Iniciació a les matemàtiques per a l'enginyeria

PID_00270075

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat
Oberta
de Catalunya

Mireia Besalú

Llicenciada en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona (2006) i doctora en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona (2011). Ha sigut professora associada de la Universitat de Pompeu Fabra i professora associada i actualment professora lectora de la Universitat de Barcelona. Professora col·laboradora de la UOC des del curs 2014-15. Centra la seva investigació en l'anàlisi estocàstic i anàlisi de supervivència.

Joana Villalonga

Llicenciada (2006) i Màster en Matemàtica Avançada i Professional (2007) per la Universitat de Barcelona, Diploma en Matemàtiques per a Secundària (2009) per la Universitat Pompeu Fabra i Doctora en Educació (2017) per la Universitat Autònoma de Barcelona. Ha estat professora associada a la Universitat Politècnica de Catalunya i és col·laboradora docent de la Universitat Oberta de Catalunya des del 2011 com a consultora i editora de materials per a l’assignatura d’Iniciació a les matemàtiques per a l’enginyeria. La seva recerca es centra en l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques.

Aquests apunts estan basats en un treball previ de Ramon Masià i Marc Guinjoan.

Primera edició: setembre 2019
© Mireia Besalú, Joana Villalonga
Tots els drets reservats
© d'aquesta edició, FUOC, 2019
Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Realització editorial: FUOC

Cap part d'aquesta publicació, incloent-hi el disseny general i la coberta, no pot ser copiada, reproduïda, emmagatzemada o transmesa de cap manera ni per cap mitjà, tant si és elèctric com químic, mecànic, òptic, de gravació, de fotocòpia o per altres mètodes, sense l'autorització prèvia per escrit dels titulars del copyright.

Índex

Introducció

Utilitzarem aquestes caixetes per a explicar algun fet històric relacionat amb les matemàtiques. Per exemple, el text matemàtic més antic descobert fins ara és el papir de Moscou, un manuscrit datat entre el 2000 i el 1800 aC.

Les matemàtiques són una de les eines imprescindibles per a cursar qualsevol grau científic. De fet, tant important és el contingut matemàtic com la manera de treballar-la en cada un dels camps en què s'aplica. Així, doncs, es fa necessari comprendre'n la metodologia i conèixer-ne els continguts bàsics a l'hora d'afrontar qualsevol assignatura matemàtica d'un determinat grau.

Aquest tipus de caixetes responen algunes preguntes clau dels diferents temes del curs. Per exemple, sabies que en les matemàtiques hi un símbol per a *afirmar l'existència* i un altre per a denotar l'expressió *per a qualsevol*? Doncs sí, normalment s'utilitza el símbol $\exists$ per a dir que un valor, funció... existeix i el símbol $\forall$ per a dir que és cert per a qualsevol valor, funció...

Les matemàtiques construeixen un llenguatge propi que permet definir rigorosament els conceptes i resultats que es presenten. D'aquesta manera, es poden expressar molts problemes d'una manera senzilla que en facilita no tan sols la resolució sinó també la comprensió. Conèixer aquest llenguatge es fa imprescindible per a poder conèixer tècniques i conceptes matemàtics avançats.

En aquest curs es proporcionen procediments i conceptes bàsics d'àlgebra lineal i anàlisi matemàtica (moltes vegades ja tractats a secundaria i batxillerat) que es necessiten dominar abans d'afrontar els problemes habituals que ha de resoldre diàriament un enginyer. Aquests continguts es presentaran introduint tota la terminologia matemàtica necessària per tal d'anar familiaritzant-nos amb la notació matemàtica.

Utilitzarem aquest tipus de caixetes per a remarcar aspectes o conceptes matemàtics rellevants o clau. Per exemple: esperem que gaudeixis del curs i aprenguis molt!

Al final de cada tema s'inclou un resum, una llista d'exercicis resolts pas a pas i una llista d'exercicis per a practicar amb les solucions. Els exemples que hi ha en l'explicació de cada tema els trobareu intercalats en l'explicació dins de zones de color gris.

Objectius

Per a aquesta assignatura, es plantegen quatre objectius generals:

(a) Adquirir la terminologia, els conceptes i els procediments fonamentals de l'àlgebra i l'anàlisi matemàtica.

(b) Possibilitar l'ús pràctic dels continguts matemàtics estudiats.

(c) Familiaritzar-se amb el llenguatge matemàtic i el raonament abstracte, dos trets característics de les matemàtiques.

(d) Saber aplicar els conceptes i procediments estudiats en el plantejament i anàlisi de problemes pràctics.

Quant als continguts matemàtics que es pretenen treballar en aquest curs introductori, els objectius a assolir són:

1. Conèixer la teoria bàsica dels conjunts de nombres reals.

2. Resoldre equacions i inequacions.

3. Aprendre a manipular polinomis.

4. Conèixer i manipular matrius i calcular determinants de matrius.

5. Resoldre sistemes d'equacions lineals de dues i tres variables, en particular pel mètode de Gauss.

6. Comprendre el concepte de funció real de variable real.

7. Conèixer les característiques de les funcions elementals: polinòmiques, trigonomètriques (sinus, cosinus, tangent), exponencials i logarítmiques.

8. Comprendre el concepte de límit, les seves propietats i la seva aplicació en l'estudi de la continuïtat de funcions.

9. Comprendre el concepte de derivada i la seva interpretació geomètrica. Conèixer les seves propietats i saber calcular derivades a partir de les seves regles de càlcul.

10. Calcular primitives de les principals famílies de funcions.

1. Nombres

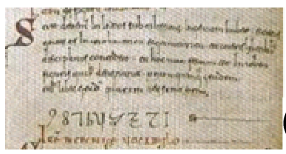
Índex

1.1. Nombres naturals

1.1.1. Definició

Els **nombres naturals** són els que ens permeten comptar objectes. La llista dels nombres naturals s'inicia amb l'1 i no té fi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Fixem-nos que aquesta llista no inclou el 0.

Des de fa alguns segles els nombres naturals se solen representar amb les xifres decimals del 0 al 9. Aquestes xifres són d'origen hindú i es van introduir a Europa mitjançant textos àrabs. Un dels motius determinants per a usar aquestes xifres en lloc d'altres representacions és la facilitat per a calcular les operacions bàsiques que ofereixen: suma, resta, multiplicació i divisió.



Fragment d'una pàgina del *Codex Virgilanus* (s.X) on es poden observar les nou xifres en ordre invers.

1.1.2. Operacions

Suma És una operació que es representa amb el signe + (es llegeix "més") interposat entre els dos nombres que se sumen. Per a indicar el resultat, s'afegeix el signe = i, finalment, el resultat de la suma. Per exemple, $12 + 19 = 31$.
Els nombres que se sumen es denominen **sumands**, i el resultat de l'operació rep el nom de **suma**. En l'exemple, el 12 i el 19 són els sumands, i el 31 és la suma.

Resta (o diferència o subtracció) És una operació que es representa amb el signe − (es llegeix "menys") interposat entre els dos nombres que es volen restar. Per exemple, $14 - 6 = 8$.
El nombre anterior al signe − es denomina **minuend**, el nombre que segueix el signe − es denomina **subtrahend** i el resultat de la resta es denomina **diferència**. En l'exemple, el 14 és el minuend, el 6 és el subtrahend i el 8 és la diferència. La suma i la resta són operacions oposades. Aquest fet permet afirmar que en una resta la diferència més el subtrahend és igual al minuend. En l'exemple veiem que $8 + 6 = 14$.

Multiplicació (o producte) És una operació que es basa en la suma: la suma de diversos sumands iguals es transforma en una multiplicació del sumand pel el nombre de cops que aquest se suma. El signe que es fa servir és $\cdot$ o bé $\times$ (es llegeix "per"). Nosaltres optarem pel primer dels dos signes. Per exemple: $6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 5 \cdot 6 = 30$ és a dir, la suma de 5 vegades el 6 és igual a *5 per 6*.
Els nombres multiplicats es denominen **factors**, o el resultat de la multiplicació es denomina **producte**. En l'exemple, els factors són 5 i 6, mentre que el producte és 30.

Divisió El signe que es fa servir és : o bé /. Aquest signe es llegeix "entre".
El nombre dividit es denomina **dividend**, el nombre que divideix es denomina **divisor** i el resultat es denomina **quocient**. Així, per exemple, en la divisió $15 : 3 = 5$, el 15 es denomina dividend, el 3 divisor, i el 5 quocient.
Aquesta operació és oposada al producte, i això ens permet trobar el resultat de qualsevol divisió. Per exemple, per a conèixer el quocient de 72 entre 8, s'ha de trobar el nombre que, multiplicat pel divisor, proporciona el dividend, és a dir: $8 \cdot ? = 72$. Evidentment, el nombre buscat és 9, perquè $8 \cdot 9 = 72$. Així, doncs, $72 : 8 = 9$.

Observacions per a la resta i divisió. Hem de tenir en compte que la resta i la divisió de nombres naturals no sempre es poden fer per dos nombres naturals qualssevol.

El primer problema el trobem quan volem restar d'un nombre un altre de més gran o igual. En aquest cas no la resta pot donar com a resultat un nombre natural: hauríem de definir un altre tipus de nombres, els nombres enters (tema que veurem a continuació), perquè aquesta operació fos possible.

De manera similar, el quocient entre dos nombres naturals tampoc no és sempre un nombre natural. Per exemple, $13 : 5$ no pot ser igual a un nombre natural perquè no hi ha cap nombre que multiplicat per 5 doni 13. En aquest cas, es pot descompondre la divisió anterior de la manera següent: $13 = 5 \cdot 2 + 3$, on el 3, denominat **residu**, és menor que el divisor 5. Per tant, la regla general per a la divisió s'enuncia així:

$$\text{dividend} = \text{divisor} \cdot \text{quocient} + \text{residu (forma abreujada: D} = \text{d} \cdot \text{q} + \text{r)}$$

on D és el dividend, d el divisor, c el quocient, i r el residu. Sempre que el residu sigui 0, es diu que la divisió és **exacta**.

Ordre d'operacions. De vegades se'ns presenta un grup d'operacions amb nombres naturals, que es denomina **expressió numèrica**. Per exemple:

$$4 \cdot 5 - (5 \cdot 3 + 8 : 2)$$

Per a trobar el resultat d'aquesta expressió, s'ha de seguir l'ordre d'operacions següent:

1) Operacions que es troben a l'interior dels parèntesis: del més extern al més intern.

2) Multiplicacions i divisions: les divisions sempre abans que les multiplicacions.

3) Sumes i restes: primer les restes i després les sumes.

L'ordre de les operacions és: primer els parèntesis, a continuació les divisions i les multiplicacions, i, finalment, les restes i sumes.

Exemple. Ordre de les operacions.

Resolguem l'exemple proposat

$4 \cdot 5 - (5 \cdot 3 + \boxed{8 : 2}) = 4 \cdot 5 - (\boxed{5 \cdot 3} + \boxed{4}) = 4 \cdot 5 - \boxed{(\boxed{15} + 4)} = \boxed{4 \cdot 5} - \boxed{19} = \boxed{20} - 19 = 1$

Observem la importància dels parèntesis amb el mateix exemple sense parèntesis:

$$4 \cdot 5 - 5 \cdot 3 + \boxed{8 : 2} = \boxed{4 \cdot 5} - \boxed{5 \cdot 3} + \boxed{4} = \boxed{20} - \boxed{15} + 4 = 9$$

1.1.3. Múltiples i divisors

Un nombre és **múltiple** d'un altre si es pot obtenir multiplicant aquest per algun altre nombre natural.

Quan una divisió entre dos nombres naturals és exacta, per exemple, $15 : 3 = 5$, es diu que 15 és **divisible** entre 3 (o per 3). En aquest cas, també es diu que 3 és un **divisor** de 15. Una notació habitual en aquesta situació és $3|15$.

Per tant, es pot observar que els conceptes de múltiple, divisor i divisibilitat estan lligats estretament. Si un nombre és múltiple d'un altre, també es pot afirmar que el primer és divisible pel segon. De la mateixa manera, el segon ha de ser un divisor del primer. És a dir, si a és múltiple de b, llavors b és divisor de a i a és divisible per b.

Exemple. Múltiples i divisors.

36 és un múltiple de 2, 3, 6, 12 i 18. I, per tant, podem dir que 2, 3, 6, 12 i 18 són divisors de 36. A més, 36 és divisible per 2, 3, 6, 12 i 18.

Propietats

- Qualsevol nombre natural és divisor (i múltiple) d'ell mateix: $a|a$ per qualsevol nombre a. Aquesta és la propietat **reflexiva**.
- Si un nombre és divisor d'un altre i aquest és divisor d'un tercer, llavors el primer nombre també és divisor del tercer (passa el mateix en el cas de ser múltiple), és a dir, si $a|b$ i $b|c$ aleshores tindrem segur que $a|c$. Aquesta és la propietat **transitiva**.
- Si un nombre és divisor d'un altre i aquest ho és del primer, llavors ambdós nombres són el mateix nombre (el mateix es pot dir en el cas de ser múltiple), és a dir, si $a|b$ i $b|a$, aleshores, per força, $a = b$. Aquesta és la propietat **antisimètrica**.

Criteris de divisibilitat. El concepte de divisibilitat ens permet establir alguns criteris per a detectar si un nombre és divisible per un altre sense haver de calcular la divisió. Alguns d'aquests criteris són els següents:

Divisible per	Criteri de divisibilitat	Exemples
2	L'última xifra és parell.	54**8** és divisible per 2, ja que 8 ho és.
3	La suma de les seves xifres és divisible per 3.	18.231 és divisible per 3, ja que $1+8+2+3+1=15$ ho és.
4	El nombre format per les dues últimes xifres és divisible per 4.	8**28** és divisible per 4, ja que 28 ho és.
5	L'última xifra és 0 o 5.	32**5** és divisible per 5, ja que 5 ho és.
9	La suma de les seves xifres és divisible per 9.	94.833 és divisible per 9, ja que $9+4+8+3+3=27$ ho és.
10	L'última xifra és 0.	100 és divisible per 10, ja que acaba en 0.
11	La diferència entre la suma de les xifres de les posicions parells i la suma de les xifres de les posicions senars és múltiple d'11.	12.111 és divisible per 11, ja que la diferència entre $1+1+1=3$ i $2+1=3$ és 0 ho és.

Nombres primers. Un nombre natural es diu que és un **nombre primer** quan els únics divisors que té són el mateix nombre i l'1. En contrapartida, anomenem

nombres compostos els que no són primers. Observem que 1 és un nombre que no és primer ni compost.

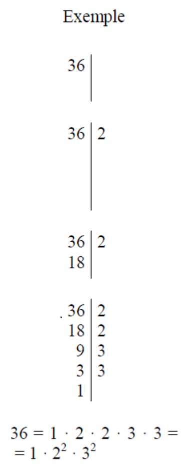
Procediment Per a saber si un nombre és primer, s'ha de dividir entre tots i cadascun dels nombres primers menors que el nombre en qüestió, començant pel 2. Si cap d'aquests nombres no és un divisor seu, llavors el nombre és primer.

El garbell o sedàs d'Eratòstenes és un algoritme que serveix per a buscar tots els nombres primers fins a un nombre determinat N. Aquest mètode consisteix a escriure tots els nombres naturals menors que N i, començant amb el primer nombre primer, esborrar tots els seus múltiples. Es continuen esborrant tots els múltiples del segon nombre primer fins a $\sqrt{N}$.

Factorització. Factoritzar un nombre és descompondre'l en factors primers. Això vol dir expressar-lo com a producte dels seus divisors primers, que podem detectar amb els criteris de divisibilitat.

Passos per a la factorització

1) Dividim el nostre valor pel nombre primer més petit que en sigui divisor. Aquest serà el nombre primer factor.
2) Fem la divisió i ens quedem amb el quocient. Repetim el procés ara amb el quocient tantes vegades com siguin necessàries fins a obtenir l'1 de quocient. Ja tenim tots els factors primers.
3) Comprovem que el nombre inicial és igual al producte de tots els primers que hem obtingut.



Exemple de factorització

Màxim comú divisor (MCD). El màxim comú divisor de dos (o més) nombres naturals és el nombre que compleix aquests dos requisits:

- És un divisor comú d'ambdós (o tots els) nombres.
- És el més gran d'aquests divisors.

Un dels mètodes per a trobar el MCD entre dos nombres consta d'aquests dos passos:

1) Es descomponen els dos (o més) nombres en factors primers.
2) Es multipliquen els nombres primers comuns a ambdues (o totes) descomposicions fent servir el de menor exponent, i el resultat és l'MCD.

Exemple. Càlcul dem màxim comú divisor.
Calculem el màxim comú divisor de 36 i 30. Per a fer-ho, podem escriure una llista de tots els divisors de 36 i una altra amb els de 30:

divisors de 36:	1	2	3	4	6	9	12	18	36
divisors de 30:	1	2	3	5	6	10	15	30	

Podem comprovar que de tots els divisors comuns (en lila) el més gran és el 6.
Per tant, $\mathrm{MCD}(30,36) = 6$.
Una altra manera de fer-ho és descompondre el dos nombres en factors primers: $36 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2$, mentre que $30 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Els primers comuns són 1, 2 i 3 i el seu exponent ha de ser 1, perquè és el menor. Per tant, $\mathrm{MCD}(36,30) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Amb la definició de MCD, diem que dos nombres són **coprimers** o **primers entre ells** si el seu MCD val 1 (o si no tenen factors primers comuns).

Mínim comú múltiple (MCM). El mínim comú múltiple de dos (o més) nombres és un nombre que:

- És un múltiple de cadascun d'aquests dos (o més) nombres.
- És el menor d'aquests múltiples.

Un mètode per a trobar l'MCM de dos (o més) nombres consisteix a fer el següent:

1) Es descomponen els dos (o més) nombres en factors primers.
2) Es multipliquen els nombres primers de les descomposicions que siguin comuns als dos (o més) nombres utilitzant els d'exponent més gran, i també els que no són comuns amb l'exponent corresponent.

Exemple: càlcul del mínim comú múltiple.
Calculem el mínim comú múltiple dels nombres 4 i 10. Comencem escrivint la llista de múltiples d'aquests dos nombres:

múltiples de 4:	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
múltiples de 10:	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Hem destacat (en verd) el múltiples comuns d'ambdós. Veiem que el menor d'aquests múltiples comuns és el 20.

Una altra manera de fer-ho és descompondre els nombres 4 i 10 en nombres primers: $4 = 1 \cdot 2^2$ i $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5$. Veiem que els primers comuns són l'1 i el 2, aquest últim elevat al quadrat perquè és el d'exponent major. Pel que fa als primers no comuns, només hi ha el 5. Així, doncs, $\mathrm{mcm}(4, 10) = 1 \cdot 2^2 \cdot 5 = 20$.

1.2. Nombres enters

1.2.1. Definició i exemples

Els símbols + i - van aparèixer impresos per primera vegada en *Aritmètica Mercantil*, de Johannes Widmann, publicada a Leipzig el 1489. L'autor va utilitzar aquests símbols per a referir-se a guanys i pèrdues en problemes comercials.

Els **nombres enters** permeten comptar, entre moltes altres coses, tant allò que es té com allò que es deu. Més genèricament, els nombres enters permeten representar les situacions en les quals els objectes comptats es poden dividir en dos grups, un de format pels objectes que es compten a partir d'un punt en endavant i l'altre format pels que es compten a partir d'aquest mateix punt cap enrere. Així, podem classificar els nombres enters en tres grups:

- **Enters positius.** Són els que permeten comptar allò que es té. Compten a partir d'un punt en endavant. Es poden associar als nombres naturals. De fet, es poden escriure tal com s'escriuen els nombres naturals o bé precedits del signe +.

- **Enters negatius.** Són els que permeten comptar el que es deu. Compten a partir d'un punt endarrere. Els enters negatius s'escriuen utilitzant un nombre natural precedit d'un signe $-$. Així, un enter negatiu podria ser -6, que es llegeix "menys 6".
- El **zero**. És un enter ni positiu ni negatiu.

Signes de desigualtat. Donats dos nombres enters diferents qualssevol, un d'ells sempre és més gran que l'altre. Aquest fet tan senzill es pot expressar mitjançant els signes de desigualtat ($<$ i $>$):

- El signe $>$ es llegeix "major que", i indica que el nombre que està a l'esquerra del signe és més gran que el que és a la dreta.

> L'expressió $6 > 4$ indica que el 6 és més gran que el 4.

- El signe $<$ es llegeix "menor que" i indica que el que és a l'esquerra del signe és més petit que el que és a la dreta.

> L'expressió $1 < 17$ indica que l'1 és menor que el 17.

Hem de tenir en compte que es poden encadenar diversos signes $<$ o $>$ en la mateixa expressió. Ara bé, només poden aparèixer signes $<$ o $>$ del mateix tipus. Per exemple, és correcte escriure $5 < 7 < 8$. En canvi, és incorrecte escriure $8 > 1 < 2$ (encara que ambdues parts de l'expressió siguin correctes per separat).

Amb aquesta eina, es poden ordenar tots els nombres enters tenint en compte que:

- Qualsevol nombre positiu sempre és més gran que qualsevol nombre negatiu.

> +3€ és més gran que -9€; és a dir, es tenen més diners tenint 3€ que devent 9€. Així, doncs, $+3 > -9$ (o bé, $-9 < +3$).

- El 0 és més gran que qualsevol nombre negatiu i menor que qualsevol nombre positiu.

> No tenir cap euro (0€) és tenir més que deure'n trenta (-30€) però és tenir menys que quatre euros (+4€). Així, doncs, $-30 < 0 < 4$ (o bé, $4 > 0 > -30$).

- Entre dos enters negatius, el més gran és aquell que, sense signe (el nombre sense signe l'anomenem **valor absolut**), és el menor.

Valor Absolut. El valor absolut d'un nombre enter és igual al mateix nombre enter sense el seu signe. És a dir, per a trobar el valor absolut d'un nombre enter, n'hi ha prou amb treure-li el signe i convertir-lo en un nombre natural. Així, per exemple, el valor absolut del +6 és igual a 6, el valor absolut de −23 és igual a 23 i el valor absolut de 0 és 0.

Per a expressar el valor absolut d'un nombre, es fan servir dos petits segments verticals col·locats a banda i banda del nombre. Així, el valor absolut de +6 és $|+6| = 6$, el valor absolut de −23 $|-23| = 23$ i el valor absolut de 0 és $|0| = 0$.

1.2.2. Operacions

Les operacions entre nombres enters són les mateixes que entre els nombres naturals i compleixen, a més, les mateixes propietats. Ara bé, tenen certes regles de càlcul específiques per la distinció que hi ha entre enters positius i enters negatius. En tot cas, la denominació d'operacions i elements que formen part de cada operació es manté.

Suma Les regles per a sumar nombres enters són les següents:

- Per a sumar dos nombres que tenen el mateix signe, se sumen els seus valors absoluts i al resultat s'hi afegeix el signe comú.

$$+17 + (+12) = +29$$

$$-10 + (-6) = -16$$

- Per a sumar dos nombres amb signe diferent, s'han de restar els seus valors absoluts, el més gran del més petit. Finalment, s'ha d'afegir el signe del nombre que té el valor absolut més gran.

$+13 + (-11) = +2$ (el valor absolut de $+13$ és més gran que el valor absolut de -11, 11; per tant, el signe és $+$)
$+6 + (-11) = -5$ (el valor absolut de -11 és més gran que el valor absolut de $+6$; per tant, el signe és $-$)

Resta La diferència de dos nombres enters és igual a la suma del minuend amb l'oposat del subtrahend.

Sempre signifiquen el mateix els signes + i - ? Els signes + i - poden expressar tant una operació com el signe d'un nombre (positiu o negatiu). Cada vegada que es detecta un signe d'aquest tipus en una expressió numèrica, s'ha de distingir quin és el seu sentit.

$$-(+3) = 14 + (-3) = 11$$

$$-12 - (+16) = -12 + (-16) = -28$$

Un **exemple** una mica més llarg amb sumes i restes és:

$$-5 + (-8) - (-13) + (-2) - (+4) + (+6) = -5 - 8 + 13 - 2 - 4 + 6 = 0$$

Una manera ràpida d'obtenir el resultat final és:

- S'eliminen tots els parèntesis (substituïm per un + si tenim dos signes consecutius iguals i per un - si els tenim diferents).
- Se sumen tots els nombres positius; per altra banda, se sumen tots els negatius.
- Es fa la suma d'aquests dos valors tenint en compte que tenen signes diferents.

Multiplicació Per a fer una multiplicació amb dos nombres enters, en primer lloc s'obté el producte dels seus valors absoluts i després s'estableix el signe del resultat. Amb aquesta finalitat, només cal recordar la regla de signes següent:

- Si ambdós nombres tenen el mateix signe, el seu producte és positiu.
- Si els dos nombres tenen signe diferent, el seu producte és negatiu.

Hem de tenir en compte que dins d'una expressió numèrica no hi pot haver dos signes consecutius. Si hi fossin, seria convenient usar parèntesis per a obtenir una expressió correcta.

Divisió Les mateixes regles del producte són vàlides per a la divisió canviant el signe de multiplicar pel de dividir.

En cas que la divisió sigui exacta, es diu, igual que amb els nombres naturals, que el dividend és un múltiple del divisor. Les regles i propietats de múltiples i divisors són també les mateixes utilitzant el valor absolut dels nombres.

El -3 és un divisor del 12 $(-3|12)$ perquè $|12| : |-3| = 4$ és una divisió exacta.

Les operacions i l'ordre. És important conèixer la influència que exerceixen les operacions en l'ordre dels nombres enters. En altres paraules, donats dos nombres enters qualssevol, com influeix l'operació (suma, resta, multiplicació o divisió) amb un altre nombre en la seva ordenació? Es distingeixen dos casos:

Com afecten les operacions a l'ordre dels nombres enters? En sumar o restar un mateix nombre a dos nombres enters, els resultats mantenen la mateixa relació d'ordre que els dos nombres originals; en canvi, en multiplicar o dividir dos nombres per un mateix nombre enter, els resultats mantenen la mateixa relació d'ordre només si aquest últim nombre és positiu; si no, es gira la relació.

Suma i resta Si se suma o resta un mateix nombre en els dos costats d'una desigualtat, la desigualtat es manté. També es pot dir que la suma i la resta mantenen l'ordre dels enters.

Exemple. L'ordre i la suma i resta.
Tenim $-4 < 8$. Sumant 3 a banda i banda de la desigualtat, tenim $-4+3 < 8+3$, d'on resulta $-1 < 11$, per la qual cosa es manté la desigualtat. Així, doncs, els resultats mantenen el mateix ordre que els nombres inicials.
Si ara restem 4 a banda i banda de la desigualtat, $-4-4 < 8-4$, obtenim $-8 < 4$ amb la qual cosa també es manté la desigualtat.

Multiplicació i divisió En canvi, quan es multipliquen o es divideixen ambdós costats d'una desigualtat per un mateix nombre, no passa sempre el mateix.

- Es manté el mateix ordre si el nombre pel qual es multipliquen o divideixen és positiu.
- S'inverteix l'ordre si el nombre pel qual es multipliquen o divideixen és negatiu.

Exemple. L'ordre i la multiplicació i divisió.
Multipliquem per +3 a banda i banda d'aquesta desigualtat:

$$-5 < 3$$

Aleshores el resultat és $-5 \cdot 3 < 3 \cdot 3$, és a dir, $-15 < 9$. L'ordre de resultat continua essent el mateix.
En canvi, si es multiplica per un nombre negatiu, per exemple, -4, el resultat és$-5 \cdot (-4) > 3 \cdot (-4)$, és a dir, $20 > -12$.
En aquest cas, l'ordre és exactament el contrari, com es pot observar, ja que s'ha canviat el signe $<$ pel signe $>$.
Ara provem-ho amb la divisió: $-15 < 30$. Si es divideixen ambdós costats entre 5, $-15 : 5 < 30 : 5$ s'obté $-3 < 6$, en canvi, si a $-36 < -30$ es divideixen ambdós costats entre -2 $-36 : (-2) > -30 : (-2)$ s'obté $18 > 15$, com es podia preveure.

1.3. Nombres racionals

1.3.1. Nombres fraccionaris

Sempre que se sumen, resten o multipliquen dos nombres enters, el resultat és un nombre enter. Però, en canvi, això no succeeix quan els nombres es divideixen.

Si dividim 12 entre 4, 12/4, el resultat és un nombre enter, el 3.
Si dividim 1 entre 2, 1/2, el resultat no és un nombre enter.

En aquest últim cas sorgeix la qüestió del significat d'aquesta última expressió, 1/2, i d'altres de similars.

Aquest tipus d'expressions conformen els **nombres fraccionaris** i es poden associar, per exemple, al repartiment d'objectes entre diverses persones.

Exemple. Nombres fraccionaris i la repartició d'objectes.
Si es volen repartir 8 pastissos iguals entre 2 persones, cadascuna d'elles obtindrà 4 pastissos, ja que $8 : 2 = 4$.
Ara bé, si es vol repartir 1 pastís entre 2 persones, no hi ha cap nombre enter que pugui representar el resultat d'aquesta operació. En aquest cas, a cada persona no li correspon més que una part o fracció del pastís, en concret, la meitat del pastís.
El nombre que expressa aquest repartiment és simplement la forma de la divisió amb la barra, és a dir, 1/2. Aquest nombre és un nombre fraccionari.

Un **nombre fraccionari** (fracció o trencat) s'expressa en forma de quocient de nombres enters amb una barra entre ambdós nombres, que pot ser horitzontal o inclinada. Un exemple de fracció pot ser $\frac{12}{5}$ o també 12/5. En aquest cas, el 5 es denomina **denominador** (indica quantes parts es consideren) i el 12 **numerador** (marca en quantes parts hem de partir la unitat). Tal com es pot observar, doncs, els elements d'un nombre fraccionari es denominen de manera específica i diferenciada de la denominació dels elements d'una divisió entera.

Qualsevol nombre enter es pot convertir en un nombre fraccionari. Amb aquesta finalitat, la fracció ha de tenir el numerador igual al nombre enter en qüestió i el denominador ha de ser 1. Així, doncs, per exemple, $8 = \frac{8}{1}$. També, $-3 = \frac{-3}{1}$. Aquest fet ens mostra com els nombres enters són un subconjunt dels nombres fraccionaris o, dit d'una altra manera, qualsevol nombre enter és també un nombre fraccionari.

Com llegim una fracció? Amb el nom del nombre del numerador, seguit del plural del nombre al denominador (si el numerador és 1, s'utilitza el singular). Així, per exemple, 12/5 es llegeix "dotze cinquens", 1/7 és "un setè", 3/11 és "tres onzens", etc. Ara bé, de vegades, si el denominador és molt gran, s'utilitza simplement l'expressió "partit per", o bé, "entre", entre el numerador i el denominador. Així, 12/25 és "dotze partit per vint-i-cinc" o "dotze entre vint-i-cinc".

Signe. Tant el numerador com el denominador d'una fracció poden ser positius o negatius. Utilitzant la regla dels signes per a dividir nombres enters, es pot deduir el signe final d'una fracció. Una fracció és positiva si numerador i denominador tenen el mateix signe, i una fracció és negativa si numerador i denominador tenen signe diferent.

$\frac{+4}{+7} = \frac{4}{7} \qquad \frac{-6}{-11} = \frac{6}{11}$ són fraccions positives

$\frac{-4}{+7} = \frac{-4}{7} \qquad \frac{+6}{-11} = \frac{-6}{11}$ són fraccions negatives

Normalment, el signe de la fracció s'anteposa al numerador, mentre que el denominador no va precedit de cap signe, però també es pot situar avantposat a la línia fraccionària, a la mateixa altura:

$$\frac{-4}{7} = -\frac{4}{7}$$

Fraccions equivalents. Resulta fàcil observar que hi ha fraccions diferents que representen el mateix nombre. Per exemple, la fracció $\frac{1}{2}$ representa el mateix valor que la fracció $\frac{2}{4}$. La comprovació d'aquest fet és que si es reparteix un pastís equitativament entre dues persones, a cadascuna li correspondrà la meitat del pastís, és a dir, $\frac{1}{2}$. Si es reparteixen equitativament 2 pastissos entre 4 persones, a cadascuna li correspondrà, evidentment, la mateixa quantitat de pastís que en el cas anterior; ara bé, en aquest cas, la seva porció és igual a $\frac{2}{4}$. Queda clar, doncs, que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Quan dues fraccions expressen el mateix nombre, es diu que són **fraccions equivalents**.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$$

són fraccions equivalents, és a dir, totes expressen el mateix valor.

La manera més senzilla de trobar una fracció equivalent a una altra consisteix a multiplicar tant el numerador com el denominador d'aquesta per un mateix nombre. Per exemple, per a construir una fracció equivalent a $\frac{5}{11}$, es pot multiplicar numerador i denominador per 3, amb la qual cosa s'obté $\frac{15}{33}$; d'aquesta manera, es pot assegurar que ambdues fraccions són equivalents, és a dir, $\frac{5}{11} = \frac{15}{33}$. Evidentment, si es divideixen el numerador i el denominador d'una fracció pel mateix nombre, també s'obté una fracció equivalent.

Hi ha una prova senzilla que permet saber quan dues fraccions són equivalents. Es tracta de multiplicar el numerador d'una pel denominador de l'altra, i viceversa. De vegades, aquest procés es denomina, per a abreujar, **multiplicar en creu**:

Exemple. Comprovació de fraccions equivalents.

$$\frac{4}{10} \times \frac{6}{15} \begin{array}{l} \longrightarrow 10 \cdot 6 = 60 \\ \longrightarrow 4 \cdot 15 = 60 \end{array}$$

Per tant, $\frac{4}{10}$ i $\frac{6}{15}$ són fraccions equivalents, i en canvi

$$\frac{2}{6} \times \frac{7}{11} \begin{array}{l} \longrightarrow 6 \cdot 7 = 42 \\ \longrightarrow 2 \cdot 11 = 22 \end{array}$$

no són fraccions equivalents perquè $42 \neq 22$ (el símbol $\neq$ és el signe de desigualtat, i se situa entre dues expressions amb resultats diferents.)

Fracció irreductible. El fet que moltes fraccions puguin representar el mateix nombre en complica molt la manipulació. Per a evitar-ho, se sol destacar una fracció del conjunt de totes les fraccions que són equivalents entre elles, la denominada **fracció irreductible**. Una fracció irreductible es caracteritza pel fet que numerador i denominador són primers entre ells, això és, són nombres l'MCD dels quals és 1.

$\frac{8}{16}$ no és una fracció irreductible, ja que el $\text{MCD}(8, 16) = 8$. En canvi, $\frac{4}{9}$ és una fracció irreductible perquè el $\text{MCD}(4, 9) = 1$.

El procés de cerca de la fracció irreductible equivalent a una altra es denomina **simplificació** de la fracció. Donada una fracció qualsevol, sempre es pot trobar una fracció irreductible que en sigui equivalent. El mètode més senzill per a fer-ho consisteix a dividir el numerador i el denominador entre el seu MCD.

No és possible que dues fraccions irreductibles diferents siguin equivalents. Aquest fet permet seleccionar, d'entre totes les fraccions equivalents entre elles, la fracció irreductible com a representant de totes.

Per a convertir la fracció $\frac{18}{12}$ en una fracció irreductible, cal dividir numerador i denominador entre el $\text{MCD}(18, 12) = 6$. La fracció resultant és

$$\frac{18 : 6}{12 : 6} = \frac{3}{2}.$$

1.3.2. Definició

Un **nombre racional** és aquell que es pot expressar com una fracció, o com qualsevol fracció de les equivalents a aquesta. Un mateix nombre racional es pot expressar de diferents maneres (fraccions).

El nombre racional que s'expressa com la fracció irreductible $\frac{1}{3}$ també es pot expressar amb la fracció $\frac{2}{6}$ o amb la fracció $\frac{7}{21}$. En aquests casos, les fraccions són diferents, però el nombre racional representat és el mateix.

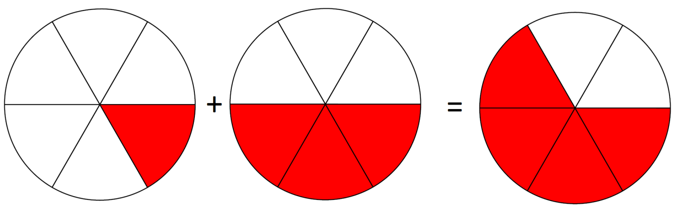
La millor manera d'expressar un nombre racional és mitjançant una fracció irreductible perquè aquesta sempre serà la més senzilla. En l'exemple, la millor manera de representar el nombre racional anterior és $\frac{1}{3}$, perquè és una fracció irreductible.

De vegades, els termes *nombre racional*, *nombre fraccionari*, *fracció* o *trencat* se solen usar indistintament, encara que siguin conceptes lleugerament diferents, per a indicar el concepte de nombre racional tal com s'acaba de definir. Se solen usar aquests últims, *fracció* i *trencat* amb preferència, ja que són els més breus.

1.3.3. Operacions

Suma és una operació que expressa la reunió de les parts expressades pels nombres sumats, i estableix un nombre fraccionari que expressa aquesta reunió. Per a calcular-ho, diferenciem dos casos, segons si el denominador és comú o no.

Fraccions amb el mateix denominador La suma de $\frac{1}{6}$ amb $\frac{3}{6}$ es pot representar amb la reunió d'aquests dos fragments acolorits:



És fàcil determinar que el resultat de la suma és $\frac{4}{6}$. Aquest fet es pot generalitzar de la manera següent: la suma de dos nombres amb el mateix denominador és igual a una fracció el numerador de la qual és la suma de numeradors i el denominador de la qual és el mateix denominador comú. En l'exemple:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{1+3}{6} = \frac{4}{6}.$$

Fraccions amb diferent denominador En aquest cas s'ha de substituir cadascuna per una altra fracció equivalent amb el mateix denominador. A continuació, se sumen les dues fraccions resultats tal com s'ha explicat en l'apartat anterior.

Exemple. Suma de fraccions.

Per a fer la suma $\frac{3}{18}+\frac{5}{12}$, s'ha de buscar una fracció equivalent a cadascuna que tingui el mateix denominador:

$$\frac{3}{18}=\frac{6}{36}=\frac{9}{54}=\ldots$$

$$\frac{5}{12}=\frac{10}{24}=\frac{15}{36}=\frac{20}{48}=\ldots$$

en aquest cas trobem que les fraccions $\frac{6}{36}$ i $\frac{15}{36}$ comparteixen el denominador. D'aquesta manera, la suma es pot fer fàcilment així:

$$\frac{3}{18}+\frac{5}{12}=\frac{6}{36}+\frac{15}{36}=\frac{21}{36}$$

Ara bé, aquest mètode pot arribar a ser realment costós perquè es podria trigar molt de temps a trobar dues fraccions amb el mateix denominador.

Hi ha dos mètodes que permeten fer el mateix de manera més ràpida:

1) **La multiplicació de denominadors.** Consisteix a multiplicar el numerador i el denominador de les dues fraccions que se sumen pel denominador de l'altra. Així s'aconsegueix que les fraccions resultants tinguin el mateix denominador i siguin equivalents a les originals.
En l'exemple anterior,

$$\frac{3}{18}+\frac{5}{12}=\frac{3\cdot 12}{18\cdot 12}+\frac{5\cdot 18}{12\cdot 18}=\frac{36}{216}+\frac{90}{216}=\frac{126}{216}$$

2) **El càlcul de l'MCM dels denominadors.** Aquest mètode es basa en el càlcul de l'MCM dels denominadors per a trobar el nou denominador comú. Els passos a seguir són:

a) Calcular l'MCM dels denominadors involucrats en la suma. Aquest resultat serà el denominador comú. En l'exemple, $\text{MCM}(12,18)=36$.

b) Multiplicar el numerador de cada fracció pel resultat de dividir l'MCM entre el denominador de la fracció respectiva. Així, en l'exemple, el numerador de la fracció $\frac{3}{18}$, que és 3, s'ha de multiplicar pel resultat de $36:18=2$; de la mateixa manera, el numerador de la fracció $\frac{5}{12}$, que és 5, s'ha de multiplicar pel resultat de $36:12=3$. Les fraccions resultants són equivalents a les anteriors i tenen el denominador comú:

$$\frac{3}{18}=\frac{6}{36}\qquad\frac{5}{12}=\frac{15}{36}$$

c) Finalment, cal sumar les fraccions amb el mateix denominador trobades en l'apartat anterior. En l'exemple,

$$\frac{3}{18}+\frac{5}{12}=\frac{6}{36}+\frac{15}{36}=\frac{21}{36}$$

Es pot observar que en general el primer mètode té el desavantatge d'oferir resultats amb nombres elevats, encara que evidentment es poden simplificar (això sempre és recomanable quan es manipulen fraccions), però sovint és més ràpid.

El segon mètode ofereix l'avantatge que el resultat es presenta de manera més simplificada. Això és més fàcil d'observar si la suma involucra diverses fraccions. Per tant, si no hi ha massa sumes i els nombres són petits, és possible utilitzar el primer mètode, però si n'hi ha tres o més, és recomanable seguir el mètode del càlcul de l'MCM.

Resta És l'operació oposada a la suma, igual que passa entre els nombres enters. La resta de fraccions es redueix a la suma amb la fracció oposada.

$$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8} + \left(\frac{-2}{8}\right) = \frac{5 + (-2)}{8} = \frac{3}{8}.$$

Mutliplicació El resultat de multiplicar dues fraccions és una fracció el numerador de la qual és el producte dels numeradors i el denominador de la qual és el producte dels denominadors.

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}.$$

La multiplicació permet calcular la **fracció d'un nombre** (part que s'agafa d'un nombre). Per exemple, per a trobar el triple de 39 es fa la multiplicació següent: $3 \cdot 39 = 117$. De la mateixa manera, per a calcular una fracció d'un nombre s'ha de multiplicar la fracció pel nombre. Així, tres quarts de 120 és igual a $\frac{3}{4} \cdot 120 = 90$.

En molts casos, les fraccions que tenen per denominador 100 s'expressen en forma de percentatge amb el símbol %, denominat tant per cent. Així, la fracció 23/100 es pot indicar també com 23%, i es llegeix "23 per cent". El càlcul de tants per cent es redueix al càlcul amb fraccions.

Divisió La divisió de fraccions és el producte d'una fracció per la inversa de l'altra. La divisió de dues fraccions es pot indicar de dues maneres:

$$\frac{2}{3} : \frac{7}{11} \qquad \qquad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{11}}$$

Quin és l'ordre en què s'han de fer les operacions elementals entre fraccions? En una expressió en la qual s'encadenen diferents operacions entre fraccions, primer s'han de resoldre els parèntesis, tot seguit la divisió i la multiplicació i, finalment, la resta i la suma.

En el segon cas, convé la barra de divisió respecte de les barres de fracció per a no deixar lloc a dubtes sobre quin és el numerador i quin el denominador. El resultat de la divisió de dues fraccions és igual al producte de la fracció que és en el numerador, multiplicada per la inversa de la fracció del denominador.

$$\frac{2}{3} : \frac{7}{11} = \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{7} = \frac{22}{21}$$

Una altra regla fàcil de recordar per a fer una divisió és aquesta: es multipliquen en creu numeradors amb denominadors i els resultats també se situen en creu. En el cas anterior:

$$\frac{2}{3}\quad\frac{7}{11}\quad\frac{2\cdot 11}{3\cdot 7}=\frac{22}{21}$$

A partir de la divisió de nombres, es pot expressar l'**invers d'un nombre racional** d'una altra manera: com a 1 dividit entre el nombre. Així, per exemple, l'invers de 4/7 és $\frac{1}{\frac{4}{7}}=\frac{7}{4}$.

1.3.4. Forma decimal

La **forma decimal** d'una fracció és una expressió numèrica que està formada per una part entera, a l'esquerra del punt, i una part decimal o senzillament decimals, a la dreta del punt. Per a obtenir la forma decimal d'una fracció, s'ha de dividir el numerador entre el denominador, com en la divisió entera, però sense aturar-se fins que la resta sigui zero, afegint-hi els decimals corresponents. Per exemple, la forma decimal de $\frac{12}{5}$ és 2.4, és a dir, $\frac{12}{5}=2.4$ (i es llegeix "2 coma 4").

Tipus de formes decimals:

- La forma decimal es denomina **estricta** si la divisió del numerador entre el denominador té un nombre de decimals finit. Per exemple: $\frac{12}{5}=2.4$.
- La forma decimal es denomina **periòdica** en cas contrari. Per exemple: $\frac{1}{3}=0.333333333\ldots=0.\widehat{3}$. El barret que posem sobre el 3 indica el **període** (els decimals que es repeteixen infinites vegades). Es pot observar que la xifra o xifres que es repeteixen duen el símbol periòdic en la part superior. Diferenciem també dos tipus de nombres periòdics: si el període comença just després de la coma, parlem de nombre decimal **periòdic pur** ($0.\widehat{13}$); en canvi, si comença després d'un grup de xifres decimals que no es repeteixen, parlem d'un decimal **periòdic mixt** ($0.15\widehat{2}$). És evident que el grup de nombres repetits pot ser superior a un. Per exemple:

$$\frac{5627}{9900}=0.56838383\ldots=0.56\widehat{83}$$

En les formes decimals es pot separar la part entera de la decimal per un punt, una coma o un apòstrof. Nosaltres utilitzarem el punt, la mateixa notació que es fa servir en el món anglosaxó i en la majoria de calculadores.

Podem transformar la forma decimal d'un nombre en la forma fraccionària:

- Si la forma decimal és exacta, s'ha d'eliminar la coma del nombre decimal. El nombre resultant serà el numerador de la fracció. El denominador ha de ser un nombre la primera xifra del qual sigui un 1, i amb tants zeros com decimals té el nombre decimal. Per exemple, la forma fraccionària de 3.465 és $\frac{3465}{1000}$.
- Si la forma decimal és periòdica, s'han de seguir aquests passos:
  - El numerador és igual a la diferència entre el nombre en qüestió, sense coma ni símbol periòdic (amb la qual cosa es transforma en un nombre enter), i el mateix nombre, sense coma ni xifres a sota del símbol periòdic.

◦ El denominador ha de ser un enter amb tants 9 com xifres a sota del símbol periòdic, i tants 0 com xifres de la secció decimal que no són dintre del símbol periòdic. Per tant, la fracció que correspon al nombre periòdic és

$$23.4\widehat{52} = \frac{23452 - 234}{990} = \frac{23218}{990}$$

Aproximacions. Per a aproximar un nombre, distingim entre l'arrodoniment i el truncament.

L'**arrodoniment** d'un nombre fins a una xifra determinada, l'anomenada *xifra d'arrodoniment*, consisteix a escriure el nombre decimal més proper al nombre donat, de manera que només tingui xifres decimals fins a la d'arrodoniment. Per exemple, l'arrodoniment d'$\frac{1}{3}$ amb dos decimals consisteix a trobar el nombre decimal més proper a $\frac{1}{3}$ que tingui només dos decimals. En aquest cas, és fàcil adonar-se que és 0.33. Per a expressar que $\frac{1}{3}$ és aproximadament igual a 0.33, s'utilitza el símbol $\approx$, que es llegeix "aproximadament igual": $\frac{1}{3} \approx 0.33$. En tot cas, no cal abusar de l'ús d'aquest símbol.

Aquestes són les regles per a arrodonir un nombre fins a una xifra determinada:

- Si la xifra següent a la de l'arrodoniment és inferior a 5, s'eliminen totes les xifres decimals posteriors a aquesta xifra. Així, per exemple, si es vol arrodonir el nombre 32.543613 a tres decimals, podem dir que $32.543613 \approx 32.54$.

- Si la xifra següent a la de l'arrodoniment és superior a 4, s'eliminen totes les xifres decimals posteriors a la xifra d'arrodoniment, i se suma una unitat a la xifra d'arrodoniment. Així, per exemple, si es vol arrodonir el nombre 32.5436134 a tres decimals queda 32.544.

- Si la xifra d'arrodoniment és 9, s'actua de la mateixa manera que en una suma de nombres decimals quan se suma 1 a una xifra 9. Per exemple, si es vol arrodonir el nombre 2.749623 a tres decimals, com que la xifra del quart decimal és 6, més gran que 4, s'ha de sumar una unitat a la tercera xifra decimal, 9, i per tant el nombre arrodonit serà igual a 2.750. Fixeu-vos que, tot i que 2.75 és el mateix que 2.750, el 0 ens indica que és una aproximació i no el valor exacte.

Quan fem operacions amb fraccions sempre és millor treballar amb les fraccions que amb les formes decimals aproximades, perquè així obtenim el valor exacte de l'operació.

Podem considerar també el **truncament** (encara que no és tant habitual). El truncament és la reducció del número de dígits a la dreta del punt decimal, en la qual es descarten els menys significatius. Per exemple, el truncament del nombre 2.56147215 a 4 decimals és 2.5614.

Ordenació. La manera més senzilla d'ordenar dos nombres racionals és escriure'n l'expressió decimal, que mostra de manera immediata quin dels dos és més gran.

Observem que els nombres racionals tenen una propietat important: entre dos nombres racionals diferents sempre en podem trobar un altre (de fet, se'n poden trobar moltíssims). Per a trobar un nombre que estigui entre dos altres nombres qualssevol, només cal sumar-los i dividir el resultat entre 2.

El nombre $\frac{3}{4}$ és menor que el nombre $\frac{9}{5}$, aleshores és fàcil comprovar que $\frac{\frac{3}{4}+\frac{9}{5}}{2} = \frac{51}{40}$ és entre tots dos nombres, és a dir, $\frac{3}{4} < \frac{51}{40} < \frac{9}{5}$.

1.4. Nombres reals

Tots els nombres que hem vist fins ara formen part del conjunt de nombres reals que definirem en aquest apartat.

1.4.1. Potències

Quan es té una expressió amb un grup de multiplicacions amb els mateixos factors, per a abreujar-la es pot fer servir una potència. Per exemple:

$$\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{5} = 7^5$$

Es pot observar que la potència és formada per dos nombres:

- La **base** de la potència, que és el nombre que es multiplica diverses vegades. En l'exemple, la base és 7.
- L'**exponent** de la potència, que indica el nombre de vegades que es repeteix la base en la multiplicació. En l'exemple, l'exponent és 5.

Per a designar una potència, s'usa l'expressió "elevat a". En l'exemple, 7^5 es llegeix "set elevat a cinc", o fins i tot "set elevat a la cinquena potència". Hi ha dos casos particulars: si l'exponent és 2, s'utilitza l'expressió "al quadrat" (per exemple, 8^2 es llegeix "vuit al quadrat"), i si l'exponent és 3, s'utilitza l'expressió "al cub" (per exemple, 5^3 es llegeix "cinc al cub").

Igual que en els nombres naturals, l'ús de potències en els nombres enters és una manera d'abreujar un producte reiterat d'un mateix nombre. Per exemple: $(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = (-3)^4$. Ara bé, en aquest cas és imprescindible posar-hi els parèntesis perquè l'exponent afecta tant el nombre com el signe. En cas contrari, no s'estaria indicant la mateixa operació, és a dir, $-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; per tant, l'exponent només afecta el nombre i no el signe. Per a establir el signe de la potència d'un nombre enter, s'han de tenir en compte el signe del nombre i la potència:

- Si el signe del nombre és positiu, el nombre resultant serà positiu. Per exemple, $(+2)^3 = 2^3$.
- Si el signe del nombre és negatiu, el nombre resultant:

- ∘ serà positiu si l'exponent és parell. Per exemple, $(-2)^4 = 2^4$, ja que el producte de 4 vegades un nombre negatiu és positiu.
- ∘ serà negatiu si l'exponent és senar. Per exemple, $(-2)^5 = -2^5$, ja que el producte de 5 vegades un nombre negatiu és negatiu.

La **potència d'una fracció** és igual a una altra fracció amb els mateixos numerador i denominador, però elevats a l'exponent de la potència. Així, per exemple:

$$\left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{7^3}{5^3}.$$

A més, es pot definir una potència amb exponent negatiu, que és igual a l'invers de la mateixa potència amb exponent positiu. Per exemple:

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{-6} = \frac{1}{\left(\frac{7}{9}\right)^6} \qquad \text{o} \qquad 6^{-1} = \frac{1}{6}.$$

Arrels. De la mateixa manera que la diferència és l'operació oposada a la suma, i la divisió és l'operació oposada a la multiplicació, la radicació és l'operació oposada a la potenciació. Els tipus més importants de radicació són:

- L'**arrel quadrada.** Es tracta de l'operació oposada a *elevar al quadrat*. S'usa el signe $\sqrt{\ }$, o signe radical, amb el nombre a l'interior. Per exemple, com que 5 al quadrat és 25, llavors, l'arrel quadrada de 25 és igual a 5,

  $$5^2 = 25 \longrightarrow \sqrt{25} = 5$$

  i es llegeix "l'arrel quadrada de 25 és 5" (o simplement "l'arrel de 25"). De la mateixa manera,

  $$7^2 = 49 \longrightarrow \sqrt{49} = 7$$

  El nombre que és a l'interior del signe radical s'anomena **radicant**, i el resultat s'anomena de vegades **arrel**.

- L'**arrel cúbica.** És l'operació oposada a "elevar al cub". Es fa servir el signe $\sqrt[3]{\ }$ amb el nombre a l'interior. En aquest cas, es diu que el 3 (que és a la part superior del signe) és l'**índex** de l'arrel. (Observem que en el cas de l'arrel quadrada no hi tenim l'índex.) Per exemple, com que 5 al cub és igual a 125, llavors l'arrel cúbica de 125 ha de ser igual a 5:

  $$5^3 = 125 \longrightarrow \sqrt[3]{125} = 5$$

  i es llegeix "l'arrel cúbica de 125 és 5". De la mateixa manera,

  $$2^3 = 8 \longrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$$

- Altres arrels. De manera similar a l'arrel cúbica, es poden fer arrels de diferents índexs. Així, per exemple:
  L'arrel d'índex 4, l'arrel quarta, de 625 és 5 ($\sqrt[4]{625} = 5$), ja que $5^4 = 625$.
  L'arrel d'índex 5, l'arrel cinquena, de 32 és 2 ($\sqrt[5]{32} = 2$), ja que $2^5 = 32$.

En el cas dels nombres negatius, s'ha de tenir en compte que no és possible calcular l'arrel d'índex parell. Per exemple, l'expressió $\sqrt{-4}$ és incorrecta perquè no hi ha cap nombre enter el quadrat del qual sigui 4; en general, no hi ha cap nombre el quadrat del qual sigui un nombre negatiu. En el cas dels nombres fraccionaris, la seva arrel es calcula:

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \qquad \text{ja que} \qquad \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

En tot cas, l'arrel d'una fracció sempre es pot expressar com una fracció d'arrels. Per exemple:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$$

Tota arrel es pot expressar també com una potència amb exponent un nombre fraccionari igual a l'invers de l'índex. Per exemple:

$$\sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}} \qquad \text{o també} \qquad \sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$$

D'aquesta manera, es pot expressar conjuntament l'arrel d'una potència. Per exemple: $\sqrt[3]{27^2} = 27^{\frac{2}{3}}$. És a dir, l'arrel d'una potència és igual a una potència l'exponent de la qual és una fracció de numerador igual al de la potència i de denominador igual a l'índex de l'arrel. Un altre exemple:

$$\sqrt[4]{\left(\frac{16}{81}\right)^{-3}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

Propietats potències i arrels. Per a simplificar els càlculs amb potències i arrels (recordem que una arrel es pot expressar en forma de potència d'exponent fraccionari), és útil fer servir aquestes propietats:

- **Potència d'exponent 1.** El resultat d'una potència d'exponent 1 és igual a la base $\boxed{a^1 = a}$

$5^1 = 5$ o bé $(-3)^1 = -3$

- **Producte de potències de la mateixa base.** Per a multiplicar potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de sumar els exponents deixant la base sense modificacions $\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$

$3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$, ja que $3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$.

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{11}{4}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}+\frac{11}{3}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{21}{4}}$$

- **Quocient de potències de la mateixa base.** Per a dividir potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de restar els exponents deixant la base sense modificacions. $\boxed{a^p : a^q = a^{p-q}}$

$7^6 : 7^4 = 7^2$, ja que $7^6 : 7^4 = (7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7) : (7\cdot7\cdot7\cdot7) = 7\cdot7 = 7^2$

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} : \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{11}{4}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}-\frac{11}{3}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{-1}{4}}$$

- **Potència d'exponent 0.** Qualsevol potència (amb base diferent del 0) d'exponent 0 resulta sempre igual a 1 $\boxed{a^0 = 1}$

$9^0 = 1$, ja que $9^{3-3} = 9^3 : 9^3 = 1$

- **Potència d'una potència.** El resultat d'elevar una potència qualsevol a un altre exponent és igual a una potència que té per base la base de la potència, i l'exponent de la qual és el producte d'exponents $\boxed{(a^p)^q = a^{p\cdot q}}$

$(5^4)^3 = 5^{4\cdot3} = 5^{12}$, ja que $(5^4)^3 = 5^4\cdot5^4\cdot5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{12}$.

$$\left(\left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{21}{6}}.$$

- **Producte de potències amb el mateix exponent.** El resultat de multiplicar diverses potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el producte de bases i l'exponent de la qual és l'exponent comú. $\boxed{a^p\cdot b^p = (a\cdot b)^p}$

$8^3{\cdot}5^3 = (8{\cdot}5)^3 = 40^3$, ja que $8^3{\cdot}5^3 = 8{\cdot}8{\cdot}8{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5 = (8{\cdot}5){\cdot}(8{\cdot}5){\cdot}(8{\cdot}5) = (8{\cdot}5)^3 = 40^3$

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}}\cdot\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{8}{81}\cdot\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{200}{324}\right)^{\frac{5}{2}}$$

- **Quocient de potències amb el mateix exponent.** El resultat de dividir dues potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el quocient de bases i l'exponent de la qual és l'exponent comú. $\boxed{a^p : b^p = (a:b)^p}$

$12^5 : 3^5 = (12:3)^5 = 4^5$, ja que $12^5 : 3^5 = (12\cdot12\cdot12\cdot12\cdot12) : (3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3) ==$
$(4\cdot3\cdot4\cdot3\cdot4\cdot3\cdot4\cdot3\cdot4\cdot3) : (3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3) = 4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4 = 4^5$

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} : \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{8}{81}:\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{32}{2025}\right)^{\frac{5}{2}}$$

S'ha de tenir en compte que aquestes propietats són correctes sempre que a, b, p, q siguin nombres racionals correctes per a l'operació que s'ha de fer. Per exemple, en el cas de la potència d'exponent 0, la base no pot ser 0; en el cas dels exponents, sabem que no poden tenir el denominador parell si la base és negativa (perquè no existeix l'arrel d'índex parell d'un nombre negatiu).

No és el mateix dir que el producte de potències és igual a la potència de la suma, que la suma de potències és igual a la potència del producte (això últim és fals). És a dir, no és cert que: $a^p + a^q = a^{p\cdot q}$

1.4.2. Nombres irracionals

Després d'estudiar els nombres racionals ens podem preguntar si hi ha nombres que no són racionals. Recordem que un nombre racional s'ha de poder expressar en forma de fracció de nombres enters o, el que és el mateix, en forma de nombre decimal exacte o periòdic. Però hi ha nombres que no es poden expressar d'aquesta manera, ja que per molts decimals que es calculin, no apareixen repeticions constants de xifres. Per exemple:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1.7320508075688772935274463415058723\ldots$$

Aquest tipus de nombres es denominen **nombres irracionals**.
Dit d'una altra manera, els nombres irracionals són aquells que no es poden expressar en forma d'una fracció de nombres enters, és a dir, són que no són racionals (de fet, el nom irracional ja fa referència a aquesta característica de no ser racional).

No és fàcil demostrar que un nombre, com $\sqrt{2}$ o $\sqrt{3}$, és irracional, ja que ningú no pot assegurar que en xifres decimals més avançades no es pugui trobar la part periòdica del nombre, i tampoc no és senzill demostrar que un nombre no es pot expressar com una fracció de nombres enters.
Vegem com es faria per a comprovar que $\sqrt{2}$ **és un nombre irracional**.

