuito amplificador que actúa, aunque no sea nuestra intención, como filtro pasa-bajo. Por ejemplo, si se diseña un circuito amplificador con un AO que posee una  $f_T = 1$  MHz,  $f_c$  tendrá un valor de 100 kHz, 10 kHz y 1 kHz en el caso de que  $G_{dc}$  valga 10, 100 y 1.000, respectivamente.

Este comportamiento de tipo filtro pasa-bajo presente en circuitos amplificadores es habitualmente de primer orden<sup>1</sup>, es decir, con una pendiente de  $-20$  dB/dec en la banda frecuencial atenuada. Matemáticamente, esta ganancia ( $G$ ) que depende de la frecuencia se puede expresar en el dominio de Laplace como:

<sup>(1)</sup> Asumiendo que el AO está compensado internamente en frecuencia, es decir, su ganancia diferencial en lazo abierto presenta una caída con una pendiente de  $-20$  dB/dec hasta llegar a 0 dB.

$$G(s) = \frac{G_{dc}}{1 + \frac{1}{2\pi f_c} s} \quad (34)$$

Siendo esta válida para el amplificador inversor, no inversor y sus derivados. La expresión anterior puede trasladarse al dominio frecuencial, obteniendo:

$$G(jf) = \frac{G_{dc}}{1 + j \frac{f}{f_c}} \quad (35)$$

Donde su módulo vale:

$$|G(jf)| = \frac{G_{dc}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \quad (36)$$

De la expresión anterior podemos observar que cuando la frecuencia ( $f$ ) de la señal amplificada es igual a  $f_c$ , la ganancia real es igual a  $0,7 \cdot G_{dc}$ , es decir, 3 dB menos de la ganancia esperada, tal y como ocurre en filtros pasa-bajo de primer orden.

### Ejemplo

El circuito de la figura 3(a) se implementa con  $R_i = 1$  k $\Omega$ ,  $R_f = 1$  M $\Omega$  y con un amplificador operacional que tiene una  $f_T = 1$  MHz. Determinad la amplitud de la tensión de salida si la

tensión de entrada es una señal sinusoidal con una amplitud de 10 mV y una frecuencia de 10 kHz.

### Solución

Lo que no puede afirmarse es que la salida tendrá un valor de  $10 \text{ mV} \cdot (1 + 1\text{M}\Omega/1\text{k}\Omega) = 10,01 \text{ V}$ , sino que hay que proceder de la siguiente manera. En primer lugar, hay que calcular la frecuencia de corte del circuito como:

$$f_c = \frac{f_T}{G_{dc}} = \frac{1 \text{ MHz}}{1 + R_f/R_i} \approx 1 \text{ kHz} \quad (37)$$

En segundo lugar, hay que utilizar la expresión [36]:

$$|G(jf)| = \frac{G_{dc}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} = \frac{1 + R_f/R_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{10\text{k}}{1\text{k}}\right)^2}} = 99,6 \quad (38)$$

Por lo tanto, la amplitud de la tensión de salida tendrá un valor de  $10 \text{ mV} \cdot 99,6 \approx 1 \text{ V}$ , que es diez veces más pequeño que el valor calculado inicialmente.

### Ejemplo

Una señal de audio, con un ancho de banda de interés hasta 20 kHz, es amplificada con un amplificador no inversor como el de la figura 3(a) con  $1 + R_f/R_i = 1.000$  y  $f_T = 3 \text{ MHz}$ . Discutid si el diseño es válido y, en caso contrario, proponed mejoras.

### Solución

Con los datos proporcionados en el enunciado, podemos calcular la frecuencia de corte del circuito como:

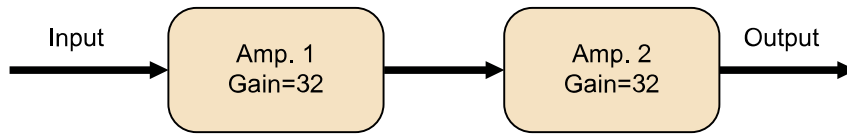
$$f_c = \frac{f_T}{G_{dc}} = \frac{3 \text{ MHz}}{1 + R_f/R_i} = 3 \text{ kHz} \quad (39)$$