Què és una demostració per reducció a l'absurd? Es comença assumint com a veritat el contrari del que es vol demostrar i s'acaba arribant a una contradicció perquè el que s'ha assumit no és cert.

Demostració: La prova que $\sqrt{2}$ és irracional es fa per reducció a l'absurd, és a dir, suposem que $\sqrt{2}$ és un nombre racional i veurem que aquesta suposició és absurda.

Així, doncs, comencem suposant que aquest nombre és racional: dit d'una altra manera, que es pot expressar com una fracció irreductible $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ de manera que a, b són nombres naturals i tals que $\text{MCD}(a, b) = 1$.

Si fem el quadrat de la igualtat, tenim que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ i si es multipliquen ambdós costats d'aquesta igualtat per b^2, obtenim que $2 \cdot b^2 = a^2$.

Si ara descomponem el nombre $2 \cdot b^2$, obtindrem com a mínim un 2 (si no més). Per tant, com que a^2 ha de ser igual a $2 \cdot b^2$, també la descomposició de a^2 haurà de tenir com a mínim un 2. En altres paraules, hi ha d'haver un nombre a' de manera que $a = 2 \cdot a'$. Per tant, $a^2 = (2 \cdot a')^2 = 4 \cdot a'^2$.

Recopilem aquestes dues informacions: $2 \cdot b^2 = a^2 = 4 \cdot a'^2$ i per tant $2 \cdot b^2 = 4 \cdot a'^2$, simplificant, $b^2 = 2 \cdot a'^2$.

De manera similar a com ho acabem de fer per a a, podem dir que hi ha un nombre b' que compleix que $b = 2 \cdot b'$. Així, doncs, de la mateixa manera que abans, $b^2 = (2 \cdot b')^2 = 4 \cdot b'^2$.

Per tant, podem arribar a la conclusió que, d'una banda, $a = 2 \cdot a'$ i, de l'altra, $b = 2 \cdot b'$ llavors, a i b tenen un divisor comú: el 2. Però aquest fet no és possible: havíem afirmat que a i b havien de ser primers entre ells, el $\text{MCD}(a, b) = 1$.

En definitiva, és absurd suposar que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, essent a i b primers entre ells, ja que aquesta suposició ens duu a la conclusió que a i b mai no poden ser primers entre ells. Aquest fet demostra que $\sqrt{2}$ no pot ser un nombre racional. Per tant, ha de ser un nombre irracional. ∎

Es podria generalitzar aquest fet a qualsevol arrel quadrada d'un nombre primer, és a dir, es podria demostrar de manera semblant que tot nombre de la forma $\sqrt{p}$, amb p un nombre natural primer, és irracional.

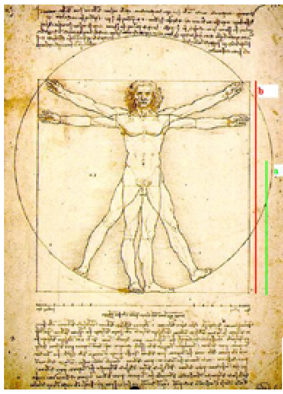
La major part de les arrels (de qualsevol índex) de qualsevol nombre racional són nombres irracionals, però no tots els nombres irracionals són arrels perquè hi ha una multitud de nombres irracionals que tampoc no es poden expressar com una arrel d'un nombre racional.

Entre aquests nombres hi ha el denominat **pi**, que prové de la lletra de l'alfabet grec que el representa, π. El nombre π indica quantes vegades més gran és la longitud de la circumferència ($2\pi r$, on r és el radi de la circumferència) en relació amb el seu diàmetre, i la seva forma decimal és:

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419 72...$$

Un altre nombre irracional molt important és el denominat nombre e, el valor del qual és:

$$e = 2.718281828459045235360287471352662 4...$$



Leonardo da Vinci, en el dibuix *L'home de Vitrubi*, que representa un home dintre d'un cercle i un quadrat, ha volgut representar la secció àuria: el quocient entre l'altura total de l'home (b) i l'altura fins al melic (a) és, aproximadament la raó àuria, un nombre irracional.

Es pot observar que els nombres irracionals coneguts, a part de les arrels, es designen amb una lletra (amb una expressió alfabètica, el nom del descobridor o el nom que la comunitat científica ha decidit); això és així perquè aquests nombres no es poden expressar de manera exacta de cap altra manera coneguda: ni mitjançant una expressió decimal (ni fraccionària) ni com a arrel.

Altres exemples:

- **Secció àuria o divina proporció (ϕ).** És el nombre conegut des de l'antiguitat per a expressar diferents relacions entre elements de certes figures geomètriques. Per exemple, la relació entre la diagonal d'un pentàgon regular i un dels seus costats és igual a la secció àuria. L'arquitectura grega és plena de temples que semblen tenir relació amb la secció àuria: el quocient entre el costat més llarg i el més curt de la base se sol acostar moltíssim a aquest nombre. Numèricament, la raó àuria es pot calcular de manera senzilla: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- **Constant de Brun.** És la suma dels inversos dels nombres primers de les formes p i $p+2$ (anomenats primers bessons). Es tracta de trobar aquesta suma:
$$B = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)\dots$$
El 1919 Brun va demostrar que la suma de tots els primers bessons és un nombre, encara que no es pot assegurar amb total certesa que sigui un nombre irracional.

- **Constant de Catalan (cognom del matemàtic belga del segle XIX Eugène Catalan).** És la suma o resta alternada de la inversa de tots els nombres senars:

$$G = \frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{11^2}\dots$$

Hi ha matemàtics que s'han dedicat a buscar el màxim nombre de xifres decimals possibles d'alguns d'aquests nombres irracionals amb l'ajut d'ordinadors i programes potents.

Aquests són alguns dels nombres irracionals més famosos amb els seus primers dígits decimals (en molts casos no s'ha demostrat encara que es tracta de nombres irracionals, tot i que s'intueix que sí).

	First digits	Computed digits	Who - Year
Brun's constant	1.902160582...	9	*T. Nicely - 1999 & P. Sebah - 2002*
Gauss-Kuzmin-Wirsing	0.30366300289873265...	468	*K. Briggs - 2003*
Artin's constant	0.37395581361920228...	1,000	*G. Niklasch - 1999*
Fransén-Robinson	2.80777024202851936...	1,025	*P. Sebah - 2001*
Twin prime constant	0.66016181584686957...	5,020	*P. Sebah - 2001*
Mertens' constant	0.26149721284764278...	8,010	*P. Sebah - 2001*
Landau-Ramanujan K	0.76422365358922066...	30,010	*P. Sebah - 2002*
Soldner-Ramanujan	1.45136923488338105...	75,500	*P. Sebah - 2001*
Khintchine's constant	2.68545200106530644...	110,000	*X. Gourdon - 1998*
Γ(1/4)	3.62560990822190831...	10,000,000,000	*S. Kondo & S. Pagliarulo - 2010*
Γ(1/3)	2.67893853470774763...	10,000,000,000	*S. Kondo & S. Pagliarulo - 2009*
Euler's constant γ	0.57721566490153286...	29,844,489,545	*R. Chan & A.J. Yee - 2009*
Catalan's constant G	0.91596559417721901...	31,026,000,000	*R. Chan & A.J. Yee - 2009*
ζ(3)	1.20205690315959428...	31,026,000,000	*R. Chan & A.J. Yee - 2009*
log 2	0.69314718055994530...	31,026,000,000	*R. Chan & A.J. Yee - 2009*
Golden ratio ϕ	1.61803398874989484...	1,000,000,000,000	*A.J. Yee - 2010*
e	2.71828182845904523...	1,000,000,000,000	*S. Kondo & A.J. Yee - 2010*
√2	1.41421356237309504...	1,000,000,000,000	*S. Kondo & A.J. Yee - 2010*
π	3.14159265358979323...	5,000,000,000,000	*S. Kondo & A.J. Yee - 2010*

Font: http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html. Dades del 2010.

A la pràctica, se sol utilitzar una aproximació decimal (per arrodoniment) de qualsevol nombre irracional, amb el nombre suficient de decimals segons la situació real en la qual estem.

1.4.3. Definició

Tots els nombres, racionals o irracionals, formen part del denominat conjunt de **nombres reals**. El nombre $\frac{1}{3}$ és un nombre real que és racional, mentre que el nombre π és un nombre real que és irracional.

El conjunt de tots els nombres reals se simbolitza amb $\mathbb{R}$. A més, cadascun dels conjunts numèrics estudiats també es designa amb un símbol:

$\mathbb{N}$ designa el conjunt de nombres naturals.

$\mathbb{Z}$ designa el conjunt de nombres enters.

$\mathbb{Q}$ designa el conjunt de nombres racionals.

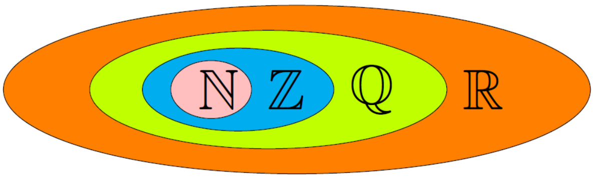
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ designa el conjunt de nombres irracionals.

Els diferents conjunts de nombres (naturals, enters, racionals i reals) mantenen relacions d'inclusió d'acord amb el que hem vist: el conjunt dels nombres naturals és inclòs en el conjunt dels nombres enters; aquest, al seu torn, és inclòs en el conjunt de nombres racionals; finalment, aquest és inclòs en el conjunt de nombres reals.

Per a assenyalar relacions d'inclusió, es fa servir el símbol $\subset$, que indica que el conjunt que se situa a l'esquerra és inclòs en el conjunt que se situa a la dreta. Així, doncs:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Gràficament:



Racionalització. No és usual deixar una fracció amb arrels en el denominador. Per això, és habitual eliminar-les sempre que sigui possible. Aquest procés s'anomena **racionalització** de la fracció. Per a aconseguir-ho, és molt comú multiplicar numerador i denominador per alguna expressió que permeti eliminar les arrels del denominador.

Exemple. Racionalització.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

En molts casos, també podem trobar una suma o resta d'arrels en el de- nominador. En aquests casos, s'ha de multiplicar el denominador i el numerador per l'operació oposada del denominador (*el conjugat del denominador*).

Exemple. Racionalització.

$$\frac{4}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{4\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)} = \frac{4\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)}{3 - 5} = -2\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right).$$

Això és així perquè $\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 3 - 5 = -2.$

1.4.4. Operacions

Les operacions bàsiques entre nombres reals són la suma i la multiplicació. La resta i la divisió es defineixen a partir de la suma i de la multiplicació. Amb aquesta finalitat, cal definir uns elements especials:

- L'**element neutre de la suma** és el 0, la propietat principal del qual és: si a és un nombre real, $a + 0 = 0 + a = a$.
- L'**element neutre de la multiplicació** és l'1, la propietat principal del qual és: si a és un nombre real, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

A partir d'aquests elements, es poden definir:

- L'**oposat** d'un nombre real a, que és $-a$ i que compleix: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- L'**invers** d'un nombre real a (excepte el 0), que és $\frac{1}{a}$ i que compleix: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

A partir d'aquests elements, es poden definir:

- La **resta** de dos nombres, que és igual a la suma amb l'oposat. És a dir, si a, b són nombres reals, $a - b = a + (-b)$.
- La **divisió** de dos nombres, que és igual a la multiplicació amb l'invers. És a dir, si a, b són nombres reals, i $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$.
- La **potenciació** de nombres reals, que és, sempre que sigui possible, si a és un nombre real, n i m són nombres enters (tots diferents de zero):

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Propietats de les operacions Les **propietats de la suma** de nombres reals (que també es compleixen per a nombres naturals, enters i racionals) són les següents:

- **Propietat commutativa**. L'ordre dels sumands en una suma de dos o més nombres no n'altera el resultat: $a + b = b + a$

$$7 + (-2) = -2 + (+7) = 5$$

$$-\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{6} + \left(-\frac{3}{6}\right) = -\frac{1}{6}$$

- **Propietat associativa**. El resultat d'una expressió amb dues o més sumes de nombres enters no depèn de l'ordre com s'agrupen las diferents sumes: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

$$-3 + (+2) + (-5) = (-3 + (+2)) + (-5) = -3 + ((+2) + (-5)) = -6$$

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + \left(\frac{5}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}$$

- **Element neutre de la suma** de nombres igual a 0 és aquell que, sumat a qualsevol altre, no el modifica: $a+0=0+a=a$. Els nombres naturals no en tenen, ja que 0 no és un nombre natural.

- **Element oposat d'un nombre** és un altre nombre que, sumat a l'anterior, és igual a l'element neutre de la suma, és a dir, igual a 0. Observem que, per a calcular l'oposat d'un nombre, únicament s'ha de canviar el seu signe; l'element oposat de a és $-a$, i compleix: $a+(-a)=(-a)+a=0$. Tot nombre té un únic oposat i tots dos nombres tenen el mateix valor absolut. Els nombres naturals no tenen oposat, ja que en aquest conjunt no tenim nombres negatius.

  L'oposat de $+5$ és -5, perquè $+5+(-5)=0$, o l'oposat d'$\frac{1}{3}$ és $-\frac{1}{3}$ ja que $\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)=0$.

Igualment, també tenim les **propietats del producte** de nombres reals (això vol dir que també es compleixen per a nombres naturals, enters i racionals), que són les següents:

- **Propietat commutativa.** L'ordre dels factors d'un producte de dos o més nombres racionals no n'altera el resultat: $a\cdot b=b\cdot a$

$$3\cdot(-4)=(-4)\cdot 3=-12$$

$$-\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{6}\cdot\left(-\frac{3}{6}\right)=-\frac{6}{36}=-\frac{1}{6}$$

- **Propietat associativa.** El producte de més de dos factors no depèn de l'ordre com es fan las multiplicacions: $a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

$$-3\cdot(+2)\cdot(-4)=(-3\cdot(+2))\cdot(-4)=-3\cdot((+2)\cdot(-4))=24.$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{5}=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{5}\right)=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$$

- **Propietat distributiva del producte respecte de la suma.** El producte d'un nombre per la suma de dos nombres és igual a la suma dels productes del primer nombre per cadascun dels altres dos:

$$a\cdot(b+c)=(b+c)\cdot a=a\cdot b+a\cdot c.$$

$$-5 \cdot (4 + (-3)) = -5 \cdot 4 + (-5) \cdot (-3)$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{7}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{18}{35}$$

- **Element neutre del producte.** És aquell que, multiplicat per qualsevol altre, no el modifica. L'element neutre de la multiplicació de l'1 és: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
- **L'invers d'un nombre.** És el nombre que compleix que el producte d'ambdós és igual a l'element neutre del producte, és a dir, és igual a 1. L'invers del nombre a és $\frac{1}{a}$, i compleix: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$. Els nombres naturals i enters no tenen invers; en canvi, tot nombre real, excepte el 0, té un invers. Per exemple, l'oposat de $\frac{2}{5}$ és $\frac{5}{2}$, ja que $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$.

1.5. Expressions numèriques

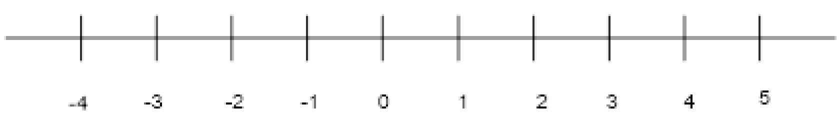
1.5.1. La recta numèrica

Una de les maneres habituals de representar els nombres és en una recta, que rep el nom de **recta numèrica**.
Comencem amb els nombres enters, que per les seves característiques es representen com a infinits punts equidistants (punts que són a la mateixa distància) en una recta. Aquestes característiques són:

- No hi ha cap nombre enter que sigui el primer ni tampoc l'últim. És a dir, donat un nombre enter qualsevol, sempre es pot trobar un nombre que és menor i un altre nombre que és major. Aquest fet no es compleix amb els nombres naturals, amb els quals el menor sempre és 1.
- Un nombre enter i el següent sempre es diferencien per una unitat. (Aquesta característica és comuna amb els nombres naturals.)
- Els nombres enters es poden llistar ordenats d'esquerra a dreta i, evidentment, aquesta llista sempre és incompleta.

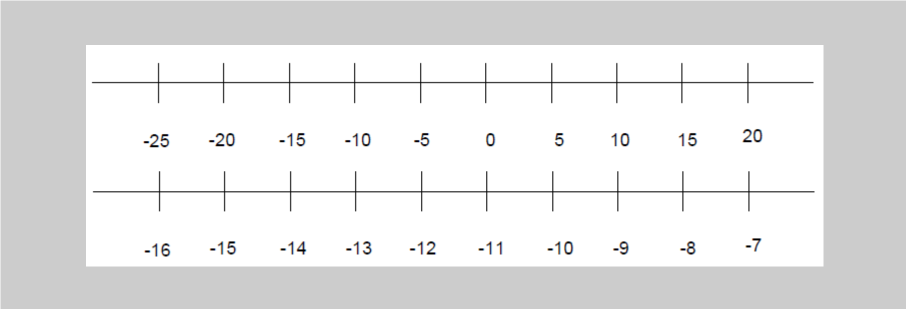
$$\ldots -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots$$

Així, doncs, una representació possible dels nombres enters pot ser aquesta:

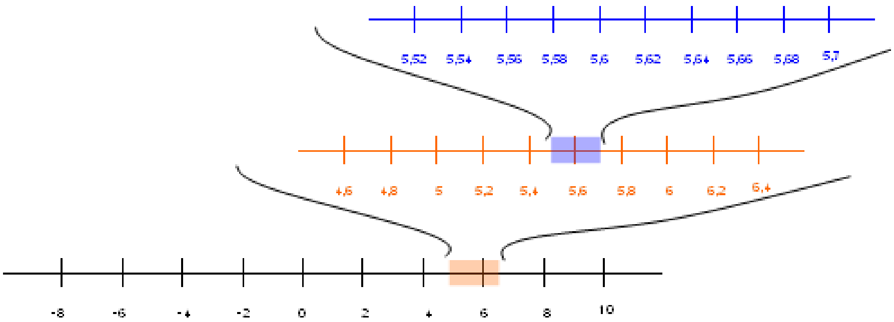


També és possible representar nombres enters no consecutius, encara que la diferència entre un i el següent sempre ha de ser habitualment la mateixa.

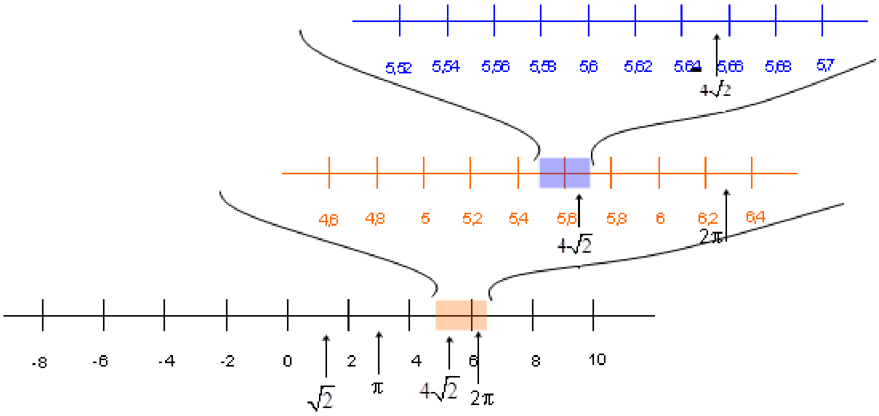
El 0 no cal que sigui al centre de la representació; fins i tot pot no ser entre els nombres representats.



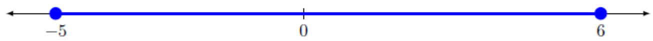
Pel que fa als nombres racionals, recordem que entre dos nombres racionals diferents sempre en podem trobar un altre. Aquesta circumstància permet preveure que els nombres racionals poden cobrir molts més punts de la recta en la qual es representen, i sempre podrem ampliar una secció qualsevol d'aquesta recta perquè sempre trobarem més nombres racionals



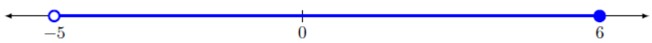
Els nombres reals (igual que els anteriors) són ordenats de més petit a més gran. Així, es poden representar els nombres reals en una recta, que anomenarem **recta real**. El fet que hi hagi molts més nombres irracionals que racionals dona una idea dels "buits" que hi ha en la representació dels nombres racionals en una recta. Això no passa amb els nombres reals: la recta real és completament plena de nombres reals; és a dir, cada punt de la recta es correspon amb un nombre real.



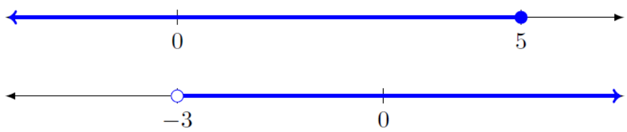
Intervals. Un interval és el conjunt de tots els nombres més petits (o iguals) que un nombre donat i més grans (o iguals) que un altre. Aquests dos nombres són els extrems de l'interval. Per exemple, els nombres compresos entre el -5 i el 6 formen un interval, els **extrems** del qual són el -5 i el 6. Aquest interval es pot representar en la recta real d'aquesta manera:



En cada interval s'ha d'indicar si algun dels extrems és inclòs en l'interval en qüestió: si un extrem pertany a l'interval, es denomina interval tancat per aquest extrem (i es denota amb un claudàtor); si un extrem no pertany a l'interval, es denomina interval obert per aquest extrem (i es denota amb un parèntesi). Per exemple, l'interval obert per l'esquerra i tancat per la dreta, d'extrems -5 i 6, s'escriu $(-5, 6]$, i la seva representació és la següent (el punt ple indica que aquest valor pertany a l'interval, ell punt blanc indica que el valor no hi pertany):



De vegades, s'ha de representar un interval que té un extrem però no l'altre; es fa servir el símbol ∞ (amb signe + o -), que es llegeix "infinit". Per exemple, tots els nombres reals fins al 5, el 5 inclòs, conformen l'interval $(-\infty, 5]$; tots els nombres més grans que -3, el -3 no inclòs, es representen amb l'interval $(-3, +\infty)$. La fletxa indica tots els valors fins a $-\infty$ o $+\infty$ respectivament.



1.5.2. Notació científica

Moltes ciències requereixen nombres molt grans o inusualment petits. L'astronomia, per exemple, necessita treballar amb nombres grans perquè les distàncies amb què treballa són immenses; en canvi, la física de partícules, com que investiga ens diminuts, utilitza nombres molt petits.

Per a evitar nombres com, per exemple:

$$14034000000000000000000000000000000000000000, \qquad \text{o bé,}$$

$$0.000000000000000000000000000000000874,$$

es requereix una notació més compacta i eficient: la **notació científica**.

Els nombres anteriors s'escriurien amb notació científica de la manera següent:

$$1.4034 \cdot 10^{42}$$

$$8.74 \cdot 10^{-34}$$

Es pot observar que l'expressió es descompon en dues parts:

(1) Un nombre decimal el valor absolut del qual és més gran que 1 o igual, i menor que 10, denominat *mantissa*.

(2) Una potència de deu, anomenada simplement *exponent*.

El producte d'ambdós nombres ha de coincidir amb el nombre en qüestió. Es pot observar que aquesta manera d'escriure un nombre simplifica l'escriptura, i la informació de quants 0 s'han de posar és en l'exponent. Així, doncs:

- Per a expressar un nombre que està en notació decimal en notació científica, s'ha de trobar la primera xifra diferent de zero per l'esquerra del nombre.
    - La mantissa és igual a un nombre la xifra de les unitats del qual és precisament aquesta xifra diferent de zero i les següents del qual formen la seva secció decimal (evitant escriure zeros innecessaris).

      La mantissa del nombre 0.000000000000323 és 3.23 i la mantissa del nombre 180200000000000 és 1.802.

    - L'exponent de la potència de 10 és igual al nombre de xifres del nombre menys un si el nombre no té decimals (el nombre és molt gran). En canvi, si es tracta d'un nombre amb decimals (el nombre és molt petit), l'exponent és negatiu i és igual, en valor absolut, al nombre de zeros del nombre.

      $180200000000000 = 1.802 \cdot 10^{14}$ o bé $0.000000000000323 = 3.23 \cdot 10^{-13}$

      En tot cas, l'exponent compleix les regles habituals de potenciació.

- El pas de la notació científica a la usual segueix les indicacions següents:
    - Si l'exponent és negatiu, s'ha de desplaçar la coma decimal de la mantissa cap a l'esquerra tantes posicions com indiqui el nombre de l'exponent (sense signe), afegint-hi tants 0 com sigui necessari. Per exemple, $1.032 \cdot 10^{-9} = 0.\underbrace{000000001}_{9 \text{ posicions}}032$.
    - Si l'exponent és positiu, s'ha de desplaçar la coma decimal de la mantissa cap a la dreta tantes posicions com indiqui l'exponent, afegint-hi els 0 que calgui. Per exemple: $5.201 \cdot 10^{11} = 5\underbrace{20100000000}_{11 \text{ posicions}}$.

1.5.3. Igualtats notables

Alguns càlculs acostumen a aparèixer recurrentment en diversos contextos matemàtics. Aquest és un bon motiu per a conèixer quin és el seu desenvolupament i les possibles equivalències amb altres expressions més útils o simples. Normalment, aquestes expressions acostumen a enunciar-se en forma de producte d'altres expressions, i per això es coneixen com a **igualtats notables**. Alguns d'aquests productes notables i els seus resultats són els següents (també es dona l'expressió amb la qual s'acostuma a denominar-los):

- Productes de 2 expressions:

  $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ el quadrat d'una suma

  $(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$ la diferència de quadrats

  $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ suma per diferència és igual a diferència de quadrats

  $(a-b) \cdot (a^3 + a^2 \cdot b + a \cdot b^2 + b^3) = a^4 - b^4$

  $(a-b) \cdot (a^4 + a^3 \cdot b + a^2 \cdot b^2 + a \cdot b^3 + b^4) = a^5 - b^5$

  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$

- Producte de 3 expressions:

  $(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) = (a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$ cub d'una suma

  $(a-b) \cdot (a-b) \cdot (a-b) = (a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$ cub d'una diferència

Seguint les propietats esmentades amb anterioritat, es poden demostrar totes aquestes igualtats. Vegem-ne alguns exemples:

El quadrat de la suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

Demostració: Desenvolupem $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$ S'hi aplica la propietat distributiva dues vegades, amb la qual cosa:

$$(a+b) \cdot (a+b) = (a+b) \cdot a + (a+b) \cdot b = a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2$$

Per la propietat commutativa del producte $b{\cdot}a = a{\cdot}b$, de manera que $b{\cdot}a + a{\cdot}b = 2{\cdot}a{\cdot}b$.

Per tant, l'expressió anterior és igual a $a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$, tal com s'ha enunciat al principi.

∎

El quadrat de la diferència es troba de manera similar, tenint en compte que es tracta d'una resta.

La suma per la diferència: $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Demostració: En aquest cas, també s'ha d'aplicar dues vegades la propietat distributiva:

$$(a+b) \cdot (a-b) = (a+b) \cdot a - (a+b) \cdot b = a^2 + b \cdot a - a \cdot b - b^2 = a^2 - b^2,$$

tal com es deia al principi. ∎

Resum

Els nombres naturals

Els nombres naturals són aquells que serveixen per a comptar: 1, 2, 3, . . .

L'**ordre** de prioritat de les operacions és:

(1r) Parèntesis.

(2n) Divisió entera.

(3r) Producte.

(4t) Sumes i restes.

Important!

- La **resta** ha de sortir positiva perquè estigui ben definida.
- La **divisió**:

  Pot ser exacta. Per exemple, $15 : 3 = 5$; en aquest cas diem que 15 és textbf-múltiple de 3, i que 3 és **divisor** de 15.

  Pot ser no exacta. Per exemple, $17 : 3$ no dóna exacte; en aquest cas anomenem

$$\underbrace{17}_{\text{divident}} = \underbrace{3}_{\text{divisor}} \cdot \underbrace{5}_{\text{quocient}} + \underbrace{2}_{\text{residu}}$$

Un nombre es diu **primer** quan no té cap altre divisor que no sigui l'1 i ell mateix. Per exemple, 11 és primer, però 12 no ho és. Diem que 12 és un **nombre compost**.

Qualsevol nombre natural es pot escriure com a producte de nombres primers, que és el que anomenem **descomposició en factors primers**. Per exemple, $24 = 2^3 \cdot 3$.

La descomposició en factors primers es pot fer servir per a calcular el **mínim comú múltiple (MCM)** i el **màxim comú disor (MCD)**. Per exemple, calculem la descomposició de 24 i 90 i tenim que $24 = 2^3 \cdot 3$ i $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

- Per a calcular l'**MCM**, hem d'agafar els factors primers no comuns i després els comuns als dos nombres amb l'exponent més gran dels dos.

$$\text{mcm}(24, 90) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360.$$

- Per a calcular l'**MCD**, hem d'agafar només els factors primers comuns als dos nombres.

$$\text{MCD}(24, 90) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Dos nombres es diuen **coprimers** o **primers entre ells** si el seu MCD val 1 (de manera equivalent, si no tenen factors primers comuns).

Els nombres enters

Es tracta d'una generalització dels nombres naturals, inclosos el 0 i els negatius (que precedim del signe −, mentre que podem precedir els positius del signe + o no posar-los cap signe).

El **valor absolut** d'un nombre enter és el mateix nombre sense signe. Per exemple, $|-4| = |4| = 4$.

Les divisions i productes es calculen com si fossin nombres naturals però tenint en compte la regla dels signes següent:

- Si els dos nombres que multipliquem o dividim tenen el *mateix signe*, el resultat tindrà signe positiu. Per exemple, $2 \cdot 3 = 6$, i $(-4) \cdot (-1) = 4$.
- Si els dos nombres que multipliquem o dividim tenen *signes diferents*, el resultat tindrà signe negatiu. Per exemple, $(-2) \cdot 3 = -6$, i $4 \cdot (-1) = -4$.

Ordenació de nombres enters

Signes

$>$ significa *major que*: $58 > 12$

$<$ significa *menor que*: $-3 < 12$

Caracterització

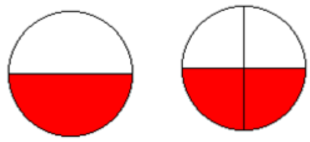
- Qualsevol nombre positiu sempre és major que qualsevol nombre negatiu.
- El 0 és major que qualsevol nombre negatiu i menor que qualsevol nombre positiu.
- Entre dos enters negatius, el major és aquell que és menor sense signe.

Operacions i desigualtats

- **Suma o resta** d'un mateix nombre amb dos nombres: es manté la mateixa relació d'ordre que en els dos nombres originals.
- **Multiplicació o divisió** de dos nombres per un mateix nombre enter: es manté la mateixa relació d'ordre només si aquest últim nombre és positiu, i la inverteix si és negatiu.

Els nombres racionals

Dues o més fraccions són *equivalents* si representen la mateixa part. Per exemple, la fracció 1/2 representa el mateix nombre que la fracció 2/4.



Totes les fraccions ***equivalents*** entre elles representen el mateix nombre racional, i la millor representació d'aquest nombre és la fracció ***irreductible***.

Els nombres fraccionaris o fraccions permeten representar les situacions en les quals s'obté o es deu una part d'un objecte.

Una fracció *irreductible* és aquella el numerador i denominador de la qual són primers entre ells.

La manera de trobar-la, denominada *simplificació*, consisteix a dividir numerador i denominador de la fracció original per l'MCD d'ambdós.

Forma decimal d'un nombre irracional

La forma decimal d'un nombre real és formada per una part **entera**, a l'esquerra del punt, i una part **decimal**, a la dreta del punt.

- La forma decimal s'anomena **estricta** si té una quantitat finita de decimals.
- La forma decimal s'anomena **periòdica** en cas contrari. En aquest cas, les xifres que es repeteixen s'indiquen mitjançant el símbol periòdic (barret) a la part superior

$$\frac{12}{5} = 2.4 \qquad \frac{5627}{9900} = 0.5683838383\ldots = 0.56\widehat{83}$$

De la forma fraccionària a la forma decimal

S'ha de dividir el numerador pel denominador: $\frac{12}{5} = 2.4$

De la forma decimal a la forma fraccionària

- Si la forma decimal és estricta: $3.465 = \frac{3465}{1000}$.
- Si la forma decimal és periòdica:

$$23.4\widehat{52} = \frac{23452 - 234}{990} = \frac{23218}{990}.$$

<table>
<tr><th colspan="3">Les operacions amb nombres fraccionaris</th></tr>
<tr><td colspan="3">La suma</td></tr>
<tr><td>Denominadors iguals</td><td colspan="2">Se sumen els numeradors i es manté el mateix denominador:
$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3+2}{4}=\frac{5}{4}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Denominadors diferents</td><td colspan="2">Es busquen fraccions equivalents amb el mateix denominador (normalment, l'MCM dels dos denominadors) i se sumen seguint el procediment anterior:
$\frac{5}{6}+\frac{2}{9}=\frac{15}{18}+\frac{4}{18}=\frac{19}{18}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mètodes per a trobar el mateix denominador</td></tr>
<tr><td>Multiplicar els denominadors</td><td>$\frac{5}{6}+\frac{2}{9}=\frac{5\cdot 9}{6\cdot 9}+\frac{2\cdot 6}{9\cdot 6}=\frac{45}{54}+\frac{12}{54}=\frac{57}{54}$</td></tr>
<tr><td>Calcular l'MCM dels denominadors</td><td>$\frac{5}{6}+\frac{2}{9}\underset{\substack{\downarrow\\ \text{MCM}(6,9)=18\\ 18/6=3\\ 18/9=2}}{=}\frac{5\cdot 3+2\cdot 2}{18}=\frac{15+4}{18}=\frac{19}{18}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">La resta</td></tr>
<tr><td colspan="3">Suma amb l'oposat:
$\frac{4}{7}-\frac{2}{3}=\frac{4}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">La multiplicació</td></tr>
<tr><td colspan="3">Es multipliquen els numeradors entre ells per obtenir el nou numerador, i els denominadors entre ells per obtenir el nou denominador:
$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{-2}{7}\right)=\frac{2\cdot(-2)}{3\cdot 7}=\frac{-4}{21}$</td></tr>
<tr><td>La fracció d'un nombre</td><td colspan="2">dos terços de 125 és $\frac{2}{3}\cdot 125=\frac{2}{3}\cdot\frac{125}{1}=\frac{250}{3}$</td></tr>
<tr><td>L'invers d'un nombre</td><td colspan="2">$\frac{3}{7}$ és l'invers de $\frac{7}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">La divisió</td></tr>
<tr><td colspan="3">És el producte del numerador per l'invers del denominador
$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{4}:\frac{5}{6}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}=\frac{15}{24}$</td></tr>
</table>

Potències i arrels

Potència i arrel són dues operacions inverses.

$$\text{Potència} \xleftrightarrow{\text{operacions inverses}} \text{Arrel}$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{base}}}{7}^{\overset{\text{Exponent}}{\overset{\uparrow}{3}}} = 7\cdot 7\cdot 7 = 343 \longrightarrow \sqrt[\overset{\text{Índex}}{\overset{\uparrow}{3}}]{\underset{\substack{\nwarrow\\ \text{base}}}{343}} = 27$$

Per a unificar les dues operacions, s'introdueix la potència d'exponent fraccionari:

$$\sqrt[c]{a} = a^{\frac{1}{c}} \qquad a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}.$$

Característiques de les arrels segons els tipus de nombres

<table>
<tr><th></th><th>Potències</th><th>Arrels</th></tr>
<tr><td>Nombres naturals</td><td>Base i exponent són nombres naturals</td><td>Índex i base són nombres naturals</td></tr>
<tr><td>Nombres enters</td><td>Base i exponent són nombres enters</td><td>Índex i base són nombres enters

Si l'índex és parell, la base ha de ser positiva</td></tr>
<tr><td>Nombres racionals</td><td colspan="2">Base i exponent són nombres racionals

Índex i exponent són inversos

La base ha de ser positiva si el denominador de l'exponent és parell</td></tr>
</table>

Propietats de les potències i les arrels. Suposem a, b, p, q nombres racionals.

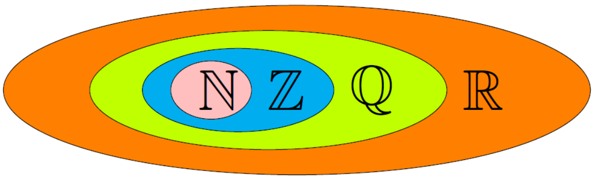
- La potència d'exponent 1 és igual a la base: $a^1 = a$.
- El producte de potències amb la mateixa base és la potència amb la mateixa base i la suma d'exponents: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
- El quocient de potències amb la mateixa base és la potència amb la mateixa base i la resta d'exponents: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
- La potència d'exponent 0 (amb base diferent de 0) val 1: $a^0 = 1$.
- La potència d'una potència resulta ser una potència amb la mateixa base i producte d'exponents: $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$.
- El producte de potències amb el mateix exponent és una potència amb el mateix exponent i el producte de les bases: $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$.
- El quocient de potències amb el mateix exponent és una potència amb el mateix exponent i el quocient de les bases: $\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$.

Els nombres reals

Els **nombres reals** inclouen els **nombres racionals**, que alhora inclouen els **nombres naturals**, els quals inclouen els **nombres naturals**:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Els **nombres irracionals** ($\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$) són tots aquells nombres reals que no són nombres racionals, és a dir, que no es poden expressar com una fracció d'enters.



Notació científica. Consisteix a escriure un nombre com a producte d'un decimal amb una única xifra no decimal el valor absolut de la qual és major o igual a 1 i menor que 10 (*mantissa*), i una potència de 10 (*exponent*):

$$\underbrace{1.352}_{\text{Mantissa}} \cdot 10^{\overbrace{36}^{\text{Exponent}}}$$

Exercicis resolts

1. **Simplifiqueu l'expressió següent:**

$$\frac{25 \cdot 8 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot 25^2 \cdot (-5)^3 \cdot 49^3}$$

Solució

Per a simplificar qualsevol expressió, s'han d'aplicar les propietats de les potències, amb la finalitat d'agrupar les potències amb la mateixa base, i simplificar posteriorment les potències repetides tant en el numerador com en el denominador.

El procediment és:

1) Descompondre cadascun dels factors tant del numerador com del denominador.

2) Ordenar els factors i agrupar els que tenen la base comuna:

$$\begin{aligned} 25 &= 5 \cdot 5 = 5^2 \\ 8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \\ 7 &= 7 \cdot 1 \\ 5 &= 5 \cdot 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1 \\ 49 &= 7 \cdot 7 = 7^2 \end{aligned}$$

3) Simplificar els factors comuns al numerador i al denominador:

$$\frac{25 \cdot 8 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot 25^2 \cdot (-5)^3 \cdot 49^3} = -\frac{5^2 \cdot 2^3 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot (5^2)^2 \cdot 5^3 \cdot (7^2)^3} = -\frac{5^2 \cdot 2^3 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot 5^4 \cdot 5^3 \cdot 7^6}$$

$$= -\frac{2^3 \cdot 7^7 \cdot 5^6}{3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^6} = -\frac{2^3 \cdot 7}{3^5 \cdot 5} = -2^3 \cdot 7 \cdot 3^{-5} \cdot 5^{-1}.$$

2. **Simplifiqueu l'expressió següent:**

$$\sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\frac{8}{27}}}$$

Solució

Per a simplificar una expressió amb arrels i potències, s'han de descompondre els nombres de la base i aplicar les propietats de les potències per a arribar a l'expressió més senzilla possible.

Els passos que seguim són:

1) Descompondre la base.

2) Transformar les arrels en potències de fraccions.

3) Operar els exponents seguint les propietats de les potències:

$$\sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\frac{8}{27}}} = \sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\frac{2^3}{3^3}}} = \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}} = \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{3}} = \frac{2}{3}$$

3. **Racionalitzeu l'expressió següent:**

$$\frac{4}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$$

Solució

Racionalitzar una fracció consisteix a eliminar les arrels del denominador per obtenir una fracció equivalent:

Començarem multiplicant el numerador i el denominador pel conjugat del denominador $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, i utilitzarem que $\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 3 - 5 = -2$. Amb tot això tenim:

$$\frac{4}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{4 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)} = \frac{4 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)}{3 - 5} = \frac{4 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)}{-2} = -2 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)$$

4. **Racionalitzeu l'expressió següent:**

$$\frac{5}{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}}$$

Solució

Comencem per eliminar l'arrel cúbica del denominador multiplicant numerador i denominador per $\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2$

$$\frac{5\cdot\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{5\cdot\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2}{1+\sqrt{2}}$$

Ara procedim com en l'exemple anterior multiplicant i dividint amb el conjugat del denominador i, aplicant la igualtat notable d'una suma per una diferència, obtenim:

$$\frac{5\cdot\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{5\cdot\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{1-2}=-5\cdot\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)$$

Exercicis per a practicar amb les solucions

5. **Simplifiqueu les expressions següents expressant com una sola potència, arrel, etc. segons cada expressió:**

(a) $x\sqrt{x\sqrt{x}}$

(b) $7^2 \cdot 3^4 \cdot \sqrt{7^2 \cdot 3^3}$

(c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5^7}}$

(d) $x\sqrt{3} + y\sqrt{5} - 4x\sqrt{3} + 6y\sqrt{5}$

(e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[3]{2^2}$

(f) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt[3]{-27}}}$

(g) $\dfrac{\sqrt{180} + \sqrt{45} - \sqrt{405}}{3 - \sqrt{5}}$

6. **Racionalitzeu les expressions següents:**

(a) $\dfrac{3\sqrt{5} + 7\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

(b) $\dfrac{4 + \sqrt{5}}{6\sqrt{3}}$

(c) $\dfrac{5 - 3\sqrt{3}}{5 + 3\sqrt{3}}$

Solucions

5. (a) $x^{\frac{7}{4}}$
   (b) $7^3 \cdot 3^{\frac{11}{2}}$
   (c) $5^{\frac{7}{12}}$
   (d) $-3x\sqrt{3} + 7y\sqrt{5}$
   (e) $2^{\frac{5}{3}}$
   (f) $(-3)^{-\frac{1}{3}}$
   (g) 0

6. (a) $\dfrac{1 + 4\sqrt{10}}{3}$
   (b) $\dfrac{4\sqrt{3} + \sqrt{15}}{18}$
   (c) $15\sqrt{3} - 26$

2. Equacions

Índex

2.1. Expressions algebraiques

2.1.1. Definició

Per **expressió algebraica** s'entén qualsevol combinació de lletres i nombres relacionats entre ells per signes d'operacions. Així, si bé una expressió numèrica ve donada per nombres i signes d'operació entre ells, una expressió algebraica també conté lletres, que operen entre ells o amb altres nombres.

Què és una expressió algebraica?
Per expressió algebraica s'entén qualsevol combinació de nombres, lletres i signes d'operació. Les lletres d'una expressió algebraica s'han de tractar com si fossin nombres, i per això es poden sumar, restar, multiplicar i dividir, seguint les mateixes regles que els nombres. Les expressions algebraiques permeten expressar operacions entre quantitats desconegudes substituint el valor desconegut per una lletra concreta.

Exemple. Expressió algebraica.

$$a - 23 \cdot c + 5 \cdot d - 7 \cdot a \cdot y$$

Les lletres d'una expressió algebraica s'han de tractar com si fossin nombres: es poden sumar, restar, multiplicar i dividir, i compleixen, com veurem, les mateixes propietats de les operacions entre nombres.

Les expressions algebraiques es poden usar en problemes reals, en els quals es desconeix el valor d'algun element. Així, per exemple, si una persona va a comprar i adquireix 3 kg de llimones a 1.09 € el quilogram, i 2 kg de patates a 0.78 € el quilogram, per a calcular el valor de la compra s'ha de fer:

$$3 \cdot 1.09 + 2 \cdot 0.78$$

Ara bé, si no es coneix el preu del quilogram de llimones ni tampoc el preu del quilogram de patates, es pot associar a cada valor una lletra (relacionada amb el nom sempre que sigui possible). Així, si per exemple usem l per al preu per quilogram de les llimones, i p per al preu per quilogram de les patates, el valor de la compra anterior vindria donat per l'expressió següent:

$$3 \cdot l + 2 \cdot p$$

Aquesta expressió algebraica permet calcular el valor total de la compra en el moment en què es coneguin els preus per quilogram de les llimones i de les patates, substituint les dues lletres pels seus valors reals.

En les expressions algebraiques, en multiplicar un nombre per una lletra normalment no es posa el signe de multiplicació, sinó que es manté la lletra seguida del nombre, i amb aquesta notació se sobreentén que es tracta d'un producte. D'acord amb aquest conveni, l'expressió algebraica anterior també es pot escriure així:

$$2l + 3p$$

Les lletres d'una expressió algebraica també es poden substituir per nombres concrets. Per exemple, en l'expressió algebraica $4x - 2y + 6$ es pot substituir la lletra x pel valor 3, i la lletra y pel valor 4. En aquest cas, l'expressió algebraica es transforma en

$$4 \cdot \underbrace{3}_{x} + 2 \cdot \underbrace{4}_{y} + 6$$

Aleshores, es diu que el valor numèric de l'expressió algebraica $4x - 2y + 6$, quan la x val 3 i y val 4, és igual a $4 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 6$, és a dir, és 10. En definitiva, el **valor numèric d'una expressió algebraica** es troba substituint-ne les lletres per nombres concrets, operant i obtenint-ne el resultat. És evident que el valor numèric d'una expressió algebraica depèn dels valors concrets que reben les lletres.

Exemple. Valors numèrics d'una expressió algebraica

Donada l'expressió algebraica

$$4x - 2y + 6$$

Si $x = 5$ i $y = 2$, el seu valor numèric és igual a $4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 6 = 22$

Si $x = -3$ i $y = -1$, el seu valor numèric és igual a $4 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) + 6 = -2$

Si $x = -2$ i $y = 5$, el seu valor numèric és igual a $4 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 + 6 = -12$

2.1.2. Elements

Una expressió algebraica es pot escriure a partir de diverses sumes (recordem que les restes són sumes amb l'oposat) de certs productes mixtos (o, fins i tot, divisions, encara que, de moment, no es faran servir divisions amb denominadors que continguin lletres) de nombres i lletres. Cadascun d'aquests sumands es denomina **terme**.

Quins són els elements bàsics i les propietats de les expressions algebraiques? Els sumands d'una expressió algebraica estan formats per lletres i nombres. Cada un dels sumands es denomina terme i les lletres es denominen variables. Una expressió algebraica es pot convertir en una d'equivalent aplicant les propietats de les operacions entre lletres i nombres, que són les mateixes que les propietats de les operacions entre nombres reals.

Exemple. Termes d'una expressió algebraica.
Donada l'expressió algebraica:

$$a - 3c + 2d - 5ax$$

identifiquem:

Termes (n'hi ha 4): $a, -3c, 2d$ i $-5ax$

Variables: a, c, d, x.

Recordem que entre variables o entre nombres i variables és preferible obviar els signes de multiplicar $\cdot$ o $\times$.

Propietats de la suma i el producte. Les propietats de la suma i el producte de nombres i lletres són les propietats ja conegudes de les operacions entre nombres reals.

- **Element neutre de la suma.** És el 0 perquè, sumat a qualsevol altra lletra o nombre, no el modifica: $a + 0 = 0 + a = a$.
- **Element neutre del producte.** És l'1 perquè, multiplicat per qualsevol altra lletra o nombre, no el modifica: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
- **Element oposat d'a.** És $-a$ perquè, sumats, el resultat és l'element neutre de la suma: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- **Invers d'a.** És $\frac{1}{a}$ (essent $a \neq 0$) perquè el seu producte és l'element neutre del producte: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.
- **La resta.** És l'operació que consisteix a sumar l'oposat: $a - b = a + (-b)$.
- **La divisió.** És l'operació que consisteix a multiplicar per l'invers: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, essent $b \neq 0$.
- **Propietat commutativa de la suma.** La suma de dos elements no depèn de l'ordre en què es fa: $a + b = b + a$.
- **Propietat associativa de la suma.** La suma de tres elements no depèn de l'ordre en què es facin les diferents sumes: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$.
- **Propietat commutativa del producte.** El producte de dos elements no depèn de l'ordre en què es fa: $a \cdot b = b \cdot a$.

- **Propietat associativa del producte.** El producte de tres elements no depèn de l'ordre en què es facin els diferents productes: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- **Propietat distributiva del producte respecte de la suma.** Un producte d'un element per una suma es pot descompondre com la suma dels productes de l'element per cadascun dels sumands: $a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c$.

2.1.3. Manipulació

Amb la finalitat de simplificar una expressió algebraica d'una certa longitud, s'han d'aplicar les propietats de la suma, resta, multiplicació i divisió. La **simplificació** consisteix a convertir l'expressió original en una altra que en sigui equivalent però amb el mínim nombre de termes possible. Encara que la manera de simplificar no és única (les propietats es poden aplicar en un altre ordre), el resultat final és generalment molt semblant.

En què consisteix simplificar una expressió algebraica? La simplificació d'una expressió algebraica consisteix en la seva reducció al mínim nombre de termes possible utilitzant les propietats de les operacions que hi intervenen. Encara que les propietats es poden aplicar en ordre diferent, el resultat final ha de ser el mateix.

Vegem com utilitzar les diferents propietats en la mateixa expressió amb l'objectiu de simplificar-la. Considerem l'expressió algebraica

$$a - 4b - 3a + 5a - b$$

1) Es resol la suma $-3a + 5a$ utilitzant la propietat distributiva:

$$-3a + 5a = (-3 + 5) \cdot a = 2a$$

Per tant,

$$a - 4b - 3a + 5a - b = a - 4b + 2a - b$$

2) Per la propietat commutativa, podem agrupar els termes amb a i els termes amb b

$$a - 4b + 2a - b = a + 2a - 4b - b$$

3) Per la propietat de l'element neutre de la suma, $a = 1 \cdot a$

$$a - 4b + 2a - b = 1a + 2a - 4b - 1b$$

4) Per la propietat distributiva aplicada dues vegades, una als termes amb a i l'altra als termes amb b,

$$1a + 2a - 4b - 1b = (1 + 2) \cdot a + (-4 - 1) \cdot b$$

i simplificant una mica més,

$$1a + 2a - 4b - 1b = 3a - 5b$$

Exemple. Simplificació

$a - 4b - 3a + 5a - b$ és equivalent a $3a - 5b$.

Aquesta última expressió, com que és més breu que l'anterior, en facilita la manipulació. Per això, és recomanable simplificar tota expressió algebraica, de la mateixa manera que se simplifica una fracció fins a obtenir-ne la fracció irreductible o es troba el resultat d'una expressió numèrica.

2.1.4. Propietats

Una **igualtat entre expressions numèriques** és formada per dues expressions numèriques, denominades *membres de la igualtat*, i un *signe d'igualtat* (=) interposat entre ambdues. Les igualtats poden ser certes o falses.

Què són les igualtats entre expressions numèriques i entre expressions algebraiques? Una igualtat entre expressions numèriques és formada per dues expressions numèriques i un signe d'igualtat interposat entre ambdues, les quals poden ser certes o falses. Una igualtat entre expressions algebraiques és formada per dues expressions numèriques i un signe d'igualtat interposat entre ambdues, les quals poden ser certes o falses, però també poden ser ni certes ni falses.

- Una **igualtat numèrica és certa** si el resultat del membre de l'esquerra és igual al resultat del membre de la dreta. Per exemple:

  $$3 \cdot 4 - 5 = 38 - 15 \cdot 2 - 1$$

  ja que tant el resultat de la dreta com el de l'esquerra és 7. En aquest cas, es diu que ambdues *expressions numèriques* són *iguals*.

- Una **igualtat numèrica és falsa** si el resultat del membre de l'esquerra no és igual al resultat del membre de la dreta. Per exemple, aquesta igualtat és falsa:

  $$4 \cdot (-2) + 8 = 3 - 7 \cdot 11$$

  ja que el resultat de l'esquerra és 0, mentre que el resultat de la dreta és -74.

De manera semblant a una **igualtat numèrica, una igualtat entre expressions algebraiques** és formada per dues expressions algebraiques, denominades *membres de la igualtat*, i un signe d'igualtat (=) interposat entre ambdues. Les igualtats algebraiques també poden ser certes o falses.

- Una **igualtat algebraica és certa** si l'expressió algebraica del membre de l'esquerra es pot convertir en la de la dreta aplicant-hi les propietats de les operacions descrites anteriorment. Per exemple:

  $$a - 4b - 2a + 5a - b = 4a - 5b$$

  és una igualtat certa perquè $a - 4b - 2a + 5a - b$ es pot transformar en $4a - 5b$ usant les propietats de les operacions.

- Una **igualtat algebraica és falsa** si l'expressió algebraica del membre de l'esquerra no es pot convertir en la de la dreta. Per exemple:

  $$3a + 2 = 3a$$

  és una igualtat falsa perquè $3a + 2$ no pot mai resultar $3a$.

Ara bé, hi ha igualtats algebraiques que no són ni certes ni falses. Per exemple:

$$2a - 5b - 4 = 3x + y$$

En aquest cas, no es pot afirmar que l'expressió de la dreta es pugui transformar en la de l'esquerra, ni tampoc que això sigui impossible. Aquest tipus d'igualtats són les que poden denominar-se pròpiament equacions, i en parlem en el proper apartat.

2.2. Equacions

2.2.1. Definició

Una igualtat entre expressions algebraiques també es pot denominar equació. En aquest cas, les lletres es denominen **incògnites**.

Exemple. Equacions.

$$\begin{aligned} 4a - b + c &= 3a - 6b + 7 \\ 2x + 2y + 8 &= 2x + 7 \end{aligned}$$

En el primer cas, les incògnites són a, b i c. En el segon cas, són x i y.

Què és una equació i què és una solució d'una equació? Una igualtat entre expressions algebraiques també es pot denominar equació. Les igualtats entre expressions algebraiques més interessants són aquelles en què no se'n pot establir a priori la certesa o falsedat. La solució d'una equació correspon a aquells nombres que, substituint-los en les incògnites, permeten transformar l'equació en una igualtat numèrica certa.

Cada un dels sumands de cadascun dels membres es denomina **terme**. El nombre que multiplica cada terme es denomina **coeficient**. Un terme que no conté cap incògnita es denomina **terme numèric** o **terme independent**.

Cada terme d'una equació pot tenir diverses incògnites que es multipliquen. El nombre d'incògnites que es multipliquen és el **grau del terme**. Es diu que el **grau d'una equació** és el màxim grau dels termes que formen l'equació.

Exemple. Grau d'un terme i grau d'una equació.
Donada l'equació

$$3xy - 2a + 5x^2y^2 = x + 11a^2x$$

El *terme* $11a^2x$ té 3 incògnites que es multipliquen, una x i dues a. Per tant, el seu *grau* és 3.

El *grau de l'equació* és 4, ja que el terme amb més incògnites és $5x^2y^2$, i en té 4 (dues x i dues y).

Les incògnites de cada membre d'una equació es poden substituir per valors numèrics concrets. Per exemple, en l'equació $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$ es pot substituir la x per 1, i la y per 5 obtenint

$$2 \cdot \underbrace{1}_{x} + 4 \cdot \underbrace{5}_{y} - 5 = 4 \cdot \underbrace{1}_{x} - 5 \cdot \underbrace{5}_{y}$$

D'aquesta manera, l'equació es transforma en una igualtat entre expressions numèriques. En aquest cas, la igualtat numèrica resultant és falsa perquè el membre de l'esquerra resulta 17, mentre que el de la dreta resulta −21.

Aquest procés es denomina **substitució de les incògnites d'una equació per nombres** i, com s'ha vist, dona lloc a una igualtat numèrica. Aquesta igualtat numèrica resultant pot ser:

- Falsa, com en l'últim exemple.
- Certa. Per exemple, si substituïm en la mateixa equació 2 en el cas de la x, i 1 en el cas de la y, obtindrem $2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 5 = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1$, i ambdós membres resulten iguals a 3.

En casos com aquest últim, quan es tracta d'una igualtat numèrica certa i es troba el valor que fa certa la igualtat, es diu que s'ha trobat una **solució de l'equació**.

Una solució de l'equació $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$ es compon del canvi de la x per 2, i de la y per 1. Dit d'una altra manera, $x = 2$ i $y = 1$ és una solució de l'equació anterior perquè fa certa la igualtat. D'aquí diem que una solució d'una equació ha d'atorgar un valor a cadascuna de les seves incògnites.

2.2.2. Solucions

La **solució d'una equació** es defineix com cadascun dels valors de les variables per als quals la igualtat es compleix. Es diu "cadascun dels valors" perquè una equació pot tenir més d'una solució.

Exemple. Solucions d'una equació.
Donada l'equació

$$2x + 4y - 5 = 4x - 5y$$

$x = 2$ i $y = 1$ és una solució, ja que $\underbrace{2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 5}_{3} = \underbrace{4 \cdot 2 - 5 \cdot 1}_{3}$.

$x = 11$ i $y = 3$ és una solució, ja que $\underbrace{2 \cdot 11 + 4 \cdot 3 - 5}_{29} = \underbrace{4 \cdot 11 - 5 \cdot 3}_{29}$.

Què són les equacions equivalents, i com es poden trobar? Dues (o més) equacions són equivalents si tenen les mateixes solucions. Tot i que no sempre és senzill determinar si dues equacions són equivalents, per a trobar una equació equivalent a una altra, només cal sumar, restar, multiplicar o dividir ambdós membres d'aquesta equació per un mateix nombre. Aquesta manipulació d'una equació permet trobar-ne les solucions.

2.2.3. Equacions equivalents

Dues equacions que tenen exactament les mateixes solucions es denominen **equacions equivalents**. Així, les equacions

$$7x - 3 = 6x - 4 \quad \text{i} \quad 14x - 6 = 12x - 8$$

són equivalents, ja que l'única solució en ambdós casos és

$$x = -1$$

Vegem-ho:

- Per a la primera equació $7 \cdot (-1) - 3 = 6 \cdot (-1) - 4$, el resultat en ambdós membres és -10.

- Per a la segona equació $14 \cdot (-1) - 6 = 12 \cdot (-1) - 8$, el resultat en ambdós membres és -20.

Per tant, $x = -1$ resol ambdues equacions, cosa que confirma que són equacions equivalents.

No sempre resulta fàcil trobar un procediment per a determinar si dues equacions són equivalents. En tot cas, és interessant saber com es pot transformar una equació per a obtenir-ne una altra que sigui equivalent, perquè és una de les manipulacions que permeten trobar solucions d'una equació.

Aquests són els procediments usuals:

- *Sumant o restant el mateix nombre amb ambdós membres.* Per exemple, si de l'equació

  $$7x - 3 = 6x - 4$$

  es resta 2 a banda i banda, l'equació resultant és

  $$7x - 3 - 2 = 6x - 4 - 2$$

  I, operant, s'obté $7x - 5 = 6x - 6$. La solució en ambdós casos és $x = -1$. Vist això, es pot afirmar que $7x - 3 = 6x - 4$ i $7x - 5 = 6x - 6$ són equacions equivalents.

- *Multiplicant o dividint ambdós membres pel mateix nombre.* Per exemple, si els membres de l'equació

  $$7x - 3 = 6x - 4$$

  es multipliquen per 3, s'obté

  $$3 \cdot (7x - 3) = 3 \cdot (6x - 4)$$

  és a dir $21x - 9 = 18x - 12$. Ambdues equacions tenen per solució $x = -1$. Per tant, es conclou que $7x - 3 = 6x - 4$ i $21x - 9 = 18x - 12$ són equacions equivalents.

2.2.4. Procés de resolució

Abans de començar a resoldre una equació, s'ha de simplificar al màxim. Per **simplificar una equació** s'entén el fet de reduir cada membre a una expressió amb un únic terme numèric i agrupar els termes amb la mateixa variable.

Què convé fer abans de resoldre una equació? Abans de resoldre una equació, convé simplificar-la al màxim agrupant en cada membre de l'equació els termes amb la mateixa variable que hi intervenen. Si l'equació conté denominadors, és molt recomanable també buscar una equació equivalent que no en tingui.

Exemple. Simplificar una equació.

$$4x + 3 - 2x - 1 = 10 + 6x - 2 - x$$

Cal simplificar ambdós membres unint els elements dependents de x, d'una banda, i els termes numèrics, de l'altra. Així, es converteix en l'equació equivalent:

$$2x + 2 = 8 + 5x$$

En els casos en què l'equació conté nombres fraccionaris, convé (tot i que no és im- prescindible) transformar l'equació en una altra d'equivalent que no contingui denominadors.

Per exemple, per a eliminar els denominadors de l'equació

$$\frac{3x}{5} - \frac{2}{3} = 4x - \frac{1}{3}$$

es pot seguir aquest procediment:

1) Es busca l'MCM dels denominadors. En el cas de l'exemple, $\text{MCM}(5,3) = 15$.

2) S'escriu el mateix denominador en tots els termes, es divideix l'MCM entre el denominador que tenen (si no en tenen, vol dir que és igual a 1) i es multiplica el resultat pel numerador.

   En l'exemple, l'equació anterior s'escriuria

   $$\frac{9x}{15} - \frac{10}{15} = \frac{60x}{15} - \frac{5}{15} \text{ i, de manera equivalent, } \frac{9x-10}{15} = \frac{60x-5}{15}.$$

3) S'elimina el denominador d'ambdós membres (multiplicant-los pel valor d'aquest mateix denominador). D'aquesta manera, queda una equació equivalent sense denominadors.

   En l'exemple, es multipliquen els dos membres per 15:

   $$15 \cdot \frac{9x-10}{15} = 15 \cdot \frac{60x-5}{15}$$

   d'on resulta

   $$9x - 10 = 60x - 5$$

   on aquesta última és una equació sense denominadors.

Exemple. Simplificar una equació amb nombres fraccionaris.
A l'hora de simplificar l'equació

$$\frac{3x}{5} - \frac{2}{3} = 4x - \frac{1}{3}$$

calculem l'MCM dels denominadors, trobem els numeradors associats i obtenim l'equació equivalent

$$\frac{9x - 10}{15} = \frac{60x - 5}{15}$$

d'on resulta l'equació equivalent sense denominadors

$$9x - 10 = 60x - 5$$

Per **resolució d'una equació** s'entén el procés de trobar les solucions d'una equació. Aquest procés consisteix a manipular l'equació per tal d'aconseguir les incògnites i els valors numèrics per separat. De manera equivalent, es pot parlar del procés d'**aïllar la incògnita de l'equació**.

El procés d'aïllament, base de la resolució de qualsevol equació, consta de tres passos principals: agrupar els termes numèrics, agrupar els termes del mateix grau i eliminar dequadament els coeficients de les incògnites. La manera de procedir en aquest últim cas dependrà del grau d'aquests termes.

En què consisteix resoldre una equació? Consisteix a cercar totes les seves solucions. La dificultat en la resolució depèn de molts factors, entre els quals hi ha el nombre d'incògnites i el grau de l'equació. A vegades, només és possible trobar una aproximació d'alguna de les solucions; en aquest cas es diu que s'ha trobat una solució numèrica de l'equació.

Vegem un exemple amb una equació de primer grau. Volem resoldre l'equació de primer grau

$$2x - 4 = 14 - 4x$$

Què significa aïllar una incògnita d'una equació? El procés pel qual una incògnita d'una equació queda en solitari en un dels membres s'anomena aïllar la incògnita de l'equació. Aquest procés és a la base de la resolució de tota equació.

Procedirem així:

1) S'agrupen els termes numèrics:

$$2x - 4 - (-4) = 14 - 4x - (-4)$$

Se simplifica i s'obté

$$2x = 18 - 4x$$

2) S'agrupen els termes del mateix grau, en aquest cas només de grau 1:

$$2x - (-4x) = 18 - 4x - (-4x)$$

Se simplifica:

$$6x = 18$$

3) S'eliminen de manera adequada els coeficients de les incògnites, en aquest cas només una, la x:

$$\frac{6x}{6} = \frac{18}{6}$$

simplificant

$$\boxed{x = 3}$$

Així aconseguim aïllar la incògnita i, alhora, després d'aïllar la incògnita, concloem que la solució de l'equació és $x = 3$.

La recerca de les solucions d'una equació, o directament la resolució d'una equació, sol ser un problema matemàtic no sempre fàcil d'abordar. En tot cas, hi ha un cert tipus d'equacions, amb unes característiques molt concretes, que tenen una resolució relativament senzilla i metòdica. Les característiques que determinen la dificultat en la resolució d'una equació són:

- El *nombre d'incògnites de l'equació*. Com més petit és el nombre d'incògnites, més senzilla en resulta la resolució. Així, la més usual té 1, 2 o, com a màxim, 3 incògnites. De totes maneres, si no es diu explícitament el contrari, se sol reservar el terme *equació* per a les equacions amb un sola incògnita.
- El *grau de l'equació*, és a dir, el màxim grau dels termes que formen l'equació. De manera general, es pot dir que com més petit és el grau d'una equació, més senzill és resoldre-la.

La complexitat d'una equació pot impedir-ne la resolució exacta. En aquests casos es pot intentar una resolució numèrica, és a dir, una resolució amb valors aproximats.

Per exemple, l'equació $x^3 - 3x + 2 = x - 5$ no és una equació senzilla de resoldre de manera exacta. Una solució numèrica d'aquesta equació pot ser $x = -2.5891$, ja que, substituint en l'equació, s'obté

$$(-2.5891)^3 - 3 \cdot (-2.5891) + 2 = (-2.5891) - 5 \Longrightarrow -7.5886 \approx -7.5891$$

És a dir, els resultats són molt pròxims. Per això, es tracta d'una solució numèrica.

La recerca de solucions numèriques d'una equació és un dels problemes matemàtics que ha experimentat un progrés més gran gràcies a la incorporació cada vegada més generalitzada d'ordinadors potents que permeten fer una gran quantitat de càlculs en poc temps.

2.3. Equacions de primer grau

2.3.1. Definició

Es diu que una **equació és de primer grau, o lineal, amb una incògnita** quan es tracta d'una equació amb una única incògnita que apareix un cop per element com a màxim, és a dir, sempre amb exponent 1.

Exemple. Equació de primer grau amb una incògnita.

$$3x - 2 = 5x + 6$$

Què és una equació de primer grau amb una incògnita? És una equació amb una única incògnita que apareix amb exponent 1. Una equació de primer grau té en general una única solució, que és un nombre real. Tota equació de primer grau amb una incògnita es pot expressar en la seva forma normal $ax + b = 0$, amb $\text{MCD}(a, b) = 1$.

2.3.2. Solucions

Pel que fa al tipus de solució, si n'hi ha, pot ser un nombre natural, enter, racional o real.

Exemple. Solucions d'una equació de primer grau amb una incògnita.

$x = -1$ és la solució de l'equació $1 - x = 2x + 4$ perquè

$$\underbrace{1 - (-1)}_{2} = \underbrace{2 \cdot (-1) + 4}_{-2+4}$$

$x = \dfrac{3}{4}$ és la solució de l'equació $2 - 3x = x - 1$ perquè

$$\underbrace{2 - 3 \cdot \frac{3}{4}}_{2-\frac{9}{4}} = \underbrace{\frac{3}{4} - 1}_{-\frac{1}{4}}$$

Pel que fa al nombres de solucions, una equació lineal amb una incògnita pot:

- **No tenir cap solució.** Per exemple,

  $$5x - 7 = 5x + 12$$

  no té solució, ja que en simplificar-la obtenim l'equació equivalent $0x = 19$ i no hi ha cap nombre real que, multiplicat per 0, doni 19. Aquests casos són *igualtats algebraiques falses.*

- **Tenir solució.** En aquest cas es poden donar dues possibilitats:

  ◦ **Qualsevol nombre és una solució de l'equació.** Per exemple, l'equació

  $$5x - 3 = 5x - 3$$

  té com a solució qualsevol nombre (té infinites solucions), ja que en simplificar-la obtenim l'equació equivalent $0x = 0$, i tot nombre real multiplicat per zero és zero. En aquests casos es tracta d'*igualtats algebraiques certes.*

  ◦ **Hi ha una única solució.** Per exemple, l'equació

  $$2x - 1 = 3x + 4$$

  només té una solució, que és $x = -5$, ja que l'equació donada és equivalent a l'equació $3x - 2x = 4 + 1$.

La major part d'equacions de primer grau i, és clar, les més interessants, són d'aquest últim tipus. La resolució d'una equació de primer grau s'haurà assolit quan es trobi aquesta única solució.

2.3.3. Procés de resolució

La resolució d'una equació de primer grau consta de diversos passos. Aquests passos es fan amb l'objectiu de convertir l'equació inicial en una equació equivalent però més

Quins són els passos de la resolució d'una equació de primer grau? Són fonamentalment tres: agrupar termes numèrics, agrupar termes de grau 1 i eliminar el coeficient de la incògnita.

senzilla de resoldre. Si aquest procés es repeteix, al final s'obtindrà una equació de resolució immediata. Com que totes les equacions són equivalents, la solució obtinguda en l'últim pas també ho serà de l'equació plantejada inicialment.

Els passos a seguir en aquest procés es poden resumir en tres, que exemplifiquem amb la resolució de l'equació

$$2x + 2 = 8 + 5x$$

Pas 1 *Agrupem tots els termes numèrics que hi apareixen.* Normalment, se solen agrupar en el membre de la dreta. D'aquesta manera, només quedarà un terme numèric en l'equació. El procediment és senzill.

S'ha de restar d'ambdós membres el terme o termes numèrics de l'esquerra, de manera que l'equació resultant sigui equivalent de la inicial.

D'acord amb l'exemple, el terme numèric de l'esquerra és 2. Així, doncs, es tracta de restar-lo en ambdós membres

$$2x + 2 - 2 = 8 + 5x - 2$$

Una vegada simplificada, es transforma en una equació més senzilla que la inicial, perquè el membre de l'esquerra no té terme numèric, sense deixar de ser (i això és fonamental) una equació equivalent a $2x + 2 = 8 + 5x$.

Pas 1
Aquest primer pas és conegut per l'expressió "passar el terme numèric a l'altre membre, canviat de signe". Això és així perquè sembla que aquesta és la transformació que es fa:

$$2x\ +2 = 8 + 5x - 2$$

Aquesta afirmació és falsa, però és una bona manera de recordar i accelerar aquest pas. És convenient, doncs, no oblidar l'autèntic procés que té lloc.

Pas 2 *Agrupem els termes amb incògnita.* Habitualment, s'agrupen els termes amb incògnita en el membre de l'esquerra. El procés és similar al que agrupa el terme numèric.

S'ha de restar a banda i banda el terme o termes de grau 1 del membre de la dreta. D'aquesta manera, s'obté una equació equivalent més senzilla.

En l'exemple, el terme de grau 1 del membre de la dreta és $5x$. Per tant, es tracta de restar-lo d'ambdós membres:

$$2x - 5x = 6 + 5x - 5x$$

que, simplificat, queda

$$-3x = 6$$

En aquest pas es pot esbrinar si l'equació té solució o no en té.

- Si el coeficient de la incògnita és el mateix en tots dos membres
  - *No hi ha solució si el terme numèric no és* 0.
    Per exemple, l'equació
    $$3x = 3x - 2$$
    quedaria, després de fer aquest pas, $0 = -2$, que és una igualtat falsa i, per tant, l'equació no té solució.
  - *Qualsevol nombre és solució de l'equació si el terme numèric és* 0.
    Per exemple, en l'equació
    $$8x = 8x$$

Pas 2
Aquest pas és conegut per l'expressió "passar el terme de grau 1 a l'altre membre, canviat de signe". Això és així perquè aquest és aparentment el procés que se segueix:

$$2x\ -5x = 6 + 5x$$

Aquesta afirmació és falsa, però és una bona manera de recordar i accelerar aquest pas. És convenient, doncs, no oblidar l'autèntic procés que té lloc.

és senzill adonar-se que qualsevol nombre que substitueixi la x és solució de l'equació perquè es tracta d'una igualtat algebraica certa.

- *En cas contrari, l'equació té una única solució.* Ho veurem en el cas de l'exemple estudiat.

$\boxed{\text{Pas 3}}$ *Hem d'"eliminar" els coeficients de la incògnita perquè aquesta quedi sola, és a dir, aïllada en el membre de l'esquerra.* El procediment és també senzill.

Es tracta de dividir ambdós membres de l'equació entre el coeficient que multiplica el terme de grau 1 del membre de l'esquerra.

En l'exemple considerat, el coeficient de grau 1 del membre de l'esquerra és -3. Si dividim ambdós membres entre aquest nombre el resultat és

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{6}{-3}$$

d'on resulta $x = -2$.

És evident, doncs, que la solució de l'equació plantejada inicialment és -2, ja que les equacions intermèdies que s'han anat obtenint són totes equivalents.

Pas 3
Aquest últim pas és conegut per l'expressió "passar el coeficient de la incògnita a l'altre membre, amb l'operació contrària". Això és així perquè aquest és aparentment el procés que se segueix:

$$-3 \cdot x = \frac{6}{-3}$$

Aquesta afirmació és falsa, però és una bona manera de recordar i accelerar aquest pas. És convenient, doncs, no oblidar l'autèntic procés que té lloc.

Exemple. Resoldre una equació de 1r grau amb una incògnita.

$$2x + 2 = 8 + 5x$$

Treballem amb equacions,

$$\begin{aligned} 2x &= 6 + 5x \\ -3x &= 6 \end{aligned}$$

fins a tenir la incògnita aïllada, que, en principi, n'és la solució:

$$x = -2$$

La **comprovació de la solució** (acció recomanable de fer sempre) és ben senzilla. Només cal substituir la x de l'equació inicial pel valor trobat, que en principi n'és la solució.
En aquest cas, $x = -2$

$$4 \cdot (-2) + 3 - 2 \cdot (-2) - 1 = 10 + 6 \cdot (-2) - 2 - (-2)$$

En tots dos membres el resultat és el mateix.

D'acord amb el que hem dit, i tal com acabem de comprovar, el procés de resolució d'una equació de primer grau consisteix fonamentalment a aïllar la incògnita en un dels membres de l'equació per tal que en l'altre membre aparegui la solució de l'equació.

Fórmula de resolució La solució d'una equació de primer grau es pot obtenir a partir d'una fórmula, que es dedueix dels passos descrits en l'apartat anterior. Per a això, en primer lloc, l'equació a resoldre s'ha de convertir en una equació equivalent en què el membre de la dreta sigui 0.

Hi ha una fórmula per a trobar la solució d'una equació de primer grau? La manera més senzilla de trobar la solució d'una equació de primer grau és transformar-la en una equació del tipus $ax + b = 0$, amb $a \neq 0$. Aleshores, la fórmula de la solució d'aquesta equació és $x = \frac{-b}{a}$.

La generalització d'aquest procediment rep el nom de la **forma normal** de l'equació de primer grau amb una incògnita, i es pot escriure sempre d'aquesta manera:

$$a \cdot x + b = 0$$

on x és la incògnita i $a \neq 0$ i b són valors reals coneguts.

En particular, a és el coeficient de la incògnita (que no pot ser 0 perquè si no ja no seria una equació de primer grau) i b és el terme numèric independent. D'aquesta manera, la **solució general** d'una equació d'aquest tipus és

$$x = \frac{-b}{a}$$

Exemple. Deducció de la forma normal i la solució general d'una equació de primer grau.
L'equació

$$4x - 3 = 2x + 5$$

és equivalent a l'equació en forma normal

$$2x - 8 = 0$$

Aleshores, la solució és $x = \frac{8}{2} = 4$.

Exemple. Solucions generals d'una equació de primer grau.

La solució de l'equació $3x - 5 = 0$ és $x = \frac{5}{3}$

La solució de l'equació $2x + 5 = 0$ és $x = \frac{-5}{2}$

La solució de l'equació $-3x - \frac{1}{2} = 0$ és $x = \frac{-1}{6}$

2.4. Equacions de segon grau

2.4.1. Definició

Direm que una **equació** és **de segon grau amb una incògnita** quan tractem una equació amb una sola incògnita que contingui termes de segon grau, és a dir, quan la incògnita estigui elevada al quadrat.

Com s'expressa, de manera general, una equació de segon grau amb una incògnita? Es pot expressar de manera normal. La forma normal de qualsevol equació de segon grau es troba transformant l'equació original en una equació equivalent del tipus $ax^2 + bx + c = 0$, amb MCD$(a, b, c) = 1$.

Exemple. Equacions de segon grau amb una incògnita.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x - 4 &= 2x + 5 \\ 2x^2 - 4x + 5 &= 3x^2 - 5x + 4 \end{aligned}$$

Per a trobar la solució d'una equació de segon grau, s'ha d'expressar en **forma normal**, és a dir, s'ha de trobar la forma equivalent en què el membre de la dreta és igual a 0. De manera general, s'escriu

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on x és la incògnita i $a \neq 0$, b i c són valors reals coneguts.

En particular, a és el coeficient del terme de segon grau (que no pot ser 0 perquè si no ja no seria una equació de segon grau), b és el coeficient del terme de primer grau i c és el terme numèric (o independent).

Tot i que no és imprescindible, és convenient que el coeficient de grau 2 quedi positiu. Si s'arriba a una forma normal en què el terme de segon grau, és a dir, de x^2, és negatiu i es vol positiu, només s'han de multiplicar ambdós membres de l'equació per -1.

Per tal que forma normal estigui simplificada al màxim, cal dividir tots els coeficients per l'MCD de tots, és a dir, dividir tots els coeficients dels diferents termes entre l'MCD(a, b, c).

Exemple. Forma normal d'una equació de segon grau.
La forma normal de l'equació

$$x^2 + 4x - 5 = 3x^2 - 6x + 7$$

ve donada per

$$x^2 + 4x - 5 - 3x^2 + 6x - 7 = 0$$

En operar aquesta expressió, queda

$$-2x^2 + 10x - 12 = 0$$

Si es vol amb terme de segon grau positiu, esdevé

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

I, simplificant al màxim, dividint pel MCD$(2, -10, 12) = 2$ queda

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

2.4.2. Procés de resolució

Són fàcils de resoldre aquelles equacions de segon grau que, en la seva forma normal, $\left(ax^2 + bx + c = 0\right)$, el terme independent és 0 ($c = 0$), o bé les que tenen 0 el coeficient de grau 1 ($b = 0$). Aleshores, en general, les solucions venen donades per

$\boxed{\text{Cas } c = 0}$ Tota equació de segon grau sense terme independent, és a dir, del tipus

$$ax^2 + bx = 0$$

té com a solució el 0 i $\dfrac{-b}{a}$.

$\boxed{\text{Cas } b = 0}$ Les solucions d'una equació de segon grau del tipus

Hi ha equacions de segon grau fàcils de resoldre? Sí. A partir de la seva forma normal, resulten fàcils de resoldre aquelles equacions de segon grau amb coeficient de grau 1 igual a 0, i també les que tenen terme independent igual a 0. Una equació de segon grau sense terme independent, $ax^2 + bx = 0$, té com a solució el 0 i $\frac{-b}{a}$. Una equació de segon grau amb coeficient de grau 1 igual a 0, $ax^2 + c = 0$, té com solució $\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ sempre que $\frac{-c}{a}$ sigui un nombre positiu.

$$ax^2 + c = 0$$

són $x = \sqrt{\dfrac{-c}{a}}$ i $x = -\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$, sempre que $\dfrac{-c}{a}$ sigui un nombre positiu (ja que no hi ha cap nombre real el quadrat del qual sigui igual a un nombre negatiu).

Exemple. Resolucions fàcils d'equacions de segon grau. Cas $c = 0$

$$3x^2 - x = 0$$

és una equació de segon grau sense terme independent.

Per a resoldre-la tan sols és necessari observar que es pot extreure una x de factor comú:

$$3x^2 - x = x(3x - 1) = 0$$

Per tant, l'equació pot transformar-se en

$$x(3x - 1) = 0$$

Es tracta d'un producte de dos nombres, x i $3x - 1$, que ha de ser 0. Per tant, algun d'aquests nombres ha de ser 0. Això vol dir que $x = 0$ o $3x - 1 = 0$ (d'on resulta $x = \frac{1}{3}$).

Podem concloure, doncs, que l'equació de segon grau $3x^2 - x = 0$ té com a solucions el 0 i $\frac{1}{3}$.

Exemple. Resolucions fàcils d'equacions de segon grau. Cas $b = 0$

$$2x^2 - 18 = 0$$

és una equació de segon grau sense terme de grau 1.

En aquest cas, s'ha d'aïllar la x^2 com si es tractés d'una equació de primer grau. Així, quedaria

$$x^2 = \frac{18}{2} = 9$$

D'aquí, observem que les solucions són aquells nombres el quadrat dels quals és 9. Per tant, les solucions són 3 i -3, que es pot escriure $x = \pm 3$ utilitzant el símbol $\pm$.

Fórmula de resolució Com s'ha dit, una equació de segon grau es pot escriure generalment en forma normal així:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on x és la incògnita, a el coeficient de grau 2 (sempre diferent de 0), b el coeficient de grau 1, i c el terme numèric.

De manera general, i d'acord amb aquesta forma normal de les equacions de segon grau, les solucions x venen donades per aquestes fórmules:

Hi ha una fórmula general per a trobar la solució d'una equació de segon grau? Hi ha una fórmula per a trobar totes les solucions d'una equació de segon grau expressada en forma normal, $ax^2 + bx + c = 0$. Aquesta fórmula és

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

on el símbol $\pm$ indica que s'han de distingir dos casos: un en què es fa servir el + i l'altre, en què es considera el $-$.

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{i} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Per a simplificar la notació per a donar les solucions d'una equació de segon grau conjuntament, s'utilitza normalment aquesta fórmula general:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

en la qual el símbol ± significa que s'han de distingir dos casos: un en el qual s'utilitza el + i un altre en el qual s'utilitza el −.

Exemple. Solució general d'una equació de segon grau.
Sigui l'equació

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

Per la fórmula de resolució general:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{10 \pm 2}{4}$$

Per tant, les solucions a l'equació són

$$x_1 = \frac{10 + 2}{4} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{10 - 2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Per a comprovar si els valors obtinguts aplicant la fórmula de resolució són efectivament les solucions, només cal substituir en l'equació les x pels diferents valors trobats. Si satisfan la igualtat, en són solució. Altrament, no ho seran.

Exemple. Comprovació de les solucions d'una equació de segon grau.

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

S'ha obtingut com a solucions $x_1 = 3$ i $x_2 = 2$. Comprovem si efectivament en són solucions:

Si $x = 3 \rightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 2 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 12 = 18 - 30 + 12 = 30 - 30 = 0$, de manera que compleix la igualtat de l'equació.

Si $x = 2 \rightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 2 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 12 = 8 - 20 + 12 = 20 - 20 = 0$, complint de manera que compleix la igualtat de l'equació.

Podem comprovar que aquesta fórmula és correcta per a qualsevol equació de segon grau. Per a això, només cal substituir els valors en l'equació general. És a dir, substituir la x per $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ o $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ a $ax^2 + bx + c = 0$.

Veiem com queda per a $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$a\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + c$$

$$= a\left(\frac{b^2 + b^2 - 4ac - 2b\sqrt{b^2 - 4ac}}{4a^2}\right) + b\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + c$$

$$= \frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b^2 + b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + c$$

$$= \frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b^2 + b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{2ac}{2a}$$

$$= \frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2 - 4ac} - b^2 + b\sqrt{b^2 - 4ac} + 2ac}{2a} = \frac{0}{2a} = 0$$

2.4.3. Solucions

L'estudi de l'arrel quadrada que hi ha en la fórmula de la solució d'una equació de segon grau proporciona el nombre de solucions de l'equació.

L'expressió continguda en l'arrel quadrada de la solució s'anomena **discriminant**, i s'indica amb la lletra grega delta majúscula, Δ.

Així, donada la forma normal d'una equació de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$, el discriminant de la solució és

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Aquest element permetrà establir el nombre de solucions de qualsevol equació de segon grau.

Quantes solucions té una equació de segon grau? Una equació de segon grau en forma normal, $ax^2 + bx + c = 0$, té dues solucions com a màxim. El nombre de solucions es pot determinar a partir del valor discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Si Δ és positiu, l'equació té dues solucions reals; si Δ és negatiu, l'equació no té cap solució real; i si Δ és 0, l'equació té una única solució, denominada solució doble.

- *Si el discriminant és positiu,* $\Delta > 0$ es pot assegurar que l'equació té dues solucions reals diferents, que es poden calcular.
  Per exemple, l'equació

  $$x^2 - 3x + 2 = 0$$

  té dues solucions perquè $\Delta = (-3) \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$.

  En particular, les seves solucions són, aplicant la fórmula:

  $$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

  d'on s'obté $x = 1$ i $x = 2$.

- *Si el discriminant és* 0*,* $\Delta = 0$ es pot assegurar que l'equació té una única solució real, que és una solució doble que es pot calcular.
  Per exemple, l'equació

  $$x^2 - 4x + 4 = 0$$

  té una única solució perquè $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$.
  En aquest cas, la solució única però doble a la vegada és

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^{-}4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

- *Si el discriminant és negatiu,* $\Delta < 0$ es pot assegurar que l'equació no té cap solució real.

  Per exemple, l'equació

  $$2x^2 - 3x + 5x = 0$$

  no té cap solució, ja que $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31 < 0$.

  En aquest cas és impossible aplicar la fórmula perquè no existeix l'arrel quadrada d'un nombre negatiu.

2.4.4. Equacions quadràtiques

Hi ha equacions de grau major que dos que es poden resoldre amb l'ajuda de la fórmula per a les equacions de segon grau. Es tracta d'equacions que tenen, en forma normal, tres termes com a màxim: el terme numèric, un terme de qualsevol grau i altre terme de grau doble de l'anterior. Aquesta equacions reben el nom d'**equacions de tipus quadràtic**.

Què és una equació de tipus quadràtic? És aquella que té, en forma normal, un terme independent, un terme de grau qualsevol i un altre terme amb grau el doble de l'anterior. Aquest tipus d'equacions es poden resoldre de manera semblant a les equacions de segon grau, ja que l'expressió de l'equació quadràtica és similar a les de segon grau.

Exemple. Equacions de tipus quadràtic.

Són equacions de tipus quadràtic,

$$4x^8 + 5x^4 + 10 = 0$$
$$3x^{10} + x^5 - 15 = 0$$

perquè tenen dos termes dependents d'una incògnita de manera que un grau és el doble que l'altre:

- En el primer exemple, el grau de $4x^8$ és el doble que el grau de $5x^4$
- En el segon cas, el grau del terme $3x^{10}$ és el doble del grau del terme x^5

Com que aquestes equacions tenen un terme de grau el doble que un altre, de manera que aquest és un terme numèric, podem interpretar l'equació original com una de segon grau. Atesa aquesta particularitat, aquests tipus d'equacions es poden resoldre adonant-se que els termes dobles dels altres es poden escriure com a potències de 2.

D'acord amb això, notem, retornant als exemples anteriors, que:

$4x^8 + 5x^4 + 10 = 0$ es pot escriure $4(x^4)^2 + 5x^4 + 10 = 0$

$3x^{10} + x^5 - 15 = 0$, que es pot escriure $3(x^5)^2 + x^5 - 15 = 0$.

Si s'observen aquestes expressions de les equacions originals, se'n pot comprovar la gran semblança amb una equació de segon grau. L'única diferència de resolució ha de ser que se substitueix la incògnita per una potència d'aquesta incògnita. En tot cas, la fórmula ha de ser molt semblant a la fórmula de l'equació de segon grau.

El cas més senzill d'equació de tipus quadràtic és la denominada **equació biquadrada**, una equació de quart grau que només té, en forma normal, els termes de grau 4, 2 i el terme independent, que equival a grau 0.
Vegem-ho amb un exemple:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

és una equació biquadrada. En reescriure aquesta equació de manera que s'assembli a una equació de segon grau, queda

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$$

Si considerem que la incògnita d'aquesta equació és x^2, aplicant la fórmula de resolució de l'equació de segon grau, la solució ve donada per

$$(x^2) = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2}$$

Per tant, $x^2 = 4$ o $x^2 = 9$. Amb això hauríem trobat els valors per a x^2.
Per acabar, es fa necessari descobrir els valors de la x.

Si $x^2 = 9$, $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Si $x^2 = 4$, $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

Per tant, les possibles solucions de l'equació biquadrada són 2, −2, 3 i −3.
Per a comprovar si són efectivament solucions de l'equació original, només cal substituir la x de l'equació original per cadascun dels valors trobats.

Exemple. Equació biquadrada i la seva resolució.
L'equació

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

es pot reescriure

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$$

En aplicar la fórmula de l'equació de segon grau,

$$x^2 = \{4, 9\}$$

Per tant, les possibles solucions són $x = \{2, -2, 3, -3\}$

De manera general, es pot concloure que una equació biquadrada pot tenir des de zero fins a quatre solucions.

La resta d'equacions de tipus quadràtic es poden resoldre de manera semblant.
Per exemple:

$$3x^8 - 6x^4 - 9 = 0$$

es pot transformar en

$$3(x^4)^2 - 6x^4 - 9 = 0$$

i, per tant, aplicant la fórmula de la resolució de les equacions de segon grau, les solucions vindrien donades per

$$x^4 = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9)}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm 12}{6}$$

d'on sóbté que $x^4 = 3$ o $x^4 = -1$. Per tant:

Si $x^4 = 3$, s'obté que $x = \pm\sqrt[4]{3}$,

Si $x^4 = -1$, no hi ha solució, ja que no hi ha cap nombre que, elevat a 4, resulti -1.

Per tant, les solucions de l'equació anterior són $x = +\sqrt[4]{3}$ i $x = -\sqrt[4]{3}$.

De manera general, concloem que les equacions de tipus quadràtic tindran, com a màxim, un nombre de solucions igual al grau de l'equació.

2.5. Inequacions

2.5.1. Definició

Una **inequació** és una desigualtat entre expressions algebraiques. Els signes utilitzats per a marcar aquestes desigualtats són $<$ (*més petit que*), $>$ (*més gran que*), $\leq$ (*més petit o igual que*) i $\geq$ (*més gran o igual que*).

Què és una inequació? És una desigualtat entre expressions algebraiques. Com en les equacions, les solucions són valors numèrics que, en substituir les variables en la inequació, fan que la desigualtat numèrica resultant sigui certa.

Exemple. Inequació.
Són exemples d'inequacions,

$$\begin{aligned} 3x - a &< 2x - 1 \\ 2x + 4y - 5 &\geq 4x - 5y \end{aligned}$$

2.5.2. Solucions

Com en el cas de les equacions, les incògnites de cada membre d'una inequació es poden substituir també per valors numèrics.
Per exemple, en la inequació

$$2x + 4y - 5 \geq 4x - 5y$$

es poden substituir la x per 1 i la y per 5. Aleshores,

$$2 \cdot \underbrace{1}_{x} + 4 \cdot \underbrace{5}_{y} - 5 \geq 4 \cdot \underbrace{1}_{x} - 5 \cdot \underbrace{5}_{y}$$

D'aquesta manera, la inequació es transforma en una desigualtat entre expressions numèriques. En cas que sigui certa, es diu que s'ha trobat una **solució de la inequació**.
Així, una solució de la inequació plantejada consisteix a substituir la x per 2 i la y per 1. Dit d'una altra manera, $x = 2$ i $y = 1$ és una solució de la inequació anterior.

S'ha de tenir en compte que:

- Una solució d'una inequació ha d'atorgar un valor a cadascuna de les seves incògnites.
- Una inequació pot tenir més d'una solució.
  Per exemple, en el cas de la inequació plantejada, una altra solució podria ser $x = 1$ i $y = 3$, ja que
  $$2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 5 \geq 4 \cdot 1 - 5 \cdot 3$$
- Dues inequacions que tenen les mateixes solucions es denominen **inequacions equivalents**. Es pot trobar una inequació equivalent a una altra utilitzant procediments similars als coneguts per a les equacions i que podem resumir així:
  - *Sumar o restar el mateix nombre amb tots dos membres.*
  - *Multiplicar o dividir ambdós membres amb el mateix nombre (diferent de* 0*).* En aquest cas, cal destacar que si el factor pel qual es multipliquen (o es divideixen) ambdós membres és negatiu, el signe de la desigualtat canvia d'orientació (és a dir, es transforma en , i es transforma en <).

    Per exemple, donada la inequació
    $$3x + 4 < 2 - x$$
    una inequació equivalent es pot obtenir multiplicant ambdós membres per -2, de manera que esdevé
    $$-2 \cdot (3x + 4) > -2 \cdot (2 - x)$$
    i, simplificats els signes, queda
    $$-6x - 8 > -4 + 2x$$
    Això és així perquè, com sabem, en multiplicar (o dividir) ambdós membres d'una desigualtat per un nombre negatiu, la desigualtat canvia l'orientació.

2.5.3. Procés de resolució

Interval de la recta real. Per a **resoldre inequacions**, és necessari treballar amb intervals. Recordem alguns dels conceptes descrits en el tema sobre els nombres.

Vam veure que els extrems d'un interval poden pertànyer o no a l'interval. En funció de si els extrems pertanyen o no a l'interval, es distingeixen diferents tipus d'interval:

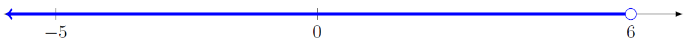
- $\boxed{\text{Interval obert}}$ Cap dels dos extrems no pertanyen a l'interval. En el cas de l'interval d'extrems -5 i 6, s'escriu $(-5, 6)$ i a sobre de la recta real es representa per

- $\boxed{\text{Interval tancat}}$ Els dos extrems pertanyen a l'interval. En el cas de l'interval d'extrems -5 i 6, s'escriu $[-5, 6]$ i a sobre de la recta real es representa per

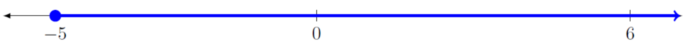
- $\boxed{\text{Interval obert per l'esquerra i tancat per la dreta}}$ En el cas de l'interval d'extrems -5 i 6, s'escriu $(-5, 6]$ i a sobre de la recta real es representa per

- $\boxed{\text{Interval tancat per l'esquerra i obert per la dreta}}$ En el cas de l'interval d'extrems -5 i 6, s'escriu $[-5, 6)$ i a sobre de la recta real es representa per

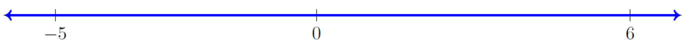
- $\boxed{\text{Interval infinit per l'esquerra (o sense extrem per l'esquerra)}}$ En el cas de l'interval d'extrem superior 6, s'escriu $[-\infty, 6)$ (si l'extrem superior no s'inclou) i a sobre de la recta real es representa per



- $\boxed{\text{Interval infinit per la dreta (o sense extrem per la dreta)}}$ En el cas de l'interval d'extrem inferior -5, s'escriu $[-5, +\infty]$ (si l'extrem inferior s'inclou) i a sobre de la recta real es representa per



- $\boxed{\text{Interval infinit}}$ És l'interval sense extrems que inclou tots els nombres reals. Per tant, és equivalent a la recta real. Escrivim $(-\infty, +\infty)$ i es marca tota la recta



Resolució d'inequacions de primer grau. Per a **resoldre una inequació de primer grau**, és convenient seguir uns determinats passos. Vegem-los amb un exemple concret.

Volem resoldre la inequació de primer grau

$$2x + 5 \geq 2 - x$$

1) *Es resol l'equació associada a la inequació lineal.* L'equació associada a una inequació és aquella que s'obté canviant el signe de desigualtat pel signe d'igual.

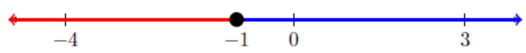
En el cas de l'exemple, es tracta de resoldre l'equació de primer grau $2x+5 = 2-x$.

Resolem l'equació de primer grau associada:

$$\begin{aligned} 2x+5 &= 2-x \\ 2x+x &= 2-5 \\ 3x &= -3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

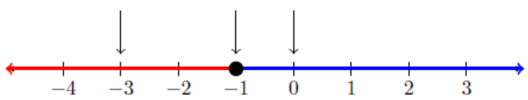
Per tant, la solució és $x = -1$.

La solució de l'equació divideix la recta real en tres zones diferents: $(-\infty,-1)$, -1 i $(-1,+\infty)$.



Determinades les tres zones, cal estudiar què passa en cada una. Per cada una de les franges, seguirem els passos que es descriuen a continuació. Són els passos necessaris per a conèixer quines d'aquestes tres zones pertanyen o no a la solució de la inequació.

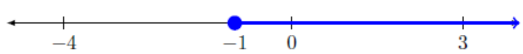
2) *Es tria un nombre que sigui dintre d'aquestes zones.*
En l'exemple, a part del -1, que és un punt únic, es pot triar qualsevol nombre de cada interval, per exemple -3 i 0, ja que $-3 \in (-\infty,-1)$ i $0 \in (-1,+\infty)$.



3) *Se substitueixen els valors anteriors (el de la solució de l'equació associada i els del segon pas) en la inequació i es comprova quin verifica la desigualtat inicial.*
D'acord amb l'exemple:

- Per $x = -1$, la desigualtat resultant és certa, perquè $\underbrace{2\cdot(-1)+5}_{3} \geq \underbrace{2-(-1)}_{3}$ és cert.
- Per $x = -3$, la desigualtat resultant és falsa, perquè $\underbrace{2\cdot(-3)+5}_{-1} \geq \underbrace{2-(-3)}_{5}$ és fals.
- Per $x = 0$, la desigualtat resultant és certa, perquè $\underbrace{2\cdot 0+5}_{5} \geq \underbrace{2-0}_{2}$ és cert.

4) *La solució de la inequació és formada pels nombres que són en la mateixa zona que els valors que fan certes les desigualtats del pas anterior.*
En l'exemple, les zones de solució són -1 i $(-1,+\infty)$. Per tant, la solució de la inequació és $[-1,+\infty)$, que representada en la recta real, queda



Exemple. Solució d'una inequació de primer grau.

La solució de la inequació de primer grau

$$2x + 5 \geq 2 - x$$

és

$$[-1, +\infty).$$

Resolució d'inequacions de segon grau. De manera similar, també es poden **resoldre inequacions de segon grau**.

Vegem com procedir en aquests casos amb un exemple. Resolguem la inequació de segon grau

$$2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$$

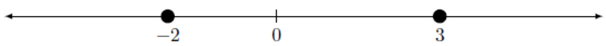
1) *En primer lloc, resolem l'equació associada a la inequació de segon grau.* En aquest cas, l'equació associada és

$$2x^2 - 2x - 2 = x^2 - x + 4$$

Simplifiquem l'equació en la forma normal i solucionem l'equació de segon grau aplicant la fórmula de resolució coneguda. Obtenim

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$$
$$x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

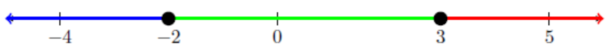
Per tant, l'equació associada té dues solucions, que són $x = 3$ i $x = -2$. Marquem les dues solucions en la recta real.



Ara cal estudiar què passa en cadascuna de les zones en què ha quedat dividida la recta real, de manera similar a l'exemple anterior.

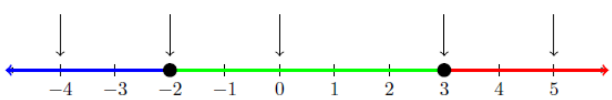
2) *Es divideix la recta real en diverses zones d'acord amb les solucions obtingudes en el pas anterior.*

En l'exemple, els punts -2 i 3 i les franges són els valors que queden abans del -2, en mig del -2 i 3 i més enllà del 3. Per tant, s'han de considerar els intervals i valors $(-\infty, -2)$, -2, $(-2, 3)$, 3, $(3, +\infty)$.



3) *Se selecciona un nombre qualsevol de cadascuna de les zones.*

Per exemple, a més del -2 i 3, considerem $-4 \in (-\infty, -2)$, $0 \in (-2, 3)$ i $6 \in (3, +\infty)$:



4) *Es comprova quin nombre és una solució de la inequació*, és a dir quins verifiquen les desigualtats inicials:

-4 no és solució de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ perquè $\underbrace{2 \cdot (-4)^2 - 2 \cdot (-4) - 2}_{38} \leq \underbrace{(-4)^2 - (-4) + 4}_{0}$ és fals.

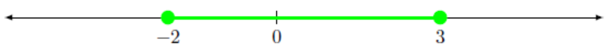
-2 és solució de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ perquè $\underbrace{2 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 2}_{10} \leq \underbrace{(-2)^2 - (-2) - 2}_{10}$ és cert.

0 és solució de $2x^2-2x-2 \leq x^2-x+4$ perquè $\underbrace{2 \cdot (0)^2 - 2 \cdot (0) - 2}_{-2} \leq \underbrace{(0)^2 - (0) + 4}_{4}$ és cert.

3 és solució de $2x^2-2x-2 \leq x^2-x+4$ perquè $\underbrace{2 \cdot (3)^2 - 2 \cdot (3) - 2}_{-10} \leq \underbrace{(3)^2 - (3) + 4}_{-1}$ és cert.

5 no és solució de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4x + 4$ perquè $\underbrace{2 \cdot (5)^2 - 2 \cdot (5) - 2}_{0} \leq \underbrace{(5)^2 - (5) + 4}_{24}$ és fals.

5) La solució de la inequació ve donada per la reunió de totes les zones (intervals o valors) del pas anterior, en les quals el nombre escollit és solució perqè compleix la desigultat. Així, en l'exemple, la solució de la inequació és l'interval tancat $[-2, 3]$.



Podem afegir com a curiositat que si la inequació fos

$$2x^2 - 2x - 2 > x^2 - x + 4$$

la seva solució estaria formada per tots els nombres de $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

El símbol $\cup$ és el símbol de la unió de conjunts i indica que cal reunir tots els nombres d'un interval amb els de l'altre.

Exemple. Solució inequació de segon grau.
La solució de l'inequació de segon grau

$$2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$$

és

$$(-\infty, 2) \cup (3, +\infty).$$

Resum

Les expressions algebraiques

Aspectes generals de les expressions algebraiques

Components. Tota expressió algebraica és producte de:

- Nombres de qualsevol tipus, per a representar valors coneguts.
- Lletres, per a representar valors desconeguts.
- Signes d'operacions: sumes, restes, multiplicacions i divisions.

Valor numèric. El valor numèric d'una expressió algebraica es troba substituint-ne les lletres per nombres concrets i calculant-ne el resultat. Aquest valor depèn dels valors concrets que rebin les lletres.

Per exemple, el valor numèric de l'expressió algebraica $4x - 2y + 6$ quan $x = 5$ i $y = 2$ és $4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 6 = 22$.

Utilitat. Les expressions algebraiques són útils per a simplificar una situació real en què s'han de fer operacions entre quantitats conegudes i quantitats desconegudes.

Propietats de les operacions en les expressions algebraiques

Propietats de la suma i la resta

- *Propietat commutativa.* El resultat de sumar dos elements, nombres o lletres, en qualsevol ordre és sempre el mateix: $a + b = b + a$.
- *Propietat associativa.* En sumar tres elements, nombres o lletres, qualssevol, es poden agrupar en qualsevol ordre perquè el resultat no varia: $a+b+c = (a+b)+c = a + (b + c)$
- *Element neutre de la suma.* És el 0, ja que si se suma aquest nombre a qualsevol altre nombre, el resultat és el mateix nombre: $a + 0 = a$.
- *Element oposat.* L'element oposat de qualsevol element a és $-a$, ja que el resultat de sumar-los és l'element neutre de la suma: $a + (-a) = 0$.

Recordem que la resta és la suma amb l'oposat: $a-b = a+(-b)$. Per tant, les propietats són les mateixes que les de la suma.

Propietats del producte i de la divisió

- *Propietat commutativa.* Dos elements, nombres o lletres, es poden multiplicar en qualsevol ordre, i el resultat és sempre el mateix: $a \cdot b = b \cdot a$.

- *Propietat associativa.* En multiplicar tres elements, nombres o lletres, qualssevol, es poden agrupar en qualsevol ordre perquè el resultat no varia: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

- *Element neutre del producte.* És l'1, perquè en multiplicar qualsevol element per 1, el resultat sempre és el mateix nombre inicial: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

- *Element invers.* L'element invers d'un element qualsevol que no sigui 0 és aquell element que, multiplicat amb aquest dona 1, és a dir, l'element neutre de la multiplicació: l'element invers de a és $\frac{1}{a}$, ja que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, sempre que $a \neq 0$.

- P*ropietat distributiva de la suma respecte del producte.*
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Recordem que la divisió és un producte de l'invers sempre que aquest no sigui 0: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ sempre que $b \neq 0$. Per tant, les propietats de la divisió són les mateixes que les del producte.

Igualtat entre expressions algebraiques

Components. Tota igualtat algebraica és producte d'aquests elements:

- Dues expressions algebraiques, denominades membres.

- Un signe igual (=) interposat entre ambdós membres.

Tipus

- *Certa,* si l'expressió algebraica del membre de l'esquerre pot convertir-se en l'expressió algebraica del de la dreta aplicant les propietats de les operacions involucrades descrites anteriorment.
  Per exemple, $a - 4b - 2a + 5a - b = 4a - 5b$

- *Falsa,* si l'expressió algebraica del membre de l'esquerre no es pot convertir en l'expressió algebraica del de la dreta tot i aplicar les propietats de les operacions involucrades descrites anteriorment.
  Per exemple, $4a - 5b + 2 = 4a - 5b + 7$.

Les equacions

Definició. S'entén per equació tota igualtat entre dues expressions algebraiques, especialment quan no se'n pot establir *a priori* la seva certesa o falsedat. En aquest cas, les lletres es denominen **incògnites**. Cada un dels sumands es denomina **terme** i el nombre que multiplica cada incògnita es denomina **coeficient**.

Exemples

- Equacions amb una incògnita: $a + 3 = 5$, $2c + 6 = c + 10$

- Equacions amb dues incògnites: $2x + 2y + 8 = 2x + 7$

Solucions d'una equació. Tots aquells valors numèrics que converteixen l'equació en una igualtat entre expressions numèriques vertaderes són solució d'una equació, per exemple, si en substituir les lletres de l'expressió $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$ per $x = 2$ i $y = 1$, i en aplicar les propietats de les operacions s'obté $2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 5 = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1$ i el valor numèric d'ambdós membres resulta 3.

Equacions equivalents. Equacions que tenen exactament les mateixes solucions. Per exemple, $x + 1 = 3$ i $2x + 2 = 6$, ja que en ambdós casos la solució és $x = 2$.

Les equacions de primer grau amb una incògnita

Concepte

Exemple i definició. $3x - 5 = x + 5$ és una equació de primer grau amb una incògnita perquè verifica:

- És una equació perquè és una igualtat entre expressions algebraiques.
- Té una incògnita, que és la lletra x.
- És de primer grau perquè la incògnita x no es multiplica mai per cap altra incògnita, inclosa ella mateixa.

Components. Tota equació de primer grau conté:

- *Terme*: cadascun dels sumands de l'equació.
- *Termes numèrics*: termes que no contenen la incògnita.
- *Coeficient de la incògnita*: nombre que multiplica la incògnita en cada terme.

Forma normal. S'anomena forma normal d'una equació de primer grau amb una incògnita l'equació equivalent a la donada en què el membre de la dreta és zero i el membre de l'esquerra és simplificat completament. De manera general, s'expressa

$$a \cdot x + b = 0$$

En aquest cas, el terme numèric, que és únic, s'anomena terme independent.
Per exemple, la forma normal de $3x - 5 = 2x + 4$ és $x - 9 = 0$.

Resolució

Fórmula de resolució. Per a resoldre una equació de primer grau amb un incògnita, és recomanable seguir el procediment que es detalla a continuació.
Vegem-lo mitjançant un exemple concret: la resolució de $3x - 5 = x + 5$

1) Agrupar termes numèrics: $3x = x + 5 + 5$

2) Agrupar termes amb incògnita: $3x - x = 10$

3) Eliminar el coeficient de la incògnita: $x = \frac{10}{2} = 5$

Solucions. La solució d'una equació de primer grau en forma normal $ax + b = 0$ és $x = \dfrac{-b}{a}$.

Aquesta solució pot existir o no en els nombres reals.

- *No existeix* quan el coeficient de la incògnita és igual a 0 i el terme independent no és 0 ($a = 0$ i $b \neq 0$). En aquest cas no hi ha cap nombre real que, multiplicat per 0, doni un nombre real.
- *Existeix* si:
  - El coeficient de la incògnita és diferent de 0 ($a \neq 0$). Aleshores hi ha una única solució $x = \dfrac{-b}{a}$.
  - Tant el coeficient de la incògnita com el terme independent són 0 ($a = 0$ i $b = 0$). Aleshores hi ha infinites solucions, ja que qualsevol nombre és solució de l'equació, atès que qualsevol nombre per 0 és 0.

Les equacions de segon grau amb una incògnita

Concepte

Exemple i definició. $3x^2 + 3x - 5 = 2x^2 - 7$ és una equació de segon grau amb una incògnita perquè verifica:

- És una equació perquè és una igualtat entre expressions algebraiques.
- Té una única incògnita, que és la lletra x.
- És de segon grau perquè té almenys un terme de grau 2 i la resta són de grau dos o de grau menor.

Forma normal. S'anomena forma normal d'una equació de segon grau amb una incògnita l'equació equivalent a la donada en què el membre de la dreta és zero i el membre de l'esquerra és simplificat completament.
De manera general, si a, b i c són nombres reals, amb $a \neq 0$ s'expressa

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Per exemple, la forma normal de $3x^2 + 3x - 5 = 2x^2 - 7$ és $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Components. Donada la forma normal d'una equació de segon grau, com per exemple

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

es parla de

- *Terme.* Cadascun dels sumands. En l'exemple, termes x^2, 3 i 2.
- *Coeficient.* El nombre que en cada terme multiplica la incògnita. Així, es parla de:

- ◦ *coeficient de grau* 2: nombre que multiplica el terme de grau 2. En l'exemple, 1.
- ◦ *Coeficient de grau* 1: nombre que multiplica el terme de grau 1. En l'exemple, 3.
- ◦ *Coeficient de grau* 0: nombre que multiplica el terme de grau 1. En l'exemple, 2.

- *Terme independent*: nombre que apareix sense multiplicar la incògnita, que correspon al coeficient de grau 0. En l'exemple, 2.

Resolució

Fórmula de resolució. Per a resoldre una equació de segon grau amb un incògnita en forma normal $ax^2 + bx + c = 0$, es pot aplicar la fórmula següent:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

on:

- a és el coeficient del terme de grau 2.
- b és el coeficient del terme de grau 1.
- c és el terme independent.
- el signe $\pm$ (més-menys) permet abreujar l'expressió de les dues solucions possibles
- $\Delta = b^2 - 4ac$ rep el nom de **discriminant**.

Exemple. Per a resoldre $x^2 + 3x + 2 = 0$, identifiquem

$$a = 1,\ b = 3,\ c = 2,\ \Delta = 32 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

Aleshores

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \{-1, -2\}$$

Per tant, -1 i -2 són les solucions a l'equació donada.

Solucions: Una equació de segon grau amb una incògnita pot tenir fins a dues solucions.

- Si el discriminant és positiu, $\Delta > 0$ l'equació té dues solucions reals.
  L'equació $2x^2 + 3x - 4 = 0$ té dues solucions, ja que $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 41 > 0$.
- Si el discriminant és zero, $\Delta = 0$, l'equació té una única solució real, denominada solució doble.
  L'equació $x^2 - 4x + 4 = 0$ té una única solució, ja que $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$.
- Si el discriminant és negatiu, $\Delta < 0$, l'equació no té cap solució real.
  L'equació $3x^2 - 4x + 5 = 0$ no té cap solució, ja que $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -46 < 0$.

Les equacions quadràtiques

Definició i exemple. Una equació de tipus quadràtic és aquella que té, en forma normal, un terme independent, un terme de grau qualsevol i un altre terme amb grau el doble de l'anterior. Aquesta característica fa que es pugui interpretar com a equació de segon grau. Per exemple, $4x^8 + 5x^4 + 10 = 0$
El cas més senzill és la denominada **equació biquadrada**, una equació de quart grau que només té, en forma normal, els termes de grau 4, 2 i 0.
Exemple. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Resolució. Es poden resoldre de manera semblant a les equacions de segon grau, ja que l'expressió de l'equació quadràtica és similar a les de segon grau.
Exemple.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

és una equació biquadrada que es pot reescriure com una equació de segon grau:

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$$

En considerar x^2 com la incògnita, es pot aplicar la fórmula de resolució de l'equació de segon grau per a x^2. Aleshores, la solució és producte de

$$(x^2) = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

Per tant, $x^2 = 4$, d'on resulta $x = \pm 2$ i $x^2 = 9$, i d'on resulta $x = \pm 3$.
Finalment, és convenient comprovar les solucions obtingudes a l'equació inicial.

Les inequacions

Concepte

Definició. Una inequació és una desigualtat entre expressions algebraiques que pot tenir solucions. Com en les equacions, les solucions són valors numèrics que en substituir les variables en la inequació fan que la desigualtat numèrica resultant sigui certa.

Exemples.

- $2x + 5 \geq 2 - x$ és una inequació de primer grau.
- $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ és una inequació de segon grau.

Resolució

Procediment. Les inequacions de primer i segon grau es poden resoldre de manera similar. Els passos principals del procediment que se sol seguir són:

Procediment	Exemple: $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$
1) *Es resol l'equació associada a la inequació*, que s'obté canviant el signe de desigualtat pel signe d'igualtat.	$2x^2-2x-2 = x^2-x+4 \Rightarrow x = \{-2, 3\}$
2) *Es consideren les solucions de l'equació associada, que divideixen la recta real en diverses zones.*	Zones a considerar: els punts -2 i 3, i les franges $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$, $(3, +\infty)$
3) *Se selecciona un nombre qualsevol de cadascuna de les zones i s'avalua en la inequació.*	Punts on avaluar: -2 i 3, i, per exemple, $-4 \in (-\infty; -2)$, $0 \in (-2, 3)$ i $6 \in (3, +\infty)$
4) *Es comprova quin dels nombres seleccionats verifica la desigualtat de la inequació.*	La desigualtat es verifica per a $x = -2$, $x = 0$ i $x = 3$, però no per a $x = -4$ ni $x = 6$
5) *La solució de la inequació és producte de la reunió de totes les zones del pas anterior en les quals el nombre escollit compleix la desigualtat.*	Per tant, la solució és $[-2, 3]$

Exercicis resolts

1. **Determina per a quins valors de t l'equació $x^2 + tx + 16 = 0$...**

(a) té dues solucions reals.

(b) té una única solució real, doble.

(c) no té solució real.

Solució:

Per a poder respondre la pregunta, cal estudiar els valors que pot prendre el discriminant de l'equació, Δ, en funció dels valors de t.

Atès que l'equació de segon grau $x^2+tx+16 = 0$ ja està en la seva forma normal, identifiquem els coeficients $a = 1$, $b = t$ i $c = 16$, i, per tant, el seu discriminant és

$$\Delta = b^2 - 4ac = t^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = t^2 - 64$$

Aleshores, atenent al fet que una equació de segon grau té

- dues solucions reals quan el discriminant és positiu (en el nostre cas quan $\Delta = t^2 - 64 > 0$
- una única solució, doble, real quan el discriminant s'anul·la (per tant, quan $\Delta = t^2 - 64 > 0$
- cap solució real quan el discriminant és negatiu (per tant, quan $\Delta = t^2 - 64 < 0$

es fa necessari estudiar les inequacions resultants.

Per això, resoldrem primer l'equació de segon grau $\Delta = 0$ i, trobada la solució, estudiarem què passa en cada una de les franges obtingudes.

$$\Delta = t^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 64 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{64} = \pm 8$$

D'aquesta resolució obtenim que, quan $t = 8$ o $t = -8$, $\Delta = 0$ i, per tant, podem dir que quan $t = 8$ o $t = -8$ l'equació té una única solució real, que és doble.

Per a determinar les altres dues situacions, cal mirar què passa per a valors menors que -8, compresos entre -8 i 8 i majors que 8. En altres paraules, cal estudiar els valors de Δ quan $t < -8$, $-8 < t < 8$ i $8 < t$. Per això, avaluarem Δ per a un valor qualsevol comprès en $(-\infty, -8)$, un altre valor entre $(-8, 8)$ i un altre entre $(8, +\infty)$. Vegem-ho:

Considerem $t = -10 \in (-\infty, -8) : t^2 - 64 = 100 - 64 = 36 > 0$

Considerem $t = 0 \in (-8, 8) : t^2 - 64 = 0 - 64 = -64 < 0$

Considerem $t = 10 \in (8, +\infty) : t^2 - 64 = 100 - 64 = 36 > 0$

Per tant, concloem:

- Si $t < -8$ o $t > 8$, l'equació té dues solucions reals diferents.
- Si $t = 8$ o $t = -8$, l'equació té una única solució real, doble.
- Si $-8 < t < 8$, l'equació no té solució real.

2. **La suma de dos nombres és 13 i el seu producte és 36. Amb quina equació de segon grau es poden obtenir aquets dos nombres? Quins nombres són?**

Solució:

L'enunciat demana trobar dos nombres que han de complir dues condicions alhora. Fixem-nos en la primera de les condicions: que els nombres sumin 13. D'acord amb aquesta premissa, si diem x a un d'aquests dos nombres, l'altre serà el producte de la diferència entre aquest nombre i el total de la suma, que en aquest cas és 13. Per tant, el segon nombre serà $13 - x$.

Fixada l'expressió dels dos nombres, imposem la segona condició, és a dir, que el seu producte sigui 36. Per tant, que

$$x \cdot (13 - x) = 36$$

Si operem aquesta igualtat, obtenim l'equació

$$-x^2 + 13 \cdot x = 36$$

que, podem reescriure de manera equivalent

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

Trobada l'equació de segon grau en la seva forma normal, podem resoldre-la i trobar així els nombres desconeguts.

Apliquem la fórmula de resolució de les equacions de segon grau:

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

D'on resulta $x_1 = \dfrac{18}{2} = 9$ i $x_2 = \dfrac{8}{2} = 4$.

Per tant, si considerem $x = 9$, l'altre nombre és $13 - 9 = 4$

I, a l'inrevés, si considerem $x = 4$, l'altre nombre és: $13 - 4 = 9$

Concloem, doncs que el parell de dos nombres buscats és 9 i 4.

Per tant, la resposta a l'exercici és:

- L'equació que representa la situació és $x^2 - 13x + 36 = 0$.
- Els dos nombres que satisfan la doble condició són 9 i 4.

3. **Resol les equacions irracionals següents:**

(a) $\sqrt{x+3} + 2x = 30$

(b) $x + 3 + \sqrt{x+5} = 10$

Solució:

Per a resoldre aquestes equacions, serà convenient trobar equacions equivalents que no continguin cap arrel quadrada.

(a) Resolem la primera de les equacions: $\sqrt{x+3} + 2x = 30$.