Por tanto, las frecuencias comprendidas entre 3 kHz y 20 kHz serían amplificadas por una ganancia inferior a la deseada, que en este caso no nos interesa. Para solucionar este problema, hay varias opciones posibles. La opción más rápida, aunque implica utilizar un componente más costoso, es escoger un AO con una  $f_T$  superior. Esta debería ser como mínimo de 20 MHz. Otra opción es utilizar dos etapas de amplificación en cascada, tal y como muestra la figura 6. Por ejemplo, se podrían usar dos etapas de amplificación, cada una de ellas con una ganancia de 32, para obtener una ganancia total de 1.000 ( $\approx 32^2$ ). Por otra parte, una ganancia de 32 implica una frecuencia de corte igual a:

$$f_c = \frac{f_T}{G_{dc}} = \frac{3 \text{ MHz}}{32} = 94 \text{ kHz} \quad (40)$$

En este diseño, basado en dos etapas, cada una de ellas aportaría la mitad de la amplificación requerida y en ningún caso se atenúan las frecuencias de interés inferiores a 20 kHz. Observad que la frecuencia de corte particular de cada subcircuito es casi cinco veces mayor que la máxima frecuencia a amplificar.

Figura 6. Diseño de un circuito amplificador basado en dos etapas.



### 3. Módulo 3

#### 3.1. Filtros para convertidores de señal

Tanto en los convertidores analógico-digitales (A/D) como en los convertidores digital-analógicos (D/A), los filtros juegan un papel muy relevante. En la conversión A/D, la presencia de un filtro antes del circuito de muestreo y retención es vital para evitar fenómenos de aliasing. Por otra parte, en la conversión D/A, la presencia de un filtro después del interpolador/mantenedor de orden cero es básico para terminar de eliminar/atenuar los restos de las réplicas no filtradas por el mismo mantenedor de orden cero. En ambos casos, los filtros son de tipo pasa-bajo y se denominan filtro antialiasing en el primer caso y filtro anti-imagen o suavizador en el segundo.

A continuación se describen matemáticamente los filtros. En primer lugar, el módulo de la respuesta en frecuencia de un filtro pasa-bajo de primer orden se puede expresar de la siguiente manera:

$$|H(jf)| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \quad (41)$$

Donde  $H_0$  es la ganancia del filtro en la banda pasante (a frecuencias bajas) y  $f_c$  es la frecuencia de corte del filtro con una atenuación de 3 dB respecto a la banda pasante. En la banda eliminada, el filtro de primer orden presenta una atenuación de  $-20$  dB/dec. En el caso de un filtro pasivo pasa-bajo implementado con una resistencia ( $R$ ) y un condensador ( $C$ ), la  $f_c = (2 \cdot \pi \cdot R \cdot C)^{-1}$ . Hay que tener en cuenta que las expresiones [36] y [41] son equivalentes, ya que, como se ha indicado antes, un circuito amplificador actúa como filtro pasa-bajo de primer orden. Si en lugar de ser de primer orden el filtro es de orden  $n$  y tiene una respuesta de tipo Butterworth, el módulo de la respuesta en frecuencia se puede expresar como:

$$|H(jf)| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}} \quad (42)$$

Con una atenuación de  $-20 \cdot n$  dB/dec en la banda eliminada.

Por otro lado, si el filtro es pasa-alto y de primer orden, el módulo de su respuesta en frecuencia vale:

$$|H(jf)| = \frac{H_0 \frac{f}{f_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \quad (43)$$

Donde  $H_0$  es de nuevo la ganancia del filtro en la banda pasante, que en este caso son las frecuencias altas. En la misma situación, pero de orden  $n$ , el módulo puede expresarse como:

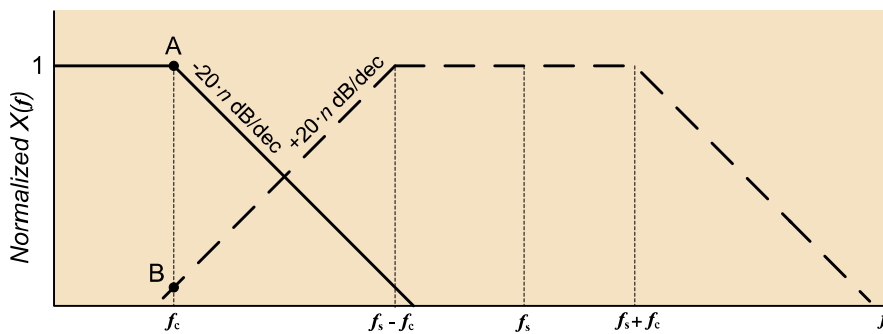
$$|H(jf)| = \frac{H_0 \left(\frac{f}{f_c}\right)^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}} \quad (44)$$

Las expresiones matemáticas anteriores deben permitir, por ejemplo, determinar cuál es el orden del filtro adecuado para un determinado convertidor. Para estudiar esto con más detalle usaremos como referencia la representación asintótica en el dominio frecuencial de la figura 7, donde hay que tener presente lo siguiente. En primer lugar, el espectro de la señal original filtrada ( $X$ ) está representada en línea continua gruesa, con componentes frecuenciales de interés hasta  $f_c$  que coincide con la frecuencia de corte del filtro aplicado. En segundo lugar, como consecuencia del muestreo de la señal anterior a una frecuencia  $f_s$ , aparece una réplica de la señal centrada en el primer múltiple de  $f_s$  que está representada en línea discontinua gruesa. Obviamente, aparecen otras réplicas de la señal en los demás múltiplos de  $f_s$ , pero estas tienen menos efectos cuantitativos en la banda frecuencial de interés, es decir, de 0 a  $f_c$ . En el caso que muestra la figura 7, el peor caso en términos de aliasing es el componente generado en  $f_c$ , con una amplitud  $B$ . Esta debe representar como máximo un determinado porcentaje (definido por la aplicación) respecto a la amplitud de la señal original a esta misma frecuencia (indicado mediante el punto A en la figura 7). Si este porcentaje de error provocado por el aliasing es mayor de lo esperado, hay que incrementar el valor de  $f_s$  o aumentar el orden del filtro.

### Respuesta de tipo Butterworth

Una respuesta de tipo Butterworth es aquella que presenta un comportamiento máximamente plano en la banda frecuencial pasante. En un sistema de segundo orden, esta respuesta corresponde al caso en el que el factor de amortiguamiento vale 0,707.

Figura 7. Representación en el dominio frecuencial de los efectos de aliasing.



### Ejemplo

A partir del caso representado en la figura 7 con  $f_c = 2$  kHz y  $n = 1$ , determinad el valor mínimo de  $f_s$  para que la amplitud del componente de aliasing (punto B en la figura 7) sea como máximo un  $2\%^2$  de la amplitud de la señal original (punto A en la figura 7).

### Solución

Primero procedemos a calcular la amplitud de la señal original en  $f = f_c$ . Para ello, podemos utilizar la expresión [41]:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{f_c}\right)^2}} = 0,707 \quad (45)$$

Donde se ha asumido que  $H_0 = 1$ , ya que las amplitudes de la figura 7 están normalizadas. En segundo lugar, determinaremos la amplitud del componente de aliasing en el punto B. Para ello, hay que emplear la expresión [43], ya que la réplica se superpone a la banda frecuencial de interés en forma de filtro pasa-alto con una frecuencia de corte igual a  $f_s - f_c$  (véase la figura 7). En estas condiciones, en  $f = f_c$  tenemos lo siguiente:

$$B = \frac{\frac{f_c}{f_s - f_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{f_s - f_c}\right)^2}} \quad (46)$$

Entonces, es necesario que se cumpla la siguiente relación:

$$\frac{\frac{2k}{f_s - 2k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2k}{f_s - 2k}\right)^2}} < \frac{2}{100} \cdot 0,707 \quad (47)$$

Trabajando matemáticamente la expresión anterior se obtiene una ecuación de segundo grado con la variable  $f_s$ , y resolviéndose se obtiene que  $f_s > 143$  kHz. Hay que tener en cuenta que el valor anterior es mayor al obtenido aplicando directamente el teorema de Nyquist, es decir:  $f_s > 2 \cdot 2$  kHz = 4 kHz. Esto es así porque el ejemplo anterior utiliza un filtro antialiasing de primer orden en el que los efectos de las réplicas sobre la banda frecuencial de interés son bastante relevantes. Cuanto mayor sea el orden del filtro, más nos aproximaremos a 4 kHz obtenidos mediante el teorema de Nyquist.