Aïllem l'arrel quadrada per poder aplicar el quadrat a tota l'expressió:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &= 30 - 2x \\ \left(\sqrt{x+3}\right)^2 &= (30-2x)^2 \end{aligned}$$

Calculem els quadrats de cadascun dels termes de l'equació. Fixem-nos que serà necessari aplicar identitats notables. En aquest cas particular, en el terme de la dreta cal aplicar el quadrat d'una diferència:

$$x + 3 = 30^2 + (2x)^2 - 2 \cdot 30 \cdot (2x)$$

Operem i obtenim una equació de segon grau:

$$x + 3 = 900 + 4x^2 - 120x$$

Associem termes i els ordenem per obtenir l'equació equivalent en forma normal:

$$4x^2 - 121x + 897 = 0$$

Obtinguda la forma normal de l'equació de segon grau associada, apliquem la fórmula de resolució de les equacions de segon grau:

$$x = \frac{121 \pm \sqrt{(-121)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 897}}{2 \cdot 4} = \frac{121 \pm \sqrt{289}}{8} = \frac{121 \pm 17}{8}$$

d'on obtenim dues solucions de l'equació de segon grau associada.

$$x_1 = \frac{121 - 17}{8} = \frac{104}{8} = 13$$
$$x_2 = \frac{121 + 17}{8} = \frac{138}{8} = \frac{69}{4}$$

Trobades les solucions de l'equació de segon grau, cal comprovar si són efectivament també solució de l'equació inicial:

- Si $x = 13$

$$\sqrt{x+3} + 2x = \sqrt{13+3} + 2 \cdot 13 = \sqrt{16} + 26 = 4 + 26 = 30$$

Per tant, $x = 13$ és solució.

- Si $x = \frac{69}{4}$

$$\sqrt{x+3} + 2x = \sqrt{\frac{69}{4} + 3} + 2 \cdot \frac{69}{4} = \sqrt{\frac{81}{4}} + \frac{69}{2} = \frac{9}{2} + \frac{69}{2} = \frac{78}{2} = 39 \neq 30$$

Per tant, $x = \frac{69}{4}$ no és solució.

(b) Resolem de manera similar la segona equació:

$$\begin{aligned} &x + 3 + \sqrt{x+5} = 10 \\ &\sqrt{x+5} = 10 - x - 3 \\ &\sqrt{x+5} = 7 - x \\ &\left(\sqrt{x+5}\right)^2 = (7-x)^2 \\ &x + 5 = 7^2 + x^2 - 2 \cdot 7 \cdot x \\ &x + 5 = 49 + x^2 - 14x \\ &x^2 - 15x + 44 = 0 \end{aligned}$$

Calculem les solucions de l'equació de segon grau aplicant la fórmula sabuda:

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 44}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{15 \pm 7}{2}$$

d'on obtenim dues solucions de l'equació de segon grau associada.

$x_1 = \dfrac{15-7}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$x_2 = \dfrac{15+7}{2} = \frac{22}{2} = 11$

Trobades les solucions de l'equació de segon grau, cal comprovar si són efectivament també solució de l'equació inicial:

- Si $x = 4$

$$x + 3 + \sqrt{x+5} = 4 + 3 + \sqrt{4+5} = 7 + \sqrt{9} = 7 + 3 = 10$$

  Per tant, $x = 4$ és solució.

- Si $x = 11$

$$x + 3 + \sqrt{x+5} = 11 + 3 + \sqrt{11+5} = 14 + \sqrt{16} = 14 + 4 = 18 \neq 10$$

  Per tant, $x = 11$ no és solució.

Exercicis per a practicar amb les solucions

4. **Resoleu les equacions següents:**

(a) $\dfrac{x+5}{4} + \dfrac{3x-2}{3} - \dfrac{2x+5}{2} = 4 - \dfrac{5x-1}{6}$

(b) $x+1+\dfrac{x+2}{2} + \dfrac{x+3}{3} = -\dfrac{x+4}{4} + 5$

5. **Resoleu les equacions següents:**

(a) $x^2 + x = 12$

(b) $-x^2 + 10x + 11 = 0$

(c) $(2+x)(5-x) = 9+3x$

(d) $3x^2 - 2(x-5)^2 = 22x - 26$

6. **Resoleu les equacions biquadrades següents:**

(a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

(b) $x^4 - 73x^2 + 576 = 0$

(c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Solucions:

4) (a) $x = \dfrac{73}{13}$

(b) $x = \dfrac{12}{25}$

5) (a) $x = \{-4, 3\}$

(b) $x = \{-1, 11\}$

(c) $x = \{-1, 1\}$

(d) $x = \{-4, 6\}$

6) (a) $x = \{1, -1, 2, -2\}$

(b) $x = \{3, -3, 8, -8\}$

(c) $x = \{-2, 2, 3, -3\}$

3. Sistemes d'equacions

Índex

3.1. Sistemes lineals de dues equacions i dues incògnites

3.1.1. Definició

Un **sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites** és un conjunt de dues equacions de primer grau amb dues incògnites cadascuna com a màxim, representades amb les mateixes incògnites.

Exemple. Sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

Tal com es pot observar, per a indicar que es tracta d'un sistema d'equacions i no de dues equacions independents, les dues equacions van encapçalades per una clau {, que les agrupa.

És molt comú escriure les equacions de la manera següent: tots els termes amb incògnites se solen trobar en el membre de l'esquerra, mentre que tots els nombres (termes independents) se solen trobar en el membre de la dreta. Si les equacions no estan expressades d'aquesta manera, convé transformar-les en d'altres d'equivalents que ho siguin d'aquesta manera.

3.1.2. Solucions i tipus de sistemes

S'ha d'insistir que una **solució** d'un sistema amb dues incògnites, si existeix, és un parell numèric, és a dir, ha de constar de **dos nombres**un per a cada incògnita, i que aquests dos nombres han de satisfer les dues equacions alhora. Pel que fa al **nombre de solucions** d'un sistema d'equacions, ens podem trobar amb tres casos:

- Un sistema amb **una única solució**. Per exemple:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

  que té una única solució $(x, y) = (4, 3)$.

- Un sistema amb **infintes solucions**. Per exemple:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 20 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

  que té aquestes (i moltes altres) solucions: $(x, y) = (4, 3)$, $(x, y) = (2, 4)$, $(x, y) = (0, 5)$, ...

- Un sistema **sense solucions**. Per exemple:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

  En aquest cas, és fàcil comprovar que no és possible que la mateixa expressió pugui resultar igual a 8 en un cas i igual a 1 en l'altre.

3.1.3. Mètodes de resolució

Resoldre un sistema d'equacions significa trobar les solucions del sistema, és a dir, aquells nombres que, en substituir les incògnites, transformin les equacions en igualtats numèriques certes. Cal destacar que els mateixos nombres han de substituir les incògnites en **ambdues** equacions alhora.

Exemple. Solució d'un sistema de dues equacions i dues incògnites:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x + 4y = 17 \end{cases}$$

té com a solució $(x, y) = (5, 3)$, ja que

$$\begin{cases} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19 \\ 5 + 4 \cdot 3 = 17 \end{cases}$$

Per a trobar la solució de sistemes d'equacions lineals amb dues incògnites, hi ha principalment tres de mètodes de resolució.

Mètode de substitució. Consisteix a aïllar una de les incògnites en una de les dues equacions i substituir-ne l'expressió en l'altra equació. Una vegada resolta aquesta última equació es resol l'altra equació introduint el valor trobat.

Exemple. Per a resoldre el sistema d'equacions

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

pel mètode de substitució, s'han de seguir aquests passos:

1) *Es tria una de les equacions.* Per exemple, $x + 4y = -2$. (Si hi ha una equació en què el coeficient de la x o de la y és 1, triem aquesta equació per simplificar els càlculs.)

2) *S'aïlla una de les incògnites d'aquesta equació.* Per exemple, es pot aïllar la x de la manera següent:

$$x = -2 - 4y$$

3) *Se substitueix la incògnita anterior* (la x) *de l'altra equació* $(2x - 3y = 7)$ *pel valor que hem trobat en aïllar-la* $(-2 - 4y)$. En l'exemple,

$$2 \cdot (-2 - 4y) - 3y = 7$$

4) *Es resol aquesta equació de primer grau amb una incògnita.* En l'exemple, la solució és $y = -1$.

5) *Se substitueix aquest valor trobat en una de les dues equacions del sistema inicial. Obtindrem una equació de primer grau amb una incògnita, que podem resoldre.* Per exemple, si se substitueix $x = -1$ en l'equació $x + 4y = -2$, l'equació resultant és $x + 4 \cdot (-1) = -2$, la solució de la qual és $x = 2$.

Per tant, la solució del sistema és $(x, y) = (2, -1)$.
És recomanable comprovar que aquests valors resolen realment el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7 \\ 2 + 4 \cdot (-1) = -2 \end{cases}$$

són igualtats certes. Així, doncs, $(x, y) = (2, -1)$ és la solució del sistema.

Mètode d'igualació. El mètode d'igualació consisteix a aïllar la mateixa incògnita en ambdues equacions del sistema. A continuació, s'han "d'igualar" les dues expressions que han resultat d'aïllar aquesta incògnita, i definir així una nova equació. Una vegada resolta aquesta equació, se substitueix el valor en una de les equacions inicials i es resol per trobar l'altre valor.

Exemple. Si es vol resoldre el sistema anterior

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

pel mètode d'igualació, s'han de seguir aquests passos:

1) *S'aïlla la mateixa incògnita en ambdues equacions.* Per exemple, la x:

$$x = \frac{7 + 3y}{2} \qquad x = -2 - 4y$$

2) *S'igualen les expressions que resulten d'aïllar la incògnita:*

$$\frac{7 + 3y}{2} = -2 - 4y$$

3) *Es resol aquesta equació de primer grau amb una incògnita.* En l'exemple

$$7 + 3y = 2 \cdot (-2 - 4y)$$

$$7 + 3y = -4 - 8y$$

$$3y + 8y = -4 - 7$$

$$11y = -11$$

$$y = -1$$

4) *Se substitueix el valor d'aquesta incògnita en qualsevol de les equacions del sistema inicial, i es resol l'equació de primer grau amb una incògnita resultant.* En l'exemple, substituïm la y de la segona equació per -1:

$$x + 4 \cdot (-1) = -2$$

La solució d'aquesta equació és $x = 2$.

De la mateixa que abans, comprovem que els valors obtinguts resolen el sistema d'equacions proposat.

Mètode de reducció. El mètode de reducció consisteix a multiplicar convenientment les dues equacions del sistema per uns nombres de manera que en restar les equacions resultants es "redueixi" el nombre d'incògnites de dues a una. Una vegada resolta l'equació resultant, es pot substituir aquest valor en una de les equacions inicials i resoldre-la per a obtenir la solució general.

Exemple. Si volem resoldre el mateix sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

pel mètode de reducció, s'han de seguir aquests passos:

1) *Es tria una de les incògnites.* Per exemple, la x.

2) *Es multiplica cada equació per un nombre triat convenientment, de manera que les equacions resultants tinguin el terme idèntic amb la incògnita triada.* La manera més senzilla de fer-ho consisteix a multiplicar els membres de la primera equació pel coeficient de la incògnita escollida en la segona equació, i els membres de la segona equació pel coeficient de la incògnita escollida en la primera equació.

   En l'exemple, multipliquem $2x-3y = 7$ per 1 (coeficient de la x en l'equació $x+4y = -2$) i multipliquen $x+4y = -2$ per 2 (coeficient de la x en l'equació $2x - 3y = 7$) i obtenim així les equacions amb el mateix terme en x.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 2x + 8y = -4 \end{cases}$$

3) *Es resten ambdues equacions resultants, membre a membre.* En l'exemple:

$$\begin{array}{rrl} 2x & -3y & = 7 \\ -(2x & +8y & = -4) \\ \hline & -11y & = 11 \end{array}$$

4) *Es resol l'equació de primer grau resultant.* En l'exemple, la solució de $-11y = 11$ és $y = -1$.

5) *Se substitueix el valor d'aquesta incògnita en qualsevol de les equacions del sistema i es resol l'equació de primer grau amb una incògnita resultant.* En l'exemple, substituïm la y de la segona equació per -1:

$$x + 4 \cdot (-1) = -2$$

   La solució d'aquesta equació és $x = 2$. I, per tant, la solució del sistema és $(x, y) = (2, -1)$.

Tal com hem vist abans, comprovem que els valors obtinguts resolen el sistema d'equacions proposat.

Observem que, després de resoldre el mateix sistema amb els tres mètodes, el mètode que s'utilitza per a resoldre un sistema d'equacions no influeix en la solució del sistema.

3.2. Sistemes lineals de tres equacions i tres incògnites

3.2.1. Definció

Igual que abans, podem definir un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites com un conjunt de tres equacions de primer grau amb les tres mateixes incògnites en cadascuna de les equacions.

Exemple. Sistema de tres equacions i tres incògnites.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 4x - 2y - 3z = -4 \end{cases}$$

3.2.2. Mètode de resolució

La solució d'un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites consta de tres nombres que, en substituir les incògnites corresponents alhora, permeten resoldre el sistema.

Exemple. Solució d'un sistema de 3 equacions lineals amb 3 incògnites.
$(x, y, z) = (1, 2, -3)$ és la solució del sistema següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 5y - 2z = -2 \\ 3x + 4y + z = 8 \end{cases}$$

ja que

$$\begin{cases} 1 + 2 + (-3) = 0 \\ 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = -2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-3) = 8 \end{cases}$$

Per a resoldre un sistema d'aquest tipus, es pot utilitzar un mètode semblant al de reducció operant de la manera següent:

1) *Operar adequadament amb la primera equació per eliminar la primera incògnita de les dues equacions següents.*
En multiplicar la primera equació per 2 i restar-la de la segona s'obté $-7y-4z = -2$. Multiplicant la primera equació per 3 i restant-la de la tercera, s'obté $y - 2z = 8$. Evidentment, ambdós sistemes són equivalents.

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ 2x - 5y - 2z &= -2 \\ 3x + 4y + z &= 8 \end{cases} \xrightarrow[Eq3=Eq3-3\cdot Eq1]{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1} \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ -7y - 4z &= -2 \\ y - 2z &= 8 \end{cases}$$

2) *Operar adequadament amb la segona equació del nou sistema per eliminar la segona incògnita de la tercera equació.*
Per a trobar la tercera equació nova, multipliquem la tercera equació per 7 i ho sumem a la segona. Observem que en l'última equació queda ara una sola incòg-

nita.

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ -7y-4z &= -2 \\ y-2z &= 8 \end{cases} \xrightarrow{Eq3=7\cdot Eq3+Eq2} \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ -7y-4z &= -2 \\ -18z &= 54 \end{cases}$$

3) *Resoldre l'última equació que tindrà només una incògnita:*

$$-18z = 54 \Leftrightarrow z = \frac{-54}{18} = -3.$$

4) *Resoldre la segona equació de l'últim sistema, substituint la z pel valor trobat.* En aquest cas tenim que $z = -3$

$$7y - 4\cdot(-3) = -2 \Leftrightarrow y = \frac{-2-12}{7} = 2$$

Obtenim que $y = 2$.

5) *Finalment, substituir els valors trobats de la y i la z en la primera equació, i trobar la x.* Utilitzant $z = -3$ i $y = 2$, tenim

$$x + 2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

En aquest cas, $x = 1$.

Per tant la solució del sistema és $(x,y,z) = (1,2,-3)$.

Aquest mètode s'anomena **mètode de Gauss**.

3.3. Sistemes lineals de m equacions i n incògnites

Ara volem estudiar com treballar amb sistemes d'equacions lineals amb qualsevol nombre d'equacions lineals i incògnites.

3.3.1. Definició

Un **sistema de m equacions i n incògnites** (que denominarem x_1, x_2, ..., x_n) amb termes independents b_1, ..., b_n, també denominats constants i on m i n són dos nombres naturals, té la forma següent:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Com en la resta de sistemes, una **solució d'aquest sistema** és un **n-tupla** (és a dir, una col·lecció de n nombres) que, en substituir x_1, x_2, x_3, ..., x_n convenientment en aquest sistema, resol totes les equacions simultàniament. És evident que algun dels coeficients de cada incògnita ha de ser diferent de 0 en alguna de les equacions (en cas contrari, aquesta incògnita seria supèrflua).

3.3.2. Mètode de Gauss

Tal com hem vist en el cas de sistemes amb tres equacions i tres incògnites, el mètode de Gauss consisteix a aplicar una sèrie de transformacions lineals al sistema inicial fins a obtenir un sistema més fàcil de resoldre.

Les transformacions lineals que podem aplicar quan utilitzem el mètode de Gauss són:

- Dues equacions qualssevol són intercanviables.
- Una equació qualsevol del sistema es pot multiplicar (en ambdós membres) per una constant diferent de zero.
- Una equació qualsevol del sistema es pot reemplaçar per l'equació que resulta de sumar a aquesta mateixa equació qualsevol altra equació del sistema, la qual es pot multiplicar a més per qualsevol nombre.

Aquestes tres transformacions elementals se solen denominar (en aquest ordre): *intercanviar equacions, reescalar* (és a dir, multiplicar per un nombre) i *pivotar.*

En cada una de les equacions del sistema lineal, la primera incògnita que apareix amb un coeficient diferent de zero es denomina **incògnita inicial** de l'equació. Es diu que un sistema està en **forma esglaonada** (o és **triangular**) si la incògnita inicial en cada equació (òbviament, excepte en la primera) és a la dreta de la incògnita inicial de l'equació que la precedeix. És a dir que (en cas que tinguem el mateix nombre d'equacions que d'incògnites, $m = n$) la forma del sistema en forma esglaonada és la següent:

$$\left\{\begin{array}{cccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{1(n-1)}x_{n-1} & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{2(n-1)}x_{n-1} & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
 & & +a_{33}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{3(n-1)}x_{n-1} & +a_{3n}x_n & = b_3 \\
 & & & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & = \dots \\
 & 0 & & & +\dots & +\dots & +\dots & = \dots \\
 & & & & & +a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & +a_{(n-1)n}x_n & = b_{n-1} \\
 & & & & & & +a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}\right.$$

El **mètode de Gauss** consisteix a utilitzar les tres transformacions elementals entre equacions (intercanviar, reescalar i pivotar) per trobar un sistema equivalent a l'inicial en forma esglaonada. Així, començant per l'última incògnita, podrem resoldre fàcilment el sistema.

Per a aconseguir-ho:

1) Comencem repassant tots els coeficients de x_1 (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}) fins a trobar el primer coeficient que sigui diferent de zero. Aquest coeficient podria ser el mateix a_{11}. Si no és el primer, s'intercanvia l'equació amb la primera que tingui aquest terme diferent de 0.

2) Considerem que un nou sistema té un nombre diferent de 0 com coeficient a_{11}.

3) Mitjançant les operacions de reescalar i pivotar, es fa que tots els coeficients que estiguin sota aquest nou a_{11} siguin 0. Així, si en l'equació que ocupa la fila k-èsima el seu primer coeficient a_{k1} és diferent de 0, es pivota multiplicant la primera fila per $\frac{a_{k1}}{a_{11}}$ i restant el resultat a la fila k-èsima. El resultat serà la nova fila k-èsima. El nou sistema tindrà aquesta forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & +a'_{22}x_2 & +\dots & +a'_{2n}x_n & = b'_2 \\ & \dots \\ & \dots \\ & +a'_{m2}x_2 & +\dots & +a'_{mn}x_n & = b'_m \end{cases}$$

4) Una vegada eliminats tots els coeficients de la primera incògnita (excepte el de la primera equació), repetim el mateix procediment amb els coeficients de la segona incògnita, x_2, a partir de la segona equació.

5) A continuació, es fa el mateix procediment amb la tercera incògnita, x_3, a partir de la tercera equació. I així successivament fins a arribar a l'última equació. Una vegada arribat al final del procés, el nombre d'equacions que no són del tipus $0 = 0$ és igual a un cert nombre, que denominarem r, de manera que $r \leq m$.

3.3.3. Solucions i tipus de sistemes

Una vegada finalitzat el procediment de Gauss, el sistema resultant s'haurà de trobar en una d'aquestes situacions:

- Que aparegui una fila amb tots els coeficients iguals a zero i amb la constant diferent de zero. En aquest cas el sistema no té cap solució. Es diu que el sistema és **incompatible**.
- Que no aparegui cap equació amb zeros, o que totes les files amb coeficients iguals a zero tinguin també constants iguals a zero (en aquest cas totes aquestes files són supèrflues i es poden eliminar). Si això és així, el sistema té solució. Es diu que el sistema és **compatible**, i pot ser:
  - **Compatible determinat**: la solució és única si el nombre r d'equacions resultants en el sistema esglaonat és igual a n (el nombre d'incògnites).

◦ **Compatible indeterminat**: amb infinites solucions si el nombre r d'equacions en el sistema esglaonat és menor que n (el nombre d'incògnites).

Vegem com són les solucions en el cas de sistemes compatibles:

$\boxed{\text{Cas } r = n}$ El sistema resultant en forma esglaonada, després d'utilitzar el mètode de Gauss serà de la forma:

$$\left\{\begin{array}{llllllll}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{1(n-1)}x_{n-1} & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{2(n-1)}x_{n-1} & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
 & & +a_{33}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{3(n-1)}x_{n-1} & +a_{3n}x_n & = b_3 \\
 & & & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & = \dots \\
 & 0 & & & +\dots & +\dots & +\dots & = \dots \\
 & & & & & +a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & +a_{(n-1)n}x_n & = b_{n-1} \\
 & & & & & & +a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}\right.$$

Per a trobar la solució única d'aquest sistema, s'utilitza l'anomenada *substitució cap enrere* (un procés molt semblant s'ha seguit en els sistemes de tres equacions lineals):

1) S'aïlla x_n de l'última equació:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

2) Se substitueix aquest valor en l'equació anterior i es troba el valor de x_{n-1}:

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{(n-1)n} \cdot \frac{b_n}{a_{nn}}\right)$$

3) Se segueix el mateix procediment de substitució cap enrere fins que s'han trobat els valors per a totes les incògnites.

$\boxed{\text{Cas } r < n}$ El sistema d'equacions quedaria de la manera següent:

$$\left\{\begin{array}{lllllllll}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
0 & & \dots & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & = \dots \\
 & & & & a_{rn}x_r & +a_{r(n+1)}x_{r+1} & +\dots & +a_{rn}x_n & = b_r
\end{array}\right.$$

Per a resoldre aquest sistema, farem:

- Reduir aquest sistema a un sistema amb tantes incògnites com files. Per fer això, es passen totes les incògnites a partir de x_{r+1} a l'altra membre.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}x_r - \ldots - a_{1n}x_n \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}x_r - \ldots - a_{2n}x_n \\ \qquad \ldots \\ \qquad a_{rn}x_r = b_r - a_{r(n+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

- D'aquesta manera, tenim les r primeres incògnites en el membre esquerre de les equacions i les $n-r$ incògnites del membre de la dreta de les equacions es tracten com si fossin valors coneguts (com els nombres b_i). Obtenim així un sistema amb r equacions i r incògnites, que es pot resoldre fent el procés de substitució cap enrere.

- Ara bé, s'obtindrà la solució per a les r primeres incògnites, que dependran del valor que tinguin les $n-r$ incògnites restants, i aquestes $n-r$ podran prendre qualsevol valor real. Per això mateix, aquest tipus de sistemes té **més d'una solució** (de fet, té infinites solucions).

3.4. Sistemes d'inequacions

3.4.1. Sistemes d'inequacions lineals amb una incògnita

Definició. Un sistema d'inequacions lineals amb una única incògnita és format per diverses inequacions lineals i limitat per una clau que indica precisament que es tracta d'un sistema, i no d'inequacions independents.

Exemple. Un sistema d'inequacions podria ser:

$$\begin{cases} 3x + 4 \leq 2x + 8 \\ 2x - 1 > x \end{cases}$$

Un nombre és solució d'un sistema d'inequacions d'aquest tipus si és solució de totes les inequacions que formen el sistema. Tinguem en compte que la solució d'un sistema d'inequacions lineals amb una incògnita pot tenir solució o no, i en cas que tingui solució aquesta pot ser un sol nombre, un interval de nombres o bé la unió de diversos intervals.

Exemple. $x = 3$ és una solució del sistema d'inequacions anterior, ja que

$$\begin{cases} 3 \cdot 3 + 4 \leq 2 \cdot 3 + 8 \\ 2 \cdot 3 - 1 > 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 13 \leq 14 \\ 5 > 3 \end{cases}$$

Mètodes de resolució. Per a resoldre sistemes d'inequacions, proposem dos mètodes diferents.

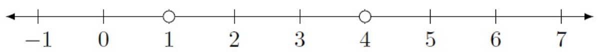
En el **primer mètode**, els passos per a la resolució són els següents:

1) *Es resolen per separat les equacions associades a cada una de les inequacions del sistema.* L'equació associada a una inequació és la resultant de substituir la desigualtat de la inequació per una igualtat. En l'exemple anterior, hem de resoldre cada una de les dues equacions següents:

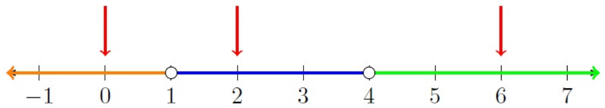
$$3x + 4 = 2x + 8 \Leftrightarrow x = 4$$

$$2x - 1 = x \Leftrightarrow x = 1$$

2) *Es marquen en la recta real les solucions anteriors.* Això farà que la recta real quedi dividida en 3 parts. En l'exemple:

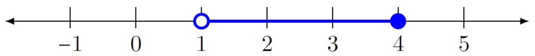


3) *Se selecciona un nombre de cadascuna de les parts en les quals queda dividida la recta pels nombres anteriors.* En l'exemple, es poden escollir els nombres 0, 2 i 6.



4) *Es comprova quins d'aquests nombres, a més de les solucions de les equacions, són solució de tot el sistema d'inequacions.* En l'exemple, s'han de provar el 0, 2 i 6 que hem marcat en el pas anterior i les dues solucions 1 i 4. És fàcil comprovar que són únicament solució del sistema el 2 i el 4.

5) *Finalment, les solucions del del sistema són els nombres que estan en el mateix interval que els nombres que en el pas 4 hem comprovat que eren solució del sistema d'inequacions.* A més, inclourem les solucions obtingudes en l'apartat 1 si compleixen el sistema d'inequacions. En l'exemple, els nombres que són solució del sistema estan entre l'1 i el 4, més el 4, i per tant l'interval $(1, 4]$, la secció acolorida d'aquesta recta real:



Per tant, les solucions del sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} 3x + 4 \leq 2x + 8 \\ 2x - 1 > x \end{cases}$$

són tots els nombres més grans que 1 i menors o iguals a 4, és a dir, tots els nombres, x, que compleixen $1 < x \leq 4$. En forma d'interval, la solució s'expressaria de la manera següent:

$$(1, 4]$$

Un **segon mètode** per a resoldre aquest sistema és:

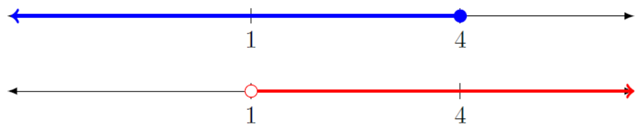
1) *Resolem la primera inequació.* En l'exemple, hem de resoldre

$$3x + 4 \leq 2x + 8$$

Tal com hem vist en el mètode anterior, la solució de l'equació associada és $x = 4$, i si comprovem els valors 0, 4 i 5 a l'inequació obtenim com a solució l'interval $(-\infty, 4]$.

2) *Resolem la segona inequació.* En l'exemple, procedim de la mateixa manera que en el pas anterior i obtenim que la solució de $2x - 1 > x$ és l'interval $(1, +\infty]$.

3) *Busquem quins són els punts en comú que tenen les dues solucions obtingudes.* En l'exemple veiem que coincideixen en l'interval $(1, 4]$



3.4.2. Sistemes d'inequacions de segon grau amb una incògnita

Definició Un sistema d'inequacions de segon grau amb una única incògnita és format per diverses inequacions lineals o de segon grau i limitat per una clau.

Exemple. Un sistema d'inequacions de segon grau pot ser

$$\begin{cases} 2x + 5 \geq 2 - x \\ 2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4 \end{cases}$$

Un nombre és solució d'un sistema d'inequacions d'aquest tipus si és solució de totes les inequacions que formen el sistema. Tinguem en compte que la solució d'un sistema d'inequacions lineals amb una incògnita pot tenir solució o no, i en cas que tingui solució aquesta pot ser un sol nombre, un interval de nombres o bé la unió de diversos intervals.

Exemple. $x = \frac{1}{2}$ és una solució del sistema d'inequacions, ja que

$$2\left(\frac{1}{2}\right) + 5 \geq 2 - \left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 6 \geq \frac{3}{2}$$
$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 4 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq \frac{15}{4}$$

Mètode de resolució. Un procediment per a trobar les solucions d'un sistema d'inequacions de segon grau és molt semblant al de resolució de sistema d'inequacions lineals. De fet podem triar qualsevol dels dos mètodes que hem vist i utilitzar-los també en aquest cas. Triem per exemple el segon. Així, per trobar la solució del sistema cal resoldre cadascuna de les equacions a part, després buscar les solucions de les dues inequacions per separat i finalment buscar totes les zones comunes:

1) Es resolen les dues equacions associades.

$$\begin{cases} 2x + 5 = 2 - x \Leftrightarrow x = -1 \\ 2x^2 - 2x - 2 = x^2 - x + 4 \Leftrightarrow x = -2,\, 3 \end{cases}$$

2) Es resolen les dues inequacions per separat.

- La solució de $2x + 5 \geq 2 - x$ és $[-1, +\infty)$.

- La solució de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ és $[-2, 3]$.

3) Es busca la zona comuna de la solució d'ambdues inequacions, que és $[-1, 3]$:

Per tant, les solucions del sistema d'equacions de segon grau

$$\begin{cases} 2x + 5 \geq 2 - x \\ 2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4 \end{cases}$$

són tots els nombres més grans o iguals a -1 i menors o iguals a 3, és a dir, tots els nombres, x que compleixin $-1 \leq x \leq 3$. En forma d'interval, la solució s'expressaria de la manera següent: $[-1, 3]$.

Resum

Sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites	
Definició: és un conjunt de dues equacions de primer grau amb dues incògnites cadascuna, representades per les mateixes lletres.	*Exemple:* $\begin{cases} 3x - 6y = 5 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$
Escriptura habitual: termes amb incògnita en el membre de l'esquerra i termes numèrics en el de la dreta.	
Solució: un parell de nombres que, en substituir les incògnites corresponents en cada una de les equacions, donen lloc a dues igualtats certes.	$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ té solució $(x, y) = (2, 1)$, ja que $\begin{cases} 2 + 1 = 3 \\ 2 \cdot 2 - 1 = 3 \end{cases}$
Resolució: procés de cerca de les solucions del sistema.	
Mètodes de resolució	
Mètode de substitució	
Procediment	*Exemple:* $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$
1. Es tria una de les dues equacions.	$2x + y = 4$
2. S'aïlla una de les incògnites de l'equació triada.	$y = 4 - 2x$
3. Se substitueix el valor de la incògnita en l'altra equació.	$4x - 2 \cdot (\mathbf{4 - 2x}) = 8$
4. Es resol l'equació resultant.	$4x - 8 + 4x = 8 \Leftrightarrow 8x - 8 = 8$ $\Leftrightarrow 8x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{8} = 2$
5. Es substitueix el valor trobat en l'equació del pas 2 i obtenim el valor de l'altra incògnita i la solució.	$y = 4 - 2 \cdot \mathbf{2} = 0$ Solució: $(x, y) = (2, 0)$
6. Es comprova la solució.	$\begin{cases} 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \\ 2 \cdot 2 + 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \end{cases}$
Mètode d'igualació	
Procediment	*Exemple:* $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$
1. S'aïlla la mateixa incògnita en les dues equacions.	$y = \frac{4x - 8}{2} = 2x - 4$ $y = 4 - 2x$
2. S'igualen les dues expressions resultants.	$2x - 4 = 4 - 2x$
3. Es resol l'equació resultant.	$2x - 4 = 4 - 2x \Leftrightarrow 4x = 8$ $\Leftrightarrow x = \frac{8}{4} = 2$
4. Se substitueix la incògnita de qualsevol de les equacions del sistema del pas 1 pel valor trobat.	$y = 4 - 2 \cdot 2 = 0$ Solució: $(x, y) = (2, 0)$
5. Es comprova la solució.	$\begin{cases} 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \\ 2 \cdot 2 + 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \end{cases}$

Mètode de reducció	
Procediment	*Exemple:* $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$
1. Es tria una de les dues incògnites.	Per exemple, y
2. Es multipliquen els dos membres de la primera equació pel coeficient de la incògnita escollida en la segona equació i els dos membres de la segona equació pel coeficient de la incògnita escollida en la primera equació.	$1 \cdot (4x - 2y = 8)$ $-2 \cdot (2x + y = 4)$ $\Downarrow$ $\begin{array}{rrl} 4x & -2y & = 8 \\ -4x & -2y & = -8 \end{array}$
3. Es resten les dues equacions resultants.	$\begin{array}{crrl} & 4x & -2y & = 8 \\ - & -4x & -2y & = -8 \\ \hline & 8x & & = 16 \end{array}$
4. Es resol l'equació resultant.	$x = 2$
5. Se substitueix el valor de la incògnita trobada en qualsevol de les equacions del sistema.	Se substitueix $x = 2$ a $2x + y = 4$: $2 \cdot 2 + y = 4$
6. Es resol l'equació resultant.	$4 + y = 4 \Rightarrow y = 0$ Solució: $(x, y) = (2, 0)$
7. Es comprova la solució.	$\begin{cases} 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \\ 2 \cdot 2 + 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \end{cases}$

Sistema de m equacions i n incògnites

Un **sistema de m equacions i n incògnites** (que denominarem x_1, x_2, ..., x_n), amb termes independents $b_1, \ldots, b_n$, denominats també constants, i en el qual m i n són dos nombres naturals, té la forma següent:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Resolució d'un sistema de diverses equacions lineals pel mètode de Gauss

1. Operar amb la primera equació per eliminar la primera incògnita de les altres equacions.	$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 5y - 2z = -2 \\ 3x + 4y + z = 8 \end{cases} \xrightarrow[Eq3 = -3 \cdot Eq1 + Eq3]{Eq2 = -2 \cdot Eq1 + Eq2}$ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y - 4z = -2 \\ y - 2z = 8 \end{cases}$
2. Operar amb la segona equació per eliminar la segona incògnita de les equacions següents. 3. Es fa la mateixa operació fins a exhaurir les equacions i s'obté un sistema esglaonat.	$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y - 4z = -2 \\ y - 2z = 8 \end{cases} \xrightarrow{Eq3 = Eq2 + 7 \cdot Eq3}$ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y - 4z = -2 \\ -18z = 54 \end{cases}$
4. Es resol l'última equació i se substitueixen els valors *cap* enrere.	$\begin{cases} 18z = 54 \Rightarrow z = -\frac{54}{18} = -3 \\ -7y - 4 \cdot (-3) = -2 \Rightarrow y = 2 \\ x + 2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

Nombre de solucions d'un sistema

Un sistema de m equacions i n incògnites pot no tenir solució, tenir-ne una o tenir-ne infinites.

- El sistema no té cap solució quan apareix una fila amb tots els coeficients iguals a 0 i amb la constant diferent de 0. Es diu que el sistema és **incompatible**.
- En cas contrari, el sistema té solució, s'anomena sistema **compatible** i pot ser:
  - **Compatible determinat** (amb solució única): si el nombre d'equacions resultants en el sistema esglaonat és igual al nombre d'incògnites.
  - **Compatible indeterminat** (amb infinites solucions): si el nombre d'equacions en el sistema esglaonat és menor que el nombre d'incògnites.

Sistemes d'inequacions
Un sistema d'inequacions amb una única incògnita és format per diverses inequacions i limitat per una clau que indica precisament que es tracta d'un sistema i no d'inequacions independents.

Resolució de sistemes d'inequacions

1) Es resolen les equacions associades a les inequacions del sistema.
2) Es marquen les solucions anteriors en la recta real.
3) Se selecciona un nombre de cadascuna de les parts en les quals queda dividida la recta pels nombres anteriors.
4) Es comprova quins d'aquests nombres són solució del sistema d'inequacions.
5) Les solucions del sistema són els nombres que estan en el mateix interval que els nombres que en l'apartat 4 hem comprovat que eren solució del sistema d'inequacions.

Exercicis resolts

1. **Troba les solucions al sistema d'equacions usant el mètode de Gauss:**

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

Solució:

S'observa que la primera incògnita inicial és la x en la primera equació, ja que el seu coeficient és diferent de 0 (és 1). Pivotant aquest element s'obté:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1} \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

Només la primera equació té incògnita x, i per tant la primera incògnita inicial, que és y, és en la tercera equació (ja que en la segona equació no hi ha incògnita y). Així, doncs, intercanviem les files:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{Eq1\leftrightarrow Eq2} \begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

D'aquesta manera, ja no hi ha més incògnites y. La nova incògnita inicial de la tercera equació és z; per tant, se'n pot mantenir a la posició i servirà de pivot per a eliminar la incògnita z de l'última equació:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{Eq4=Eq4-2\cdot Eq3} \begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ -3w = -3 \end{cases}$$

S'ha arribat a l'última equació, i la situació és d'igual nombre d'incògnites que d'equacions. Per tant, es tracta d'un sistema compatible determinat. S'aplica la substitució cap enrere a l'últim sistema per resoldre'l:

- Es dedueix que $w = 1$ de l'última equació.
- Se substitueix aquest valor en l'equació anterior i es resol:
$$z + 2\cdot 1 = 4 \Rightarrow z = 4 - 2 = 2.$$
- Se substitueixen $z = 2$ i $w = 1$ en l'equació anterior:
$$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1.$$
- Se substitueixen $y = -1$, $z = 2$, $w = 1$:
$$x - (-1) = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Per tant, la solució del sistema és $x = -1$, $y = -1$, $z = 2$, $w = 1$. També es pot escriure $(x, y, z, w) = (-1, -1, 2, 1)$.

2. **Troba les solucions al sistema d'equacions usant el mètode de Gauss.**

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ 3x + 6z - 6w = 6 \\ -y + z - w = 1 \end{cases}$$

Solució:

Per a obtenir la forma esglaonada fem el següent:

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ 3x + 6z - 6w = 6 \\ -y + z - w = 1 \end{cases} \xrightarrow{Eq3=Eq3-3\cdot Eq1} \begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ -3y + 3z - 3w = 3 \\ -y + z - w = 1 \end{cases} \xrightarrow[Eq4=Eq4+Eq2]{Eq3=Eq3+3\cdot Eq2}$$

$$\xrightarrow[Eq4=Eq4+Eq2]{Eq3=Eq3+3\cdot Eq2}\begin{cases} x+y+z-w = 1 \\ y-z+w = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Eliminem les dues igualtats $0 = 0$, ja que són supèrflues. El sistema esglaonat és:

$$\begin{cases} x+y+z-w = 1 \\ y-z+w = -1 \end{cases}$$

En aquest cas, $n = 4$ i $r = 2$; per tant, es tracta d'un sistema compatible indeterminat. Per a poder utilitzar el procediment de substitució cap enrere, hi ha d'haver tantes incògnites com equacions; per això, movem les dues incògnites restants al membre de la dreta.

$$\begin{cases} x+y = 1-z+w \\ y = -1+z-w \end{cases}$$

Ara ja podem resoldre el sistema. L'última equació ens dona el valor de la y.

$$y = -1 + z - w.$$

Si substituïm cap enrere el valor de la y en la primera equació,

$$x - 1 + z - w = 1 - z + w \Rightarrow x = 2 - 2z + 2w.$$

Així, les solucions són d'aquest tipus:

$$x = 2 - 2z + 2w$$
$$y = -1 + z - w$$

on z i w poden ser qualsevol nombre. Escriurem la solució $(x, y, z, w) = (2 - 2z + 2w, 1 + z - w, z, w)$ per $z, w \in \mathbb{R}$. Per això, el sistema té infinites solucions, tantes com valors es donin a z i w. Exemples concrets serien els següents:

- Si $z = 0$ i $w = 0$, llavors $x = 2$ i $y = -1$. Per tant, una solució del sistema és $x = 2$, $y = -1$, $z = 0$, $w = 0$.
- Si $z = 1$ i $w = -2$, la solució del sistema seria $x = -4$, $y = 2$, $z = 1$, $w = -2$.

Així doncs, per a cada parell de valors qualsevol z, w podem aconseguir una solució del sistema. És a dir, el sistema té solucions infinites.

3. **Troba les solucions del sistema.**

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x - 2y + z = -2 \\ 8x + 5y + 5z = 1 \end{cases}$$

Solució:

Solucionem el sistema trobant la forma esglaonada. Per això fem el següent:

$$\begin{cases} 2x+3y+z = 4 \\ x-2y+z = -2 \\ 8x+5y+5z = 1 \end{cases} \xrightarrow{Eq1\leftrightarrow Eq2} \begin{cases} x-2y+z = -2 \\ 2x+3y+z = 4 \\ 8x+5y+5z = 1 \end{cases} \xrightarrow[Eq3=Eq3-8\cdot Eq1]{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1}$$

$$\xrightarrow[Eq3=Eq3-8\cdot Eq1]{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1} \begin{cases} x-2y+z = -2 \\ 7y-z = 8 \\ 21y-3z = 17 \end{cases} \xrightarrow{Eq3=Eq3-3\cdot Eq2} \begin{cases} x-2y+z = -2 \\ 7y-z = 8 \\ 0 = -7 \end{cases}$$

En vista de la tercera equació, que no té cap possible solució perquè sempre és falsa, podem deduir que el sistema és incompatible.

4. **Afegeix una equació al sistema següent, de manera que resulti...**

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ x-z = 2 \end{cases}$$

(a) compatible determinat.
(b) compatible indeterminat.
(c) incompatible.

Solució:

(a) Ens hem d'assegurar de trobar una tercera equació que no doni lloc a un sistema incompatible o que sigui irrellevant. Com que la segona equació no té la variable y, podem donar una tercera equació amb aquesta variable, per exemple, $y = 0$. O bé, per a complicar més aquesta tercera equació, $y = 0$ més una combinació lineal de les altres dues equacions (de manera que en simplificar el sistema retorni a $y = 0$).

Amb aquesta tercera equació ($y = 0$), fent substitució cap enrere, ens queda el sistema

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases} \xrightarrow{Eq2 = Eq2 - Eq1} \begin{cases} x + z = 1 \\ \quad -2z = 1 \end{cases}$$

I com que és un sistema esglaonat de dues equacions i dues variables, ja sabem que és compatible determinat. Saps resoldre'l?

(b) Com que amb les dues equacions que ens donen ja tenim un sistema amb dues equacions i tres incògnites, si afegim una equació irrellevant mantindrem el mateix tipus de sistema.

Per exemple, la tercera equació podria ser $0 = 0$ (que sempre és certa i no dona més informació que la que ja tenim, i per tant és irrellevant), $x - z = 2$ (que és idèntica a la segona equació) o qualsevol combinació lineal de les equacions inicials.

(c) Per tal que el sistema resulti incompatible, n'hi ha prou amb donar una equació que no es pugui solucionar. Per exemple, si la tercera equació fos $0 = 1$ no hi hauria solució del sistema (ja que la tercera equació mai no seria certa), i per tant el sistema seria incompatible.

Una altra opció és donar una tercera equació que sigui realment incompatible amb alguna de les anteriors, per exemple, $x - z = 1$. Com que la segona equació és $x - z = 2$, no pot ser que les dues siguin certes alhora (dit d'una altra manera, en restar una equació de l'altra obtindríem $0 = 1$ com abans); per tant, el sistema és incompatible.

5. **Troba la solució del sistema d'inequacions següent:**

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{x-1}{3} > x \\ x - 1 < 3 - \dfrac{x+1}{2} \end{cases}$$

Solució:

Si operem la primera inequació, tenim:

$$\begin{aligned} 2x - x &> \frac{x-1}{3} \\ x &> \frac{x-1}{3} \\ 3x &> x - 1 \\ 2x &> -1 \\ x &> \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

Mentre que, per a la segona,

$$\begin{aligned} x - 4 &< -\frac{x+1}{2} \\ 2x - 8 &< -(x+1) \\ 3x &< 7 \\ x &< \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Per tant, si unim les dues solucions tenim la solució $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right)$.

6. **Resol el sistema d'inequacions següent:**

$$\begin{cases} 2x^2 - 3 \le 6x + 5 \\ 7x + 1 \le 13 + 4x \end{cases}$$

Solució:

Si reordenem la primera inequació, tenim

$$2x^2 - 6x - 8 \le 0.$$

Ara, si igualem la part de l'esquerra a 0 i solucionem l'equació aplicant la fórmula de l'equació de segon grau, tenim $x = -1, 4$ com a solucions. Aquests valors són on la inequació se satisfà amb una igualtat. Per a saber quin dels intervals que queden soluciona la inequació, prenem un valor de cada interval i els avaluem:

- Agafem un nombre més petit que -1, per exemple, -2, i el substituïm en la inequació, de manera que queda $8 \le 0$. Com que això no és cert, aleshores l'interval $(-\infty, -1)$ no pertany a la solució.

- Agafem un nombre entre -1 i 4, per exemple, el 0, i el substituïm a la inequació, de manera que queda $-8 \leq 0$. Com si és cert, aleshores aquest interval si pertany a la solució.
- Agafem un nombre més gran que 4, per exemple, 5, i el substituïm en la inequació, de manera que queda $12 \leq 0$. Com que això no és cert, l'interval $(4, +\infty)$ no pertany a la solució.

En conclusió, la primera inequació té com a solució l'interval $[-1, 4]$.

Solucionem la segona inequació de manera que queda

$$\begin{aligned} 7x + 1 &\leq 13 + 4x \\ 7x - 4x &\leq 13 - 1 \\ 3x &\leq 4 \end{aligned}$$

i, per tant, té com a solució $x \leq 4$.

Ara sabem que la solució del sistema serà la intersecció de les solucions de cadascuna de les inequacions. Així tindrem que la solució del sistema és $[-1, 4]$.

Exercicis per a practicar amb les solucions

7. **Troba les solucions dels sistemes d'equacions següents usant el mètode de Gauss:**

(a)

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ x - 2y = 9 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 3x + y + z + u + v = 0 \\ \quad\quad + z - u = 1 \\ \quad\quad\quad 2v = 4 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} -2x + y + z - t = 2 \\ \quad y + z + 2t = 4 \\ \quad\quad z + 2t = 3 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -4x + 5y - 6z = 1 \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ \quad y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

8. **Un sistema lineal s'ha resolt de dues maneres obtenint els dos conjunts de solucions següents:**

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3\mu - 1 \\ y = 3 - 6\mu \\ z = 1 + 3\mu \end{cases}$$

per a λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Prova que les dues solucions coincideixen.

9. **Resol els sistemes d'inequacions de grau 1 següents:**

(a)

$$\begin{cases} 2x - (x - 4) < 6 \\ x > 3 \cdot (2x - 1) + 18 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-4}{3} > 2x - 1 \\ 2x - \dfrac{x-5}{3} > x - 3 \end{cases}$$

10. **Resol els sistemes d'inequacions de grau 2 següents:**

(a)

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leq 0 \\ -x^2 + 8x > 7 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 1} \leq 0 \\ 7 \cdot (3 - x) \geq 5 \end{cases}$$

Solucions:

7.

(a) $x = 5, y = -2$

(b) $\left(\dfrac{-3 - y - 2u}{3}, y, 1 + u, u, 2\right)$

(c) $\left(1 - \dfrac{3t}{2}, 1, 3 - 2t, t\right)$

(d) $\left(\frac{-2}{3} - 11z, \frac{-1}{3} - 4z, z\right)$

(e) És un sistema incompatible

8. Comprovem que per a $\lambda = 3\mu - 1$ obtenim les mateixes expressions per a les solucions.

9.

(a) $(-\infty, -3)$

(b) $(-7, 1)$

10.

(a) $(1, 6]$

(b) $(-\infty, -3] \cup \left(1, \frac{16}{7}\right]$

4. Polinomis

Índex

4.1. Definició i aspectes generals

4.1.1. Definició

Un polinomi d'una sola variable o, per abreujar, un **polinomi**, és una expressió algebraica amb una única lletra, anomenada variable. Els *termes* d'aquesta expressió són el producte d'un nombre per una potència positiva de la variable, excepte en el cas d'un únic terme, que correspon a la potència 0 de la variable, i per això consta només d'un nombre. Aquest terme s'anomena *terme independent.*

Què és un polinomi? És una expressió algebraica amb una única lletra anomenada variable. Els elements bàsics d'un polinomi són els termes. Cada terme és producte d'un coeficient i un grau. Un polinomi amb un sol terme es denomina monomi. Si té dos termes s'anomena binomi.

Exemple. Polinomis.

Polinomi amb variable a

$3a - 42a^3 + 5a - 2a + 2$, els termes del qual són: $3a$, $42a^3$, $5a$, $-2a$, $+2$.

Polinomi amb variable b

$5b - 56b^2 + b - 17$, els termes del qual són: $5b$, $-56b^2$, $+b$, -17.

Els polinomis es poden designar per una lletra. D'aquesta manera s'evita escriure tots els termes d'un polinomi cada vegada que s'hi ha de fer referència. Aquesta lletra va seguida de la variable, entre parèntesis, del polinomi. Aquests parèntesis no s'han de confondre amb els parèntesis que contenen operacions.

Exemple. Nomenclatura.
Anomenar $p(x)$ el polinomi $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$, vol dir que

$$p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$$

on p representa el nom del polinomi, i x, entre parèntesis, indica la variable del polinomi.

Aquesta assignació permet referir-nos al polinomi $p(x)$ sense necessitat d'escriure tots els termes que el defineixen.
Val a dir que la variable més usada per a expressar polinomis és la x. Es tracta d'un costum, per la qual cosa no s'ha de considerar una obligació.

4.1.2. Elements i característiques d'un polinomi

Tal com ja s'ha dit, per **terme d'un polinomi** s'entenen els diferents elements d'un polinomi (com també de qualsevol expressió algebraica) que són producte d'un coeficient i una potència de la variable.
Els tipus de polinomis es distingeixen d'acord amb el nombre de termes que presenten. En particular:

- Un polinomi amb un sol terme s'anomena **monomi**.
- Un polinomi amb dos termes s'anomena **binomi**.
- Un polinomi amb tres termes s'anomena **trinomi**.

Exemple. Tipus de polinomis.

Monomis de variable b: $-13b^4$, $5b^{23}$, $-7b^2$

Binomi de variable c: $3c^3 - 5c$

Trinomi de variable d: $3d^4 + 2d^2 - 5$

Els polinomis i els seus termes presenten característiques que són importants de distingir. Aquestes característiques són:

- El **grau d'un terme** és l'exponent de la variable d'aquest terme.
- El **grau del polinomi** és el grau del terme de grau màxim. Així, hi ha polinomis de grau 0, de grau 1 o de primer grau, de grau 2 o de segon grau, etc. Generalment, s'escriuen d'esquerra a dreta els termes d'un polinomi de major a menor grau.
- El **terme independent** és el terme de grau 0 i, per tant, no hi apareix la variable.

- El **coeficient d'un terme** és el nombre que multiplica la variable en aquest terme. La resta del terme es denomina **part literal**.

Exemple. Característiques d'un polinomi.
Sigui el polinomi $p(x) = 9x^6 - 3x^4 + x - 6$.

- El terme de grau 6 és $9x^6$, el terme de grau 4 és $-3x^4$, el terme de grau 1 és x, i el terme independent és -6. Els termes corresponents als graus que no apareixen són iguals a 0.
- El grau del polinomi és, per tant, 6.
- El coeficient del terme de grau 6 és 9, i la seva part literal és x^6.
- El coeficient del terme de grau 4 (o, per a abreujar, coeficient de grau 4) és -3, i la seva part literal és x^4.
- El coeficient de grau 1 és 1, i la seva part literal és x.
- Els coeficients dels altres termes són 0.

4.1.3. Valor numèric d'un polinomi

El **valor numèric** d'un polinomi és el valor que s'obté en substituir-ne la variable per un nombre determinat. Així, donat el polinomi $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$, en substituir la x per 1, el seu valor numèric és

$$p(1) = 5 \cdot 13 - 4 \cdot 12 + 5 \cdot 1 - 1 = 5$$

Direm, doncs, que el valor numèric del polinomi $p(x)$, quan x és igual a 1, és 5. Matemàticament, i de manera abreujada, s'escriu $p(1) = 5$.
Donat un polinomi, podem calcular diferents valors numèrics.

Exemple. Valors numèrics d'un polinomi.
Sigui $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$:

- $p(0) = 5 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 1 = -1$. Per tant, -1 és el valor numèric de $p(x)$ quan x és 0.
- $p(-1) = 5 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 1 = -15$. Per tant, -15 és el valor numèric de $p(x)$ quan x és -1.

4.2. Operacions i propietats bàsiques

4.2.1. Operacions bàsiques entre monomis

És important conèixer com es fan les operacions entre monomis perquè serveixen de base per a entendre les operacions entre polinomis. Vegem doncs, com s'operen els monomis.

Operacions entre monomis

$$3x^4 + (2x) = 3x^4 + 2x$$
$$5x^3 - \left(2x^3\right) = 3x^3$$
$$4x^3 \cdot \left(-5x^2\right) = -20x^5$$
$$\frac{8x^4}{2x^3} = 4x$$

Suma i resta La suma (o resta) de dos monomis de grau diferent és un binomi en què els dos únics termes són exactament aquests dos monomis. Per exemple, la suma dels monomis $3x^4$ i $2x$, que es representa per $\left(3x^4\right) + (2x)$, és igual al binomi $3x^4 + 2x$. La suma (o resta) de dos monomis del mateix grau és un altre monomi amb idèntic grau, i amb coeficient igual a la suma (o resta) dels coeficients d'aquests monomis. Per exemple, la resta de $5x^3$ i $2x^3$, que es representa per $\left(5x^3\right) - \left(2x^3\right)$, és igual al monomi $3x^3$.

Producte El producte de dos monomis és un altre monomi. El seu coeficient és el producte dels coeficients dels monomis que es multipliquen, i el seu grau és la suma de graus dels monomis inicials. Per exemple, el producte dels monomis $4x^3$ i $-5x^2$, que es representa per $\left(4x^3\right) \cdot \left(-5x^2\right)$, és $-20x^5$, ja que $4 \cdot (-5) = -20$ i $x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$.

Quocient El quocient de dos monomis és un altre monomi. El seu coeficient és el quocient dels coeficients dels monomis que es divideixen, i el seu grau és la diferència de graus d'aquests dos monomis. En aquest cas, el grau del numerador no pot ser inferior al grau del denominador. Per exemple, el quocient dels monomis $8x^4$ i $2x^3$, que es representa per $\dfrac{8x^4}{2x^3}$, és el monomi $4x$, ja que $\dfrac{8}{2} = 4$ i $\dfrac{x^4}{x^3} = x^{4-3} = x^1$.

4.2.2. Operacions bàsiques entre polinomis

Vist com s'operen els monomis, estudiem les operacions bàsiques entre polinomis.

Suma i resta de polinomis La suma (o resta) de dos polinomis és igual al polinomi resultant de la suma (o resta) dels termes que tenen el mateix grau. Cada terme resultant correspon a la suma dels termes del mateix grau dels polinomis que se sumen (o resten). D'acord amb la suma (o resta) de monomis, es tracta, doncs, de sumar els coeficients dels termes del mateix grau i mantenir l'ordre d'aquests termes.

Com se sumen (o resten) dos polinomis?
La suma (o resta) de dos polinomis és igual al polinomi resultant de la suma (o resta) dels termes del mateix grau. Els termes del mateix grau es poden col·locar en columna, se sumen els coeficients de cada terme i es col·loca el resultat a sota dels dos polinomis, separat per una línia horitzontal.

Per exemple, per a sumar $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ i $5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x + 16$, s'han de sumar els coeficients dels termes de grau 4 amb els de grau 4, els coeficients de grau 3 amb els de grau 3, i així per cada terme. El polinomi suma serà la suma de les sumes de cada un d'aquests elements de mateix grau. Ens ajudem d'una taula per a veure-ho més clar.

Termes	1r polinomi	2n polinomi	polinomi suma
grau 4	0	$5x^4$	$0 + 5x^4 = \boxed{5x^4}$
grau 3	$2x^3$	$-2x^3$	$2x^3 - 2x^3 = \boxed{0x^3}$
grau 2	$-3x^2$	$-5x^2$	$-3x^2 - 5x^2 = \boxed{-8x^2}$
grau 1	$4x$	$-3x$	$4x - 3x = \boxed{x}$
grau 0	-6	16	$-6 + 16 = \boxed{10}$

Per tant, el polinomi suma és

$$\left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 6\right) + \left(5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x + 16\right) = 5x^4 - 8x^2 + x + 10$$

Normalment, i especialment per comoditat, una suma entre polinomis s'expressa escrivint els polinomis un a sobre de l'altre, posant en columna els elements del mateix grau i el resultat a continuació d'una línia horitzontal a sota de la columna del grau corresponent.

Exemple. Suma de polinomis.

$$\left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 6\right) + \left(5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x + 16\right)$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\
+ & 5x^4 & -2x^3 & -5x^2 & -3x & +16 \\
\hline
 & 5x^4 & & -8x^2 & +x & +10
\end{array}$$

Per a restar dos polinomis, es procedeix com en el cas de la suma però restant terme a terme sempre del mateix grau.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\
- & (5x^4 & -2x^3 & -5x^2 & -3x & +16) \\
\hline
 & -5x^4 & +4x^3 & +2x^2 & +7x & -22
\end{array}$$

Per a evitar errors a l'hora de restar, és recomanable canviar, abans de restar, el signe de cadascun dels termes del segon polinomi pel seu oposat, i després sumar.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\
+ & -5x^4 & +2x^3 & +5x^2 & +3x & -16 \\
\hline
 & -5x^4 & +4x^3 & +2x^2 & +7x & -22
\end{array}$$

En qualsevol cas, el resultat de la resta d'aquests dos polinomis és sempre la mateixa.

Exemple. Resta de dos polinomis.
$$\left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 6\right) - \left(5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x + 16\right) = -5x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 7x - 22$$

Producte de polinomis La multiplicació de dos polinomis és igual a la suma de tots els productes de cadascun dels termes del primer polinomi per cadascun dels termes del segon polinomi. Normalment, el nombre d'operacions que s'han de fer és molt gran. Per això, és convenient fer la multiplicació de manera ordenada.

Per a ser més precisos, els passos a seguir són:

1) Es posen els dos polinomis en columna, un sobre l'altre, i es multiplica cada terme del segon polinomi per cadascun dels termes del primer polinomi.

2) Els resultat del pas anterior es posa a la fila següent, a sota d'una línia horitzontal. Com en el cas de la suma, és recomanable que tots els termes del mateix grau quedin en una mateixa columna.

3) Finalment, se sumen els termes de cada columna.

Com es multipliquen dos polinomis?
La multiplicació de dos polinomis és igual a la suma de tots els productes de cadascun dels termes del primer polinomi per cadascun dels termes del segon polinomi. En fer el producte és convenient que tots els termes del mateix grau quedin en una mateixa columna.

Per a entendre com es desenvolupa aquest procés, va bé analitzar primerament el cas de multiplicar un polinomi per un monomi. En aquest cas, es multiplica el monomi per cada terme del polinomi i se sumen els termes producte obtinguts. Ho podem veure en l'exemple següent:

Exemple. Producte de polinomi per monomi.
$$\left(7x^4 - 5x^2 + 3x - 8\right) \cdot \left(2x^3\right)$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 7x^4 & -5x^2 & +3x & -8 \\
\cdot & & & & 2x^3 \\
\hline
 & 14x^7 & -10x^5 & +6x^4 & -16x^3
\end{array}$$

Tal com s'observa en l'exemple, és convenient deixar un buit on faltin termes.

Per a fer el producte de dos polinomis qualssevol, s'ha de repetir el que s'ha fet en el cas anterior amb cadascun dels termes del polinomi que multiplica, sumant al final els resultats per cadascun dels graus del polinomi.

Estudiem els passos a seguir amb l'ajut d'un exemple, en aquest cas el producte del polinomi $2x^4 - 7x^3 + 5x - 8$ pel polinomi $x^2 - 7x + 2$.

1) En primer lloc, col·loquem un polinomi sobre un altre situant els termes de mateix grau en una mateixa columna.

$$\begin{array}{cccccc}
 & 2x^4 & -7x^3 & & +5x & -8 \\
\cdot & & & x^2 & -7x & +2 \\
\hline
\end{array}$$

2) A continuació, comencem a multiplicar el primer polinomi per l'element de grau menor del segon polinomi (+2 en aquest cas) i col·loquem els resultats de cada terme a sota de la columna del termes del mateix grau:

$$\begin{array}{cccccc}
 & 2x^4 & -7x^3 & & +5x & -8 \\
\cdot & & & x^2 & -7x & +2 \\
\hline
 & 4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16
\end{array}$$

3) Acabada i ordenada aquesta primera multiplicació, continuem multiplicant els termes del primer polinomi pel segon terme més petit del segon polinomi ($-7x$ en aquest cas) i, com abans, col·loquem els resultats en la línia següent de manera que els termes d'igual grau estiguin en columna.

$$\begin{array}{cccccc}
 & 2x^4 & -7x^3 & & +5x & -8 \\
\cdot & & & x^2 & -7x & +2 \\
\hline
 & 4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16 \\
-14x^5 & +49x^4 & & -35x^2 & +56x &
\end{array}$$

4) Continuem de la mateixa manera amb la resta d'elements del primer polinomi.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 2x^4 & -7x^3 & & +5x & -8 \\
\cdot & & & & x^2 & -7x & +2 \\
\hline
 & & 4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16 \\
 & -14x^5 & +49x^4 & & -35x^2 & +56x & \\
2x^6 & -7x^5 & & +5x^3 & -8x^2 & &
\end{array}$$

5) Finalment, sumem terme a terme els resultats obtinguts.

Exemple. Producte de dos polinomis.

$$\left(2x^4 - 7x^3 + 5x - 8\right) \cdot \left(x^2 - 7x + 2\right)$$

		$2x^4$	$-7x^3$		$+5x$	-8
	$\cdot$			x^2	$-7x$	$+2$
		$4x^4$	$-14x^3$		$+10x$	-16
	$-14x^5$	$+49x^4$		$-35x^2$	$+56x$	
$2x^6$	$-7x^5$		$+5x^3$	$-8x^2$		
$2x^6$	$-21x^5$	$+53x^4$	$-9x^3$	$-43x^2$	$+66x$	-16

Quocient de polinomis L'algoritme de la divisió entre polinomis és un procés molt semblat a la divisió entre nombres, amb el canvi de les xifres d'un nombre pels termes d'un polinomi. D'acord amb aquesta similitud, per a dividir dos polinomis s'ha de començar dividint el terme de major grau del polinomi dividend entre el terme de major grau del polinomi divisor. El resultat se situa en el lloc del quocient. A continuació, es multiplica aquest terme del quocient pel divisor i aquest producte es resta del dividend.

Com es divideixen dos polinomis?
De manera similar a la divisió entre nombres, per a dividir dos polinomis s'ha de començar dividint el terme de major grau del dividend entre el terme de major grau del divisor. El resultat se situa en el lloc del quocient, es multiplica aquest terme del quocient pel divisor i es resta aquest producte del dividend. I així successivament amb la resta de termes del dividend fins a arribar al seu terme independent.

Vegem-ho amb un exemple: dividim el polinomi $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48$ entre el polinomi $2x^2 - 3x + 4$

1) El primer pas consisteix a dividir el terme de major grau del dividend, $6x^4$ en aquest cas, entre el terme de major grau del divisor, $2x^2$, de manera que queda una divisió entre monomis.

$$\frac{6x^4}{2x^2} = 3x^{4-2} = 3x^2$$

2) A continuació, es multiplica el divisor pel monomi obtingut,

$$\left(2x^2 - 3x + 4\right) \cdot 3x^2 = 6x^4 - 9x^3 + 12x^2$$

i es resta del dividend. D'acord amb aquest procés, s'escriu

$6x^4$	$-27x^3$	$+15x^2$	-48	$2x^2 - 3x + 4$
$-6x^4$	$+9x^3$	$-12x^2$		$3x^2$
0	$-18x^3$	$+3x^2$		

3) Feta la resta, es baixa el terme següent del dividend, en aquest cas 0 (atès que no hi ha terme de primer grau), i es divideix, seguint el procediment anterior, entre el que ha quedat com a dividend i el divisor.

$$\begin{array}{lllll|l}
6x^4 & -27x^3 & +15x^2 & & -48 & 2x^2-3x+4 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & +9x^3 & -12x^2 & & & 3x^2-9x \\ \cline{1-3}
0 & -18x^3 & +3x^2 & & & \\
 & +18x^3 & -27x^2 & +36x & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & -24x^2 & +36x & -48 &
\end{array}$$

4) Se segueix aquest procediment successivament fins a baixar l'últim element del polinomi dividend. En el cas de l'exemple, la divisió completa s'escriuria de la manera següent:

Exemple. Quocient de polinomis amb residu 0:

$$\left(6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48\right) \div \left(2x^2 - 3x + 4\right)$$

$$\begin{array}{lllll|l}
6x^4 & -27x^3 & +15x^2 & & -48 & 2x^2-3x+4 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & +9x^3 & -12x^2 & & & 3x^2-9x-12 \\ \cline{1-3}
0 & -18x^3 & +3x^2 & (0x) & & \\
 & +18x^3 & -27x^2 & +36x & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & -24x^2 & +36x & -48 & \\
 & & +24x^2 & -36x & +48 & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

En aquest cas, direm que la divisió és exacta perquè el residu és 0. Si el residu és 0, es compleix

$$\frac{6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48}{2x^2 - 3x + 4} = 3x^2 - 9x - 12$$

En casos com aquest, quan el residu de la divisió és 0, es diu que el polinomi dividend, en aquest cas $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48$, és divisible entre el polinomi divisor, $2x^2 - 3x + 4$ en aquest cas, i, de manera equivalent, que el polinomi dividend, $2x^2 - 3x + 4$, és múltiple del polinomi divisor, $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48$.

Una altra manera d'expressar-ho és dir que el polinomi dividend, $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48$, es descompon en els polinomis divisor, $2x^2 - 3x + 4$, i quocient, $3x^2 - 9x - 12$. Això significa que el polinomi dividend, $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48$, és producte dels polinomis divisor, $2x^2 - 3x + 4$, i quocient, $3x^2 - 9x - 12$, de la divisió. En definitiva,

$$6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48 = \left(2x^2 - 3x + 4\right) \cdot \left(3x^2 - 9x - 12\right)$$

Tal com passa també en les divisions entre expressions numèriques, és possible que el residu d'un quocient entre polinomis no sigui 0, com per exemple en dividir el polinomi $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 + 3x - 48$ entre el polinomi $2x^2 - 3x + 4$

Exemple. Quocient de polinomis amb residu diferent de 0.

$$(6x^4 - 27x^3 + 15x^2 + 3x - 48) \div (2x^2 - 3x + 4)$$

$$\begin{array}{cccccc|l}
6x^4 & -27x^3 & +15x^2 & +3x & -48 & & 2x^2 - 3x + 4 \\ \cline{7-7}
-6x^4 & +9x^3 & -12x^2 & & & & 3x^2 - 9x - 12 \\ \cline{1-3}
0 & -18x^3 & +3x^2 & +3x & & & \\
 & +18x^3 & -27x^2 & +36x & & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & -24x^2 & +39x & -48 & & \\
 & & +24x^2 & -36x & +48 & & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & +3x & 0 & &
\end{array}$$

En aquest segon exemple, el polinomi dividend no és múltiple del polinomi divisor.

En casos en què el polinomi dividend no és múltiple del polinomi divisor, feta la divisió, també es pot expressar la descomposició del polinomi dividend com el producte dels polinomis divisor i quocient, més el polinomi residu, de la mateixa manera com es fa amb expressions numèriques. És a dir, que la fórmula apresa en la divisió de nombres, en què el dividend (D) és igual al divisor (d) pel quocient (q) més el residu (r), també s'aplica en la divisió de polinomis.

$$\boxed{D = d \cdot q + r}$$

Així, en l'exemple, vist que el dividend és $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 + 3x - 48$, el divisor és $2x^2 - 3x + 4$, el quocient és $3x^2 - 9x - 12$ i el residu és $3x$, resulta

$$6x^4 - 27x^3 + 15x^2 + 3x - 48 = \left(2x^2 - 3x + 4\right) \cdot \left(3x^2 - 9x - 12\right) + 3x$$

Fraccions algebraiques Una **fracció algebraica** és simplement una fracció entre polinomis.

Què és una fracció algebraica? És una fracció entre polinomis. Les fraccions algebraiques es poden simplificar i es poden operar (amb suma, resta, multiplicació i divisió). Es defineix el terme de fraccions algebraiques equivalents de manera similar a les fraccions numèriques.

De la mateixa manera que s'han definit fraccions numèriques equivalents, també es poden definir les **fraccions algebraiques equivalents**. Concretament,

si $a(x)$, $b(x)$, $p(x)$ i $q(x)$ són polinomis, direm que les fraccions algebraiques $\dfrac{a(x)}{b(x)}$ i $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ són equivalents si el producte creuat entre numeradors i denominadors és igual. És a dir,

$$\boxed{\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ si } a(x)\cdot q(x) = b(x)\cdot p(x)}$$

Exemple. Fraccions algebraiques equivalents.

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6} = \frac{2x^2 - 2}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$$

perquè

$$\left(2x^3 - 4x^2 - 2x + 4\right)\cdot\left(x^3 + 3x^2 + x + 3\right) = \left(x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6\right)\cdot\left(2x^2 - 2\right)$$
$$= 2x^6 + 2x^5 - 12x^4 - 2x^2 - 2x + 12$$

Com en el cas dels nombres fraccionaris, les fraccions algebraiques verifiquen aquestes propietats:

- En multiplicar numerador i denominador per un mateix polinomi, la fracció resultant és equivalent a la inicial.
- En dividir de manera exacta numerador i denominador per un mateix polinomi, la fracció resultant és equivalent a la inicial. Aquest procés es denomina simplificació.

Exemple. Simplificar fraccions algebraiques.
Donada la fracció algebraica

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^2 + x - 6}$$

notem que numerador i denominador es poden descompondre com a producte d'altres polinomis de menor grau.

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x-2)\cdot\left(x^2 + 4\right)$$
$$x^2 + x - 6 = (x-2)\cdot(x+3)$$

Com que numerador i denominador tenen factors comuns, $(x-2)$, resulta

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^2 + x - 6} = \frac{(x-2)\cdot\left(x^2+4\right)}{(x-2)\cdot(x+3)} = \frac{x^2+4}{x+3}$$

Les fraccions algebraiques també es poden sumar, restar, multiplicar i dividir. Els procediments són els mateixos que en el cas de les fraccions numèriques:

- **Producte i quocient de fraccions algebraiques.** Per a fer la multiplicació i divisió de fraccions algebraiques se segueixen les mateixes regles que per a multiplicar i dividir fraccions numèriques.
  La fracció producte és aquella que té com a numerador el producte de numeradors i com a denominador el producte de denominadors, és a dir, aquella en la qual es multipliquen linealment numeradors i denominadors.
  La fracció quocient és aquella que com a numerador té el producte del primer

nu- merador pel segon denominador, i com a denominador el producte del primer denominador pel segon numerador, és a dir, aquella en la qual es multipliquen numeradors i denominadors en creu.

Exemple. Producte i quocient de fraccions algebraiques.

Producte

$$\frac{3x-2}{2x^2+3}\cdot\frac{7x+1}{2x+2}=\frac{(3x-2)\cdot(7x+1)}{(2x^2+3)\cdot(2x+2)}=\frac{21x^2-11x-2}{4x^3+4x^2+6x+6}$$

Quocient

$$\frac{3x-2}{2x^2+3}:\frac{7x+1}{2x+2}=\frac{(3x-2)\cdot(2x+2)}{(2x^2+3)\cdot(7x+1)}=\frac{6x^2+2x-4}{14x^3+2x^2+21x+3}$$

- **Suma i resta de fraccions algebraiques.** Per a sumar (o restar) dues fraccions algebraiques, se segueix el mateix procediment que per a sumar (o restar) fraccions numèriques. Per això convé diferenciar si tenen el mateix denominador o no.

  - Si les fraccions algebraiques tenen el mateix denominador, se sumen (o resten) els numeradors i es deixa el mateix denominador.

    Exemple. Resta (o suma) de fraccions algebraiques d'igual denominador.

    $$\frac{3x-2}{4x^2-x+1}-\frac{2x+6}{4x^2-x+1}=\frac{(3x-2)-(2x+6)}{4x^2-x+1}=\frac{x-8}{4x^2-x+1}$$

  - Si les fraccions algebraiques tenen denominador diferent, cal abans de res transformar-les en fraccions equivalents amb el mateix denominador, com en el cas de les fraccions numèriques. Per a fer-ho, es calcula l'MCM (mínim comú múltiple) dels polinomis que són en el denominador. Trobades les fraccions equivalents amb el mateix denominador, se sumen de la manera anterior: se sumen (o resten) els numeradors i es deixa el mateix denominador.
    Vegem-ho amb aquest exemple. Volem sumar

    $$\frac{3x-4}{x^2+5x+6}+\frac{5x-2}{x^2+3x+2}$$

    1) Busquem l'MCM dels denominadors.

    $$x^2+5x+6=(x+2)\cdot(x+3)$$
    $$x^2+3x+2=(x+1)\cdot(x+2)$$

    Per tant,

    $$\mathsf{mcm}\left(x^2+5x+6,x^2+3x+2\right)=(x+1)(x+2)(x+3)=x^3+6x^2+11x+6$$

    2) Trobat l'MCM, reescrivim les fraccions algebraiques originals per les seves equivalents d'igual denominador.

$$\frac{3x-4}{x^2+5x+6} = \frac{(3x-4)}{(x+2)(x+3)} = \frac{(3x-4)(x+1)}{(x+2)(x+3)(x+1)} = \frac{3x^2-x-4}{x^3+6x^2+11x+6}$$

$$\frac{5x-2}{x^2+3x+2} = \frac{(5x-2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{(5x-2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+1)} = \frac{5x^2+13x-6}{x^3+6x^2+11x+6}$$

3) Finalment, sumem els numeradors i mantenim el denominador comú

Exemple. Suma de fraccions algebraiques de diferent denominador.

$$\frac{3x-4}{x^2+5x+6}+\frac{5x-2}{x^2+3x+2} = \frac{3x^2-x-4}{x^3+6x^2+11x+6}+\frac{5x^2+13x-6}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{8x^2+12x-10}{x^3+6x^2+11x+6}$$

4.2.3. Regla de Ruffini

La **regla de Ruffini** és un procediment que permet fer de manera senzilla la divisió entre dos polinomis quan el divisor és un polinomi de grau 1 tal que el seu coeficient de grau 1 és també 1 i el terme independent és un nombre enter. Aquesta regla utilitza solament els coeficients dels polinomis implicats.

Què diu la regla de Ruffini? La regla de Ruffini és una manera senzilla i ràpida de fer la divisió entre dos polinomis quan el divisor és un polinomi de grau 1 amb coeficient de grau 1 igual a 1 i el terme independent un nombre enter. Aquesta regla permet fer la divisió utilitzant únicament els coeficients d'ambdós polinomis.

L'algoritme és el següent:

1) En primer lloc, se situen els coeficients del dividend, de major a menor (i posant 0 si és necessari en els termes que no existeixin), en la part superior. Es dibuixen dos segments perpendiculars formant una creu en la part inferior de la figura i se situa el terme independent del divisor, canviat de signe, entre els dos segments.

$$\begin{array}{c|cccc} & 5 & -4 & 5 & -1 \\ +2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

2) Col·locats els coeficients del termes dels polinomis, es baixa el primer coeficient, es multiplica pel terme independent canviat de signe i se situa el resultat sota el coeficient següent:

$$\begin{array}{c|cccc} & 5 & -4 & 5 & -1 \\ +2 & & \underbrace{10}_{+2\cdot 5} & & \\ \hline & 5 & & & \end{array}$$

3) Se sumen els dos nombres de la mateixa columna i es multiplica el resultat obtingut pel terme independent canviat de signe.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 5 & -4 & 5 & -1 \\
+2 & & 10 & \underbrace{12}_{+2\cdot 6} & \\
\hline
 & 5 & 6 & &
\end{array}
$$

4) Procedint de la mateixa manera, la divisió per Ruffini de $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ entre $x - 2$ s'expressa d'aquesta manera:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 5 & -4 & 5 & -1 \\
+2 & & 10 & 12 & \underbrace{34}_{+2\cdot 17} \\
\hline
 & 5 & 6 & 17 & \multicolumn{1}{|r}{33}
\end{array}
$$

5) Finalment, a partir de l'última fila de nombres, es pot extreure el quocient i el residu. El residu és l'últim nombre obtingut de les restes, 33 en aquest cas, mentre que el quocient de la divisió és un polinomi els coeficients del qual són la resta dels nombres d'aquesta fila, de major a menor grau. En aquest exemple, doncs, el quocient és $5x^2 + 6x + 17$. Tal com s'observa, ha baixat un grau respecte del polinomi inicial.

Amb això es conclou

$$5x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = \left(5x^2 + 6x + 17\right) \cdot (x - 2) + 33$$

4.2.4. Productes notables

En matemàtiques, s'utilitza el terme **identitat** per a fer referència a qualsevol igualtat entre dues expressions matemàtiques (i, per tant, siguin numèriques o algebraiques) que es compleix per a qualsevol valor de les seves variables.

Amb el terme **producte notable** es fa referència a certes multiplicacions entre expressions algebraiques. En particular, cada producte notable correspon a una fórmula de descomposició del producte que és producte de les propietats entre les operacions que hi intervenen.

Productes notables

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Recordem aquí els productes notables principals que ja vam veure en el tema sobre nombres.

Productes de dues expressions algebraiques, amb variables a i b:

- **Quadrat d'una suma** $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
- **Quadrat d'una diferència** $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
- **Suma per diferència** $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Producte de tres expressions algebraiques, amb variables a, b i c:

- **Cub d'una suma** $(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- **Cub d'una diferència** $(a-b)^3 = (a-b)\cdot(a-b)\cdot(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Exemple. Productes notables entre polinomis.

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3 + (3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$
$$\left(4x^2+5\right)\cdot\left(4x^2-5\right) = \left(4x^2\right)^2 - (5)^2 = 16x^4 - 25$$

4.3. Descomposició de polinomis

4.3.1. Teorema del residu

El valor numèric d'un polinomi és el resultat de substituir la variable del polinomi per un nombre. Si el valor numèric d'un polinomi és 0 per a un cert nombre, es diu que aquest nombre és una arrel (o zero) del polinomi. Un polinomi amb arrels es pot descompondre en polinomis de grau menor. Tot polinomi té un nombre d'arrels que no en supera el grau.

Per a trobar el residu d'una divisió de polinomis quan el divisor és un polinomi de grau 1 amb el coeficient de grau 1 igual a 1, es pot recórrer al valor numèric del dividend. El teorema del residu permet calcular aquest residu, ja que el residu d'una divisió d'aquest tipus és igual al valor numèric d'aquest polinomi quan la seva variable és igual al terme independent del divisor, canviat de signe. Aquesta propietat és la que es coneix com a teorema del residu, i s'expressa matemàticament de la manera següent:

Teorema del residu. Si $p(x)$ és un polinomi i a un nombre real,

el residu de la divisió de $p(x)$ entre $x-a$ és $p(a)$.

Això ens diu que, per exemple, el residu de la divisió de $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ entre $x-2$ és igual al valor numèric de $p(x)$ quan la x és igual a 2, és a dir, que el residu és $p(2)$.

Calculem $p(2) = 5\cdot 23 - 4\cdot 22 + 5\cdot 2 - 1 = 33$, i comprovem, mitjançant Ruffini (de l'apartat de la regla de Ruffini), que 33 és efectivament el residu de la divisió.

De la mateixa manera, el residu de la divisió de $q(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x - 1$ entre $x+1$ és igual al valor numèric de $q(x)$ quan la x és igual a -1, és a dir,

$$q(-1) = 3\cdot(-1)5 - 4\cdot(-1)3 + 2\cdot(-1)2 - (-1) - 1 = 3$$

D'aquesta manera, doncs, és fàcil trobar si un polinomi és divisible per un altre de grau 1 amb coeficient de grau 1 igual a 1: si el valor numèric del polinomi quan $x$és igual al terme independent del divisor, canviat de signe, és igual a 0, es pot assegurar que és divisible. En cas contrari no ho serà.

Per exemple, $p(x) = x^2 - 1$ és divisible entre $x+1$, ja que $p(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$. És fàcil comprovar-lo, ja que la divisió és exacta.

$$\frac{x^2-1}{x+1} = x-1.$$

En aquest cas, doncs, es pot dir que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

En definitiva, observem com el teorema del residu ajuda a descompondre un polinomi en termes de grau 1 quan això és possible.

4.3.2. Arrels i descomposició d'un polinomi

Es diu que un nombre a és una **arrel** o zero d'un polinomi $p(x)$ si es compleix que $p(a) = 0$, és a dir, si en substituir la variable pel valor a s'anul·la el valor numèric del polinomi.

Exemple. Arrels d'un polinomi.
1 i −1 són arrels (o zeros) del polinomi $p(x) = x^2 - 1$ perquè el valor del polinomi és 0 en substituir la variable x per aquests valors.

$$\begin{aligned} p(1) &= 1^2 - 1 = 0 \\ p(-1) &= (-1)^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

La **descomposició d'un polinomi**, de manera semblant a la descomposició d'un nombre, és la seva expressió com a producte de polinomis de menor grau, denominats factors. A l'hora de descompondre un polinomi, el més desitjable seria obtenir-ne la descomposició com un producte de polinomis de grau 1. En cas que això fos possible i que, per tant, es pogués descompondre completament tot polinomi de grau n, $p(x)$, en factors de grau 1, tindríem una expressió del tipus

$$p(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$$

on r_1, r_2, ..., r_n són les arrels del polinomi i a un nombre real. Però això no sempre és possible. Però d'aquesta descomposició màxima en factors reals es dedueix que un polinomi de grau n pot tenir n arrels reals com a màxim. Aquest fet, però, no es pot preveure *a priori*. Així mateix, quan els coeficients del polinomi són enters, no és complicat trobar la descomposició del polinomi, ja que les úniques arrels enteres que pot tenir han de ser valors divisors del terme independent del polinomi en qüestió.

Utilitzant el teorema del residu, és fàcil observar que si a és una arrel del polinomi $p(x)$, $p(x)$ pot descompondre's de la manera següent:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - a)$$

on $q(x)$ és un polinomi d'un grau menor que $p(x)$.
En l'exemple, $p(x) = x^2 - 1$, $p(x)$ es descompon en el producte de dos monomis $p(x) = (x-1)(x-(-1)) = (x-1)(x+1)$. Notem aquí com el polinomi té efectivament un nombre d'arrels igual al seu grau com a màxim.

La descomposició d'un polinomi permet calcular l'MCM (mínim comú múltiple) i l'MCD (màxim comú divisor) de dos o més polinomis de manera semblant al càlcul de l'MCM i l'MCD de diferents nombres.

Exemple. Càlcul de l'MCM i l'MCD de dos polinomis.

- $\boxed{\text{MCD}}\left(x^2-1,\, x^2-2x+1\right)=x-1$
- $\boxed{\text{MCM}}\left(x^2-1,\, x^2-2x+1\right)=(x-1)^2\,(x+1)=x^3-x^2-x+1$

ja que $x^2-1=(x-1)(x+1)$ i $x^2-2x+1=(x-1)^2$.

Per **factorització d'un polinomi**, $p(x)$, s'entén el procés d'expressar aquest polinomi com a producte de polinomis irreductibles. Es diu que un polinomi és irreductible (o primer) si els seus únics divisors són els trivials, és a dir, els polinomis constants i aquells que resulten de multiplicar $p(x)$ per una constant. Altrament, es parla de polinomi compost. Així, si considerem polinomis amb coeficients reals, els polinomis irreductibles o primers són tots els polinomis de grau i els polinomis de segon grau amb discriminant negatiu.

No hi ha una única manera de factoritzar un polinomi. D'acord amb la seva naturalesa, podem aplicar diferents propietats, entre les quals es poden destacar:

- Treure factors comuns: $6x^3-3x^2=3x^2\cdot(2x-1)$
- Aplicar productes notables: $x^2-16=(x+4)\cdot(x-4)$
- Resoldre l'equació associada al polinomi. Per exemple, donat el polinomi de segon grau, $p(x)=x^2-4x-12$, es tracta de trobar les solucions de l'equació de segon grau associada al polinomi: $x^2+4x-12=0$. En aplicar la fórmula de l'equació de segon grau, s'obtenen les solucions $x=2$ i $x=-6$ de manera que les arrels del polinomi són exactament 2 i -6. Per tant, $p(x)=(x-2)\cdot(x+6)$.
- Aplicar la regla de Ruffini. Si $p(x)=x^3+2x^2-9x-18$, les possibles arrels enteres són els divisors del terme independent, en aquest cas 18. Efectuem les divisions per Ruffini i obtenim els factors: $(x-3)$, $(x+3)$ i $(x+2)$. Per tant, $p(x)=(x-3)\cdot(x+3)\cdot(x+2)$.

Resum

Els polinomis

Definició Un polinomi és una expressió algebraica amb una única lletra, anomenada variable.

Per exemple, $9x^6 - 3x^4 + x - 6$ és un polinomi de variable x.

Elements

- **Terme:** cadascun dels sumands.
  Termes de l'exemple: $9x^6$, $-3x^4$, x, -6
- **Grau d'un terme:** exponent de la variable en aquest terme.
  En l'exemple, grau de $9x^6$*: 6, grau de* $-3x^4$*:* 4
- **Grau d'un polinomi:** grau major del polinomi.
  En l'exemple, grau del polinomi: 6
- **Terme independent:** el terme de grau 0 (el que no té variable).
  En l'exemple, terme independent: -6
- **Coeficient d'un terme:** nombre que multiplica la variable.
  En l'exemple, coeficient de $9x^6$*:* 9*, coeficient de* x*:* 1

Operacions bàsiques

- Suma

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\
+ & 5x^4 & -2x^3 & -5x^2 & -3x & +16 \\
\hline
 & 5x^4 & & -8x^2 & +x & +10
\end{array}
$$

- Resta

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\
- & (5x^4 & -2x^3 & -5x^2 & -3x & +16) \\
\hline
 & -5x^4 & +4x^3 & +2x^2 & +7x & -22
\end{array}
$$

- Producte

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 2x^4 & -7x^3 & & +5x & -8 \\
 & \cdot & & & x^2 & -7x & +2 \\
\hline
 & 4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16 & \\
-14x^5 & +49x^4 & & +35x^2 & +56x & -16 & \\
2x^6 & -7x^5 & & +5x^3 & -8x^2 & & \\
\hline
2x^6 & -21x^5 & +53x^4 & -9x^3 & -43x^2 & +66x & -16
\end{array}
$$

- Quocient

$$
\begin{array}{ccccc|c}
6x^4 & -27x^3 & +15x^2 & & -48 & 2x^2-3x+4 \\
\cline{6-6}
-6x^4 & +9x^3 & -12x^2 & & & 3x^2-9x-12 \\
\cline{1-3}
0 & -18x^3 & +3x^2 & & & \\
 & +18x^3 & -27x^2 & +36x & & \\
\cline{2-4}
 & 0 & -24x^2 & +36x & -48 & \\
 & & +24x^2 & -36x & +48 & \\
\cline{3-5}
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Fraccions algebraiques

- Una fracció algebraica és una fracció entre polinomis.
- Equivalència de fraccions algebraiques:

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{si} \qquad a(x) \cdot q(x) = b(x) \cdot p(x)$$

- Per a sumar i restar, primerament s'han de reduir al mateix denominador utilitzant l'MCM de la descomposició dels denominadors. Si el denominador és el mateix, es poden sumar els numeradors directament.
- Per a multiplicar i dividir, se segueixen les mateixes regles que en la multiplicació i divisió de nombres fraccionaris: es multiplica en línia per al producte, i es multiplica en creu per al quocient.

Arrels i descomposició Sigui $p(x)$ un polinomi qualsevol, i a un nombre real. Aleshores, es defineix:

- **Valor numèric d'un polinomi.** $p(a)$ és el valor numèric del polinomi $p(x)$ quan $x = a$
  Exemple: si $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$, $p(1) = 5 \cdot 13 - 4 \cdot 12 + 5 \cdot 1 - 1 = 5$. Per tant, 5 és el valor numèric de $p(x)$ en $x = 1$ i escrivim $p(1) = 5$.

- **Arrel d'un polinomi.** a és una arrel del polinomi $p(x)$ si $p(a) = 0$. En aquest cas, es verifica que $p(x) = q(x) \cdot (x - a)$, on $q(x)$ és un polinomi de grau menor que $p(x)$.
  Exemple: si $p(x) = x^2 - 1$, 1 *és una arrel de* $p(x)$ *perquè* $p(1) = 0$. *En aquest cas* $p(x) = (x + 1)(x - 1)$.

- **Teorema del residu.** El residu del quocient entre el polinomi $p(x)$ i $x - a$ és $p(a)$.
  Exemple: si $p(x) = x^2 - 1$, *el residu del quocient de* $p(x)$ *entre* $x - 3$ *és* $p(3) = 8$.

- **Descomposició d'un polinomi.** Procés que consisteix a expressar el polinomi en forma de producte d'altres polinomis de menor grau.
  Exemple:
  $$6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48 = \left(2x^2 - 3x + 4\right)\left(3x^2 - 9x - 12\right)$$
  Això vol dir que el polinomi $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48$ *es descompon en el producte dels polinomis* $2x^2 - 3x + 4$ *i* $3x^2 - 9x - 12$.

- **Regla de Ruffini.** Algoritme que permet dividir un polinomi entre un altre de grau 1 amb coeficient de grau 1 igual a 1. És útil per a descompondre polinomis.
  E*xemple, dividir* $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ *entre* $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 5 & -4 & 5 & -1 \\ +2 & & 10 & 12 & 34 \\ \hline & 5 & 6 & 17 & 33 \end{array}$$

Resultat: $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = \left(5x^2 + 6x + 17\right)(x - 2) + 33$.

Exercicis resolts

1. **Quin valor numèric pren el polinomi** $p(x) = x^3 - 3x^2 + 8x - 24$ **quan** $x = -2$**? I quin valor numèric pren quan** $x = 3$**? És aquest polinomi divisible per** $x+2$**? I per** $x-3$**? Raona la resposta.**

Solució:

Per a trobar el valor numèric d'un polinomi, cal substituir la variable del polinomi pel valor que volem que prengui aquesta. Així:

- Si $x = -2$ $\quad p(-2) = (-2)^3 - 3\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) - 24 = -8 - 12 - 16 - 24 = -60$
- Si $x = 3$ $\quad p(3) = (3)^3 - 3\cdot(3)^2 + 8\cdot(3) - 24 = 27 - 27 + 24 - 24 = 0$

Pel teorema del residu, sabem que si és un polinomi i un nombre real, el residu de la divisió de $p(x)$ entre $x - a$ és $p(a)$. Per tant, pels càlculs anteriors, sabem que

- $p(-2) = -60$ és el residu de la divisió $p(x)$ entre $x + 2$
- $p(3) = 0$ és el residu de la divisió $p(x)$ entre $x - 3$

Per altra banda, es diu que un polinomi és divisible per un segon polinomi quan, en dividir aquest primer polinomi entre el segon el residu és 0. Per tant, vist quin és el residu en cada cas, podem afirmar que el polinomi $x^3 - 3x^2 + 8x - 24$ és divisible per $x - 3$ però que no és divisible per $x + 2$.

2. **Calcula el valor de** m **perquè els quocients tinguin residu** 0**:**

(a) $(x^3 - 4x^2 - 19x + m) \div (x - 7)$

(b) $(mx^4 - 6x^3 - 5x^2 + 19x - 12) \div (x - 3)$

Solució:

Per a estudiar els residus d'aquests quocients, podem aplicar l'algoritme de la divisió entre polinomis. Tenint en compte, però, que els polinomis quocients són polinomis de grau 1, amb coeficient de grau 1 igual a 1, podem estudiar els residus obtinguts aplicant també el mètode de Ruffini. Estudiem, doncs, el primer cas aplicant el mètode de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & +1 & -4 & -19 & m \\ +7 & & +7 & +21 & +14 \\ \hline & +1 & +3 & +2 & 14+m \end{array}$$

i com que volem que $14 + m = 0 \Leftrightarrow m = -14$
Per tant, el residu de $(x^3 - 4x^2 - 19x + m) \div (x - 7)$ serà 0 quan $m = -14$.

Pel teorema del residu, sabem que si $p(x)$ és un polinomi i a un nombre real, el residu de la divisió de $p(x)$ entre $x - a$ és $p(a)$. Apliquem, doncs, aquest teorema per estudiar el residu del segon quocient, on $p(x) = mx^4 - 6x^3 - 5x^2 + 19x - 12$ i $x - a = x - 3$, és a dir, amb $a = 3$

$$p(3) = m\cdot(3)^4 - 6\cdot(3)^3 - 5\cdot(3)^2 + 19\cdot(3) - 12 = 81m - 162 - 45 + 57 - 12 = 81m - 162$$

i com que volem que $81m - 162 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{162}{81} = 2$
Per tant, el residu de $p(x)$ entre $x - 3$ serà 0 quan $m = 2$.

3. **Troba l'MCM i l'MCD dels polinomis** $p(x) = x^4+5x^3-3x^2-13x+10$ **i** $q(x) = x^2+6x+5$**.**

Solució:

Per a poder determinar l'MCM i l'MCD de dos polinomis cal, en primer lloc, trobar-ne la factorització.
Factoritzem el primer polinomi, $p(x)$ mitjançant la regla de Ruffini. Per a això, estudiem primerament quins són els divisors del seu terme independent, ja que seran els candidats a ser-ne les arrels. Els divisors de 10 són $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$. Trobats els divisors, apliquem Ruffini fins a arribar a un polinomi irreductible.

	+1	+5	−3	−13	+10
+1		+1	+6	+36	-10
	+1	+6	+3	−10	0
+1		+1	+7	+10	
	+1	+7	+10	0	
-2		−2	−10		
	+1	+5	0		
-5		−5			
	+1	0			

A partir de Ruffini concloem que el polinomi $p(x)$ té quatre arrels reals, de les quals una és doble. Aquestes són la doble arrel +1, i les arrels simples −2 i −5. Per tant, la factorització del polinomi és

$$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 13x + 10 = 1 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x+5)$$

Per a factoritzar el segon polinomi, $q(x)$ considerarem l'equació de segon grau associada a ell, $x^2 + 6x + 5 = 0$ i la resoldrem aplicant la fórmula de l'equació de segon grau.

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 4}{2} = -3 \pm 2 = \{-5, -1\}$$

Trobades les solucions de l'equació associada, podem afirmar que les arrels del polinomi $q(x)$ són −5 i −1 i que factoritza, per tant, $q(x)$ en

$$x^2 + 6x + 5 = (x+1) \cdot (x+5)$$

Trobada la factorització dels dos polinomis, podem calcular ràpidament el seu MCM i el seu MCD d'acord amb la definició de MCM i MCD.

- $\text{MCD}\big(x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 13x + 10,\ x^2 + 6x + 5\big) = x + 5$
- $\text{MCM}\big(x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 13x + 10,\ x^2 + 6x + 5\big) = (x+5)(x-1)^2(x+2)(x+1)$

4. **Determina per a quin o quins valors de m es pot simplificar la fracció algebraica següent:**

$$\frac{x^3 - 5x^2 + mx - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

Solució: Per a poder simplificar una expressió algebraica, cal que el numerador i el denominador de la fracció tinguin factors comuns. Per tant, convé estudiar la factorització dels dos polinomis. En aquest cas, com que el polinomi denominador no depèn de m, ens interessa començar per la seva factorització. Com que es tracta d'un polinomi de segon grau, trobarem la seva factorització resolent l'equació de segon grau associada a ell:

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Resolem l'equació de segon grau aplicant la fórmula coneguda.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 = \{-1, 3\}$$

Resolta l'equació, hem trobat que el polinomi denominador té dues arrels reals diferents −1 i 3 i que, per tant, factoriza en $(x+1) \cdot (x-3)$.
Per a poder simplificar la fracció algebraica, caldrà que el numerador també factoritzi en algun d'aquests factors, el que implica que $x = -1$ o $x = 3$ són arrels del polinomi numerador.

Pel teorema del residu, sabem que si $p(x)$ és un polinomi i a un nombre real, el residu de la divisió de $p(x)$ entre $x - a$ és $p(a)$. Per altra banda, també sabem que si el valor numèric d'un polinomi és 0 per a un cert nombre, es diu que aquest nombre és una arrel (o zero) del polinomi.

Per tant, es tracta de veure per quins valors de m les arrels del polinomi denominador són també arrels del polinomi numerador. Per això, calcularem el valor numèric del polinomi numerador en les arrels del polinomi denominador per intentar trobar per quines m s'anullla el valor numèric trobat:

- si $x = -1$ $\quad (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) - 3 = -1 - 5 - m - 3 = -m - 9$ i $-9 - m = 0 \Leftrightarrow m = -9$
- si $x = +3$ $\quad (+3)^3 - 5 \cdot (+3)^2 + m \cdot (+3) - 3 = 27 - 45 + 3m - 3 = 3m - 21$ i $3m - 21 = \Leftrightarrow m = +7$

Per tant, la fracció algebraica donada es podrà simplificar quan $m = -9$ o $m = 7$.

Exercicis per a practicar amb les solucions

5. **Troba el quocient i el residu de les divisions següents:**

(a) $(x^3 + 5x^2 - 8) \div (x^2 + 4)$

(b) $(x^5 - x^3 - x) \div (x^3 + 2x)$

(c) $(x^7 + 5x^6 - 3x^4 + 15x^3 + 7x^2 - 10x) \div (x^4 + 3x)$

(d) $(2x^5 - 12x^4 - 3x^3 + 34x^2 - 19) \div (2x^2 - 3)$

6. **Utilitza la regla de Ruffini per a trobar el quocient i el residu de les divisions següents:**

(a) $(x^5 + 3x - 4) \div (x + 2)$

(b) $(x^4 - 6x) \div (x - 3)$

(c) $(x^7 - 2x^5 + x^3) \div (x - 2)$

(d) $(x^4 + 6x^3 - 2x - 5) \div (x - 1)$

7. **Dedueix (sense fer-les i sense aplicar la regla de Ruffini) el residu de les divisions següents:**

(a) $(x^4 - x^3 - x^2 + 3) \div (x - 2)$

(b) $(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1) \div (x - 1)$

(c) $(x^3 - 6x^2 + 3x + 2) \div (x - 5)$

(d) $(x^3 - 2x + 4) \div (x + 3)$

(e) Què has fet servir per a trobar aquests residus?

Solucions:

5. (a) $q(x) = x + 5$ i $r(x) = -4x - 28$
   (b) $q(x) = x^2 - 3$ i $r(x) = 5x$
   (c) $q(x) = x^3 + 5x^2 - 6$ i $r(x) = 7x^2 + 8x$
   (d) $q(x) = x^3 - 6x^2 + 8$ i $r(x) = 5$

6. (a) $q(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 19$ i $r(x) = -42$
   (b) $q(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 21$ i $r(x) = 63$
   (c) $q(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 18x + 36$ i $r(x) = 72$
   (d) $q(x) = x^3 + 7x^2 + 7x + 5$ i $r(x) = 0$

7. (a) $r = 7$
   (b) $r = 6$
   (c) $r = -8$
   (d) $r = -17$
   (e) El teorema del residu.

5. Matrius

Índex

5.1. Matrius: tipus i elements

Una matriu és un conjunt de nombres organitzats en m files i n columnes (m i n nombres naturals), i tancats entre dos parèntesis.

Exemple. Algunes matrius.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -7 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 23 \\ 6 & 11 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Si una matriu té m files i n columnes, es diu que té dimensió $m \times n$ o bé que és d'ordre (m, n).

Exemple. Dimensió d'una matriu.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 23 \\ 6 & 11 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Podem dir que A és una matriu d'ordre $(2, 4)$ o bé que té dimensió 2×4.

En forma general, una matriu $m \times n$ s'escriu de la manera següent:

$$
\begin{array}{c@{}c@{}l}
 & \begin{array}{ccccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} & & \text{columna n} \end{array} & \\
A = & \left(\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn}
\end{array}\right) & \begin{array}{l} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \text{fila 3} \\ \\ \text{fila m} \end{array}
\end{array}
$$

o bé de manera simplificada:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

on el primer subíndex i indica la fila i el segon j la columna. Moltes vegades s'ometen els possibles valors de i i j i s'escriu simplement $A = (a_{ij})$.

Així, a partir dels subíndexs podem identificar l'element de la fila i i columna j de la matriu A com a a_{ij}.

Exemple. Identifiquem elements de la matriu.
En la matriu següent B, es poden identificar alguns dels elements:

$$
\begin{array}{c@{}c@{}l}
 & \begin{array}{ccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} \end{array} & \\
B = & \left(\begin{array}{ccc}
\boxed{3} & 1 & 2 \\
1 & 0 & \boxed{-1} \\
2 & \boxed{-3} & 4
\end{array}\right) & \begin{array}{l} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \text{fila 3} \end{array}
\end{array}
$$

Veiem que els elements marcats en verd són: $b_{\underset{\text{fila}}{1}\,\underset{\text{columna}}{1}} = 3$, $b_{\underset{\text{fila}}{2}\,\underset{\text{columna}}{3}} = -1$ i $b_{\underset{\text{fila}}{3}\,\underset{\text{columna}}{2}} = -3$

Si comparem dues matrius $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ de la mateixa dimensió, direm que són iguals sempre que tots els seus elements siguin iguals i ocupin les mateixes posicions, és a dir si

$$(a_{ij}) = (b_{ij}) \qquad \text{si} \qquad a_{ij} = b_{ij} \qquad \text{per a qualssevol} \quad i, j.$$

$\boxed{\text{Matrius importants}}$ Hi ha matrius que per les seves propietats, estructura, forma, ... són més utilitzades que la resta. N'identifiquem algunes:

- **Matriu quadrada.** És una matriu que té el mateix nombre de files que de columnes, és a dir, té dimensió $n \times n$. Habitualment, per matrius quadrades entenem matrius d'ordre n.

- **Matriu diagonal.** La *diagonal* d'una matriu és formada per aquells elements la fila i la columna dels quals tenen el mateix nombre, és a dir, a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... Quan una matriu quadrada té tots els elements 0 excepte els de la diagonal, diem que és una matriu diagonal.

Exemple. Matrius diagonals.

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{8} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

- **Matriu nul·la.** És una matriu en què tots els seus elements són 0. Normalment, es denota per 0_{mn}, on $m \times n$ és la dimensió de la matriu.
- **Matriu identitat.** És una matriu diagonal en la qual tots els elements de la diagonal són 1. La matriu identitat de dimensió d'ordre n s'indica amb I_n.

Exemple. Matrius identitat.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriu triangular.** És una matriu quadrada en què tots els elements situats per sota o per sobre de la diagonal són 0. En cas que els elements per sota la diagonal siguin 0, parlarem de *matriu triangular superior*. En canvi, si els elements situats a sobre la diagonal són zero parlarem de *matriu triangular inferior*.

Exemple. Matrius triangulars.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

En aquest cas la matriu A és una matriu triangular superior i la matriu B és triangular inferior.

- **Matriu transposada.** La matriu transposada d'una matriu A es denomina A^T i és la matriu que resulta de canviar files per columnes en la matriu A.

Exemple. Matriu transposada.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -7 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -7 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Es pot observar que, per exemple, la primera fila d'A $(-1\ 3\ 5)$ coincideix amb la primera columna de la transposada. Es pot comprovar que això passa en tots els parells files/columnes.

- **Matriu simètrica.** És aquella que coincideix amb la seva transposada.

Exemple. Matriu simètrica

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Veiem que si calculem A^T obtenim la mateixa matriu.

5.2. Operacions bàsiques

$\boxed{\text{Suma i resta}}$ Dues matrius es poden sumar o restar únicament si les seves dimensions són les mateixes. En aquest cas, la suma de les matrius és igual a la suma ordenada dels elements que ocupen la mateixa posició, i el resultat de la qual s'haurà de posar en la mateixa posició de la matriu suma; és a dir, si $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ són matrius de dimensió $m \times n$,

La suma és $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

La resta és $A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$

Exemple. Suma i resta de matrius.

Es consideren aquestes matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

En primer lloc, veiem que no es poden sumar ni restar A amb C, ni tampoc B amb C, perquè no tenen la mateixa dimensió. En canvi es pot fer la suma i la resta d'A i B, de la manera següent:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & \boxed{2+1} & -3-3 \\ 2+2 & 1+0 & -2-1 \\ -1+3 & 3+4 & 1+2 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{3} & -6 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Es pot comprovar que la suma de l'element de la fila 1 i columna 2 (en verd) de la matriu A se suma amb l'element que ocupa la mateixa posició en la matriu B, i el resultat ocupa la mateixa posició en la matriu suma $2 + 1 = 3$. Així, es fa la suma amb tots els parells d'elements de les matrius A i B.

De manera semblant, es fa la resta d'ambdues matrius:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, en lloc de sumar, es resten els elements de la segona matriu dels elements de la primera. Per exemple, de l'element de la fila 1 i columna 2 (en verd) de la matriu A, es resta l'element que ocupa la mateixa posició en la matriu B, i el resultat ocupa la mateixa posició en la matriu resta: $2 - 1 = 1$.

Propietats de la suma de matrius. Són molt semblants a les propietats de la suma de nombres tenint en compte que només podem sumar matrius de la **mateixa dimensió**:

- **Commutativa:** $A + B = B + A$

- **Associativa:** $A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Element neutre:** hi ha una matriu, denominada element neutre, que, sumada a qualsevol altra matriu A de la mateixa dimensió, té com a resultat sempre A. Aquesta matriu és la matriu nul·la.
- Tota matriu té un **element oposat**, que sumat amb l'original resulta l'element neutre. L'element oposat d'A és $-A$.

Exemple. Element oposat de la suma.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ +1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

ja que

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ +1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Producte per un escalar El producte d'una matriu per un escalar (un nombre real) sempre es pot calcular i consisteix a multiplicar tots els elements de la matriu per aquest nombre. És a dir, si r és un nombre real, i $A = (a_{ij})$ és una matriu, el producte de la matriu per l'escalar és

$$r \cdot A = r \cdot (a_{ij}) = (r \cdot a_{ij})$$

Propietats del producte per un escalar

- **Commutativa:** $r \cdot A = A \cdot r$
- **Associativa:** $(r_1 \cdot r_2) \cdot A = r_1 \cdot (r_2 \cdot A)$
- **Element neutre:** hi ha un escalar, denominat element neutre, que multiplicat a qualsevol matriu A té com a resultat sempre A. Aquest és el nombre 1.
- **Distributiva:** en aquest cas en tenim de dos tipus:
  - ∘ escalar $r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$
  - ∘ de matriu $(r_1 + r_2) \cdot A = r_1 \cdot A + r_2 \cdot A$

Exemple. Producte per un escalar.
Si continuem amb la mateixa matriu A dels exemples anteriors i la multipliquem per l'escalar 3,

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 6 & 3 & -6 \\ -3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Per a dividir una matriu per un nombre, s'ha de multiplicar aquesta matriu per l'invers del nombre.

Producte de matrius Per a multiplicar dues matrius, A i B, i obtenir la matriu producte $A{\cdot}B$, s'ha de comprovar que el nombre de columnes de la matriu A coincideixi amb el nombre de files de la matriu B. És a dir, si A és una matriu de dimensió $m \times n$, només es pot multiplicar per la matriu B si aquesta té dimensió $n \times r$. En el cas que això sigui així, la matriu producte, $P = A \cdot B$, té dimensió $m \times r$, és a dir, el mateix nombre de files que la matriu A i el mateix nombre de columnes que la matriu B. En resum, les dimensions de les matrius el producte quedarien

$$(\boxed{m} \times \boxed{n}) \cdot (\boxed{n} \times \boxed{r}) = \boxed{m} \times \boxed{r}$$

Per a trobar l'element p_{ij}, s'han de multiplicar ordenadament els elements de la fila i de la matriu A pels elements de la columna j de la matriu B i s'obté p_{ij} com la suma de tots aquests productes.

Exemple. Producte de matrius.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En primer lloc, observem que $A \cdot B$ es pot calcular perquè A té 3 columnes i B té 3 files. La matriu resultant tindrà 4 files (igual que A) i 2 columnes (igual que B). En canvi, $B \cdot A$ no es pot calcular, perquè B té 2 columnes, mentre que A té 4 files.

Per a trobar l'element p_{11} (en vermell) de la matriu producte $P = A \cdot B$, s'han de multiplicar ordenadament els elements de la fila 1 de la matriu A (en verd) pels elements de la columna 1 de la matriu B (en blau):

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} & \boxed{3} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 \\ \boxed{1} & 2 \\ \boxed{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{p_{11}} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & p_{42} \end{pmatrix}$$

és a dir,

$$\boxed{p_{11}} = \boxed{2} \cdot \boxed{2} + \boxed{(-1)} \cdot \boxed{1} + \boxed{3} \cdot \boxed{0} = \boxed{3}$$

Ara, per a trobar p_{12}, s'ha de multiplicar la fila 1 (en verd) per la columna 2 (en blau):

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} & \boxed{3} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \boxed{3} \\ 1 & \boxed{2} \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \boxed{p_{12}} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & p_{42} \end{pmatrix}$$

és a dir,

$$\boxed{p_{12}} = \boxed{2} \cdot \boxed{3} + \boxed{(-1)} \cdot \boxed{2} + \boxed{3} \cdot \boxed{1} = \boxed{7}$$

I així successivament fins a trobar el producte.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Així, doncs, es pot dir en general que si $A = (a_{ij})$ és una matriu $m \times n$ i $B = (b_{ij})$ és una matriu $n \times r$, la matriu producte d'A per B, $P = (p_{ij}) = A \cdot B$, és una matriu

$m \times r$, i els seus elements es calculen de la manera següent:

$$p_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Propietats del producte de matrius

- **Associativa:** $A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- L'**element neutre del producte de matrius quadrades** és la matriu identitat, I_n. És a dir, si A és una matriu quadrada de dimensió $n \times n$, es compleix que $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.
- De vegades (encara que no sempre), hi ha matrius quadrades que tenen **element invers**. Aquesta matriu, quan existeix, es denomina **inversa**. També es diu que la matriu A és invertible. La matriu inversa d'una matriu quadrada de dimensió $n \times n$ A s'indica A^{-1} , i compleix
$$A \cdot A^{-1} = I_n \qquad \text{i} \qquad A^{-1} \cdot A = I_n$$
- En general, el **producte de matrius NO és commutatiu**. És a dir, si A i B són dues matrius, quan es poden fer els productes $A \cdot B$ i $B \cdot A$, generalment
$$A \cdot B \neq B \cdot A$$
encara que algunes vegades (molt poques) podria ser igual.

5.3. Determinant d'una matriu

Per a cada **matriu quadrada** es pot definir un nombre que és de gran ajuda, entre altres coses, per a determinar si aquesta matriu és invertible, i, en cas afirmatiu, també és imprescindible per a calcular la inversa d'aquesta matriu. Aquest nombre es denomina **determinant de la matriu**. S'escriu $det(A)$ o $|A|$, on A és el nom de la matriu.

Per a indicar el determinant d'una matriu, els seus elements s'han de posar entre dos segments verticals i no entre parèntesis.

Exemple. Notació pel determinant d'una matriu.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{El seu determinant s'indica}} det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

5.3.1. Mètode de càlcul

Es definirà el determinant de manera recursiva, és a dir, primer per a matrius de dimensió 1×1, a continuació per a matrius de dimensió 2×2, i així successivament.

$\boxed{\text{Determinant d'una matriu } 1 \times 1}$ És igual al nombre que compon la matriu.

Exemple. Determinant 1×1.

$$\text{si } A = (3) \qquad \det(\mathrm{A}) = |3| = 3$$

$\boxed{\text{Determinant d'una matriu } 2 \times 2}$ És igual al producte dels elements de la diagonal menys el producte dels altres dos elements.

Exemple. Determinant 2×2.

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 6$$

$\boxed{\text{Determinant d'una matriu } 3 \times 3}$ Es calcula sumant aquests tres productes,

Els determinants van aparèixer a les matemàtiques molt abans (s. XV) que les matrius (s. XX). El terme matriu va ser creat per James Joseph Sylvester fent entendre que era la "mare" dels determinants.

i restant aquests tres productes,

és a dir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} \\ \quad -a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{array}$$

Aquesta regla gràfica per facilitar el càlcul dels determinants d'ordre 3 s'anomena **regla de Sarrus**.

Exemple. Determinant 3×3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) \cdot 3 - (-1) \cdot 1 \cdot (-3) \\ -2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 3 = -14 \end{array}$$

$\boxed{\text{Determinant de matrius } 4 \times 4}$ En aquest cas s'ha de descompondre el determinant. Triem una fila o columna i desenvolupem per aquesta. Per exemple, si triem la primera columna,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

És a dir, es tracta de multiplicar cada element de la fila o columna triada pel determinant de la matriu 3×3 que resulta d'eliminar la fila i la columna corresponent a aquest element. A més, s'han d'**alternar els signes** sabent que l'element a_{11} té sempre el signe +. Per exemple, l'element a_{11} s'ha de multiplicar pel determinant de la matriu que resulta d'eliminar la fila 1 i la columna 1, és a dir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{S'elimina la fila 1 i la columna 1}} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

L'element a_{21}, aquesta vegada **canviat de signe**, s'ha de multiplicar pel determinant de la matriu que resulta d'eliminar la fila 2 i la columna 1, és a dir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{S'elimina la fila 2 i la columna 1}} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

i se segueix d'aquesta manera amb tots els elements de la primera columna.

El determinant que resulta d'eliminar la fila i i la columna j se l'anomena **menor complementari de l'element** a_{ij}, i s'indica α_{ij} (α, alfa, és la primera lletra de l'alfabet grec).

Per exemple, en el cas de la matriu 4×4 anterior, el menor complementari d'a_{31} és

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Així, doncs, l'expressió que calcula el determinant 4×4 es pot simplificar encara més:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} - a_{41}\alpha_{41}$$

Aquest mètode es pot utilitzar també per calcular els determinants de matrius d'ordre 2 i d'ordre 3.

El càlcul del determinant es pot fer amb qualsevol columna (o fila) de la matriu (tenint en compte els signes). S'ha utilitzat tan sols la primera columna per a simplificar l'explicació.

Exemple. Determinant matriu 4×4.

Triem la primera columna.

$$\begin{vmatrix} \boxed{2} & -1 & 3 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & -2 & 6 \\ \boxed{0} & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \boxed{1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \boxed{2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \boxed{0}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 9$$

També hauríem pogut calcular-lo desenvolupant per una altra fila o columna.

Si triéssim la segona fila quedaria

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\boxed{1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \boxed{0}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \boxed{2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \boxed{3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

Determinant de qualsevol matriu quadrada Se segueix el mateix procediment que en matrius 4×4: es multiplica cada element de la fila o columna que escollim pel seu menor complementari. A més, s'han d'alternar els signes començant sempre per l'element a_{11} que té signe $+$. És a dir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} - \ldots + (-1)^{n+1}a_{\text{n}1}\alpha_{\text{n}1}$$

Recordem que el càlcul del determinant es pot fer amb qualsevol columna (o fila) de la matriu (tenint en compte els signes).

5.3.2. Propietats dels determinants

Tenim un conjunt de propietats que es compleixen per a determinants que qualsevol ordre. Aquestes propietats ens poden ajudar a simplificar els càlculs.

1) El determinant d'una matriu coincideix amb el de la seva transposada

$$det(A) = det(A^T)$$

2) Si intercanviem dues files o dues columnes, el determinant és el mateix però canvia de signe.

3) Si multipliquem tota una fila o una columna per un valor k, el determinant queda multiplicat per k. En particular, si tenim una matriu d'ordre n, $\det(k \cdot A) = k^n \cdot det(A)$.

4) Si la matriu té dues files o dues columnes iguals o proporcionals (és a dir, és la mateixa multiplicada per un nombre), el determinant val 0.

5) Si la matriu té una fila o columna de zeros, el determinant és 0.

6) Si a una fila o columna se suma una altra multiplicada per una constant, el determinant no varia.

7) El determinant d'una matriu triangular és el producte dels valors de la diagonal.

8) El producte de determinants és igual al determinant del producte.

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B).$$

Moltes vegades s'utilitza la propietat 7 per a aconseguir una fila o columna amb el màxim de 0 possibles i així reduir els càlculs a l'hora de calcular el determinant de la matriu desenvolupant per aquella fila o columna.

5.3.3. Matriu d'adjunts

Relacionat amb el concepte de menors complementaris, i també com a eina per a calcular la matriu inversa (en cas que n'hi hagi), podem definir l'**'adjunt d'un element**

de la matriu.

L'adjunt de l'element a_{ij} de la matriu A s'indica amb A_{ij} i es defineix de la manera següent:

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{\mathrm{i}+j}\alpha_{ij} \quad \text{on } \alpha_{ij} \text{ és el menor complementari de } a_{ij}$$

Es pot observar que si $i+j$ és un nombre parell, $A_{ij} = \alpha_{ij}$. En canvi, si $i+j$ és un nombre senar, $A_{ij} = -\alpha_{ij}$. És a dir, el signe que s'ha d'anteposar al menor complementari per a obtenir l'element corresponent adjunt es regeix per la matriu de signes següent:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots & \dots \\ - & + & - & \dots & \dots \\ + & - & + & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & - \\ \dots & \dots & \dots & - & + \end{pmatrix}$$

Per exemple, l'adjunt de l'element a_{34} és $A_{34} = (-1)^{3+4}\alpha_{34} = -\alpha_{34}$. La matriu formada per tots els adjunts dels elements de la matriu A s'anomena **matriu d'adjunts** d'A, i s'indica habitualment amb A', tot i que a vegades també podem trobar $\mathsf{Adj}(A)$.

Cal vigilar amb aquesta definició, ja que hi ha una definició alternativa (també usada) en la qual es considera la matriu d'adjunts com la matriu transposada a A'.

5.4. Matriu inversa

> Una matriu quadrada $n\times n$ **es pot invertir sempre que el seu determinant no sigui** 0**.**

Per a trobar la inversa d'una matriu A haurem de calcular primer la seva matriu d'adjunts. Una vegada trobada la matriu d'adjunts d'A, és molt senzill trobar la matriu inversa d'A a partir de la fórmula següent:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(A'\right)^T}$$

Dit d'una altra manera, la m matriu d'adjunts, transposada i dividida entre el valor del determinant d'A. És evident que, com ja s'ha dit, el determinant d'A ha de ser diferent de 0; en cas contrari, la fórmula no es pot aplicar. Alternativament, podem calcular primer la transposada de la matriu i després la matriu d'adjunts

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(A^T\right)'}$$

Exemple. Càlcul de la matriu inversa.

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ volem calcular A^{-1}.

Comencem calculant-ne el determinant: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -14$.

Seguidament, calculem la matriu d'adjunts i la seva transposada:

$$\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ -11 & -2 & -5 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \left(\mathrm{A}'\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 7 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Per tant, la inversa d'A és

$$A^{-1} = \frac{-1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{11}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

Comprovem que és efectivament la inversa veient que satisfà $A \cdot A^{-1} = I_3$ i també $A^{-1} \cdot A = I_3$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{-1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{14} \begin{pmatrix} -14 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{-1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{14} \begin{pmatrix} -14 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3$$

Càlcul pel mètode de Gauss. Un altre mètode per a trobar la matriu inversa és el de Gauss. En aquest mètode partim d'una matriu dividida en dues parts: en la primera part (esquerra) col·loquem la matriu donada $A = (a_{ij})$ i en la segona part (dreta) la matriu identitat. Per a una matriu 3×3, ens quedaria

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Després apliquem transformacions lineals (veurem tot seguit quines són les transformacions permeses) a les files de la matriu fins a arribar a una matriu en què la matriu identitat estigui a la primera part (esquerra)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right)$$

Aleshores la matriu inversa és la que ens ha quedat en la segona part (b_{ij})

Les transformacions lineals que podem fer són:

- Canviar l'ordre de les files.
- Multiplicar una fila per un nombre que no sigui 0.
- Sumar a una fila una altra multiplicada per un nombre diferent de 0.