<sup>(2)</sup>Estos efectos de distorsión de la señal causados por el aliasing a menudo también se expresan como una relación señal-ruido (en inglés, signal-to-noise ratio) cuantificada en dB. En el caso en cuestión, tener unos efectos inferiores al 2 % corresponden a una relación señal-ruido superior a 34 dB ( $= 20 \cdot \log(\text{amplitud señal} / 2\% \text{ de la amplitud señal})$ ).

## 4. Módulo 4

### 4.1. Linealización de termistores (NTC)

Entre los diferentes tipos de sensores de temperatura existentes en el mercado, los termistores de tipo NTC presentan como ventajas principales un coste bajo y una sensibilidad elevada, pero su limitación principal es la no linealidad. La relación no lineal entre su resistencia ( $R_t$ ) y la temperatura ( $T$ , expresada en K) se puede modelizar así:

$$R_t(T) = R_0 e^{\beta \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} \quad (48)$$

Donde  $R_0$  es la resistencia en  $T = T_0$ ,  $\beta$  es la temperatura característica del material y  $T_0$  es la temperatura de referencia que generalmente es de 298 K (que corresponden a 25 °C) en este tipo de sensores.

Para mejorar esta característica no lineal de los termistores hay dos estrategias posibles. La primera consiste en poner una resistencia ( $R_p$ ) en paralelo con el termistor, tal como muestra la figura 8. En estas condiciones, tenemos una resistencia equivalente que vale:

$$R_{eq} = \frac{R_t R_p}{R_t + R_p} \quad (49)$$

Para hallar la sensibilidad térmica de  $R_{eq}$ , podemos sustituir [48] en [49] y hacer la primera derivada respecto a la temperatura. Obtendremos:

$$\frac{\partial R_{eq}}{\partial T} = - \frac{R_t R_p^2 \beta}{(R_t + R_p)^2 T^2} \quad (50)$$

Para determinar el valor apropiado de  $R_p$ , generalmente lo que se hace es forzar que la curva que relaciona  $R_{eq}$  y  $T$  tenga un punto de inflexión en la temperatura central ( $T_c$ ) del margen de medida. Para obtener este valor analíticamente, hay que hacer la segunda derivada respecto de la temperatura e igualar el resultado a cero de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 R_{eq}}{\partial^2 T} = - \frac{R_t R_p^2 \beta}{(R_t + R_p)^2 T^3} \left( \frac{2R_t \beta}{(R_t + R_p) T} - \frac{\beta}{T} - 2 \right) = 0 \quad (51)$$

Term 1



La expresión [51] tendrá un valor de cero cuando el término 1 valga cero, que implica la siguiente condición:

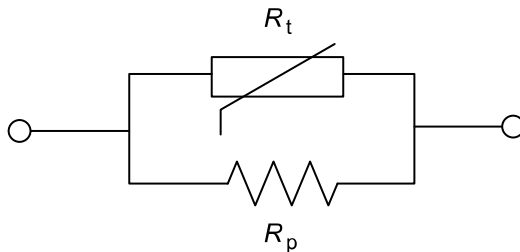
$$R_p = \frac{\beta - 2T}{\beta + 2T} R_t \quad (52)$$

Como se desea que el punto de inflexión se dé cuando  $T = T_c$ , el valor adecuado de  $R_p$  vale:

$$R_p = \frac{\beta - 2T_c}{\beta + 2T_c} R_{t,c} \quad (53)$$

Donde  $R_{t,c}$  es el valor de la resistencia del termistor en  $T = T_c$ .

Figura 8. Linealización de un termistor mediante una resistencia en paralelo.