Aquestes transformacions s'han de fer simultàniament en les dues parts de la matriu.

Normalment s'indica quines són les transformacions que fem a cada pas escrivint com s'ha obtingut la nova fila. Denotem per Fi la fila i i Cj la columna j. Podem veure-ho en el següent exemple.

Exemple. Càlcul de la matriu inversa pel mètode de Gauss.

Busquem la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3=F3-2\cdot F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F3=F3+3\cdot F2]{F2=(-1)\cdot F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F1=F1-2\cdot F2]{F3=(-1)\cdot F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F1=F1-F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Per tant, la matriu inversa d'A és

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

5.5. Resolució de sistemes

Un sistema d'equacions lineals amb m equacions i n incògnites com el següent,

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 & +a_{12}\cdot x_2 & +\dots & +a_{1n}\cdot x_n & = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 & +a_{22}\cdot x_2 & +\dots & +a_{2n}\cdot x_n & = b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}\cdot x_1 & +a_{m2}\cdot x_2 & +\dots & +a_{mn}\cdot x_n & = b_m \end{cases}$$

es pot expressar en forma matricial de la manera següent:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

Aquesta manera d'escriure'l es denomina **equació matricial**. Ens fixem que és del tipus

$$A \cdot X = B,$$

on A s'anomena matriu associada al sistema, B el vector de termes independent, i on X és una matriu $n \times 1$ d'incògnites.

Conceptes previs. Per a conèixer el nombre de solucions d'un sistema matricial, s'han d'introduir alguns conceptes: menor d'ordre k, rang d'una matriu i matriu ampliada d'un sistema matricial.

Menor d'ordre k Donada una matriu A, si se seleccionen k files i k columnes de la matriu, i es calcula el determinant d'aquestes $k$files i $k$columnes, a aquest determinant se l'anomena **menor d'ordre** k de la matriu A. En cas que s'escullin totes les files excepte una, i totes les columnes excepte una, ens trobem, com és sabut, davant un menor complementari.

Exemple. Menor d'ordre k.

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{eliminant files 1,2 i columnes 2,3}]{\text{menor d'ordre 2}} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

Rang d'una matriu És l'ordre màxim dels menors de la matriu que no són 0. El rang d'una matriu A s'indica $rang(A)$. Per a trobar-lo, s'han de calcular tots els menors d'ordre màxim per si n'hi ha algun de diferent de 0. Si no és així, es calculen tots els menors d'ordre una unitat menor per si n'hi ha algun de diferent de 0. I així successivament. L'ordre del primer menor diferent de 0 serà el rang de la matriu.

Exemple. Rang d'una matriu.

En el cas de la matriu anterior s'observa que el determinant és 0 (és a dir, el menor d'ordre 4 és 0), així que s'ha de comprovar si hi ha algun menor d'ordre 3 que no sigui 0.

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{eliminant fila 1} \\ \text{i columna 1}}]{\text{menor d'ordre 3}} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

Per tant, aquesta matriu té rang 3 perquè un dels seus menors d'ordre 3 no és 0 i el d'ordre 4 és 0.

$\boxed{\text{Matriu ampliada}}$ Si considerem el sistema matricial $A \cdot X = B$, la matriu ampliada és la matriu formada per la matriu A més la columna B. Generalment, aquestes dues parts de la matriu ampliada se separen per una línia i s'indica la matriu ampliada per A^*.

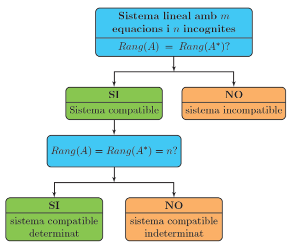
En el sistema matricial inicial, la matriu ampliada és:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

Discussió de sistemes. Donat un sistema matricial $A \cdot X = B$, on A és una matriu $m \times n$ (m és el nombre d'equacions i n el nombre d'incògnites) ens podem trobar amb tres tipus diferents de sistemes segons el nombre de solucions que tenen. No cal que intentem calcular les solucions per a saber de quin tipus de sistema es tracta; n'hi ha prou de calcular el rang de la matriu associada al sistema A i el rang de la matriu ampliada A^*. Vegem-ne els diferents casos:

- El sistema **no té solució** si el rang de la matriu A i el de la matriu ampliada A^* són diferents, és a dir, si
$$rang(A) \neq rang(A^*).$$
- El sistema **té solució** en els casos què el rang de la matriu A i el de la matriu ampliada són iguals.
$$rang(A) = rang(A^*)$$
Aleshores hem de comprovar si coincideix amb el nombre d'incògnites (n); es poden donar els casos següents:
  - Si $\boxed{rang(A) = n,}$ la solució és única, és a dir, hi ha una única matriu X que

Podem resumir el teorema de Rouché-Frobenius amb amb l'esquema següent



compleix que $A \cdot X = B$.

- Si $\boxed{rang(A) < n,}$ la solució no és única; de fet, en aquestes condicions, el sistema té infinites solucions.

Aquest resultat es coneix com el **teorema de Rouché-Frobenius**.

Exemple. Discussió d'un sistema. Donat el sistema d'equacions lineals

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & +z & -w & = 1 \\ & +y & -z & +w & = -1 \\ 3x & & +6z & -6w & = 6 \\ & -y & +z & -w & = 1 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{equival a}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si calculem els rangs de les matrius A i A^* obtenim

$$rang(A) = rang(A^*) = 2 < n = 4$$

Per tant, aquest sistema té infinites solucions (com es pot comprovar en el tema dedicat a sistemes d'equacions).

5.5.1. Amb la matriu inversa

Per a resoldre el sistema, ens trobem amb dos casos: que el sistema té una única solució o que en té infinites.

Si el sistema matricial $A \cdot X = B$ té **solució única** (si es compleix que $\boxed{rang(A) = rang(A^*) = n}$), es tria un menor d'ordre n de la matriu A que no sigui 0 (la submatriu d'aquest menor s'anomena $\overline{A}$) i es trien les files de B que coincideixin amb les files de la submatriu del menor d'ordre n escollit (aquestes files s'anomenen $\overline{B}$). Fixeu-vos que si $n = m$ $\overline{A}$ coincideix amb A i $\overline{B}$ coincideix amb B.

Per a resoldre el sistema $A \cdot X = B$, n'hi ha prou de resoldre $\overline{A} \cdot X = \overline{B}$. Ara bé, com que $\overline{A}$ és una matriu quadrada el determinant de la qual no és 0, existeix la seva inversa. Per tant, podem multiplicar a banda i banda per $\overline{A}^{-1}$

$$\overline{A}^{-1} \cdot \overline{A} \cdot X = \overline{A}^{-1} \cdot \overline{B}$$

Sabem que $\overline{A}^{-1} \cdot \overline{A} = I_n$; per tant, la solució del sistema és

$$X = \overline{A}^{-1} \cdot \overline{B}$$

Sistemes homogenis
Un sistema homogeni és aquell en què el vector de termes independents B és zero.
Fixem-nos que en aquest cas sempre tindrem
$$Rang(A) = Rang(A^*)$$
Per tant, sempre tindrem un compatible.
En cas que $rang(A)$ coincideixi amb el nombre d'incògnites (n), tindrem un sistema compatible determinat en què l'única solució és $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Exemple. Resolució d'un sistema amb una única solució.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 5y - 2z = -2 \\ 3x + 4y + z = 8 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \text{ equivalent a } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Té una única solució perquè $rang(A) = rang(A^*) = 3$. Per a resoldre'l, s'ha d'escollir un menor d'ordre 3 que no sigui 0 (per exemple, el menor format per les tres primeres files). Així tenim que, per a resoldre el sistema plantejat, n'hi ha prou de resoldre el sistema equivalent $\overline{A} \cdot X = \overline{B}$ on

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

i la solució del sistema és

$$\text{si } \overline{A}^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -8 & -2 & 4 \\ 23 & -1 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow X = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -8 & -2 & 4 \\ 23 & -1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Així, doncs, la solució és $x = 1, y = 2, z = -3$ (o bé $(x, y, z) = (1, 2, -3)$).

En el cas que $\boxed{rang(A) = rang(A^*) = r < n}$ el sistema té **infinites solucions**; tot i així, s'ha de fer el mateix.

Només cal tenir en compte que, una vegada escollit el menor d'ordre r, s'ha de transformar el sistema d'equacions inicial, de manera que les incògnites que no corresponguin amb una columna del menor anterior s'han de situar a l'altre costat del signe igual, en el vector de termes independents B. Així s'obtindrà un sistema amb r incògnites, que es podrà expressar en forma matricial. També la B contindrà alguna de les incògnites.

Ara ja es podrà resoldre el nou sistema de la mateixa forma (perquè es tracta d'un sistema amb r incògnites, la matriu de la qual té rang r). S'ha d'assenyalar que la solució, en aquest cas, vindrà donada en termes d'algunes de les incògnites, per la qual cosa no serà una solució única.

Exemple. Resolució d'un sistema amb infinites solucions.
En aquest cas es pot comprovar que $rang(A) = rang(A^*) = 2 < 4$. Per tant, primer s'ha de modificar el sistema original:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & -w & =1 \\ & +y & -z & +w & =-1 \\ 3x & & +6z & -6w & =6 \\ & -y & +z & -w & =1 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{el reescrivim}} \left\{\begin{array}{c} x+y = 1-z+w \\ y = -1+z-w \\ 3x = 6-6z+w \\ -y = 1-z+w \end{array}\right.$$

En forma matricial s'expressa així:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z+w \\ -1+z-w \\ 6-6z+w \\ 1-z+w \end{pmatrix}$$

si escollim una submatriu de rang 2 obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z+w \\ -1+z-w \end{pmatrix}$$

per tant,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1-z+w \\ -1+z-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z+2w \\ -1+z-w \end{pmatrix}$$

podem donar el valor que vulguem a z i w, i per cadascun d'aquests tindrem una solució del sistema.

5.5.2. Mètode de Gauss

Vam veure en el tema de sistemes d'equacions que un dels mètodes per resoldre un sistema és utilitzar el mètode de Gauss. Aquest mètode consisteix en transformar el sistema en un d'equivalent que sigui triangular. D'aquesta manera és fàcil trobar la solució per substitució cap enrere.
Es pot utilitzar el mètode de Gauss per a la resolució d'equacions transformant només la matriu ampliada, sense necessitat d'escriure repetidament les incògnites.

Exemple. Resolució d'un sistema per Gauss matricialment.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow[\text{associada al sistema}]{\text{matriu ampliada}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Ara fem les transformacions necessàries per obtenir una matriu triangular

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F2=F2-2*F1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F2\leftrightarrow F3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F4=F4-2*F3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

ara que ja tenim una matriu diagonal utilitzem la substitució cap a enrere. I obtenim que la solució del sistema és:

$$(x, y, z, w) = (-1, -1, 2, 1)$$

5.5.3. Regla de Cramer

Un altre mètode per resoldre un sistema amb el mateix nombre de solucions que d'incògnites i determinant de la matriu associada al sistema diferent de 0 és conegut com la **regla de Cramer**.

La regla de Cramer ens diu que davant un sistema de n equacions i n incògnites tal que $det(A) \neq 0$ (on A matriu assoaciada al sistema) podem calcular les matrius A_1, A_2, ..., A_n que resulten de substituir les columnes 1, 2, ..., n d'A respectivament per la columna dels termes independents. Aleshores, la solució del sistema és

$$\boxed{(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{|A_1|}{|A|}, \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, \frac{|A_n|}{|A|}\right)}$$

on recordem $|X|$ indica el determinant de la matriu X.

Exemple. Resolució d'un sistema utilitzant la regla de Cramer. Volem resoldre el sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases} \xrightarrow[\text{vector de termes independents}]{\text{matriu associada al sistema}} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Veiem que $|A| = 2$ i per tant podem aplicar la regla de Cramer. Calculem $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

Ara ja podem calcular les solucions al sistema

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{8}{2} = 4, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{4}{2} = 2, \quad z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-10}{2} = -5$$

Observem que si el sistema és compatible indeterminat també podem utilitzar aquest mètode afegint en el terme independent les incògnites que siguin necessàries per tal que la matriu del sistema sigui quadrada. D'aquesta manera amb el *nou* terme independent també podrem aplicar aquest mètode.

Resum

Una **matriu** és un grup de nombres organitzats en files i en columnes limitats per parèntesis:

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} & & \text{columna n} \end{array}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right)\begin{array}{l} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \text{fila 3} \\ \\ \text{fila m} \end{array}$$

A és una matriu de dimensió $m \times n$ que també es pot escriure de forma simplificada

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

on i indica la fila i j la columna.

$\boxed{\text{Matrius importants}}$

- **Matriu quadrada.** És una matriu que té el mateix nombre de files que de columnes, és a dir, té dimensió $n \times n$.
- **Matriu diagonal.** La *diagonal* d'una matriu està formada per aquells elements la fila i la columna dels quals tenen el mateix nombre, és a dir, a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... Quan una matriu quadrada té tots els elements 0 excepte els de la diagonal, direm que és una matriu diagonal.
- **Matriu nul·la.** És una matriu en què tots els seus elements són 0. Normalment es denota per 0_{mn}, on $m \times n$ és la dimensió de la matriu.
- **Matriu identitat.** És una matriu diagonal quadrada en la qual tots els elements de la diagonal són 1. La matriu identitat de dimensió $n \times n$ s'indica amb I_n.
- **Matriu triangular.** És una matriu quadrada en què tots els elements situats per sota o per sobre de la diagonal són 0. En el cas que siguin 0 els elements de sota la diagonal, parlarem de matriu triangular superior. En canvi, si són zero els elements situats a sobre la diagonal, parlarem de matriu triangular inferior.
- **Matriu transposada.** La matriu transposada d'una matriu A es denomina A^T; és la matriu que resulta de canviar files per columnes en la matriu A.
- **Matriu simètrica.** És aquella que coincideix amb la seva transposada.

$\boxed{\text{Operacions bàsiques}}$

- **Suma i Resta.** Dues matrius es poden sumar o restar únicament si les seves dimensions són les mateixes. En aquest cas, la suma de les matrius és igual a la suma ordenada dels elements que ocupen la mateixa posició, i el resultat s'haurà de posar en la mateixa posició de la matriu suma. És a dir, si $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ són matrius de dimensió $m \times n$,

  la suma és $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

  la resta és $A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$

- **Producte per un escalar.** El producte d'una matriu per un nombre sempre es pot fer, i consisteix a multiplicar tots els elements de la matriu per aquest nombre. És a dir, si r és un nombre real, i $A = (a_{ij})$ és una matriu, el producte de la matriu per l'escalar és

$$r \cdot A = r \cdot (a_{ij}) = (r \cdot a_{ij})$$

- **Producte de matrius.** Per a multiplicar dues matrius, A i B, i obtenir $A \cdot B$, s'ha de comprovar que el nombre de columnes de la matriu A coincideixi amb el nombre de files de la matriu B. És a dir, si A és una matriu de dimensió $m \times n$, només es pot multiplicar per la matriu B si aquesta té dimensió $n \times r$. En el cas que això sigui així, la matriu producte, $P = A \cdot B$, té dimensió $m \times r$, és a dir, el mateix nombre de files que la matriu A i el mateix nombre de columnes que la matriu B.

  Per a trobar l'element p_{ij}, s'han de multiplicar ordenadament els elements de la fila i de la matriu A pels elements de la columna j de la matriu B i obtenim p_{ij} com la suma de tots aquests productes.

$$p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

  El **producte de matrius NO és commutatiu**.

$\boxed{\text{Determinants}}$ El determinant d'una matriu quadrada és un nombre que, entre altres aplicacions, és molt útil per a saber si una matriu té inversa i per a calcular-la. Per a indicar que es calcula el determinant d'una matriu, els elements d'aquesta s'han de posar entre dos segments verticals.

- Matriu 1×1: és igual al nombre que compon la matriu.
- Matriu 2×2: és igual al producte dels elements de la diagonal menys el producte dels altres dos elements.
- Matriu 3×3: regla de Sarrus.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} \\ \quad -a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{array}$$

- Matriu 4×4 (o d'ordre superior): càlcul de manera recursiva a partir de matrius

3×3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} - a_{41}\alpha_{41}$$

on α_{ij} és el **menor complementari** d'a_{ij}, és a dir, el determinant que resulta d'eliminar la fila i i la columna j del determinant.

Matriu inversa Si el producte de dues matrius quadrades A i B de dimensió $n \times n$ és igual a I_n

$$A \cdot B = I_n \text{ i } B \cdot A = I_n$$

B és la matriu inversa d'A i es denota $B = A^{-1}$.

Una matriu quadrada $n \times n$ **es pot invertir sempre que el seu determinant no sigui** 0.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(A'\right)^T}$$

on A' és la **matriu d'adjunts** dels elements de la matriu A. Un adjunt d'un element a_{ij} de la matriu A es denota A_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$$

on α_{ij} és el menor complementari d'a_{ij}.

Rang d'una matriu Si se seleccionen k files i k columnes de la matriu, i es calcula el determinant d'aquestes k files i k columnes, aquest determinant s'anomena **menor d'ordre** k de la matriu A.

L'ordre màxim dels menors de la matriu que no són 0 és el **rang d'una matriu** A i s'indica $rang(A)$.

Discussió i resolució de sistemes amb matrius Un sistema d'equacions lineals amb m equacions i n incògnites com el següent

$$\left\{ \begin{array}{lllll} a_{11} \cdot x_1 & +a_{12} \cdot x_2 & + \ldots & +a_{1n} \cdot x_n & = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & +a_{22} \cdot x_2 & + \ldots & +a_{2n} \cdot x_n & = b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & +a_{m2} \cdot x_2 & + \ldots & +a_{mn} \cdot x_n & = b_m \end{array} \right.$$

es pot expressar en forma matricial de la manera següent:

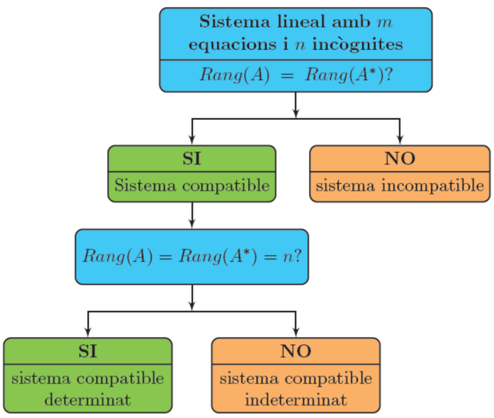
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Aquesta manera d'escriure'l es denomina **equació matricial**. Fixem-nos que és del tipus $A \cdot X = B$, on A s'anomena **matriu associada al sistema**, B el **vector de termes independents** i X és una matriu $n \times 1$ d'incògnites. La **matriu ampliada** (A^*) és la matriu formada per la matriu A més la columna B.

- El sistema **no té solució** si el rang de la matriu A i el de la matriu ampliada A^* són diferents, és a dir, si
$$rang(A) \neq rang(A^*).$$
- El sistema **té solució** en els casos què el rang de la matriu A i el de la matriu ampliada són iguals:
$$rang(A) = rang(A^*)$$
Aleshores hem de comprovar si coincideix amb el nombre d'incògnites (n), i es poden donar els casos següents:
    - Si $rang(A) = n$, la solució és única, és a dir, hi ha una única matriu X que compleix que $A \cdot X = B$.
    - Si $rang(A) < n$, la solució no és única; de fet, en aquestes condicions, el sistema té infinites solucions.

Aquest resultat es coneix com el **teorema de Rouché-Frobenius**.

Esquema de la discussió d'un sistema d'equacions



Exercicis resolts

1. **Si** I_3 **és la matriu identitat d'ordre** 3 **i** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **resol les equacions matricials següents:**

(a) $X \cdot A = A + I_3$

(b) $2 \cdot Y - A \cdot Y = A^t$

Solució:

(a) En primer lloc observem que $det(A) = 1 \neq 0$; per tant, podem calcular la matriu inversa d'A.

$$X \cdot A = A + I_3 \Leftrightarrow X = (A + I_3) \cdot A^{-1} = I_3 + A^{-1}$$

Només ens cal calcular la inversa de la matriu A

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si sumem la matriu identitat a aquesta matriu, obtenim $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Igual que en l'apartat anterior, veiem que

$$2 \cdot Y - A \cdot Y = A^t \Leftrightarrow (2 \cdot I_3 - A) \cdot Y = A^T \Leftrightarrow Y = (2 \cdot I_3 - A)^{-1} \cdot A^T$$

Per tant, utilitzant la fórmula de la matriu inversa, tenim

$$(2 \cdot I_3 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ara multipliquem aquesta matriu per la matriu A^T, obtenim $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

2. **Resol les equacions següents per la incògnita** x**:**

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} + 5 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

Solució:

(a) Calculem, per una banda, el primer determinant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} = x + x^2$ i, per altra

banda, el segon $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 7$; per tant, ens queda l'equació $x^2 + x + 5 = 7 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$.
Si resolem aquesta equació aplicant la fòrmula de l'equació de segon grau, obtenim dues solucions: $x = 1$ i $x = -2$.

(b) Igual que en l'apartat anterior, calculem el determinant de l'equació:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^3 + 2 - 3(x+1) = x^2(x+3)$$

Si igualem aquest resultat a 0, obtenim una equació amb dues solucions: $x = 0$ i $x = -3$.

3. **Donades les matrius següents**

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Indica quantes files i columnes tenen i decideix quines parelles es poden sumar entre elles i quines es poden multiplicar. En el segon cas indica l'ordre en què es poden multiplicar. Efectua totes les sumes possibles i només els productes possibles en què aparegui la matriu E.

(b) Decideix si les operacions següents són possibles, i en cas afirmatiu efectua les operacions:

$$A \cdot D^t + E + F \cdot C, \qquad (A + D) \cdot E, \qquad B \cdot E \cdot C \cdot F, \qquad (B + E) \cdot C.$$

Solució:

(a) Comencem per donar les dimensions de les diferents matrius:

Matriu	A	B	C	D	E	F
Dimensions	3 × 1	1 × 3	3 × 2	3 × 1	3 × 3	2 × 3

Pel que fa la suma, només podem sumar $A + D = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Pel que fa als productes, podem calcular

$$A \cdot B \quad B \cdot A \quad E \cdot A \quad F \cdot A \quad B \cdot C \quad B \cdot D \quad D \cdot B$$

$$B \cdot E \quad E \cdot C \quad F \cdot C \quad C \cdot F \quad E \cdot D \quad F \cdot D \quad F \cdot E$$

Calculem tots els productes que contenen la matriu E.

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad B \cdot E = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad E \cdot C = \begin{pmatrix} -12 & -15 \\ 18 & 27 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad E \cdot D = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F \cdot E = \begin{pmatrix} 19 & -19 & 18 \\ 16 & -16 & 15 \end{pmatrix}$$

(b)Observem que només podem calcular $B \cdot E \cdot C \cdot F = (12 \ -240 \ 30)$

4. **Calcula el rang de la matriu segons el valor de k.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & k \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució: Com que A és una matriu de dimensions 3×4, el rang màxim que pot tenir és 3. Per tal que aquesta matriu tingui rang 3, algun dels 4 possibles menors d'ordre 3 ha de ser diferent de 0.
Els calculem:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 9k \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 + 9k \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 + 9k$$

Veiem que si $-7 + 9k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq \frac{7}{9}$ la matriu A té rang 3, en canvi si $k = \frac{7}{9}$ llavors tots els menors d'ordre 3 valen 0 i per tant el rang de la matriu no pot ser 3.

En aquest últim cas, veiem però que tenim com a mínim un menor d'ordre 2 que no és 0; per exemple, si agafem les dues primeres files i les dues primeres columnes, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$.

O sigui que podem concloure que quan $k = \frac{7}{9}$ el rang de la matriu A és 2 i quan $k \neq \frac{7}{9}$ el rang de la matriu A és 3.

5. **Comprova que $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ amb les matrius**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Solució: Per una banda, calculem les inverses de les dues matrius i obtenim

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ara les sumem, tenim

$$A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

I per altra banda calculem la suma $A + B$ i la inversa d'aquesta matriu

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad (A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & 0 \\ \frac{11}{2} & -3 & -1 \\ -\frac{13}{2} & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Veiem, doncs, que aquestes dues matrius que hem calculat no coincideixen

6. **Discuteix el sistema següent segons els valors de m i calcula'n la solució pels valors que siguin compatibles:**

$$\begin{cases} x - my = 1 \\ mx - y = 2m + 2 \end{cases}$$

Solució: Comencem escrivint la matriu ampliada associada al sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 1 \\ m & -1 & 2m + 2 \end{array}\right)$$

Restem a la segona fila la primera multiplicada per m i obtenim una matriu triangular

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 1 \\ 0 & m^2-1 & m+2 \end{array}\right)$$

Ara estudiem el $rang(A)$ i en primer lloc veiem $det(A) = m^2 - 1$.

- Si $m^2 - 1 \neq 0$ (és a dir, si $m \neq -1, 1$), el $rang(A) = 2$ i $rang(A^*) = 2$, i com que tenim 2 incògnites el sistema és compatible determinat.
- Si $m = 1$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$
$rang(A) = 1 \neq rang(A^*) = 2$; per tant, tenim un sistema incompatible.
- Si $m = -1$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$rang(A) = 1 \neq rang(A^*) = 2$; per tant, tenim un sistema incompatible.

Les solucions en els casos en què $m \neq 1, -1$ són per substitució cap enrere

$$(x, y) = \left(\frac{m+2}{m^2-1}, \frac{2m^2+2m-1}{m^2-1}\right).$$

Exercicis per a practicar amb les solucions

7. **Resol les equacions següents per a la incògnita x:**

(a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & -b & x \\ x & b & c \end{vmatrix} = 0$

(b) **El determinant de** $2 \cdot B$ **és** 160**, on** $B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$

8. **Determina els valors de** a, b, c, d, e **tals que es compleixi** $A + C = 2B$ **per les matrius**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & 2 \\ -1 & 2 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & b \\ d & e & 4 \end{pmatrix}$$

Per a aquests valors, calcula (si es pot) $A \cdot B^T$**,** $C^T \cdot B$ **i** $A \cdot B$**.**

9. **Calcula el rang de les matrius següents:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

10. **Calcula les inverses de les matrius següents:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

11. **Resol els sistemes següents (si es pot):**

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + az = 1 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

Solucions:

7. (a) $x = a, -c$ en el cas $b \neq 0$. En el cas $b = 0$ qualsevol nombre real és solució.
   (b) $x = 3$

8. Els valors són $a = -4$, $b = 4$, $c = -2$, $d = 11$, $e = -6$. El producte $A \cdot B$ no es pot calcular; els productes que sí que es poden calcular són

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 22 & 25 \\ -12 & -11 \end{pmatrix} \qquad C^T \cdot B = \begin{pmatrix} 75 & -27 & 26 \\ -22 & 10 & 0 \\ -4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

9. $Rang(A) = 2$ i $Rang(B) = 3$.

10.

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

11. El primer sistema és incompatible; per tant, no té solució. El segon sistema és compatible determinat per $a \neq 0, 3$ i incompatible per $a = 0, 3$. Les solucions per als casos en què és compatible són

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3-a}, \frac{1-a}{3a-a^2}, \frac{1+a^2}{a^2-3a} \right)$$

6. Funcions

Índex

6.1. Concepte de funció

El concepte de funció es va establir cap al segle XVIII, tot i que anteriorment alguns matemàtics ja hi treballaven de manera intuïtiva.
En l'obra *Introductio in analysin infinitorum*, Leonhard Euler va intentar proporcionar per primera vegada una definició formal del concepte de funció en afirmar:

> *Una funció de quantitat variable és una expressió analítica formada de qualsevol manera per aquesta quantitat variable i per nombres o quantitats constants.*

Tal com veurem, aquesta definició difereix de l'actual. De fet, set anys després d'aquesta afirmació, en el pròleg de les *Institutiones calculi differentialis* el mateix autor ja va afirmar:

> *Algunes quantitats depenen d'altres si en combinar aquestes aquelles també canvien. Les primeres es diuen funcions de les segones. Aquesta denominació és bastant natural i comprèn cada mètode mitjançant el qual una quantitat pot ser determinada per unes altres. Així, si x denota una quantitat variable, totes les quantitats que depenen de x en qualsevol forma estan determinades per x i s'anomenen funcions de x.*

Per a poder establir el concepte de funció, és necessari recórrer primerament a les relacions que es poden establir entre conjunts. Vegem en què consisteixen.

El matemàtic suís Leonhard Euler (1707-1783) és un científic essencial en el desenvolupament de les funcions perquè va precisar el concepte de funció. Va fer un estudi sistemàtic de totes les funcions elementals, incloent-hi les derivades i integrals. No obstant això, el concepte mateix de funció va néixer amb les primeres relacions observades entre dues variables, fet que segurament va sorgir, a l'inici de les matemàtiques, amb civilitzacions com la babilònica, l'egípcia i la xinesa.

Abans d'Euler, el matemàtic i filòsof francès René Descartes (1596-1650) va mostrar en els seus treballs de geometria que tenia una idea molt clara dels conceptes de variable i funció. Va fer una classificació de les corbes algebraiques segons els seus graus, reconeixent que els punts d'intersecció de dues corbes s'obtenen resolent de manera simultània les equacions que les representen.

6.1.1. Correspondència entre conjunts

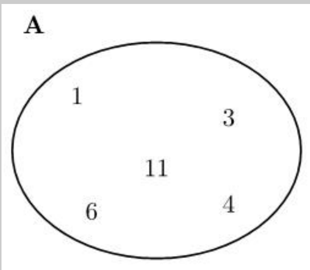
Els **conjunts** que es tracten en matemàtiques solen ser conjunts de nombres, com per exemple els naturals, els enters, els racionals o els reals. Els elements d'aquests conjunts no es poden llistar perquè n'hi ha una quantitat infinita. Ara bé, si es considera un conjunt finit d'aquests nombres, sí que es poden escriure. En aquest cas, els elements seleccionats s'expressen entre claus. És a dir, els elements d'un conjunt finit es poden indicar en una llista delimitada per claus i separats per comes.

Exemple. Representació d'un conjunt de nombres.
El conjunt format pels nombres naturals 1, 2, 3, 4, 6 i 11 es pot denominar A.
Aleshores, el conjunt es pot expressar així:

$$\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4, 6, 11\}$$

Una altra manera d'expressar un conjunt de nombres és de manera gràfica. En aquest cas, es considera una forma el·líptica que conté els elements del conjunt i s'indica el nom del conjunt en la part exterior.

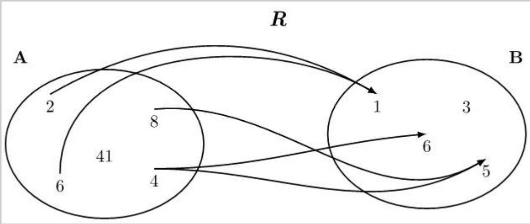
Exemple. Representació gràfica d'un conjunt.
Anomenem A el conjunt format pels nombres naturals 1, 2, 3, 4, 6 i 11.
Aquest conjunt es pot expressar gràficament d'aquesta manera:



Una **correspondència entre dos conjunts**, A i B, és una relació entre ambdós conjunts que fa correspondre elements del conjunt A amb elements del conjunt B. Gràficament, aquest fet es pot representar mitjançant fletxes que tenen l'origen en algun element del conjunt A i el final en algun element del conjunt B. Una fletxa entre un element del conjunt A i un element del conjunt B indica que l'element d'A està relacionat amb l'element de B.

Què és una correspondència entre conjunts?
És una relació entre ambdós conjunts que fa correspondre elements del segon a elements del primer. Una correspondència es pot representar gràficament mitjançant diagrames.

Exemple. Correspondència entre elements de dos conjunts.
Siguin els conjunts A= $\{2,4,6,8,41\}$ i B= $\{1,3,5,6\}$. Podem definir i representar una correspondència entre A i B, que anomenem R, de la manera següent:



Així, la correspondència R relaciona: el 2 del conjunt A amb l'1 del conjunt B, el 8 del conjunt A amb el 5 del conjunt B, el 4 del conjunt A amb el 5, i el 6 del conjunt B i el 6 del conjunt A amb l'1 del conjunt B.
El nom de la correspondència, R, s'indica per evitar confusions amb altres possibles correspondències.

D'acord amb la notació general utilitzada:

- El conjunt A es denomina **conjunt de partida**, i el conjunt B **conjunt d'arribada**.
- El conjunt de tots els elements del conjunt de partida dels quals surt alguna fletxa rep el nom de **domini** de la correspondència R i s'escriu **Dom**R. En canvi, el conjunt de tots els elements del conjunt d'arribada als quals es dirigeix alguna fletxa s'anomena **imatge** o **recorregut** de la correspondència R i s'escriu **Im**R (o també **RecR**).
- Donat un element qualsevol del domini d'una correspondència, es denomina **imatge de l'element** el conjunt de tots els elements de la imatge de la correspondència que reben una fletxa d'aquest element. De manera similar, es defineix l'**antiimatge d'un element** de la imatge de la correspondència com el conjunt de tots els elements del domini de la correspondència tals que la seva imatge inclou aquest element, és a dir, tots els elements dels quals parteix una fletxa cap a aquest element de la imatge.

Exemple. Elements d'una correspondència entre dos conjunts.
Considerem l'exemple de la correspondència anterior, R que relaciona els conjunts A= $\{2,4,6,8,41\}$ i B= $\{1,3,5,6\}$. Aleshores:

- El domini de la correspondència és el conjunt Dom$R = \{2,6,4,8\}$ i la imatge de la correspondència és Im$R = \{1,5,6\}$.
- La imatge del 2 és el conjunt $\{1\}$, la imatge del 8 és el conjunt $\{5\}$, la imatge del 4 és el conjunt $\{5,6\}$ i la imatge del 6 és el conjunt $\{1\}$.
- L'antiimatge de l'1 és el conjunt $\{2,6\}$, la del 5 és $\{4,8\}$ i la del 6 és $\{4\}$.

Per a establir la definició de funció, és necessari estudiar un tipus molt concret de correspondències, aquelles en què tots els elements del domini tenen un únic element en la seva imatge. Això es tracta en l'apartat següent.

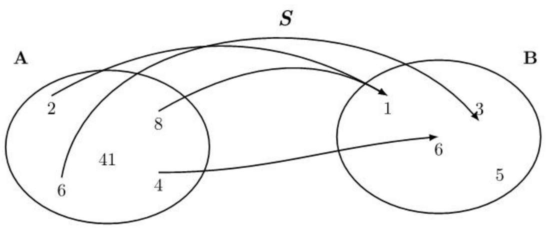
6.1.2. Aplicacions i funcions

Una **aplicació** és una correspondència que compleix la condició següent:

Tots els elements del seu domini tenen un únic element en la seva imatge.

Dit d'una altra manera, en la representació d'una aplicació, de qualsevol element del domini ha de sortir una única fletxa. Així, doncs, en l'exemple de l'aplicació anterior R, la correspondència no és una aplicació perquè de l'element 4 surten dues fletxes, la qual cosa indica que la imatge del 4 és formada per més d'un element. En canvi, la correspondència S següent entre els mateixos conjunts sí que ho és perquè en una aplicació no hi ha cap element d'A que tingui més d'una imatge.

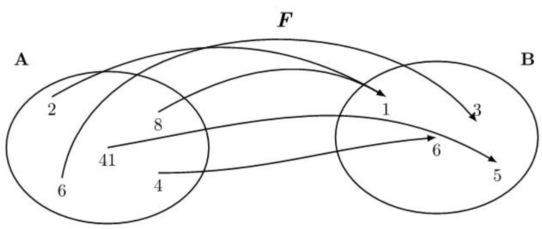
Què és una aplicació?
Per tal que una correspondència entre conjunts sigui una aplicació, s'ha de complir que tots els elements del seu domini tinguin un únic element en la seva imatge. És a dir, en la representació d'una aplicació, de qualsevol element del domini ha de sortir una única fletxa.



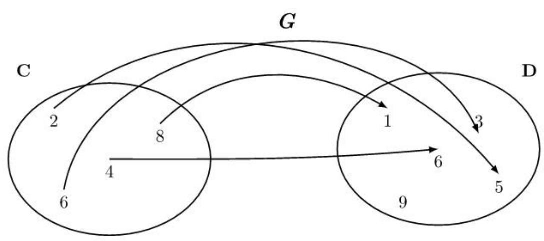
En aquest cas, el domini de S és $\mathrm{Dom}S = \{2,4,6,8\}$, i la imatge de la correspondència és $\mathrm{Im}S = \{1,3,6\}$. De qualsevol element del domini parteix una única fletxa, és a dir, la seva imatge consisteix en un sol element i, per tant, es tracta d'una aplicació.

Les aplicacions es poden classificar d'acord amb la seva imatge. Així, es diu que una aplicació és:

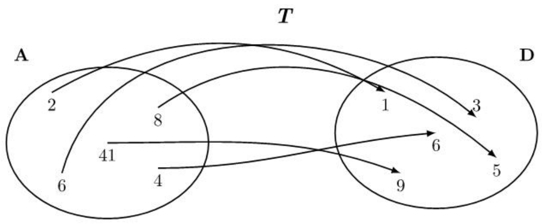
- **Exhaustiva**, quan la imatge de l'aplicació coincideix amb el conjunt d'arribada. Per exemple, l'aplicació F és exhaustiva.



- **Injectiva**, quan cada element de la imatge de l'aplicació només té una única antiimatge. Per exemple, l'aplicació G és injectiva.



- **Bijectiva**, quan l'aplicació és exhaustiva i injectiva a la vegada, és a dir, quan cada element del conjunt d'arribada té una única antiimatge. Per exemple, l'aplicació T és bijectiva.



Cal remarcar que aquesta classificació no abraça totes les aplicacions. N'hi ha prou d'estudiar l'aplicació S per a adonar-se'n. L'aplicació S no és injectiva, atès que l'element 1 té dues antiimatges, ni exhaustiva, ja que l'element 5 no pertany a la imatge. Per tant, tampoc no és bijectiva.

Quan una aplicació es defineix entre conjunts numèrics, es denomina funció. Moltes situacions reals es poden explicar com la relació entre dues magnituds en forma de funció. Per exemple, la temperatura en un lloc concret i l'hora del dia són dues magnituds relacionades entre elles, ja que a cada moment del dia correspon una temperatura concreta. Així, la temperatura és una funció del temps. D'aquesta manera, es podrien escriure les hores d'un dia en un conjunt, les temperatures en un altre, i una fletxa podria unir cada element del primer conjunt (les hores) amb un únic element del segon conjunt (la temperatura en aquesta hora).

6.2. Representació d'una funció

La relació que s'estableix mitjançant una funció es pot representar de diverses maneres. Vegem-les.

6.2.1. Taula d'una funció

Una manera senzilla d'expressar una funció consisteix a posar els elements dels conjunts que hi intervenen en una **taula de valors**. En la primera columna de la taula se solen escriure els valors del domini de la funció, i en la segona columna els valors de les imatges corresponents, tal com es veu a continuació.

Què és una taula d'una funció?
És una taula amb dues columnes. La primera conté valors del domini de la funció i la segona els valors corresponents de la seva imatge. Quan el domini o la imatge són conjunts massa grans, una taula de la funció només conté alguns dels valors de la funció.

Exemple. Taula d'una funció.
La funció F definida anteriorment es pot expressar mitjançant aquesta taula:

Dom$F$	ImF
2	1
4	6
6	3
8	1
41	5

Evidentment, no sempre és possible construir una taula amb tots els elements del domini de la funció, ja que el domini i la imatge poden ser conjunts massa grans (fins i tot infinits). En aquest cas, es pot construir una taula amb alguns valors del domini i les seves imatges corresponents.

Per exemple, considerem la funció temperatura d'un lloc concret que a cada moment d'un dia associa la temperatura en aquest instant. Els valors possibles per als instants d'un dia van des de les 0 hores fins a les 24 hores, és a dir, tot l'interval de nombres reals $[0, 24)$. No és possible escriure tots els instants del dia, i per això només se'n trien alguns de representatius. En particular, es poden prendre mostres de la temperatura cada minut, o cada cert nombre de minuts. Per a no estendre'ns massa, la taula del marge presenta, per exemple, només les temperatures corresponents a cada 2 hores. Aquesta correspondència és una funció perquè a cada instant de temps només s'hi pot associar una única temperatura. En la taula tampoc no s'hi poden considerar tots els valors de la funció, sinó només alguns, perquè tant el domini com la imatge de la funció contenen massa valors per a llistar-los en una taula. En casos com aquests es trien normalment només alguns valors del domini, distribuïts de manera uniforme per tot el domini, tal com es mostra amb l'exemple.

Exemple

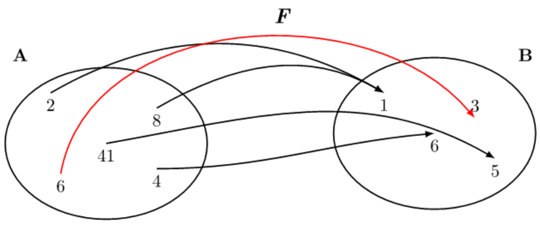
Dom$F$	ImF
Instant (hora)	Temperatura (°C)
0:00	5
2:00	7
4:00	8
6:00	12
8:00	13
10:00	18
12:00	23
14:00	25
16:00	26
18:00	24
20:00	22
22:00	15

Taula d'una funció instant-temperatura

6.2.2. Expressió d'una funció

La funció següent F fa correspondre al valor 6 del domini de la funció el valor 3 de la imatge. També es pot dir que la imatge del 6 per la funció F és el 3, o fins i tot que la funció avaluada en el 6 dona com a resultat el 3.

Què és l'expressió d'una funció?
És una expressió algebraica amb una variable que permet trobar la imatge de qualsevol element del domini de la funció. Per a fer-ho, s'ha de substituir la variable de l'expressió pel valor del domini. El valor numèric resultant d'aquesta expressió és el valor de la imatge d'aquest element del domini.



Aquesta manera d'expressar-ho és llarga i incòmoda si volem donar la imatge d'altres valors del domini. Per a evitar aquest problema, s'usa una forma més breu de donar la imatge d'un element del domini: s'escriu el nom de la funció i a continuació, entre parèntesis, el valor del domini del qual es vol calcular la imatge. Seguidament, s'escriu el signe igual i, finalment, el valor de la imatge corresponent.

Exemple. Expressió d'una funció. Notació.
En el cas de la funció F, s'escriu

$$F(6) = 3$$

i es llegeix "F de 6 és igual a 3", que significa que la imatge del valor 6 del domini és el valor 3 en el cas de la funció F.
De la mateixa manera, si s'observa el diagrama anterior de la funció F,

- la imatge de 2 és 1; per tant, $F(2) = 1$
- la imatge de 4 és 6; per tant, $F(4) = 6$
- la imatge de 8 és 1; per tant, $F(8) = 1$
- la imatge de 41 és 5; per tant, $F(41) = 5$

En molts casos no es pot proporcionar una llista completa de les imatges de tots els valors del domini d'una funció. Per exemple, en el cas de la funció, diguem-li g, a cada nombre real hi fa correspondre el mateix nombre al quadrat. En aquest cas no es pot donar una llista completa perquè el domini és un conjunt infinit (tots els nombres reals). Alguns d'aquests valors tenen les imatges següents:

- la imatge de 0 és $0^2 = 0$; per tant, $g(0) = 0^2 \Rightarrow g(0) = 0$
- la imatge de 5 és $5^2 = 25$; per tant, $g(5) = 5^2 \Rightarrow g(5) = 25$
- la imatge de -1 és $(-1)^2 = 1$; per tant, $g(1) = 1^2 \Rightarrow g(-1) = 1$
- la imatge de -2 és $(-2)^2 = 4$; per tant, $g(-2) = (-2)^2 \Rightarrow g(-2) = 4$

Tal com veiem, aquesta llista no s'acaba mai perquè no és possible escriure tots els nombres reals. Hem de buscar una manera d'expressar la funció que pugui donar la imatge de qualsevol nombre del domini sense haver d'escriure'ls tots. Habitualment, es dona una regla algebraica que permeti calcular la imatge per a qualsevol element del domini. Per exemple, en el cas de la funció g és $g(x) = x^2$.

Aquesta expressió, denominada **expressió algebraica de la funció**, indica que per a qualsevol nombre del domini, representat per la lletra x, el valor de la funció és igual al quadrat d'aquest valor. En definitiva, això diu que, per a trobar el valor de la funció per a un element qualsevol del domini, en l'expressió algebraica de la funció s'ha de substituir el valor de la lletra x pel valor del nombre en qüestió i fer les operacions que indiqui l'expressió.

Exemple. Expressió algebraica d'una funció.
L'expressió algebraica d'una funció és

$$g(x) = x^2$$

Aleshores, el valor de la funció g per al valor del domini 4 és

$$g(4) = 4^2 = 16$$

la qual cosa indica que la imatge del 4 per la funció g és igual.

La lletra que s'usa per a l'expressió algebraica d'una funció rep el nom de **variable**

independent o, simplement, variable. Moltes vegades, els valors que pren la funció s'expressen amb una altra lletra, que sol ser la y, denominada **variable depenent**, justament perquè depèn del valor de la x, la variable independent.

6.2.3. Gràfica d'una funció

Si f és una funció qualsevol, les parelles de nombres x i $f(x)$ que estan en una taula de la funció es poden interpretar com a parells ordenats $(x, y) = (x, f(x))$, és a dir, punts del pla cartesià. Aquesta identificació fa possible representar qualsevol dels punts d'una funció.

Què és la gràfica d'una funció f? És el conjunt de tots els parells de punts (x, y) del pla cartesià que coincideixen amb els valors d'aquesta funció. La coordenada x és un valor del domini, i la coordenada $y = f(x)$, el valor corresponent de la imatge. Per a dibuixar la gràfica d'una funció, n'hi ha prou en dibuixar en el pla els punts que es descriuen en una taula de la funció de la manera $(x, f(x))$.

Recordem que per a representar el pla cartesià es prenen dues rectes perpendiculars, que s'anomenen **eix X** o **eix d'abscisses**, i **eix Y** o **eix d'ordenades**, i que es creuen en el punt $(0, 0)$. Aquest punt rep el nom d'**origen de coordenades** o, simplement, **origen**. D'aquesta manera, és possible determinar tot punt del pla amb dos nombres reals ordenats, x i y. El primer rep el nom de coordenada x o abscissa, i el segon el de coordenada y o ordenada del punt.

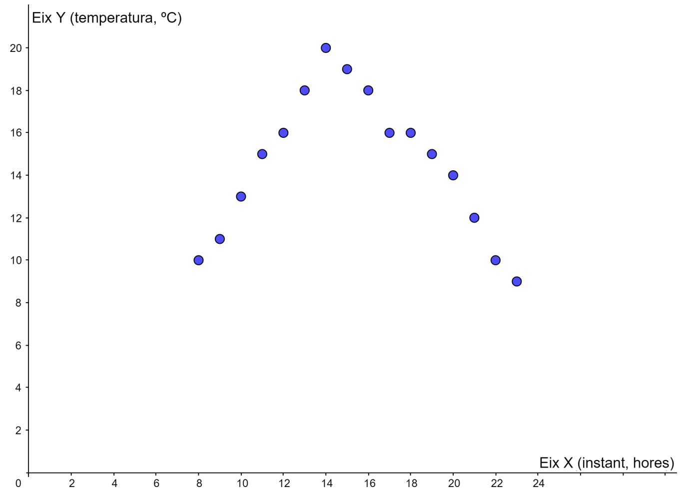
Vist com es determina un pla cartesià, vegem amb un exemple concret com es pot representar qualsevol dels punts $(x, f(x))$ de la gràfica d'una funció.

El sistema de coordenades cartesianes es fa servir per a poder determinar de manera inequívoca tot punt P del pla amb dos nombres reals ordenats, x i y. El primer rep el nom de coordenada x o abscisa, i el segon el de coordenada y o ordenada del punt. Així es pot identificar P(x, y). Els sistemes de coordenades cartesianes s'estenen de manera anàloga a l'espai de tres dimensions i a espais de dimensions superiors.

Suposem que t és una funció que dona la temperatura d'una ciutat cada hora, des de les vuit del matí fins a les onze de la nit. La taula de valors del marge proporciona dades relatives a aquesta funció. D'acord amb aquesta taula, els punts corresponents a la funció t, que són de la forma $(x, t(x))$, es poden expressar així:

$$(8,10),\ (9,11),\ (10,13),\ (11,15),\ (12,16),\ (13,18),\ (14,20),\ (15,19),$$
$$(16,18),\ (17,16),\ (18,16),\ (19,15),\ (20,14),\ (21,12),\ (22,10),\ (23,9).$$

Aleshores, la representació gràfica de tots aquests punts en el pla cartesià és la gràfica de punts següent:



Exemple

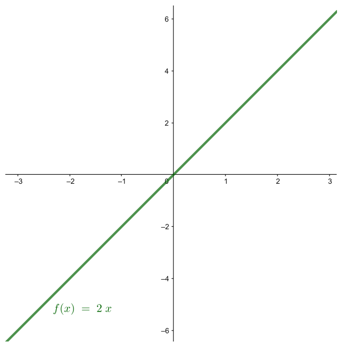
x (hora)	$t(x)$ (°C)
08:00	10
09:00	11
10:00	13
11:00	15
12:00	16
13:00	18
14:00	20
15:00	19
16:00	18
17:00	16
18:00	16
19:00	15
20:00	14
21:00	12
22:00	10
23:00	9

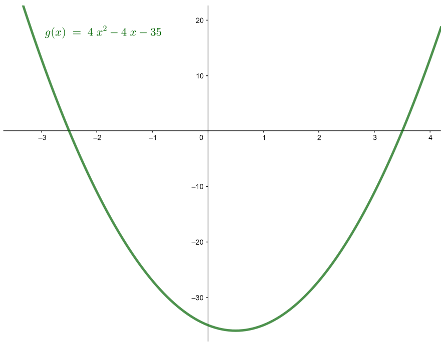
Taula instant-temperatura

Notem que en aquest cas no s'ha dibuixat la part negativa dels eixos per comoditat, ja que no hi ha punts amb coordenades negatives.

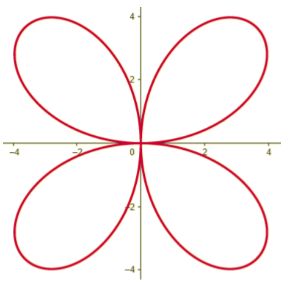
La representació de tots els punts de la forma $(x, f(x))$ es denomina **gràfica d'una funció**. Notem que, si una funció té per domini tot el conjunt de nombres reals, és impossible representar-ne tota la gràfica (perquè no hi cabria en un full de paper). En aquest cas, haurem de conformar-nos amb la representació d'una part d'aquesta gràfica solament, i és costum continuar denominant-la gràfica de la funció però indicant l'interval del domini que representem.

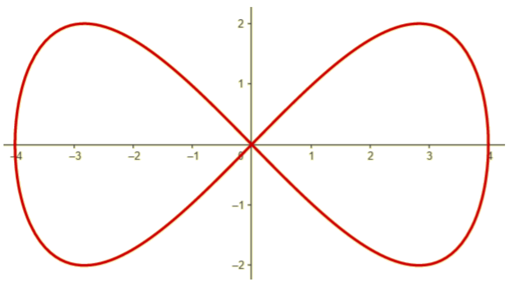
A continuació es poden observar les representacions gràfiques de dues funcions concretes en intervals concrets, que s'estudiaran detingudament en temes posteriors. A l'esquerra es presenta la funció $f(x) = 2x$ en els punts de domini en l'interval $[-3, 3]$. A la dreta s'observa la funció $g(x) = 4x^2 - 4x - 35$ en l'interval $[-3, 4]$.



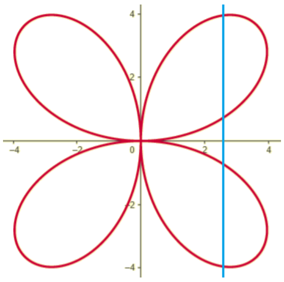


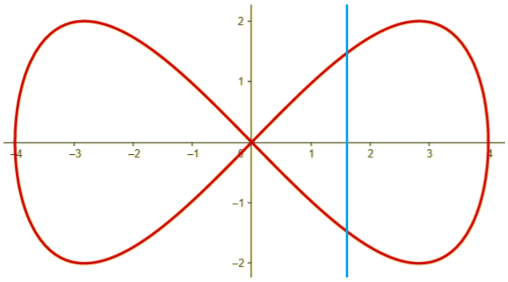
En aquests casos observem com, en representar-se tots els punts d'un interval determinat, els punts de la gràfica estan tan pròxims que formen una línia contínua, que en el cas particular de l'esquerra és recta i en el cas de la dreta corbada.
De fet, en general, totes les funcions el domini de les quals són els nombres reals tenen aquesta característica: la seva gràfica apareix com una línia contínua o com diverses línies contínues.
Cal destacar que la gràfica d'una funció no pot tenir una forma com les que es presenten a continuació, ja que en ambdós casos hi ha valors en l'eix X tals que la seva imatge no és un únic valor.





Aquest fet es pot comprovar traçant qualsevol recta vertical en les gràfiques, tal com mostra la imatge següent. Si una recta vertical talla diversos punts de la gràfica que s'estudia, es pot assegurar que la gràfica no és d'una funció perquè el valor de $x$determinat per aquesta recta té com a mínim més d'una imatge, fet impossible en una funció.





6.3. Operacions entre funcions

6.3.1. Operacions bàsiques

Entre funcions diferents qualssevol, es poden realitzar certes operacions. Aquestes operacions són les que s'exposen a continuació:

$\boxed{\text{Suma (o resta) de funcions}}$ La suma (o resta) de dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, es designa per $f \pm g$ i es calcula de la manera següent:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

Aquesta suma es pot calcular sempre que x estigui en el domini de les dues funcions que se sumen.

Per exemple, la suma de les funcions $f(x) = 3x$ i $g(x) = 4x^2 - 1$ és

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 4x^2 - 1 = 4x^2 + 3x - 1$$

La suma (o resta) de funcions té les propietats següents:

- **Commutativa**: $f \pm g = g \pm f$
- **Associativa**: $f \pm (g \pm h) = f \pm (g \pm h)$
- Hi ha un element, denominat **funció zero**, que és l'element neutre de la suma de funcions, de manera que qualsevol funció sumada amb aquest element no varia. Aquesta funció és $z(x) = 0$.
- Per a cada funció $f(x)$, hi ha la **funció oposada** $-f(x)$ que, sumada a la funció original, resulta la funció zero.

Operar amb funcions.
Les operacions essencials amb funcions són la suma, la resta, la multiplicació, la divisió i la potenciació. En tots els casos, el domini de la funció resultant és la intersecció dels dominis de les funcions amb les quals s'opera. En el cas de la divisió, a més, no pertanyen al domini aquells punts que anul·len el denominador. Una altra operació important entre funcions és la potenciació. En el cas de la potenciació, no pertanyen al domini tots aquells punts que anul·len alhora la base i l'exponent.

$\boxed{\text{Producte de funcions}}$ El producte de dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, es designa per $f \cdot g$ i es calcula de la manera següent:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Aquest producte es pot calcular sempre que la variable x estigui en el domini de les funcions que es multipliquen.

Per exemple, el producte de les funcions $f(x) = 3x$ i $g(x) = 4x^2 - 1$ és

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 3x \cdot (4x^2 - 1) = 12x^3 - 3x$$

El producte de funcions té les propietats següents:

- **Commutativa**: $f \cdot g = g \cdot f$
- **Associativa**: $f \cdot (g \cdot h) = f \cdot (g \cdot h)$
- Hi ha un element, denominat **funció unitat**, que és el neutre del producte de funcions, de manera que qualsevol funció multiplicada per aquest element no varia. Aquesta funció és $u(x) = 1$.

Quocient de funcions El quocient de dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, es designa per $\dfrac{f}{g}$ i es calcula de la manera següent:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Aquest quocient es pot calcular sempre que la variable x estigui en el domini de les funcions que es consideren i, a més, la funció del denominador $g(x)$ no sigui la funció 0.

Per exemple, el quocient de les funcions $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = x + 1$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$$

Potència de funcions La potència d'una funció $f(x)$ per una altra funció $g(x)$ es designa per f^g i es calcula de la manera següent:

$$\left(f^g\right)(x) = f(x)^{g(x)}$$

Aquesta potència es pot calcular sempre que la variable, x, estigui en el domini d'ambdues funcions, f i g, i que cap de les dues funcions s'anul·lin.

Per exemple, la potència de la funció $f(x) = 4x^2 - 1$ per $g(x) = 3x$ és

$$\left(f^g\right)(x) = f(x)^{g(x)} = \left(4x^2 - 1\right)^{3x}$$

6.3.2. Composició de funcions i funció inversa

Donades dues funcions, f i g, es pot definir la **composició de la funció f amb la funció g**. Aquesta composició es designa per $g \circ f$ i es calcula de la manera següent:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Per tal de poder calcular la composició de la funció f amb la funció g en un punt a, és necessari que $f(a)$ pertanyi al domini de g.

Què són la composició de funcions i la inversa d'una funció?
La composició d'una funció f amb una funció g és una altra funció, $g \circ f$, tal que a cada element del domini hi fa correspondre $g(f(x))$. Es diu que f i g són inverses una de l'altra si $(g \circ f)(x) = x$ i $(f \circ g)(x) = x$. La funció inversa de f es denota per f^{-1}.

Exemple. Composició de dues funcions.
Donades les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = 2x$, es poden definir les composicions de funcions:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2 \cdot \left(x^2\right) = 2x^2$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = (2x)^2 = 4x^2$$

Amb aquest exemple es pot observar com la composició de funcions *no és commutativa*. És a dir, $g \circ f$ no sol ser igual a $f \circ g$. En altres paraules, no és el mateix la composició de f amb g que la composició de g amb f.

A partir del concepte de composició de funcions, es pot definir el concepte de **funció inversa** d'una altra funció. Si f és una funció, es diu que g és la funció inversa de f si es compleixen alhora les dues condicions següents:

- $(g \circ f)(x) = x$ per a tot x que pertany al domini de f
- $(f \circ g)(x) = x$ per a tot x que pertany al domini de g

Per tant, aquestes condicions impliquen que el domini de la funció f és igual a la imatge de la funció g, és a dir, que $\text{Dom}f = \text{Im}g$. Això significa que si f és una funció tal que $f(3) = 5$, s'ha de complir $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(5) = 3$. És a dir, que si la imatge del 3 per la funció f és 5, la imatge del 5 per la funció g és 3. I això s'ha de complir per a qualsevol valor de f.

De manera general, es diu que una funció g és la inversa de f si es compleix que si $f(x) = y$ llavors $g(y) = x$. En cas de ser així, la funció inversa de f es denota per f^{-1} i, en particular, si $y = f(x)$, s'escriu $x = f^{-1}(y)$.
Aquest fet mostra com una propietat important, que es pot demostrar, és que si una funció té inversa aleshores ambdues funcions, la funció original i la seva inversa, són bijectives.

Exemple. Funcions inverses.
Són parells de funcions inverses

$f(x) = x + a$ i $f^{-1}(y) = y - a$, amb $a \in \mathbb{R}$ un paràmetre qualsevol

$f(x) = a - x$ i $f^{-1}(y) = a - y$, amb $a \in \mathbb{R}$ un paràmetre qualsevol

$f(x) = a \cdot x$ i $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{a}$, amb $a \in \mathbb{R}$ un paràmetre qualsevol i $a \neq 0$

6.4. Característiques d'una funció

Les funcions es classifiquen en tipus diferents depenent de com s'utilitza la variable independent. En particular, cada un d'aquests tipus de funcions presenta un domini, una imatge i una forma gràfica específica. En aquest sentit, es pot parlar de famílies de funcions: polinòmiques, trigonomètriques, exponencials, logarítmiques...

Exemple. Tipus de funcions.

$f(x) = 5x^2 - x - 2$ és una funció polinòmica.

$g(x) = \sin(x)$ és una funció trigonomètrica.

$h(x) = 3^x$ és una funció exponencial.

Quan les funcions són tan específiques, és possible determinar certes característiques de la seva forma en particular. A banda del seu domini i recorregut, aquests trets principals són les interseccions de la funció amb els eixos coordenats, la determinació de possibles simetries, els intervals de creixement i decreixement, l'existència de punts extrems, els intervals de concavitat o convexitat, l'existència de punts d'inflexió i el seu comportament asimptòtic.

Els temes que segueixen presenten les principals famílies de funcions, que cal no solament conèixer, sinó també saber identificar i representar gràficament. Amb l'estudi d'aquestes famílies de funcions, s'introdueixen els termes que fan referència als trets característics de qualsevol funció. Es presenten aquests trets i s'explicita com poden determinar per a cada una de la família de funcions que s'estudia.

Resum

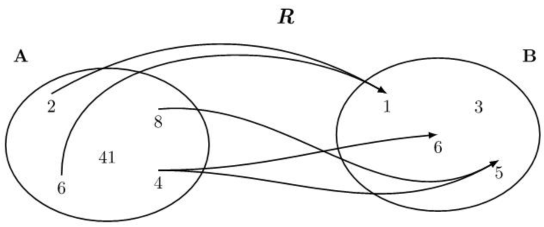
Concepte de funció

Correspondències entre conjunts

Definició. Una **correspondència** entre dos conjunts és una relació entre ambdós conjunts que fa correspondre a elements del primer conjunt elements del segon conjunt.

Representació. Gràficament, les correspondències entre conjunts es representen amb diagrames. Els conjunts es representen amb formes ovalades i les correspondències que s'estableixen entre ells amb fletxes que relacionen els elements que contenen aquestes formes.

Exemple i elements. En una correspondència com la que mostra la imatge, s'identifiquen:



- El **nom** de la correspondència: R.
- El **conjunt de partida**: $A = \{2, 4, 6, 8, 41\}$.
- El **conjunt d'arribada**: $B = \{1, 3, 5, 6\}$.
- El **domini** de R: $\text{Dom}R = \{2, 4, 6, 8\}$.
- La **imatge** de R: $\text{Im}R = \{1, 5, 6\}$.
- La **imatge** d'elements concrets:
  - La imatge de l'element 2 és l'element 1.
  - La imatge de l'element 4 són els elements 5 i 6.
- L'**antiimatge** d'elements concrets:
  - L'antiimatge de l'element 6 és l'element 4.
  - L'antiimatge de l'element 1 són els elements 2 i 6.

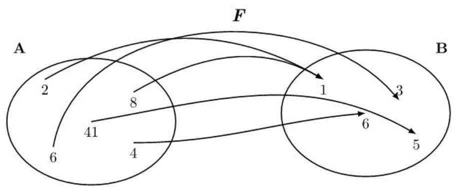
Aplicacions i funcions

Exemples i definició.

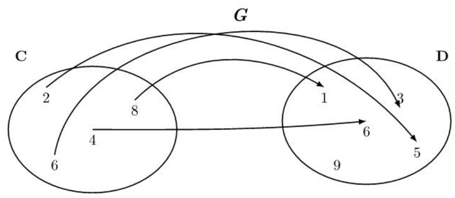
S'anomena **aplicació** tota correspondència en què cada element té una única imatge. Quan una aplicació és definida entre conjunts numèrics, s'anomena **funció**.

Tipus d'aplicacions. Es distingeixen tres tipus d'aplicacions segons com és la seva imatge:

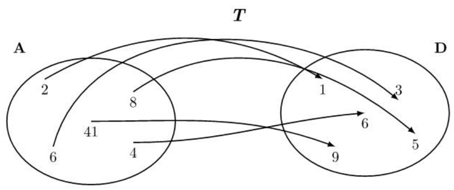
- **Exhaustives**: aplicacions tals que la seva imatge coincideix amb el conjunt d'arribada.



- **Injectives**: aplicacions tals que cada element de la imatge només té una única antiimatge.



- **Bijectives**: aplicacions exhaustives i injectives al mateix temps.



Representació de funcions

Hi ha diferents maneres de representar una fumció.

Taula d'una funció. És una taula de valors amb dues columnes. La columna de l'esquerra conté valors del domini de la funció i la columna de la dreta conté els valors corresponents de la seva imatge.
Exemple: taula de la funció F anterior.

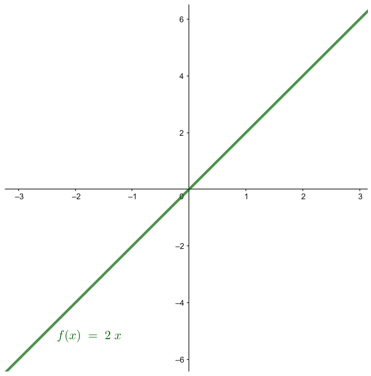
Dom$F$	ImF
2	1
4	6
6	3
8	1
41	5

Expressió d'una funció. És una expressió algebraica amb una variable que permet trobar la imatge de qualsevol element del domini de la funció. Per a determinar la imatge, s'ha de substituir la variable de l'expressió pel valor del domini que aquest pren, i operar d'acord amb l'expressió donada.

Exemple: Si la funció g és aquella que fa correspondre a un nombre el mateix nombre al quadrat, la seva expressió ha de ser $g(x) = x^2$. Aleshores, la imatge de 4 per la funció g és 16, perquè $g(4) = 4^2 = 16$.

Gràfica d'una funció. És el conjunt de tots els punts (x, y) del pla cartesià tals que les seves coordenades coincideixen amb els valors del domini i les imatges corresponents d'aquesta funció. En aquest cas, la primera coordenada, x, correspon a un valor del domini, i la segona coordenada, $y = f(x)$, denota el valor corresponent de la imatge. Per a dibuixar la gràfica d'una funció, s'han de dibuixar tots els punts continguts en la taula de la funció.

Exemple: la gràfica de la funció $f(x) = 2x$ quan el domini és l'interval $[-3, 3]$:



Operacions amb funcions

Si f i g són dues funcions, es poden definir les operacions següents:

- **Suma (o resta)** de les funcions $f(x)$ i $g(x)$. Es designa per $f \pm g$ i es calcula $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$. Aquesta suma es pot calcular sempre que $x$estigui en el domini d'ambdues funcions, f i g.

- **Producte** de les funcions $f(x)$ i $g(x)$. Es designa per $f \cdot g$ i es calcula $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Aquest producte es pot calcular sempre que x estigui en el domini d'ambdues funcions, f i g.

- **Quocient** de les funcions $f(x)$ i $g(x)$. Es designa per $\dfrac{f}{g}$ i es calcula $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Aquest quocient es pot calcular sempre que x es trobi en el domini d'ambdues funcions, f i g i, a més, $g(x)$ no sigui 0.

- **Potència** de les funcions $f(x)$ i $g(x)$: es designa per f^g i es calcula com $(f^g)(x) = f(x)^{g(x)}$. Aquesta potència es pot calcular sempre que x estigui en el domini d'ambdues funcions, f i g, i, a més, que $f(x)$ i $g(x)$ no siguin 0.

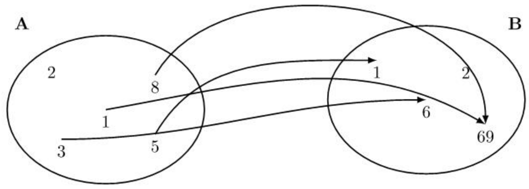
- **Composició** de la funció f amb la funció g. És una altra funció, que es designa per $g \circ f$, que compleix $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Aquesta nova funció es pot calcular sempre que $f(x)$ estigui en el domini de la funció que s'aplica en segon lloc, g.

- **Inversa** d'una funció. Les funcions f i g són inverses una de l'altra si $(g \circ f)(x) = x$ i $(f \circ g)(x) = x$ alhora. Si hi ha inversa, ambdues funcions són bijectives. La funció inversa de f es denota per f^{-1}.

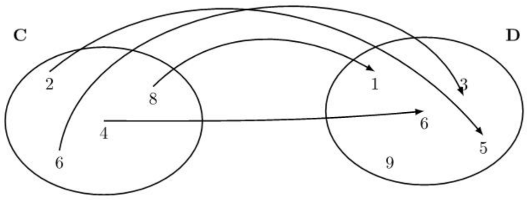
Exercicis resolts

1. **Digueu si aquestes correspondències són funcions. En cas afirmatiu, feu la taula de valors de cada una i digueu si són bijectives, exhaustives o injectives.**

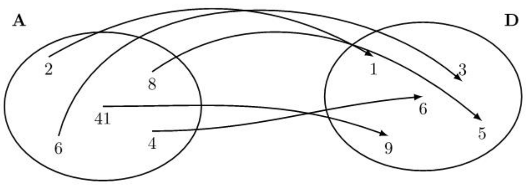
F



G



H



Solució:
Totes les correspondències són funcions perquè cada element del conjunt de sortida només té una imatge. Les seves taules de valors són:

x	$F(x)$
1	69
3	6
5	1
8	69

x	$G(x)$
2	5
4	6
6	3
8	1

x	$H(x)$
2	1
4	6
6	3
8	5
41	9

Aleshores, podem dir:

- F no és ni injectiva ni exhaustiva.
- G és injectiva perquè cada element de la imatge té només una única antiimatge.
- H és bijectiva perquè és injectiva (cada element de la imatge té només una única antiimatge) i també és exhaustiva (la imatge coincideix amb el conjunt d'arribada).

2. **Determina el domini i, si n'hi ha, els punts de tall amb els eixos d'aquestes funcions:**

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$

(c) $h(x) = 3$

(d) $a(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

(e) $b(x) = \sqrt{x + 1}$

(f) $c(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(g) $d(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$

Solució:

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Domini: Tota la recta real, perquè es tracta d'un polinomi.
Punts de tall:

- Eix Y: Si $x = 0$, $f(x) = f(0) = 1$. Per tant, el punt $(0, 1)$.
- Eix X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Per tant, el punt $(1, 0)$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Domini: Tota la recta real excepte els valors que anul·len el denominador, és a dir, tots menys el 0 ($x \neq 0$). Per tant, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
Punts de tall:

- Eix Y: Si $x = 0$, $g(0)$ no existeix perquè $x = 0$ no és del domini de la funció. Per tant, no existeixen punts de tall amb l'eix Y.
- Eix X: No existeix cap x qe compleixi $g(x) = 0$. Per tant, no hi ha punts de tall amb l'eix X.

(c) $h(x) = 3$

El domini és tota la recta real, perquè qualsevol nombre té la imatge igual a 3.
Punts de tall:

- Eix Y: Si $x = 0 \Rightarrow h(x) = 3$. Per tant, el punt $(0, 3)$.
- Eix X: Com que $h(x)$ ha de ser sempre 3, no pot ser mai 0. Per tant, no hi ha punts de tall amb l'eix X.

(d) $a(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

Domini: Tota la recta real, excepte aquells valors que anul·len el denominador. Els valors que anul·len el denominador són: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$. Per tant, el domini és $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
Punts de tall:

- Eix Y: Si $x = 0 \Rightarrow a(0) = -\frac{1}{2}$. Per tant, el punt $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.
- Eix X: Si $a(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \{1, -1\}$. Per tant, els punts $(1, 0)$ i $(-1, 0)$.

(e) $b(x) = \sqrt{x + 1}$

Domini: L'interior de l'arrel no pot ser negatiu. Això vol dir que, necessàriament, $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$. Per tant, el domini és l'interval $[-1, +\infty)$.
Punts de tall:

- Eix Y: Si $x = 0 \Rightarrow b(0) = 1$. Per tant, el punt $(0, 1)$.
- Eix X: Si $b(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Per tant, el punt $(-1, 0)$.

(f) $c(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Domini: L'interior de l'arrel no pot ser negatiu. Això vol dir que, necessàriament, $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1$. Per tant, el domini és producte de la unió dels intervals $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
Punts de tall són:

- Eix Y: Si $x = 0$, $c(0)$ no existeix perquè $x = 0$ no és del domini de la funció. Per tant, no hi ha punts de tall amb l'eix Y.
- Eix X: Si $h(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \{-1, 1\}$. Per tant, els punts $(-1, 0)$ i $(1, 0)$.

(g) $d(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$.

Domini: En aquest cas s'han de complir dues condicions:

- L'interior de l'arrel no pot ser negatiu. Això vol dir que $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow |x| \geq 2$.
- El denominador no es pot anul·lar. Això vol dir que $x + 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5$

Per tant, el domini és producte de la unió de les tres condicions: $((-\infty, -2] \cup [2, \infty)) \backslash \{-5\} = (-\infty, -5) \cup (-5, -2] \cup [2, \infty)$
Punts de tall:

- Eix Y: Si $x = 0$, d(0) no existeix perquè $x = 0$ no és del domini de la funció. Per tant, no hi ha punts de tall amb l'eix Y.
- Eix X: Si $d(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \{-2, 2\}$. Per tant, els punts $(2, 0)$ i $(-2, 0)$.

Exercicis per a practicar amb les solucions

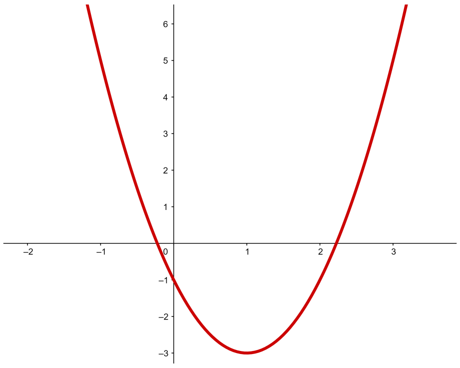
3. **Doneu l'expressió d'una funció que tingui aquesta taula:**

x	$f(x)$
-2	5
0	1
2	5
4	17
5	26
6	37

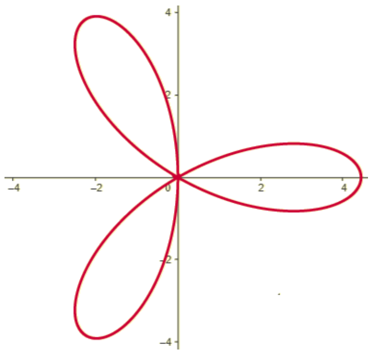
4. **Trobeu les imatges de la funció** $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ **pels valors** 0, 1 **i** -3**.**

5. **Digueu si aquestes gràfiques corresponen a una funció:**

Gràfica 1**:**



Gràfica 2**:**



6. **Siguin les funcions:** $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$**,** $g(x) = 3x + 1$ **i** $h(x) = e^x$**. Determineu les composicions de funcions següents:**

(a) $(f \circ g)(x)$
(b) $(g \circ f)(x)$
(c) $(f \circ h)(x)$
(d) $(h \circ g \circ f)(x)$

Solucions:

3. $f(x) = x^2 + 1$
4. Per a trobar les imatges dels valors demanats, s'ha de substituir la variable de l'expressió pel valor donat i, posteriorment, operar d'acord amb l'expressió numèrica resultant:
   (a) $f(0) = 1$
   (b) $f(1) = 2$
   (c) $f(-3) = 34$
5. La primera gràfica sí que correspon a una funció, però la segona no perquè hi ha valors que tenen més d'una antiimatge, per exemple, $x = 0$ on $f(0) = \{-1, 1\}$.
6. Les funcions composició resultants són:
   (a) $(f \circ g)(x) = 18x^2 + 3x$
   (b) $(g \circ f)(x) = 6x^2 - 9x + 4$
   (c) $(f \circ h)(x) = 2\left(e^x\right)^2 - 3e^x + 1$
   (d) $(h \circ g \circ f)(x) = e^{6x^2 - 9x + 4}$

7. Funcions polinòmiques

Índex

Una funció polinòmica és tota aquella funció que té per expressió algebraica un polinomi. L'estudi de les funcions polinòmiques es fa segons el grau del polinomi, i per tant té sentit començar per les funcions que tenen per expressió un polinomi de grau 1, és a dir, quan en l'expressió algebraica de la funció la variable apareix un sol cop multiplicada per ella mateixa. Comencem, doncs, per conèixer aquests casos particulars de funcions polinòmiques.

7.1. Funcions lineals

7.1.1. Definició i exemples

Una **funció lineal** o **de proporcionalitat directa** és aquella funció l' expressió de la qual és el producte d'un nombre per la variable. En altres paraules, es diu que f és una funció lineal (o de proporcionalitat directa) si

$$\boxed{f(x) = ax}$$

on a és un nombre real qualsevol. El nombre que multiplica la variable, a, es denomina **raó de proporcionalitat**.

Què caracteritza una funció lineal? L'expressió algebraica d'una funció lineal o de proporcionalitat directa és producte d'un polinomi de grau 1 sense terme independent, és a dir, del tipus $f(x) = ax$. El nombre a rep el nom de pendent de la recta i informa de la seva inclinació. La gràfica corresponent és una recta que passa per l'origen de coordenades.

Exemple. Funcions lineals i raó de proporcionalitat.

$g(x) = 2x$, és una funció lineal amb raó de proporcionalitat 2.

$h(x) = 4x$, és una funció lineal amb raó de proporcionalitat 4.

$s(x) = -3x$, és una funció lineal amb raó de proporcionalitat -3.

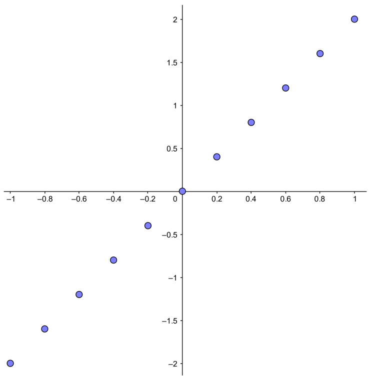
Per estudiar la forma de la gràfica d'una funció lineal, es pot crear, en primer lloc, una taula de la funció. D'aquesta manera, en representar els punts de la taula s'obté la gràfica associada. Ho exemplifiquem amb la funció $f(x) = 2x$.

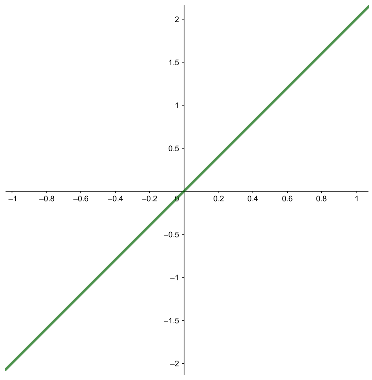
Exemple

x	$f(x)$
-1	-2
-0.8	-1.6
-0.4	-1.2
-0.2	-0.8
0.2	-0.4
0.4	0.8
0.6	1.2
0.8	1.6
1	2

Taula de la funció $f(x) = 2x$

Una taula de valors associada a la funció $f(x) = 2x$ és la que apareix en el marge. En representar els punts que conté aquesta taula en el pla cartesià s'obté la primera de les dues gràfiques que hi ha a continuació. En observar aquesta gràfica de punts, es pot deduir, de manera gairebé directa, on dibuixar tots els punts de la gràfica de la funció. El resultat d'aquest fet dona una recta que passa per l'origen de coordenades, tal com mostra la gràfica de la dreta. Aquesta segona gràfica correspon a la gràfica de $f(x) = 2x$.





7.1.2. Representació gràfica

La gràfica de qualsevol funció lineal és una recta que passa per l'origen de coordenades. Això es deu al fet que qualsevol funció lineal és de la forma $f(x) = ax$, on a és un nombre real no nul. En buscar la imatge del 0, s'obté $f(0) = a\cdot 0 = 0$. En conseqüència, la imatge del 0 sempre és 0 i, per tant, el punt $(0,0)$ pertany sempre a la gràfica de la funció.

Així, per a dibuixar una funció lineal qualsevol del tipus $f(x) = ax$, només cal seguir aquests passos:

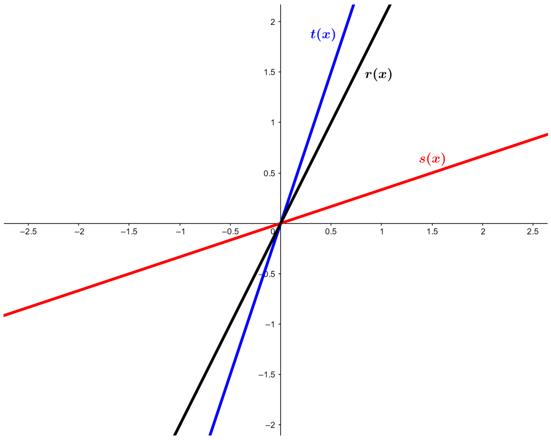
1) Es troba la imatge d'un valor qualsevol x_0 del domini de la funció que no sigui el 0, doncs ja sabem que la imatge del 0 és $f(0) = 0$.

2) Es marca el punt P que correspon a aquest parell ordenat en el pla cartesià: $(x_0, f(x_0))$.

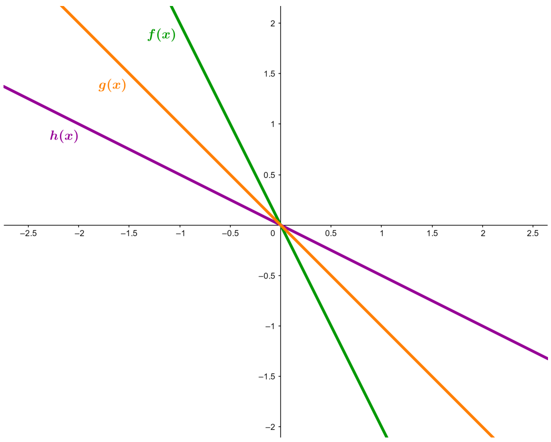
3) Es traça la recta que passa pel punt $(0,0)$ i pel punt P anterior. Aquesta recta es correspon amb la gràfica de la funció lineal.

La gràfica de qualsevol funció s'ha d'interpretar mirant-la d'esquerra a dreta. Dit això, en dibuixar diverses funcions lineals, com per exemple $f(x) = -2x$, $g(x) = -x$, $h(x) = -\frac{1}{2}x$, $t(x) = 3x$, $s(x) = \frac{1}{3}x$ i $r(x) = 2x$, es pot observar com varia el **pendent** (o inclinació) de les rectes. En particular, es té que:

- Si la raó de proporcionalitat és positiva, la recta creix amb més rapidesa com més gran és la raó. Aquest fet s'observa en comparar les gràfiques de les funcions $t(x) = 3x$, $s(x) = \frac{1}{3}x$ i $r(x) = 2x$, tal com mostra la imatge següent:



- Si la raó de proporcionalitat és negativa, la recta decreix amb més rapidesa com més petita (més negativa) és la raó. Aquest fet s'observa en comparar les gràfiques de les funcions $f(x) = -2x$, $g(x) = -x$ i $h(x) = -\frac{1}{2}x$, tal com mostra la imatge següent:



Atesa la relació que hi ha entre la raó de proporcionalitat i el pendent de la gràfica, la raó de proporcionalitat també se l'anomena **pendent de la recta**.

7.2. Funcions afins

7.2.1. Definició i exemples

Una **funció afí** és aquella funció l'expressió algebraica de la qual és producte d'un polinomi de primer grau, és a dir, de la forma

$$\boxed{f(x) = ax + b}$$

on a i b són dos nombres reals qualssevol. El coeficient de la variable, a, es denomina **pendent**, com en el cas de la funció lineal. L'altre nombre, b, es denomina **terme independent** o ordenada a l'origen. D'acord amb aquesta expressió, l'única diferència

Què caracteritza una funció afí?
L'expressió algebraica d'una funció afí és un polinomi de grau 1, és a dir, del tipus $f(x) = ax + b$. El nombre a rep el nom de pendent de la recta i informa de la seva inclinació. El nombre b s'anomena terme independent i informa del tall amb l'eix Y. La gràfica d'una funció afí és una recta.

que hi ha entre una funció afí i una funció lineal és que la funció afí afegeix el terme independent b.

Exemple. Funcions afins i els seus elements.

$g(x) = 3x - 2$ és una funció afí amb pendent 3 i terme independent -2.

$h(x) = 2x - 7$ és una funció afí amb pendent 2 i terme independent -7.

7.2.2. Representació gràfica

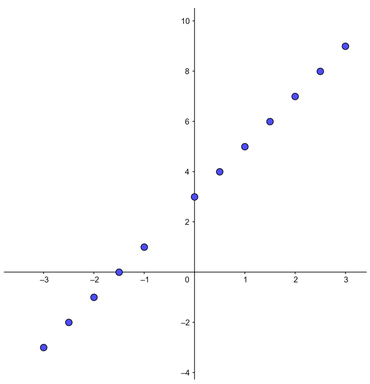
En representar diferents punts d'una funció afí, es pot arribar a deduir la forma de la seva gràfica.

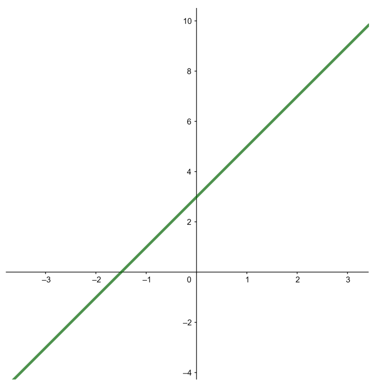
Exemple

x	$f(x)$
-3	-3
-2.5	-2
-2	-1
-1.5	0
-1	1
-0.5	2
0	3
0.5	4
1	5
1.5	6
2	7
2.5	8
3	9

Taula de la funció $f(x) = 2x + 3$

Per exemple, considerem la funció $f(x) = 2x + 3$ i calculem una taula de valors de la funció com la del marge. Aleshores, la representació gràfica resultant és la gràfica de punts que mostra la primera de les dues imatges que hi ha a continuació. A partir d'aquesta gràfica de punts es pot deduir la gràfica completa de la funció considerada, $f(x) = 2x + 3$. Es tracta d'una recta que no passa per l'origen de coordenades, tal com mostra la segona de les dues imatges de sota.





Així, conegut el fet que acabem d'observar, és possible representar una funció afí a partir de la seva expressió algebraica. Si $f(x) = ax + b$ és l'expressió general d'una funció afí, els passos a seguir per a representar-la gràficament es poden resumir així:

1) Es busquen dos parells ordenats P i Q: $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$ que pertanyin a la gràfica de la funció.

2) Es representen els punts P i Q en el pla cartesià.

3) S'uneixen els punts dibuixats mitjançant una recta.

Aquesta recta resultant correspon a la gràfica de la funció afí $f(x) = ax + b$.

En la gràfica de tota funció afí $f(x) = ax + b$ es distingeixen dos punts de manera destacada. Aquests són els punts de tall amb els eixos de coordenades. Més concretament:

- El punt intersecció entre la recta de la funció i l'eix Y. Aquest punt és $(0, f(0))$.

En particular, com que per definició de la funció afí $f(0)$ és el terme independent b de l'expressió de la funció, el punt intersecció és exactament $(0, b)$.

- El punt intersecció entre la recta de la funció i l'eix X. Aquest punt es pot trobar calculant l'antiimatge del 0, és a dir, x tal que $f(x) = 0$. Si $\overline{x}$ és la solució d'aquesta equació, el punt d'intersecció amb l'eix d'abscisses serà $(\overline{x}, 0)$. Més concretament, com que $f(x) = ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}, a \neq 0$, i per tant el punt és exactament $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Exemple. Punts de tall d'una funció.

Considerem la funció $f(x) = 3x - 2$. Aleshores:

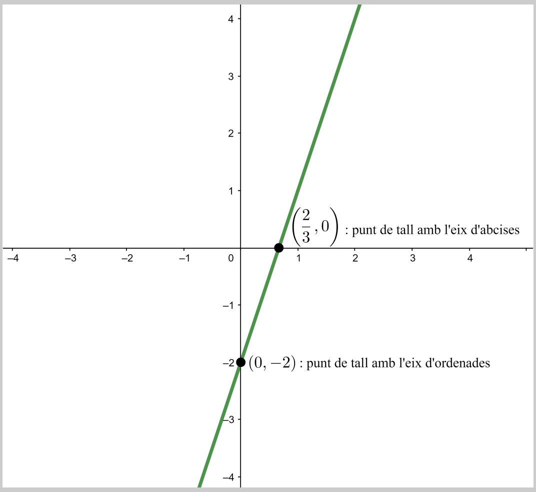
La intersecció de $f(x)$ amb l'eix Y és $(0, f(0)) = (0, -2)$.

La funció $f(x)$ talla l'eix X en un punt tal que la seva coordenada d'ordenades compleix

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Per tant, el punt intersecció de la funció amb l'eix X és $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

Vegem els punts de tall en la següent gràfica:



Expressió de la funció donats dos punts. A vegades és necessari determinar la funció afí que passa per dos punts determinats.

Donada l'expressió general d'una funció afí, $f(x) = ax + b$, sabem que a indica el pendent de la funció i b el seu terme independent. Si volem trobar l'expressió algebraica de $f(x)$, hem de trobar els dos valors, a i b. Per a aconseguir-ho, és necessari definir un sistema d'equacions que caldrà resoldre posteriorment. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple. Com trobar una funció afí a partir de dos punts.

Volem trobar una funció afí de manera que la seva gràfica contingui els punts del pla $(1,-1)$ i $(-2,-7)$.

Com que el punt $(1,-1)$ és de la gràfica de la funció: $f(1) = -1$. Com que busquem $f(x) = ax + b$, $a \cdot 1 + b = -1$.

Com que el punt $(-2,-7)$ és de la gràfica de la funció, $f(-2) = -7$. Pel mateix raonament que abans, $a \cdot (-2) + b = -2a + b = -7$.

Cal resoldre el sistema d'equacions que sorgeix de les dues condicions anteriors

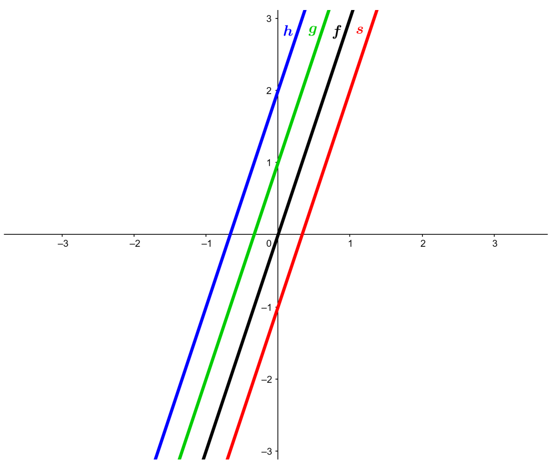
$$\begin{cases} a + b & = -1 \\ -2a + b & = -7 \end{cases}$$

En resoldre el sistema s'obté que les solucions del sistema són $a = 2$ i $b = -3$. Només cal substituir el valors de a i b trobats en l'expressió general $f(x) = ax + b$, d'on resulta

$$f(x) = 2x - 3$$

7.2.3. Propietats

En comparar la gràfica de diverses funcions afins que tenen el mateix pendent, s'observa que totes elles són rectes paral·leles. Així es visualitza en la figura següent, que presenta les gràfiques de les funcions $f(x) = 3x$, $g(x) = 3x + 1$, $h(x) = 3x + 2$ i $s(x) = 3x - 1$.



Que les rectes siguin paral·leles vol dir que l'única modificació gràfica que té lloc en modificar el terme independent d'una funció consisteix a desplaçar paral·lelament la recta. Alhora, es pot observar que una funció lineal no és més que una funció afí en què el terme independent és 0. Dit d'una altra manera, es tracta de la corresponent funció afí que passa per l'origen.

D'acord amb aquest últim fet, es distingeixen tres **tipus de funcions afins** atenent al valor del seu *pendent*. Aquestes són:

- Les funcions afins que creixen a mesura que es desplaça la vista cap a la dreta. S'identifiquen com a **funcions creixents** i es corresponen amb les que tenen el *pendent positiu*. És a dir, $f(x) = ax + b$ amb $a > 0$.

- De manera similar, però en sentit invers, les funcions afins que decreixen a mesura que desplacem la vista cap a la dreta. Aquestes funcions es denominen **funcions decreixents** i es corresponen amb les que tenen el *pendent negatiu*. És a dir, $f(x) = ax + b$ amb $a < 0$.

- Finalment, les funcions afins que són paral·leles a l'eix X. Són **funcions constants** i es corresponen amb les que tenen el *pendent nul*. És a dir, $f(x) = ax + b$ amb $a = 0$.

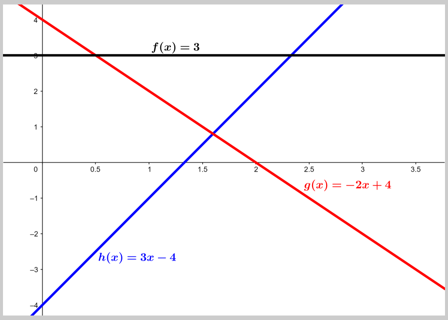
Exemple. Tipus de funcions afins.

Funció afí constant: $f(x) = 3$, té pendent 0.

Funció afí creixent: $h(x) = 3x - 4$, té pendent $3 > 0$.

Funció afí decreixent: $g(x) = -2x + 4$, té pendent $-2 < 0$.

Les gràfiques corresponents a aquestes funcions són



D'acord amb les definicions anteriors, una funció afí és **creixent** quan, a mesura que augmenta el valor de la variable, x, també augmenta el valor de la imatge de la funció, y.
Per contra, una funció és **decreixent** quan, a mesura que augmenta el valor de la x, disminueix el valor de la y.
Finalment, una funció és **constant** quan el valor de la imatge, y, no canvia en variar el valor de la variable, x. Una funció constant no és creixent ni decreixent.

7.3. Funcions quadràtiques

7.3.1. Definició i exemples

L'expressió d'una funció quadràtica correspon a un polinomi de segon grau amb una única variable. És a dir, és de la forma

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

amb $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ (si $a = 0$ aleshores tenim una funció afí i no quadràtica). a és el

Què caracteritza una funció quadràtica?
L'expressió algebraica d'una **funció quadràtica** és un polinomi de grau 2. La seva representació gràfica és una paràbola i els punts essencials d'ella són l'*eix de simetria*, el *vèrtex* i les *branques*.

coeficient de segon grau, b el coeficient de primer grau i c el terme independent.

Exemple. Funcions quadràtiques.

$f(x) = 3x^2 + 2x - 2$ és una funció quadràtica amb terme de segon grau 3, terme de primer 2 i terme independent -2.

$g(x) = x^2 + 5$ és una funció quadràtica amb terme de segon grau 5 i terme independent 5. No té terme de primer grau.

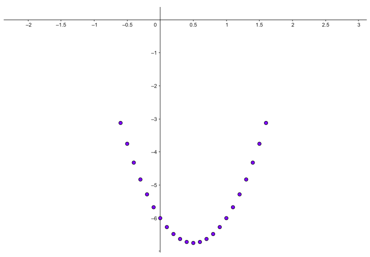
Per a representar una funció quadràtica, en primer lloc convé construir una taula de valors amb alguns dels valors de la funció. Vegem-ho amb un exemple.

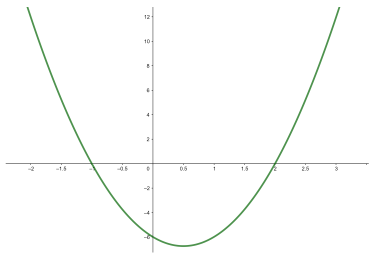
Exemple

x	$f(x)$
-0.6	-3.12
-0.5	-3.75
-0.4	-4.32
-0.3	-4.83
-0.2	-5.28
-0.1	-5.67
0	-6
0.1	-6.27
0.2	-6.48
0.3	-6.63
0.4	-6.72
0.5	-6.75
0.6	-6.72
0.7	-6.63
0.8	-6.48
0.9	-6.27
1	-6
1.1	-5.67
1.2	-5.28
1.3	-4.83
1.4	-4.32
1.5	-3.75
1.6	-3.12

Taula de la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$

En el marge hi ha una taula que correspon a la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ (no s'han inclòs més valors a la taula perquè seria massa extensa). En representar els punts que conté aquesta taula, s'obté la gràfica de l'esquerra. A partir d'aquesta gràfica no és complicat deduir que la representació completa de la funció quadràtica $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ en l'interval $[-2, 3]$ és la que presenta la figura de la dreta.





Com en els casos anteriors, observem que, una vegada representats els punts d'una taula de valors de la funció, no és complicat deduir la representació de tots els punts en què la funció és definida, i es dona lloc així a la gràfica de la funció. En el cas de les funcions quadràtiques, la gràfica resultant és una corba.

7.3.2. Representació gràfica

Tal com s'acaba de veure, la gràfica d'una funció quadràtica és una corba. Aquesta corba rep el nom de **paràbola**.

Elements principals d'una paràbola. Tota paràbola presenta uns elements destacats. Anirem definint quins són aquests elements i alhora veient-los amb un exemple concret a partir de la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$.

- L'**eix de simetria**. Tota paràbola és sempre simètrica respecte d'una recta, que rep el nom d'*eix de simetria*. De manera general, si $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ és l'expressió de la funció quadràtica, aleshores $x = -\frac{b}{2a}$ és l'equació de la recta que defineix l'eix de simetria de la funció.

D'acord amb la taula de valors de la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ anterior, el valor d'aquesta funció f quan $x = 0.5$ és -6.75. En estudiar les imatges dels valors de x de la funció f, observem que aquest és l'únic punt de la funció en què el valor de la imatge no s'assoleix per altres valors de x. En canvi, sí que es repeteixen per qualsevol altre valor de x.

x	$f(x)$
−0.5	−3.75
−0.4	−4.32
−0.3	−4.83
−0.2	−5.28
−0.1	−5.67
0	−6
0.1	−6.27
0.2	−6.48
0.3	−6.63
0.4	−6.72

x	$f(x)$
1.5	−3.75
1.4	−4.32
1.3	−4.83
1.2	−5.28
1.1	−5.67
1	−6
0.9	−6.27
0.8	-6.48
0.7	−6.63
0.6	−6.72

És clar, doncs, que a banda i banda de $x = 0.5$ els valors de la funció f es van repetint. Aquest fet es pot visualitzar dibuixant una recta perpendicular a l'eix X, que passi pel punt $x = 0.5$. En dibuixar aquesta recta es veu clarament que la part de la gràfica que queda a l'esquerra d'aquesta recta és la imatge reflectida de la part dreta, i es mostra així la *simetria* de la funció.

- El **vèrtex**. La intersecció entre la paràbola i l'eix de simetria és un punt que rep del nom de *vèrtex de la paràbola*. En particular, si $f(x) = ax^2 + bx + c$ és l'expressió general de tota funció quadràtica, el vèrtex de la paràbola té com a coordenada d'abscisses $x = -\dfrac{b}{2a}$. Aleshores, el punt serà producte del parell ordenat:

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)$$

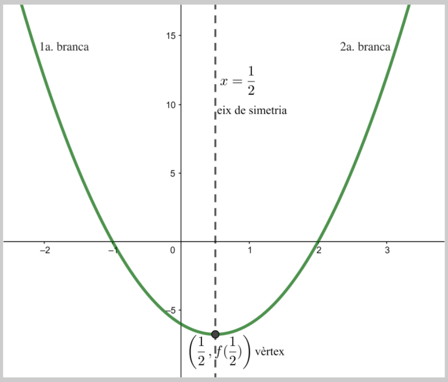
Seguim amb la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$. Hem vist que el vèrtex de la paràbola és en el punt de coordenades $(0.5, -6.75)$.
Fem la comprovació analítica: per ser $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$, tenim $a = 3$, $b = -3$ i $c = -6$. Per tant, la coordenada x del vèrtex és $x = -\dfrac{-3}{2 \cdot 3} = \dfrac{1}{2} = 0.5$, tal com havíem observat anteriorment.

- Les **branques**. A partir del vèrtex de la paràbola, aquesta es desenvolupa en dos traços simètrics a banda i banda, cadascun dels quals es denomina *branca*. Ambdues branques es poden dirigir cap amunt o bé cap avall.
En particular, si $f(x) = ax^2 + bx + c$ és l'expressió general d'una funció quadràtica, es té que:
    - Si $a > 0$, les dues branques de la paràbola es dirigeixen cap amunt, i la funció és decreixent en l'interval $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ i creixent en l'interval $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.
    - Si $a < 0$, les dues branques de la paràbola es dirigeixen cap avall, i la funció és creixent en l'interval $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, i decreixent en l'interval $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

En el cas de l'exemple, on $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$:

- Les dues branques de la paràbola es dirigeixen cap amunt.
- La funció és decreixent en l'interval $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ i és creixent en l'interval $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right) = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Així, en la gràfica de la funció s'observa, juntament amb els altres elements descrits:



Juntament amb el vèrtex, altres punts importants d'una paràbola són les *interseccions* de la paràbola amb els eixos coordenats.

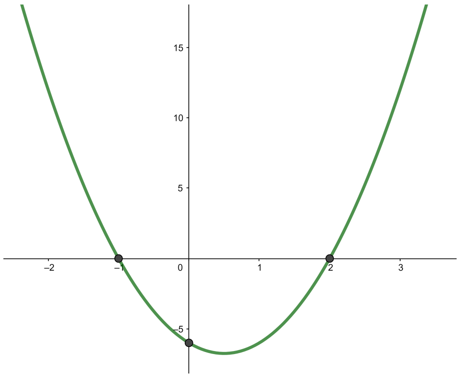
- Tota paràbola té una única intersecció amb l'eix Y. Per a trobar-la, n'hi ha prou de calcular la imatge de $x = 0$. Aleshores, el punt intersecció és $(0, f(0))$. Si tenim en compte que $f(x) = ax^2 + bx + c$, veiem que serà el punt $(0, c)$.

La imatge de 0 per la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ és $f(0) = -6$. Per tant, la intersecció de la paràbola amb l'eix Y és el punt $(0, -6)$.

- Per a trobar la intersecció de la paràbola amb l'eix X, s'ha d'igualar la funció a 0. És a dir, s'ha de resoldre l'equació de segon grau $f(x) = 0$, denominada *equació associada a la funció quadràtica*. De manera general, aquests punts es poden escriure $(\overline{x}, 0)$, on $\overline{x} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ són les solucions de l'equació associada a la funció (si en té).

La intersecció de la paràbola amb l'eix d'abscisses, es troba resolent $f(x) = 0$. En el cas de la funció de l'exemple, $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$, vol dir resoldre $3x^2 - 3x - 6 = 0$. Les solucions d'aquesta equació són $x = -1$ i $x = 2$. Per tant, la paràbola talla l'eix X en els punts $(-1, 0)$ i $(2, 0)$.

La imatge següent mostra tots els punts de tall de la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ amb els eixos.

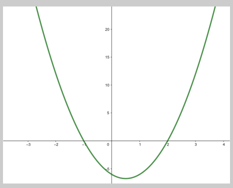


Tal com acabem de veure, les interseccions d'una funció quadràtica amb l'eix X es corresponen amb les solucions de l'equació associada $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$. Com que una equació de segon grau pot tenir dues, una o cap solució en funció del seu discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, una paràbola podrà tenir dues, una o cap interseccions amb l'eix X depenent de si l'equació associada té dos, una o zero solucions. En particular, doncs, es conclou que una funció quadràtica $f(x) = ax^2 + bx + c$ té:

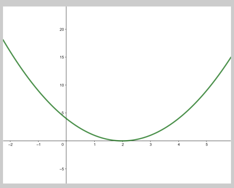
- dos punts de tall amb l'eix X si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$
- un punt de tall, que resulta doble, amb l'eix X si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
- cap punt de tall amb l'eix X si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Exemple. Punts de tall d'una funció quadràtica amb l'eix X.
Vegem un exemple d'una funció quadràtica que talla l'eix X en dos punts, una altra en un punt i una tercera que no talla mai l'eix X.

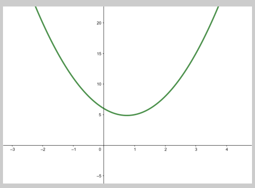
- A l'esquerra, $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$. Aquesta funció talla l'eix X en dos punts perquè l'equació $3x^2 - 3x - 6 = 0$ té dues solucions: $x = -1$ i $x = 2$.
- En el centre, $g(x) = x^2 - 4x + 4$. Aquesta funció talla l'eix X en un sol punt perquè l'equació $x^2 - 4x + 4 = 0$ té una única solució: $x = 2$.
- A la dreta, $h(x) = 2x^2 - 3x + 6$. Aquesta funció no talla l'eix X perquè l'equació $2x^2 - 3x + 6 = 0$ no té cap solució.



$f(x) = 3x^2 - 3x - 6$



$g(x) = x^2 - 4x + 4$



$h(x) = 2x^2 - 3x + 6$

També concloem que si una paràbola talla en dos punts l'eix X, l'equació de segon grau associada a la funció quadràtica té dues solucions; si talla en un únic punt, l'equació té una única solució, i si no talla en cap punt, l'equació no té cap solució.

Representació d'una paràbola. Donada l'expressió d'una funció quadràtica, se'n pot obtenir la representació gràfica en el pla cartesià seguint uns passos concrets.

Vegem quins són a través d'un exemple concret.

Suposem que volem representar gràficament la funció quadràtica $f(x) = 4x^2 - 4x - 35$.

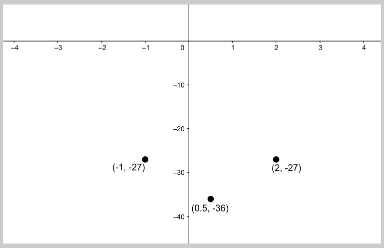
Aleshores:

1) Es troba el vèrtex de la paràbola, que té com a coordenada $x = -\dfrac{b}{2a}$.

> Donada la funció $f(x) = 4x^2 - 4x - 35$, el seu vèrtex té coordenada:
>
> $$x = \frac{4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$
>
> La imatge corresponent serà producte de:
>
> $$f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} - 35 = 1 - 2 - 35 = -36$$
>
> Per tant, el vèrtex és en el punt de coordenades:
>
> $$\left(\frac{1}{2}, -36\right)$$

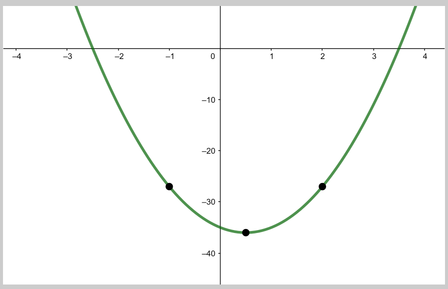
2) Es troben diferents parells de punts de la funció que tinguin la coordenada x equidistant respecte de la coordenada x del vèrtex, i es representen aquests punts juntament amb el vèrtex. N'hi ha prou de representar dos punts equidistants del vèrtex per a fer-nos una idea de la forma de la paràbola.

> Dos nombres equidistants de $\frac{1}{2}$ poden ser el -1 i el 2. Les seves imatges són $f(-1) = f(2) = -27$, que coincideixen per ser les imatges de dos valors equidistants a la coordenada x del vèrtex.



3) S'uneixen aquests punts amb una corba parabòlica; el vèrtex no ha de ser de forma punxeguda, sinó arrodonida. A més, les branques de la paràbola s'han d'elevar o dirigir cap avall segons si el terme de segon grau és positiu o negatiu, respectivament, de manera que sempre es vagin obrint.

> La gràfica de la paràbola de la funció de l'exemple $f(x) = 4x^2 - 4x - 35$ és



Modificacions en l'expressió algebraica i efectes en l'expressió gràfica. Modificar els coeficients d'una funció quadràtica comporta canvis en la paràbola resultant. Si ax^2+bx+c és l'expressió general d'una equació de segon grau, aquests passos es poden resumir en els aspectes següents:

Els canvis més evidents en modificar els coeficients de l'expressió d'una funció quadràtica són: en augmentar el terme independent de la funció, la paràbola es desplaça cap amunt; en canviar de signe el coeficient de grau 2, s'inverteixen les branques de la paràbola; en augmentar, en valor absolut, el coeficient de grau 2, les branques de la paràbola tendeixen a tancar-se.

- La modificació del terme independent, c, d'una funció quadràtica provoca el desplaçament vertical de tota la paràbola associada: si el terme augmenta, la paràbola puja, i, si el terme disminueix, la paràbola baixa.

Exemple. Modificació del terme independent.

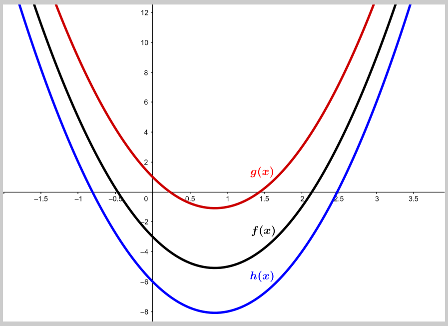
Representem les funcions

$$f(x) = 3x^2 - 5x - 3$$

$$g(x) = 3x^2 - 5x + 1$$

$$h(x) = 3x^2 - 5x - 6$$

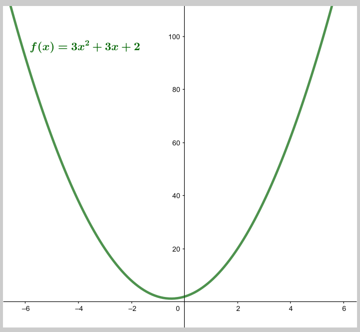
En comparar-les observem com en augmentar el terme independent la paràbola puja, i en cas contrari baixa.

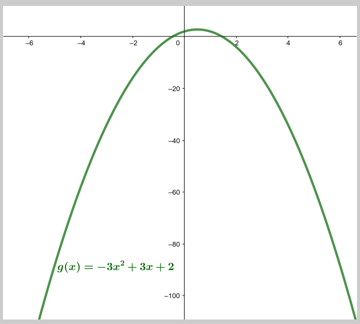


- El coeficient del terme de grau 2, a, pot tenir signe positiu o negatiu. Si el coeficient és positiu, les branques de la paràbola es dirigeixen cap amunt, i, si és negatiu, es dirigeixen cap avall.

Exemple. Signe terme de segon grau.

Representem les funcions $f(x) = 3x^2+3x+2$, a l'esquerra, i $g(x) = -3x^2+3x+2$, a la dreta. En el primer cas, les branques de paràbola s'obren cap amunt, i en el segon cas s'obren cap a baix.





- La modificació en valor absolut del coeficient del terme de grau 2, a, també produeix un canvi regular en la paràbola: si en valor absolut aquest coeficient disminueix, les branques de la paràbola se separen, i, en canvi, si en valor absolut el coeficient augmenta, les branques de la paràbola s'acosten. Cal recordar que el punt on es troba el vèrtex també canvia en modificar-se a.

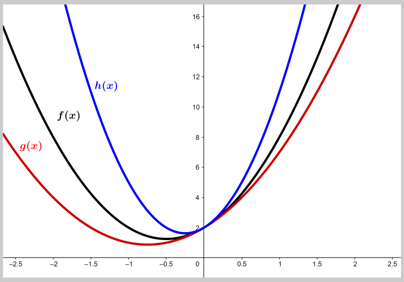
Exemple. Valor absolut del terme de segon grau. Representem les funcions

$$f(x) = 3x^2 + 3x + 2$$

$$g(x) = 2x^2 + 3x + 2$$

$$h(x) = 6x^2 + 3x + 2$$

En comparar-les, observem com la paràbola de la funció $h(x)$, que és la funció amb coeficient de grau dos més gran, $|6| > |3| > |2|$, és la paràbola menys oberta, i per tant amb les branques més juntes. En canvi, la paràbola de la funció $g(x)$, amb el valor absolut de coeficient de segon grau més petit, és la paràbola més oberta, és a dir, amb les branques més separades.



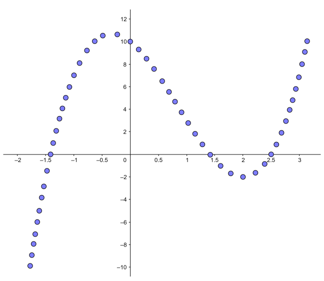
7.4. Funcions polinòmiques

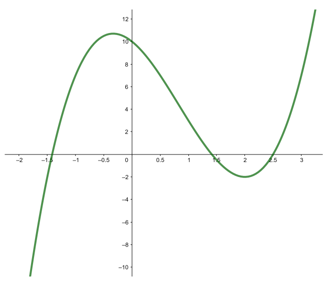
7.4.1. Definició i exemples

Què caracteritza una funció polinòmica?
L'expressió algebraica d'una funció polinòmica de grau n és un polinomi. Per això, es pot parlar simplement de polinomi. En la gràfica d'una funció polinòmica es poden diferenciar dos elements: les branques i la part central. En la part central la funció polinòmica es plega diverses vegades, com a màxim, tantes com el grau del polinomi.

Una **funció polinòmica** de grau n és qualsevol funció que té per expressió algebraica un polinomi de grau n. Sovint es denomina simplement polinomi. Les funcions afins i les funcions quadràtiques són exemples de funcions polinòmiques de grau 1 i grau 2 respectivament. Ara bé, també hi ha funcions polinòmiques de major grau: un exemple de funció polinòmica de grau 3 és $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 10$.

Per a fer la gràfica d'una funció polinòmica, podem crear una taula de valors amb un bon nombre finit de punts i, posteriorment, representar-los en el pla cartesià, tal com s'ha fet anteriorment en l'estudi de les funcions lineals, afins i quadràtiques. Dibuixada la gràfica de punts associada a la taula de valors, es pot deduir la forma que pren la corba associada a la funció. D'acord amb aquest procediment, la representació d'una taula de valors associada a la funció (que no afegim perquè és massa extensa) de la funció $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 10$ i la gràfica dibuixada d'un sol traç en l'interval $[-2, 3]$ són:





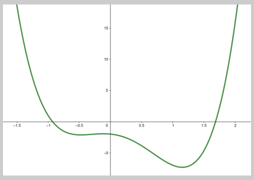
Exemple. Funcions polinòmiques.

$f(x) = 4x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x - 2$ és una funció polinòmica de grau 4.

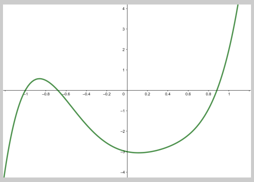
$g(x) = 5x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 3$ és una funció polinòmica de grau 5.

$h(x) = -3x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 8x^2 - x - 10$ és una funció polinòmica de grau 6.

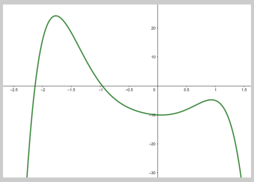
Les gràfiques d'aquestes tres funcions són, respectivament:



$f(x)$



$g(x)$



$h(x)$

En la gràfica d'una funció polinòmica es poden diferenciar normalment dues parts: les branques i la part central.

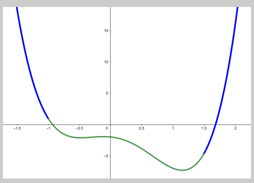
- Les **branques** són els dos braços laterals en què es desenvolupa la funció. Mai no arriben a ser completament rectes, tot i que poden semblar-ho quan el domini representat és molt gran. Poden dirigir-se ambdues cap amunt, ambdues cap avall, o bé una branca cap amunt i l'altra cap avall. Si es representa la gràfica d'un polinomi en un interval major, la forma de les branques pràcticament no varia, és a dir, les branques d'una gràfica ens donen una idea de com continua la gràfica d'una funció polinòmica més enllà de la part representada.

Recuperem les gràfiques de les tres funcions polinòmiques de l'exemple anterior,

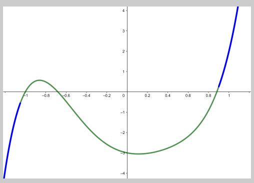
$$
\begin{aligned}
f(x) &= 4x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x - 2 \\
g(x) &= 5x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 3 \\
h(x) &= -3x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 8x^2 - x - 10
\end{aligned}
$$

i hi marquem les branques. Observem que:

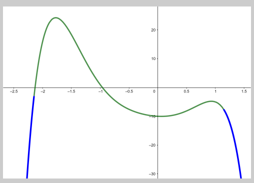
- Les branques de la funció $f(x)$ es dirigeixen ambdues cap amunt, i la funció definirà posteriorment, 3 plecs en la part central.
- Les branques de la funció $g(x)$ es dirigeixen una cap avall i l'altra cap amunt, i la funció presenta 2 plecs tal com es definirà posteriorment.
- Les branques de la funció $h(x)$ es dirigeixen ambdues cap avall, i la funció presenta 3 plecs tal com es definirà posteriorment.



$f(x)$



$g(x)$



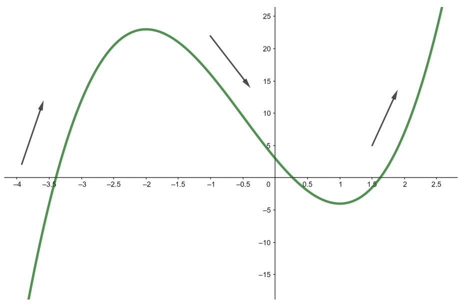
$h(x)$

Certes característiques permeten conèixer cap a on s'han de dirigir les branques d'una funció polinòmica. Són:

- La branca de la dreta es dirigeix cap amunt quan el coeficient de grau màxim és positiu, i cap avall quan és negatiu.
- La branca de l'esquerra es dirigeix cap avall quan el polinomi és de grau parell i el coeficient de grau màxim és negatiu, o bé quan el polinomi és de grau senar i el coeficient de grau màxim és positiu. En cas contrari, l'extrem de l'esquerra es dirigeix cap amunt.

- La **part central** és la part en què la gràfica es plega diverses vegades. El nombre de plecs depèn del grau del polinomi: com més gran és el grau més *plecs* pot presentar la gràfica corresponent. El màxim de plecs d'una funció polinòmica és el seu grau menys un. Així, un polinomi de grau 1 no pot tenir cap plec. En canvi, un polinomi de grau 2 té exactament un plec, un polinomi de grau 3 pot tenir dos plecs, i un de grau 4, tres plecs com a màxim...

  Atenent al fet que la gràfica de qualsevol funció s'ha de llegir d'esquerra a dreta, en analitzar la gràfica de la funció $f(x) = 2x^3+3x^2-12x+3$ que presenta la imatge de sota, comprovem que al principi la funció es dirigeix cap amunt, després cap avall i, finalment, una altra vegada cap amunt.



  Aquest fet porta a parlar de la **monotonia** d'una funció, és a dir, del creixement i decreixement d'una funció. De manera rigorosa, es diu:

  - Una funció $f(x)$és **creixent** quan, a mesura que augmenta la variable x, el valor de la imatge de funció, $y = f(x)$, també augmenta.
  - Una funció $f(x)$ és decreixent quan, a mesura que augmenta la variable x, el valor de la imatge de la funció, $y = f(x)$, disminueix.

Exemple. Monotonia d'una funció polinòmica.
Considerem la funció polinòmica anterior
$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$$
D'acord amb la seva representació gràfica, la funció és creixent quan x és menor que -2, és decreixent entre -2 i 1, i torna a ser creixent a partir de $x = 1$.

- La gràfica d'una funció polinòmica també presenta *punts destacats*. Aquests són:

  - Els **extrems**. Aquest terme fa referència als màxims i mínims de la funció. S'anomena **màxim relatiu** (o local) d'una funció el punt en què la funció

Observem que el vèrtex d'una funció quadràtica coincideix amb el seu màxim o mínim.

passa de ser creixent a ser decreixent. El valor de la funció en aquest punt és més gran que el de qualsevol altre punt de la gràfica que sigui proper. S'anomena **mínim relatiu** (o local) d'una funció aquell punt en què la funció passa de ser decreixent a ser creixent. El valor de la funció en aquest punt és menor que el de qualsevol altre punt de la gràfica que sigui proper.