La segunda estrategia para linealizar la respuesta de un termistor consiste en utilizar un divisor de tensión donde el termistor se encuentra en serie con otra resistencia ( $R_s$ ), tal como muestra la figura 9. En estas condiciones, tenemos una tensión de salida con el siguiente valor:

$$V_o = V_{cc} \frac{R_s}{R_t + R_s} \quad (54)$$

Para hallar la sensibilidad térmica de  $V_o$ , podemos sustituir [48] en [54] y hacer la primera derivada respecto a la temperatura. Obtendremos:

$$\frac{\partial V_o}{\partial T} = \frac{V_{cc} R_t R_s \beta}{(R_t + R_s)^2 T^2} \quad (55)$$

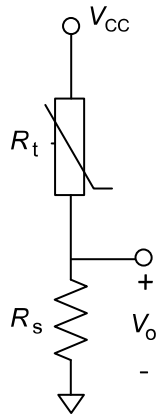
Al igual que se ha procedido en el caso anterior, el valor apropiado de  $R_s$  está forzando que la curva que relaciona  $V_o$  y  $T$  tenga un punto de inflexión cuando  $T = T_c$ . Por lo tanto, hay que hacer la segunda derivada e igualar el resultado a cero:

$$\frac{\partial^2 V_o}{\partial^2 T} = \frac{V_{cc} R_t R_s \beta}{(R_t + R_s)^2 T^3} \underbrace{\left( \frac{2R_t \beta}{(R_t + R_s) T} - \frac{\beta}{T} - 2 \right)}_{\text{Term 1}} = 0 \quad (56)$$

El término 1 de la expresión [56] es el mismo que el de la expresión [51] si se intercambia  $R_s$  por  $R_p$ . Consecuentemente, el valor apropiado de  $R_s$ , para que el punto de inflexión se dé cuando  $T = T_c$ , coincide con aquel obtenido con la primera estrategia, es decir:

$$R_s = \frac{\beta - 2T_c}{\beta + 2T_c} R_{t,c} \quad (57)$$

Figura 9. Linealización de un termistor mediante una resistencia en serie formando un divisor de tensión.



### Ejemplo

El circuito de la figura 9 utiliza un termistor NTC (con  $R_0 = 2.200 \Omega$  y  $B = 4.000 \text{ K}$ ) para medir temperaturas entre  $0^\circ \text{C}$  ( $T_{\min}$ ) y  $50^\circ \text{C}$  ( $T_{\max}$ ). Calcular el valor adecuado de  $R_s$  para linealizar la respuesta del circuito respecto a la temperatura. La tensión de alimentación ( $V_{CC}$ ) vale 5 V.

### Solución

En primer lugar, calculamos la temperatura central ( $T_c$ ) del margen de medida:

$$T_c = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{2} + T_{\min} = 25^\circ \text{C} \rightarrow 298 \text{ K} \quad (58)$$

En segundo lugar, calculamos la resistencia de la NTC a esta temperatura:

$$R_t(T = 298) = 2.200 e^{4.000 \left( \frac{1}{298} - \frac{1}{298} \right)} = 2.200 \Omega \quad (59)$$

Y, por tanto, el valor apropiado de  $R_s$  vale:

$$R_s = \frac{\beta - 2T_c}{\beta + 2T_c} R_{t,c} = \frac{4.000 - 2 \cdot 298}{4.000 + 2 \cdot 298} 2.200 = 1.629 \Omega \quad (60)$$

Puesto que el valor de resistencia obtenido no es comercial, escogeríamos una resistencia de  $1.500 \Omega$ , en el caso de trabajar con la serie E12 (con una tolerancia del 10 %), o una de  $1.600 \Omega$ , en el caso de la serie E24 (con una tolerancia del 5 %).



## Bibliografía

**Franco, S.** (2002). *Design with operational amplifiers and analog integrated circuits*. Nueva York: McGraw-Hill.

**ISO** (1993). *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. Ginebra: International Organization for Standardization.

**Pallàs Areny, R.** (2003). *Sensores y acondicionadores de señal*. Barcelona: Marcombo.

**Pallàs Areny, R.** (2006). *Instrumentos electrónicos básicos*. Barcelona: Marcombo.

**Pérez García, M. A.; Álvarez Antón, J. C.; Campo Rodríguez, J. C.; Ferrero Martín, F. J.; Grillo Ortega, G. J.** (2004). *Instrumentación Electrónica*. Madrid: Thomson.

**Salgado, M. E.; Yuz, J. I.; Rojas, R. A.** (2005). *Análisis de sistemas lineales*. Madrid: Pearson-Prentice Hall.