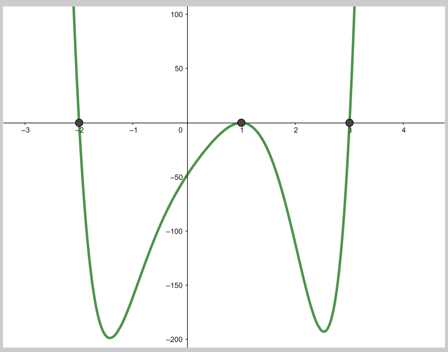
En la gràfica de la funció anterior, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$, podem observar que un màxim relatiu es troba en el punt $(-2, f(-2)) = (-2, 23)$ mentre que un mínim es troba en el punt $(1, f(1)) = (1, -4)$.

- La **intersecció amb l'eix Y**. Hi ha només un punt intersecció entre la gràfica de qualsevol polinomi i l'eix Y. Aquest punt és el que té coordenada $x = 0$ i, per tant, es tracta del punt del pla $(0, f(0))$.

Donada la funció $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 10$, el punt d'intersecció d'aquesta funció amb l'eix Y és $(0, f(0)) = (0, 10)$.

- La **intersecció amb l'eix X**. Hi pot haver un nombre d'interseccions amb l'eix X igual al grau del polinomi com a màxim. Així mateix, no sempre s'arriba a aquest nombre. Per a trobar els punts d'intersecció amb l'eix X, s'ha de resoldre l'equació associada a la funció $f(x) = 0$, operació que pot ser complicada. Els valors de x que compleixen $f(x) = 0$ es denominen **arrels del polinomi**. Un polinomi que té arrels es descompon com a producte de polinomis, alguns dels quals són de grau 1.

El polinomi $f(x) = 4x^6 - 10x^5 - 10x^4 + 14x^3 - 26x^2 + 76x - 4$ té com a arrels $x = 1$, $x = 3$ i $x = -2$.
Aleshores, la seva descomposició és
$f(x) = 4x^6 - 10x^5 - 10x^4 + 14x^3 - 26x^2 + 76x - 4 = 2(x-1)^2(x-3)(x+2)(2x^2+x+4)$
La gràfica de la funció ho mostra així: la funció talla l'eix X en els punts $x = 1$, $x = 3$ i $x = -2$, i en el punt $x = 1$ no creua l'eix X ja que és una arrel doble.



Resum

Funcions polinòmiques

Una funció polinòmica és la que té per expressió un polinomi. En general, se solen estudiar segons el grau del polinomi. Es distingeixen:

Funcions afins

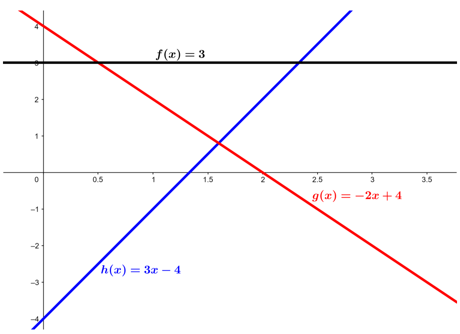
Definició. Una **funció afí** és una funció polinòmica l'expressió de la qual és un polinomi de grau 1 i, per tant, del tipus $f(x) = ax + b$, on a s'anomena **pendent de la recta** i b **terme independent**.

Representació gràfica. La gràfica d'una funció lineal és una recta.

Elements. Donada l'expressió general de qualsevol funció afí, $f(x) = ax + b$, es defineixen:

- El *pendent de la recta*: a, informa de la seva inclinació.
- Els *punts de tall amb els eixos*:
  - Tall amb l'eix Y: $(0, b)$.
  - Tall amb l'eix X: $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.
- La *monotonia* (creixement i decreixement):
  - La funció és creixent si $a > 0$.
  - La funció és constant si $a = 0$.
  - La funció és decreixent si $a < 0$.

Exemple

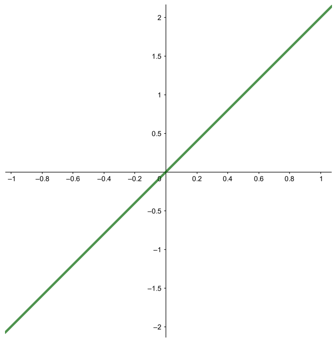


Particularitats. Un tipus especial de funcions afins són les funcions lineals.

Una funció lineal és una funció afí en què el terme independent és 0. Per tant, és de la forma

$$f(x) = ax$$

La seva representació és una recta que passa per l'origen. Un exemple n'és la recta corresponent a la funció $f(x) = 2x$, tal com es visualitza en l'exemple de la dreta.



Funcions quadràtiques

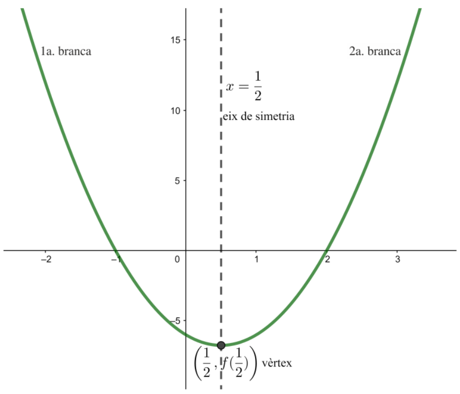
Definició. na funció quadràtica és una funció l'expressió de la qual és un polinomi de grau 2. És a dir, és de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ amb $a \neq 0$.

Representació gràfica. La seva representació és una corba que rep el nom de *paràbola*.

Elements. Donada l'expressió general de qualsevol funció quadràtica $f(x) = ax^2 + bx + c$, es defineixen:

- L'*eix de simetria* de la paràbola: recta $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- El *vèrtex* de la paràbola: punt $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{2a} + c\right)$.
- Les *branques* de la paràbola: es dirigeixen cap amunt si $a > 0$ i cap avall si $a < 0$.
- Els *punts de tall* de la funció amb els eixos:
  - Tall amb l'eix Y: el punt $(0, f(0))$.
  - Tall amb l'eix X: els punts $(\overline{x}, 0)$, en què $\overline{x}$ és solució de l'equació de segon grau associada $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$. N'hi pot haver:
    - Dos: si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.
    - Un: si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.
    - Cap: si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.
- La *monotonia* (creixement i decreixement):
  - Si $a > 0$: és decreixent en l'interval $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ i creixent en l'interval $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.
  - Si $a < 0$: és creixent en l'interval $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ i decreixent en l'interval $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

Exemple



Funcions polinòmiques

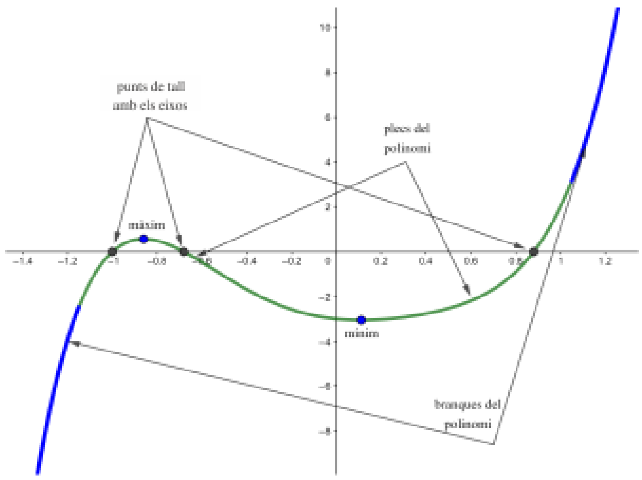
Definició. Una funció polinòmica és una funció l'expressió de la qual és un polinomi. Sovint, es denomina simplement polinomi.

Representació gràfica. La gràfica d'una funció polinòmica és una corba. En aquesta corba s'hi distingeixen dues zones principals: les *branques* i la *part central*.

Elements. Donada una funció polinòmica qualsevol $f(x)$, es defineixen:

- Les **branques**. Són els dos braços laterals en què es desenvolupa la funció.
  - La branca de la dreta es dirigeix cap amunt quan el coeficient de grau màxim és positiu, i cap avall quan és negatiu.
  - La branca de l'esquerra es dirigeix cap avall quan el polinomi és de grau parell i el coeficient de grau màxim és negatiu, o bé quan el polinomi és de grau senar i el coeficient de grau màxim és positiu. En cas contrari, l'extrem de l'esquerra es dirigeix cap amunt.
- La **part central** és la part en què la gràfica es plega diverses vegades. El màxim de plecs d'una funció polinòmica és el seu grau menys 1.
- Els **punts de tall**:
  - Tall amb l'eix Y: el punt $(0, f(0))$.
  - Tall amb l'eix X: els punts $(\overline{x}, 0)$, on $\overline{x}$ és solució de l'equació associada a la funció $f(x) = 0$.
- Els *extrems*: són els punts màxims i mínims relatius (o locals) de la funció.

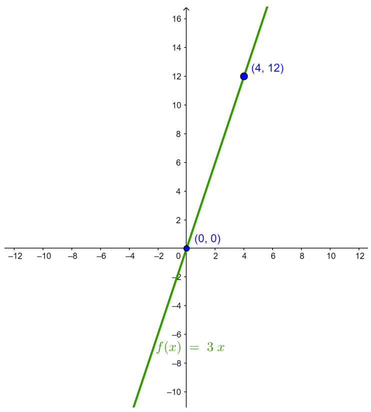
Exemple



Exercicis resolts

1. **Una funció lineal compleix que $f(4) = 12$. Quina és l'expressió algebraica d'aquesta funció? Representa-la gràficament.**

Solució:
Per ser una funció lineal, ha de ser de la forma $f(x) = ax$. Per tant, $f(4) = 12$. Si $x = 4$ resulta $a \cdot x = 12$, d'on obtenim $a = \dfrac{12}{4} = 3$.
Per tant, l'expressió de la funció lineal buscada és $f(x) = 3x$.
La seva representació gràfica és una recta que passa pel centre de coordenades i el punt $(4, 12)$, tal com mostra la imatge:

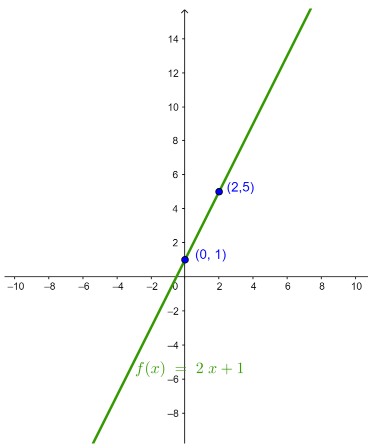


2. **Una funció afí compleix $f(2) = 5$ i $f(0) = 1$. Quina és l'expressió algebraica d'aquesta funció? Representa-la gràficament.**

Solució:
Per ser una funció afí, ha de ser de la forma $f(x) = ax + b$. Per tant:

- $f(2) = 5$, això vol dir $a \cdot 2 + b = 5 \Rightarrow 2a + b = 5$
- $f(0) = 1$, això vol dir $a \cdot 0 + b = 1 \Rightarrow b = 1$

De la segona condició tenim $b = 1$. Substituint aquest valor b en la primera condició, resulta $2a + b = 2a + 1 = 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$.
Per tant, l'expressió algebraica de la funció lineal afí és $f(x) = 2x + 1$.
La gràfica d'aquestsa funció és, doncs, una recta que passa pels punts $(2, 5)$ i $(0, 1)$, tal com mostra la imatge.



3. **Hi ha alguna funció afí que compleixi alhora que $f(2) = -4$ i $f(-5) = -10$?**

Solució:
Per ser una funció afí, aquesta ha de ser de la forma $f(x) = ax + b$ que, d'acord amb les condicions de l'enunciat, ha de complir alhora:

- $f(2) = -4$, això vol dir $a \cdot 2 + b = -4 \Rightarrow b = -4 - 2a$

- $f(-5) = -10$, això vol dir $a \cdot (-5) + b = -10 \Rightarrow b = -10 + 5a$

Igualant les dues expressions de b, tenim

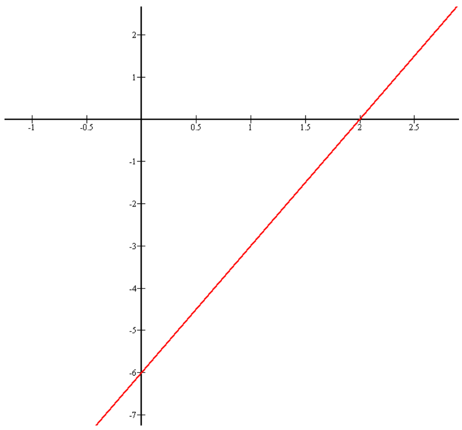
$$-4 - 2a = -10 + 5a \Rightarrow -2a - 5a = -10 + 4 \Rightarrow -7a = -6 \Rightarrow a = \frac{6}{7}$$

Substituint aquest valor de a en una de les dues condicions inicials, per exemple la primera, obtenim

$$b = -4 - 2a = -4 - 2 \cdot \frac{6}{7} = \frac{-28 - 12}{7} = -\frac{40}{7}$$

Per tant, sí existeix una funció afí que compleix les condicions, i és $f(x) = \frac{6}{7}x - \frac{40}{7}$.

4. **Determina l'expressió de la funció afí que descriu aquesta gràfica:**



Solució:
Observem que la gràfica de la funció és una recta que passa pels punts $(0, -6)$ i $(2, 0)$. Això vol dir $f(0) = -6$ i $f(2) = 0$. Atenent al fet que es tracta d'una funció afí, ha de ser de la forma $f(x) = ax + b$. Per tant, s'ha de complir alhora:

- $f(0) = -6 \Rightarrow a \cdot 0 + b = -6 \Rightarrow b = -6$
- $f(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow 2a = -b$

De la primera condició, trobem que $b = -6$. En substituir aquest valor de b en la segona condició, resulta

$$2a = -b \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

Per tant, l'expressió de la funció afí que determina la gràfica és $f(x) = 3x - 6$.

5. **Troba el vèrtex de la paràbola** $f(x) = 3x^2 - x + 1$**.**

Solució:
Sabem que una paràbola és la forma de la gràfica corresponent a qualsevol funció quadràtica, que es pot escriure de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. En aquest cas, sabem que el vèrtex de la paràbola té com a coordenada d'abscisses $x = -\frac{b}{2a}$.
Aleshores, en aquest cas identifiquem $a = 3$, $b = -1$ i $c = 1$ i, usant la fórmula del vèrtex per a qualsevol paràbola, resulta

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

i la seva imatge és

$$f(x) = f\left(\frac{1}{6}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} + 1 = \frac{3}{36} - \frac{1}{6} + 1 = \frac{3 - 6 + 36}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

Per tant, el punt del pla on és el vèrtex és

$$(x, f(x)) = \left(\frac{1}{6}, f\left(\frac{1}{6}\right)\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{11}{12}\right)$$

6. **Troba l'expressió d'una paràbola que compleixi alhora aquestes condicions:** $f(1) = 2$**,** $f(-2) = 11$ **i** $f(0) = 1$**.**

Solució:
Per ser una paràbola, aquesta ha de ser de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Aleshores, es té, per les condicions de l'enunciat:

- $f(1) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2$
- $f(-2) = 11 \Rightarrow 4a - 2b + c = 11$
- $f(0) = 1 \Rightarrow 0 + 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$

De la tercera condició, es pot assegurar $c = 1$. Substituint aquest valor de c en les dues primeres condicions, podem trobar a i b resolent un sistema de dues equacions i dues incògnites:

$$\begin{cases} a + b + 1 = 2 \\ 4a - 2b + 1 = 11 \end{cases}$$

Resolem el sistema per igualació:

De la primera equació resulta $b = 1 - a$ i de la segona $b = \dfrac{11 - 1 - 4a}{-2} = 2a - 5$. Igualant les expressions per a b, resulta

$$1 - a = 2a - 5 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

Trobat el valor de a, el substituim en la primera equació per trobar el valor de b:

$$b = 1 - a = 1 - 2 = -1$$

Per tant, l'expressió de la funció buscada és $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

7. **Troba l'expressió d'una paràbola, $f(x)$, que tingui una arrel en $x = 2$, el seu vèrtex estigui en $x = -1$ i la seva imatge valgui -27.**

Solució:

Tota paràbola és producte d'una expressió quadràtica que podem escriure de manera general

$$f(x) = ax^2 + bx + c = C(x - x_1)(x - x_2)$$

on a, b, c i C són valors reals concrets i x_1 i x_2 són les arrels del polinomi de segon grau associat a la funció quadràtica.

De manera general, també sabem que les arrels del polinomi associat a la funció són les abscisses de punts equidistants al vèrtex de la paràbola que la funció representa.

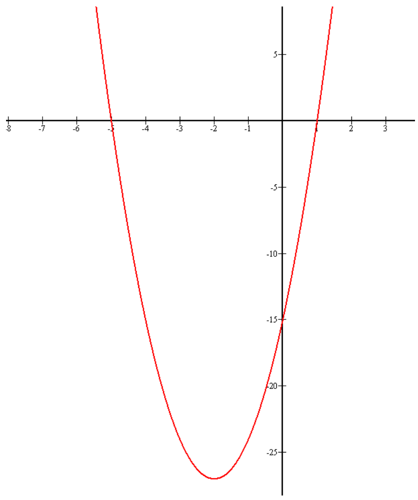
Atenent al que sabem, i donades les condicions de l'enunciat, treballarem amb la segona expressió de tota funció quadràtica: $f(x) = C(x - x_1)(x - x_2)$ on x_1 i x_2 són les arrels, i Cun valor real a determinar.

Per l'enunciat, sabem que el vèrtex és en $x = -1$ i que una de les arrels és en $x = 2$. Això vol dir en particular que les arrels equidisten 3 unitats del vèrtex $x = 2 = -1 + 3$. Per tant, l'altra arrel, que també estarà en la mateixa distància del vèrtex, ha d'estar en . Per tant, deduïm que la funció és producte d'una expressió del tipus $x = -1 - 3 = -4$. Per a determinar el valor C, utilitzem el valor que pren la funció en el vèrtex:

$$f(-1) = -27 \Rightarrow C(-1 - 2)(-1 + 4) = -27 \Rightarrow -9C = -27 \Rightarrow C = 3$$

Per tant, concloem que: $f(x) = 3(x - 2)(x + 4)$.

8. **Troba l'expressió d'aquesta paràbola.**



Solució:

Observem que la funció passa pels punts $(-5, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, -15)$. Això vol dir que $f(-5) = 0$, $f(1) = 0$ i $f(0) = -15$. Atenent al fet que es tracta de la representació d'una funció quadràtica, ha de ser de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Per tant, s'ha de complir alhora:

- $f(-5) = 0 \Rightarrow 25a - 5b + c = 0$
- $f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$
- $f(0) = -15 \Rightarrow c = -15$

Per la tercera condició, $c = -15$. En substituir aquest valor de c en les dues primeres equacions, es tracta de resoldre el sistema de dues equacions i dues incògnites, i resulta

$$\begin{cases} 25a - 5b = 15 \\ a + b = 15 \end{cases}$$

De la primera equació es té $b = \dfrac{15 - 25a}{-5} = 5a - 3$, i de la segona $b = 15 - a$. Igualant les dues expressions de b, resulta

$$5a - 3 = 15 - a \Rightarrow 6a = 18 \Rightarrow a = 3$$

Substituint aquest valor en la segona condició, resulta $b = 15 - a = 15 - 3 = 12$. Per tant, l'expressió de la funció és $f(x) = 3x^2 + 12x - 15$.
De manera alternativa, l'expressió quadràtica de la funció es pot escriure

$$f(x) = C(x - x_1)(x - x_2)$$

on x_1 i x_2 són les arrels del polinomi. Del fet que $f(-5) = 0$ i $f(1) = 0$, tenim que -5 i 1 són les arrels del polinomi associat a la funció. Per tant $f(x) = C(x + 5)(x - 1)$.
Per altra banda, com que $f(0) = -15$, vol dir que $-15 = -5C$, d'on resulta $C = 3$.
Per tant, $f(x) = 3(x - 1)(x + 5)$.

Exercicis per a practicar amb les solucions

9. **Un quilogram de patates costa 56 cèntims. Determina la funció que defineix el cost de les patates en funció dels quilograms comprats, representa la funció en el pla cartesià i contesta les preguntes següents:**

(a) **Quin és el Dom(f)?**

(b) **Quin preu tindran** 3.5 **kg de patates?**

(c) **Si es té un únic bitllet de 5€, quina és la quantitat màxima de patates que es pot comprar (sense deixar a deure)?**

10. **La tarifa d'una empresa de missatgeria amb entrega a domicili és de** 12**€per taxa fixa més** 5**€per cada quilogram que s'envia. Es demana:**

(a) **Troba l'expressió algebraica de la funció *Preu de l'enviament* segons el seu pes en quilograms.**

(b) **Quins són el domini i el recorregut de la funció?**

(c) **Representa la funció gràficament.**

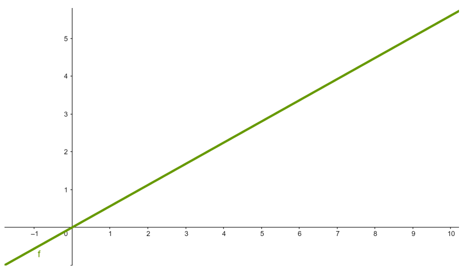
(d) **Quant costarà enviar un paquet de** 750 **grams?**

(e) **Quin és el pes màxim que es pot enviar si només es té un bitllet de** 50**€?**

11. **La longitud de la circumferència i l'àrea del cercle s'expressen en funció del radi. Escriu les dues expressions algebraiques i dibuixa les gràfiques corresponents. Quin tipus de funcions són? Per a quin valor del radi coincideixen numèricament la longitud i l'àrea? Quin és el valor de la longitud i l'àrea, en aquest cas?**

Solucions:

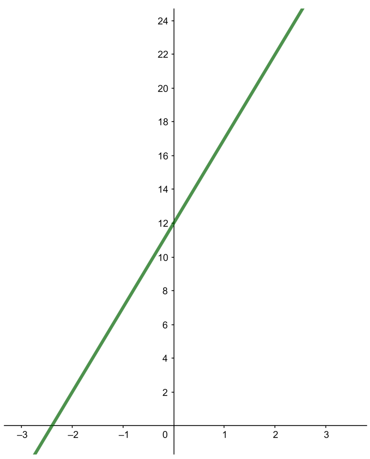
9. L'expressió de la funció és $f(x) = 0.56x$, on x representa la quantitat de quilograms. La gràfica és



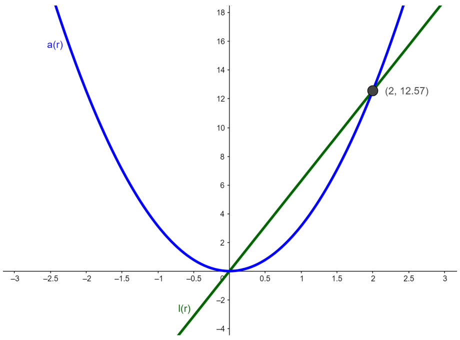
   (a) $Dom(f) = \mathbb{R}$
   (b) 1.96 €
   (c) 8.93 quilograms

10. (a) L'expressió de la funció és $y = 5x + 12$, on x són els quilograms que s'envien.
   (b) $Dom(f) = \mathbb{R}$ i $Im(f) = \mathbb{R}$
   (c) 15 €
   (d) 7.6 quilograms

   La gràfica és



11. Les expressions algebraiques, són $l(r) = 2\pi r$, que és una funció lineal, i $a(r) = \pi r^2$, que és una funció quadràtica. La longitud i el radi coincidiran numèricament quan $l(r) = a(r)$, per tant quan $r = 0$, que no té sentit físic, i $r = 2$. En aquest segon cas, $l(2) = a(2) = 4\pi \cong 12.57$. Les gràfiques són:


a(r)
l(r)
(2, 12.57)

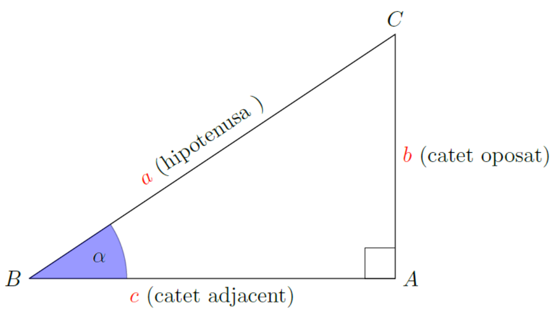
8. Funcions trigonomètriques

Índex

8.1. Raons trigonomètriques

8.1.1. Raons principals d'un angle agut

En un triangle rectangle ABC com el següent,



podem definir les raons trigonomètriques de l'angle agut α de la manera següent:

La trigonometria és una part de les matemàtiques que estudia la relació entre la mesura dels angles i els costats del triangle. De fet, la mateixa paraula, trigonometria, té origen en aquest fet: *tri* significa "tres", *gono* significa "angle" i *metria* significa "mesura", és a dir, trigonometria significa "mesura de (figures) amb tres angles".

sinus de l'angle α és el quocient entre el catet oposat a l'angle i la hipotenusa. S'indica $\sin(\alpha)$ i es calcula així:

$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}}$$

S'ha de destacar que el sinus és un nombre positiu mai més gran que 1, i un catet no pot ser mai superior a la hipotenusa: $0 \leq \sin(\alpha) \leq 1$.

cosinus d'aquest angle α és el quocient entre el catet adjacent a l'angle, i la hipotenusa s'indica $\cos(\alpha)$ i es calcula així:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{\text{catet adjacent}}{\text{hipotenusa}}}$$

També cal destacar que el cosinus és un nombre positiu mai més gran que 1 (un catet no pot ser mai superior a la hipotenusa) $0 \leq \cos(\alpha) \leq 1$.

tangent d'aquest angle α és el quocient entre el catet oposat i el catet adjacent a l'angle i s'indica $\tan(\alpha)$ o $\text{tg}(\alpha)$ (s'usen indistintament els símbols tg o tan, tot i que durant el curs acostumarem a fer servir tan), i es calcula així:

$$\boxed{\text{tg}(\alpha) = \tan(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}}}$$

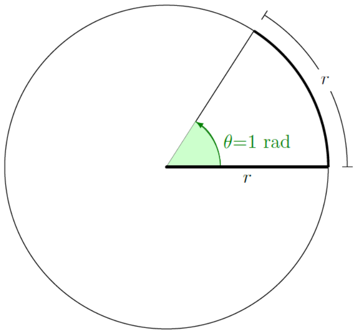
No és difícil constatar que la tangent també es pot calcular com el quocient del sinus entre el cosinus:

$$\text{tg}(\alpha) = \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c}$$

Les raons trigonomètriques d'un angle no depenen del triangle rectangle escollit per a definir-les.

Raons trigonomètriques dels angles més usats. Els angles es mesuren habitualment en el sentit antihorari i en graus (°) o bé en radians (rad).

radian: Si en una circumferència agafem un arc de longitud igual a la del radi, l'angle corresponent té una mesura que anomenem **radian (rad)** (també es pot escriure radiant).



La seva amplitud no depèn del radi. De fet, com que la longitud de la circumferència és $2\pi r$ i l'angle d'una volta sencera és 360°, tenim

$$360^\circ = 2\pi\,\text{rad}$$

Vegem una taula amb les raons trigonomètriques dels angles més utilitzats.

α(en rad)	α(en graus)	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	∞

Per què el sinus i cosinus de $\frac{\pi}{4}$ rad (45°) coincideixen? Si un dels angles d'un triangle rectangle és igual a $\frac{\pi}{4}$ rad, és evident que l'altre angle (a part del recte) ha de ser també mesurar $\frac{\pi}{4}$ rad. Per la mateixa raó, ambdós catets han de ser iguals, és a dir, $b = c$. Per tant, el seu sinus i cosinus coincidiran.

Teorema fonamental de la trigonometria. Donat un triangle de catets b i c, i d'hipotenusa a es pot calcular

$$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

tenint en compte, segons el teorema de Pitàgores, $a^2 = b^2 + c^2$. En definitiva,

$$\boxed{(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1}$$

És a dir, per a qualsevol angle α, la suma dels quadrats del sinus i el cosinus és igual a 1. Aquesta igualtat també s'escriu sovint així:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Aquesta fórmula ens permet calcular el sinus a partir del cosinus (i a l'inrevés):

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) \Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$$

De la mateixa manera, $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$.

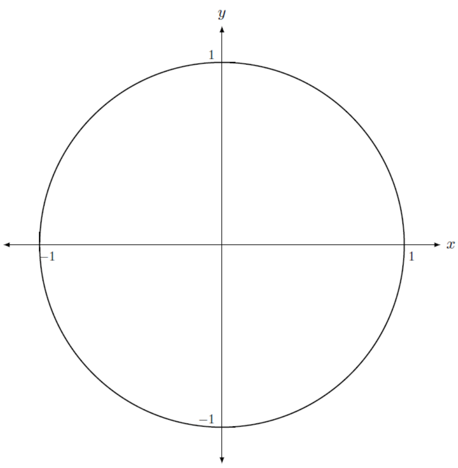
Exemple. Aplicació del teorema fonamental de la trigonometria.
Si el sinus d'un angle α fos 0.4, el seu cosinus hauria de ser

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - 0.4^2} = 0.9165$$

De la mateixa manera, si el cosinus d'un angle α fos 0.8, el seu sinus seria $\sin(\alpha) = \sqrt{1 - 0.8^2} = 0.6$

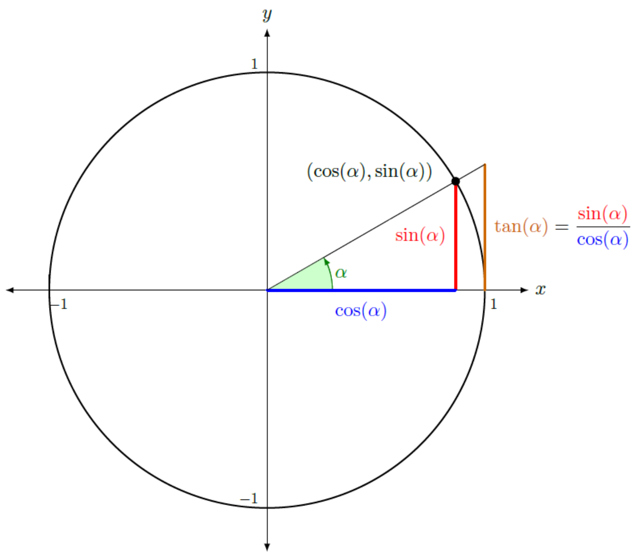
8.1.2. Raons principals d'un angle qualsevol

Les raons trigonomètriques d'un angle qualsevol es poden deduir a partir de les raons trigonomètriques d'un angle agut.
Per a calcular les raons trigonomètriques d'un angle qualsevol, sigui agut o no, treballarem amb la **circumferència unitat** (també anomenada circumferència goniomètrica). Per a això, hem de dibuixar en el pla cartesià una circumferència unitària de centre l'origen de coordenades i radi 1.

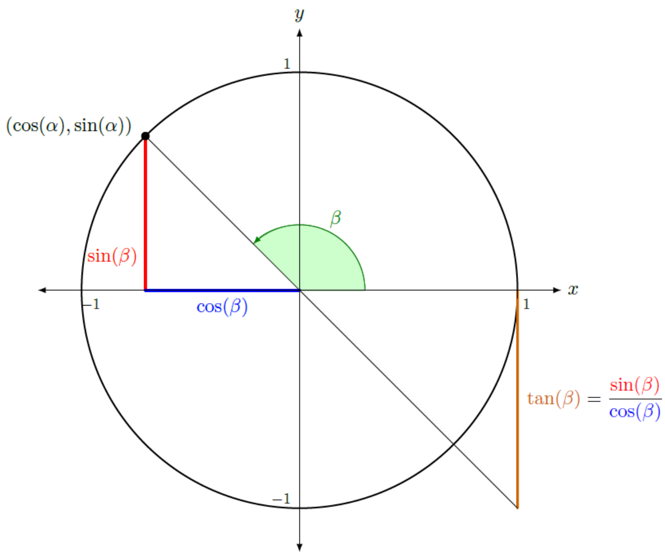


Es dibuixa l'angle α del qual volem calcular les raons trigonomètriques amb el

vèrtex al centre, el primer costat sobre l'eix X i el segon que talli la circumferència unitat. Com que la hipotenusa coincideix amb el radi, que és 1, tenim que el punt de tall amb la circumferència unitat té coordenades $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

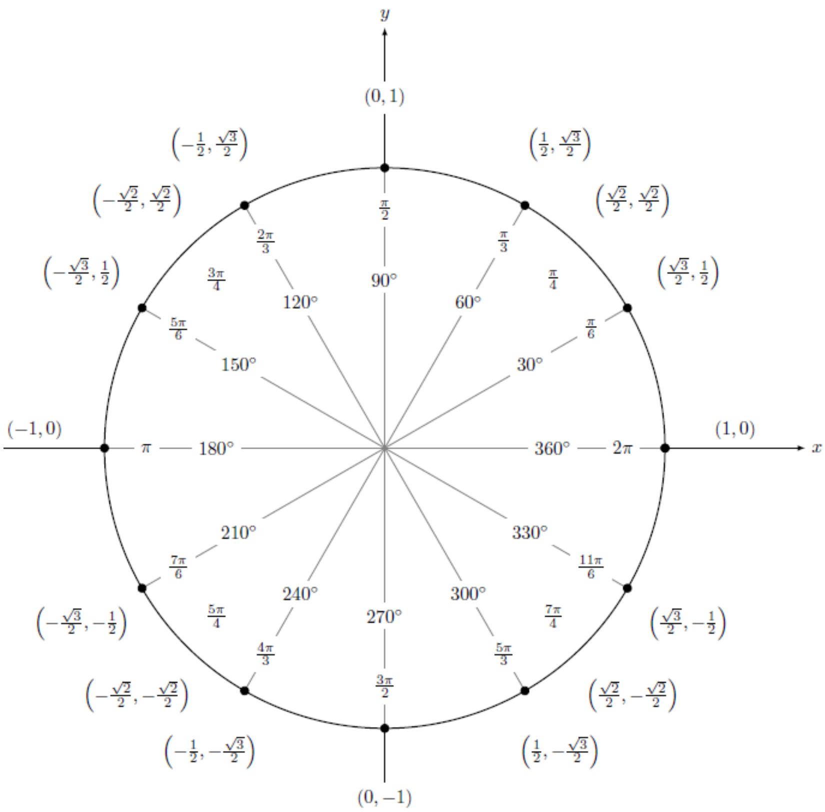


Ara dibuixem un segon angle, β, aquesta vegada obtús. Com en el cas anterior, les coordenades del punt de tall amb la circumferència són $(\cos(\beta), \sin(\beta))$.

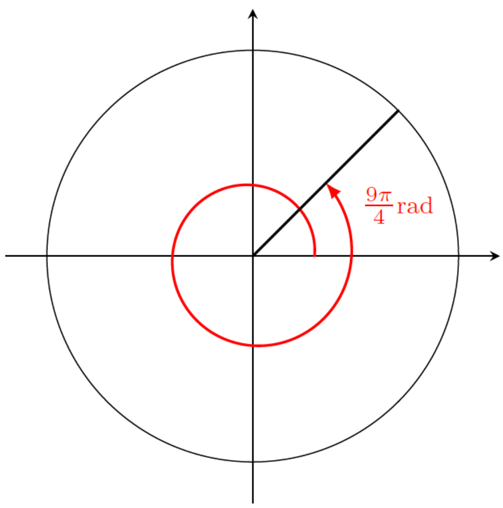


Veiem que aquí el cosinus de β serà negatiu, mentre que el sinus de βserà positiu. Ara bé, el seu valor absolut no pot ser, en cap cas, major que 1.

En general, es poden definir d'aquesta manera les raons trigonomètriques de qualsevol angle entre 0 i 2π rad (de manera equivalent, entre 0 i $360°$), on el sinus i el cosinus de qualsevol angle són nombres compresos entre -1 i 1. Ho veiem en el gràfic següent, on recordem que cada punt de la circumferència té coordenades $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.



D'altra banda, qualsevol angle més gran que 2π rad (o en graus $360°$) es correspon a un angle entre 0 i 2π rad (de manera equivalent, entre $0°$ i $360°$), tal com es mostra en la imatge següent:



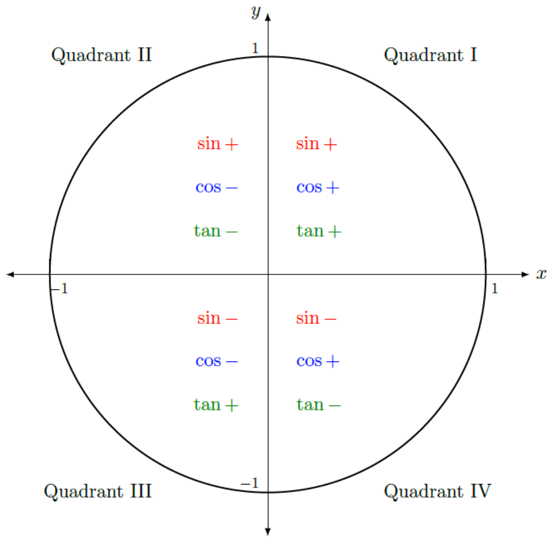
Veiem que els angles $\dfrac{9\pi}{4}$ rad i $\dfrac{9\pi}{4} - 2\pi = \dfrac{\pi}{4}$ tenen les mateixes raons trigonomètriques. En general, si α és un angle entre 0 i 2π rad (de manera equivalent, entre $0°$ i $360°$),

$$\sin(\alpha) = \sin(2\pi + \alpha) = \sin(2 \cdot 2\pi + \alpha) = \ldots$$
$$\cos(\alpha) = \cos(2\pi + \alpha) = \cos(2 \cdot 2\pi + \alpha) = \ldots$$

és a dir, les raons trigonomètriques es repeteixen quan se suma 2π a un angle. Així, per exemple (en graus),

$$\sin(8342°) = \sin(23 \cdot 360° + 62°) = \sin 62°.$$

Quadrants. Cada quart del pla dividit per les dues rectes reals es denomina **quadrant**. Així, doncs, en la circumferència unitat hi ha quatre quadrants, que es numeren de l'1 al 4 en el sentit antihorari. En cada quadrant canvia el signe de les raons tri- gonomètriques, tal com es pot veure a partir de les coordenades $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ de cada punt. Ho resumim en la imatge següent:



En tot cas, les raons trigonomètriques de qualsevol angle es poden trobar coneixent únicament les raons trigonomètriques dels angles del primer quadrant. Podem observar les relacions següents si α és un angle del primer quadrant:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

Observem que l'angle $-\alpha$ és el mateix que l'angle $2\pi - \alpha$.
Veiem que en qualsevol cas la propietat fonamental de la trigonometria es compleix, és a dir, per a qualsevol angle α,

$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

Això és així perquè en últim t s d'un angle qualsevol sempre es calculen a partir del sinus i el cosinus d'un angle agut: l'única modificació és el signe, que no és important quan s'eleva el valor al quadrat.

8.2. Funcions sinus i cosinus

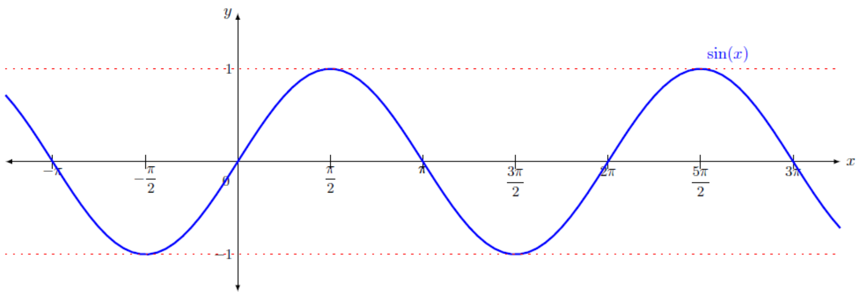
Les funcions circulars o trigonomètriques són les associades a les raons trigonomètriques. Les més importants són la sinus, la cosinus i la tangent. La variable d'aquestes funcions circulars s'expressa habitualment en radians i no en graus sexagesimals.

Aquestes funcions tenen la propietat de ser **periòdiques**, o sigui que les mateixes imatges es repeteixen cada vegada que al valor x sumem una quantitat fixada, que s'anomena **període**.

8.2.1. Definició i exemples

El terme sinus té una història curiosa. Una antiga obra hindú sobre astronomia, Surya Siddhanta, presenta una taula de mitjanes-cordes (molt ú tils per a calcular els moviments de les estrelles) que coincideixen amb la idea del sinus d'un angle. Posteriorment, l'obra Aryabhatiya d'Aryabhata, també hindú i del 500 dC aproximadament, fa un estudi més profund de les mitjanes-cordes, que denomina jiva (en sànscrit). Els àrabs la van traduir, i el terme jiva va ser transformat en l'aràbic jiba, però escrit jb (ja que l'àrab clàssic no té vocals). Més endavant, els traductors d'aquesta obra al llatí van traduir jb per sinus, ja que van pensar que es referia a jaib (i no a jiba), i jaib significa "pit" o "sina" (tot i que en català utilitzem la paraula sinus). Així, del significat original, "mitjana-corda", es va passar, per una traducció errònia, a "sinus".

Funció sinus. La funció sinus és aquella funció que associa a un angle en radians el seu sinus. O sigui que en cada valor del sinus de la circumferència unitat es trasllada a la seva posició corresponent en el valor de l'angle de l'eix d'abscisses. Així, per exemple, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ o $\sin(\pi) = -1$.
D'aquesta manera, s'obté la gràfica següent, que veiem que es repeteix en cada interval de longitud 2π.

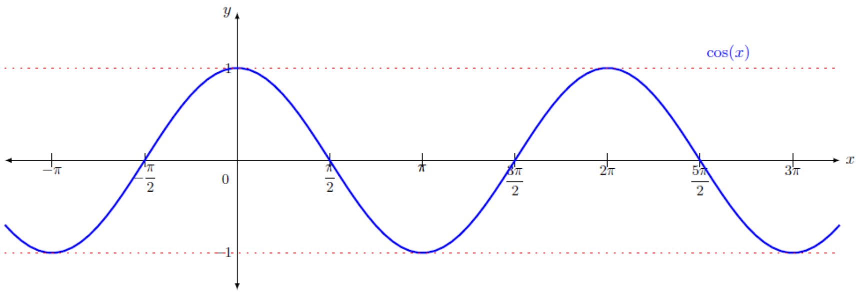


Algunes de les característiques fonamentals de la funció sinus són:

- La imatge de la funció és l'interval $[-1, 1]$.
- Té període 2π i, per tant, n'hi ha prou de conèixer els valors i característiques de la funció en qualsevol interval de longitud 2π, per exemple, en l'interval $[0, 2\pi)$.
- Els punts de tall són amb l'eix X són: $\ldots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$. Per tant, en general són els punts $(k\pi, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- És creixent en intervals de longitud π, per exemple, en els intervals $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ o $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$. De manera general és creixent en els intervals $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \frac{5\pi}{2} + 2\pi k\right)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- És decreixent en els intervals $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- Té màxims en els punts d'abscisses $\ldots -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$ i mínims en els punts d'abscisses $\ldots -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \ldots$ De manera general, té màxims en $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1\right)$ i mínims en $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, -1\right)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- És una funció senar o simètrica respecte de l'origen perquè compleix $\sin(-x) = -\sin(x)$.

El cosinus va sorgir de la necessitat de calcular el sinus de l'angle complementari. Així, originàriament, el 1620 Edmund Gunter va escriure "co.sinus" precisament per a indicar "sinus de l'angle complementari" (que, com sabem, és igual al cosinus de l'angle). Una mica més tard, John Newton (no Isaac Newton) va estandarditzar el terme cosinus, del qual prové el nostre cosinus.

Funció cosinus. La funció cosinus és aquella funció que associa a un angle en radians el seu cosinus. La gràfica d'aquesta funció es construeix de manera semblant a com es construeix la del sinus. Igual que amb el sinus, veiem que la gràfica es repeteix a cada interval de longitud 2π.

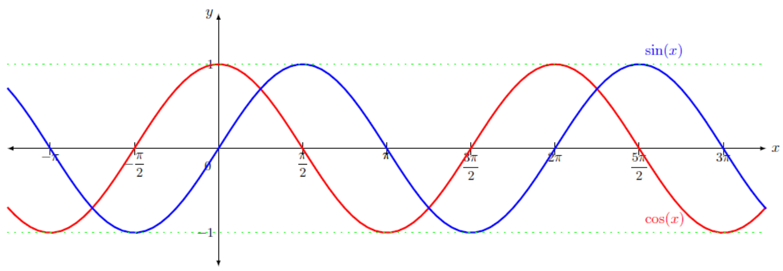


Algunes de les característiques de la funció cosinus són:

- La imatge de la funció és l'interval $[-1, 1]$.
- Té període 2π i, per tant, n'hi ha prou de conèixer els valors i característiques de la funció en qualsevol interval de longitud 2π, per exemple, en l'interval $[0, 2\pi)$.
- Els punts de tall són amb l'eix X són: $\ldots \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \ldots$. Per tant, en general, són els punts $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}, 0\right)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- És creixent en intervals de longitud π, per exemple, en els intervals $(\pi, 0)$ o $(\pi, 2\pi)$. De manera general, es diu que és creixent en els intervals $(\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- És decreixent en els intervals $(2\pi k, \pi + 2\pi k)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- Té màxims en els punts d'abscisses $\ldots -2\pi, 0, 2\pi \ldots$ i mínims en els punts d'abscisses $\ldots -\pi, \pi \ldots$ En general, té màxims en $(2\pi k, 1)$ i mínims en $(\pi + 2\pi k, -1)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- És una funció parell o simètrica respecte l'eix X perquè compleix $\cos(x) = \cos(-x)$.

8.2.2. Relació sinus i cosinus

A primer cop d'ull, es pot comprovar que la funció sinus i la funció cosinus són molt semblants. Si representem ambdues funcions en un mateix gràfic, aquesta semblança es fa més palesa:



Observem que la seva forma és exactament la mateixa, però la funció sinus (en blau) està lleugerament "avançada" (en $\frac{\pi}{2}$ respecte de la funció cosinus (en vermell). Això és així perquè

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

En aquesta taula es mostra aquesta relació de manera més detallada, descrivint cadascuna de les funcions segons el quadrant:

x	0	Quadrant I	$\frac{\pi}{2}$	Quadrant II	π	Quadrant III	$\frac{3\pi}{2}$	Quadrant IV	2π
sin(**x**)	0	positiva creixent	1	positiva decreixent	0	negativa decreixent	-1	negativa creixent	0
cos(**x**)	1	positiva decreixent	0	negativa decreixent	-1	negativa creixent	0	positiva creixent	1

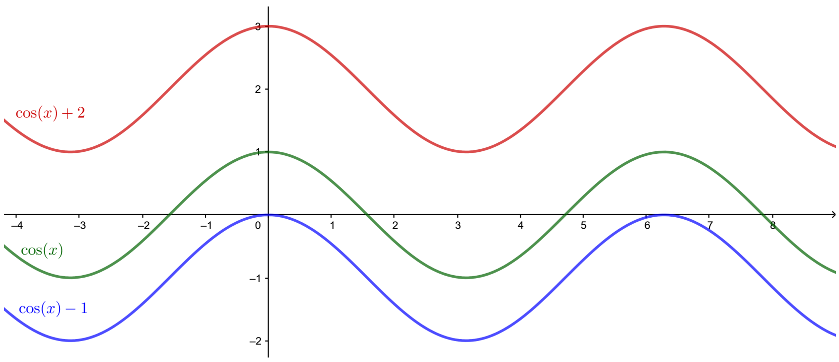
8.2.3. Transformacions

Tant la funció sinus com la funció cosinus poden veure's transformades si els sumem o multipliquem nombres reals. Aquestes transformacions són similars a les que podem trobar en els altres tipus de funcions.
Vegem en què consisteix cada una.

Translacions verticals En aquest cas, les funcions compleixen les mateixes propietats que les funcions originals exceptuant els **punts de tall amb l'eix X**.
Trobarem una translació vertical en expressions de la forma

$$f(x) = \sin(x) + k$$
$$g(x) = \cos(x) + k$$

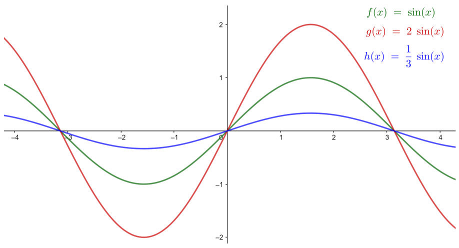
on k pot ser qualsevol valor real.
Si el valor k que sumem és positiu, la funció es traslladarà k unitats cap amunt i, en canvi, si és un valor negatiu, es mourà k unitats cap avall. Podem comprovar-ho amb els exemples de la gràfica següent:

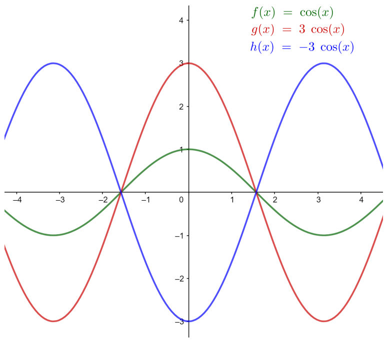


Dilatacions/contraccions verticals En aquest tipus de transformacions veiem com canvia el **recorregut** de la funció ampliant-se o reduint-se. Es manté la resta de propietats. Trobarem una contracció o dilatació vertical en expressions de la forma

$$f(x) = C \cdot \sin(x)$$
$$g(x) = C \cdot \cos(x)$$

Si el valor $|C| < 1$, veurem que la funció es contreu i el recorregut serà menor que l'inicial. En cas contrari, veurem una dilatació i el recorregut serà més gran. Hem de tenir en compte també que en el cas de $C < 0$ tindrem una simetria respecte de l'eix X. Vegem-ne uns quants exemples en les gràfiques següents:

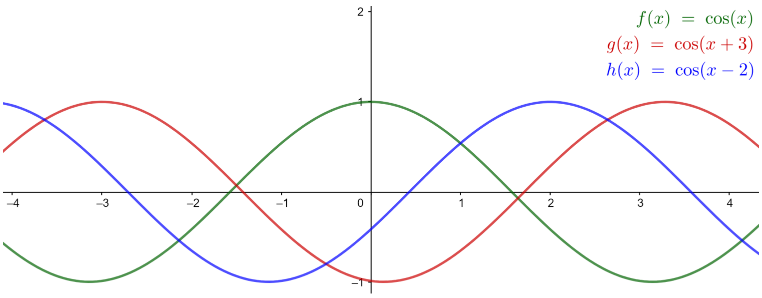




$\boxed{\text{Translacions horitzontals}}$ Podem pensar aquest tipus de transformació com una composició de funcions senzilla. Conservem les mateixes propietats, però els **punts de tall** amb l'eix X, els **màxims i mínims**, **intervals de creixement i decreixement** s'han traslladat. Les translacions horitzontals són de la forma

$$f(x) = \sin(x + b)$$
$$g(x) = \cos(x + b)$$

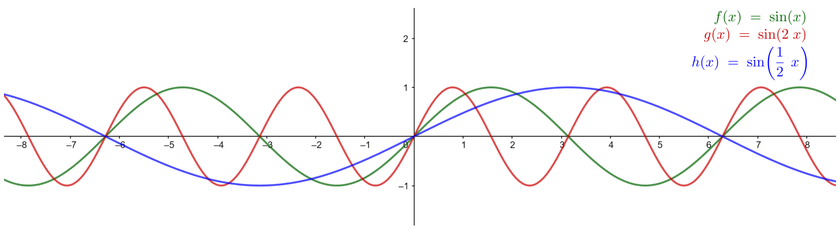
En $b > 0$ la translació és cap a l'esquerra (mou la funció cap a l'esquerra). En $b < 0$ la translació és cap a la dreta (mou la funció cap a la dreta). Vegem-ho en les gràfiques següents:



$\boxed{\text{Dilatacions/contraccions horitzontals}}$ Finalment, aquestes transformacions afecten el **període**, i amb ell els punts de tall en l'eix X i els **màxims i mínims**, **intervals de creixement i decreixement** que no es traslladen com en el cas anterior, però els punts de tall i altres característiques seran més propers o més distants segons la transformació. Les dilatacions o contraccions horitzontals són de la forma

$$f(x) = \sin(a \cdot x)$$
$$g(x) = \cos(a \cdot x)$$

Veiem que en $0 < a < 1$ tindrem una dilatació de la funció i el període serà més gran. En canvi, en $a > 1$ tenim una contracció i el període serà menor. De fet, el nou període serà $\frac{2\pi}{a}$. Vegem-ho gràficament:



En resum, les transformacions que podem tenir són:

$$f(x) = C \cdot \sin(ax + b) + k$$
$$g(x) = C \cdot \cos(ax + b) + k$$

k **Translacions verticals**. La gràfica es desplaça k unitats verticalment. Puja en $k > 0$ i baixa en $k < 0$.

C **Dilatacions/contraccions verticals**. En $|C| < 1$ la gràfica s'abaixa, i en $|C| > 1$ la gràfica s'estira. En $C < 0$ hi ha una simetria respecte de l'eix X.

b **Translacions horitzontals**. La gràfica es desplaça b unitats horitzontalment. Cap a l'esquerra en $b > 0$ i cap a la dreta en $b < 0$.

a **Dilatacions/contraccions horitzontals**. Hi ha un canvi de període que afecta totes les característiques de la funció. En $0 < a < 1$ el període serà més gran i en $a > 1$ el període serà més petit.

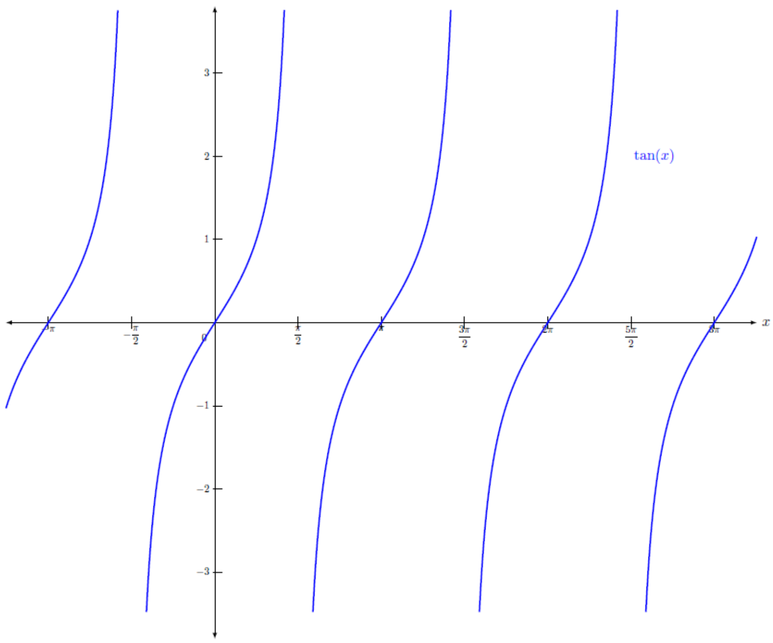
8.3. Funcions tangent i cotangent

8.3.1. Definició i exemples

Funció tangent. La funció tangent és aquella funció trigonomètrica que associa a un angle en radians la seva tangent. Per a construir-la, s'ha de tenir en compte

$$\tan(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Las representació gràfica d'aquesta funció és



Algunes de les característiques fonamentals de la funció tangent són:

- A diferència de la majoria de les funcions estudiades fins al moment, el domini d'aquesta funció no inclou tots els nombres: per als valors en els quals el cosinus és

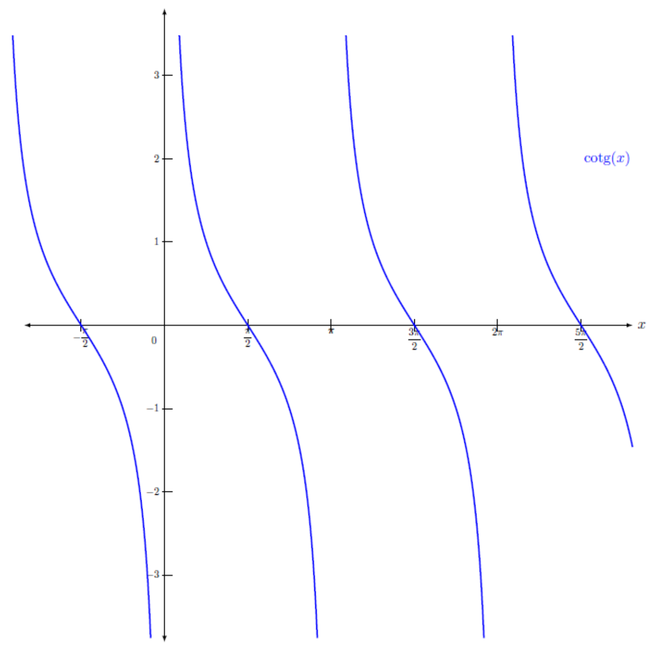
0, la funció no existeix (perquè s'hauria de dividir entre 0, cosa que és impossible). Això passa quan x és igual a $\frac{\pi}{2} + k\pi$, on k és un nombre enter qualsevol. És a dir, per a $\ldots \frac{-7\pi}{2}, \frac{-5\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \ldots$

- La imatge de la funció són tots els nombres reals.
- Té període π, i per tant n'hi ha prou de conèixer els valors i característiques de la funció en qualsevol interval de longitud π, per exemple, en l'interval $[-\pi, \pi)$.
- Els punts de tall amb l'eix X són $\ldots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi \ldots$. Per tant, en general són els punts $(k\pi, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- És una funció creixent en tot el seu domini.
- No té màxims ni mínims.

Funció cotagent. La funció cotangent és aquella funció trigonomètrica que associa a un angle en radians la seva cotangent. Per a construir-la, s'ha de tenir en compte

$$\text{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

La representació gràfica d'aquesta funció és



Algunes de les característiques fonamentals de la funció cotangent són:

- El domini no inclou tots els nombres, com en el cas de la tangent: per als valors en els quals el sinus és 0, la funció no existeix (perquè s'hauria de dividir entre 0, cosa que és impossible). Això passa quan x és igual a $k\pi$ (on k és un nombre enter qualsevol). És a dir, per a $\ldots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi \ldots$.
- La imatge d'aquesta funció es compon de tots els nombres reals, positius o negatius.

- Té període π, i per tant n'hi ha prou de conèixer els valors i característiques de la funció en qualsevol interval de longitud π, per exemple, en l'interval $[-\pi, \pi)$.
- Els punts de tall amb l'eix X són $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, on k és un nombre enter.
- És una funció decreixent en tot el seu domini.
- No té màxims ni mínims.

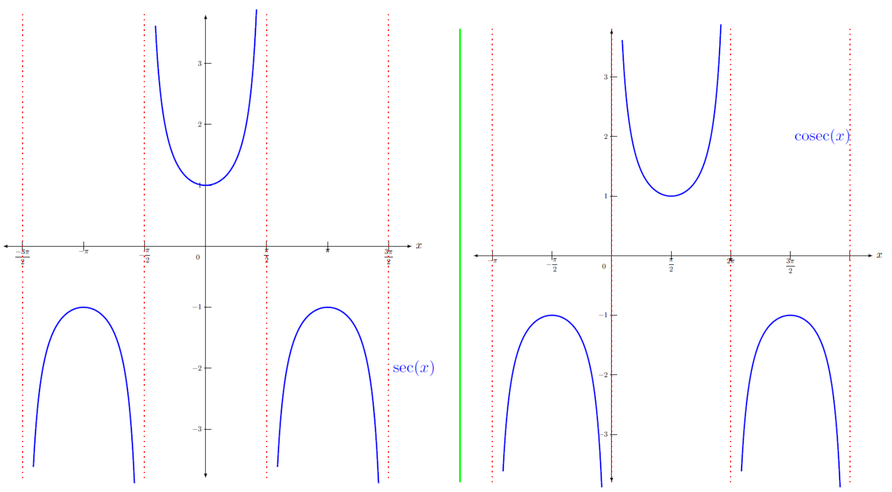
8.4. Funcions secant i cosecant

8.4.1. Definició i exemples

Les funcions secant i cosecant es defineixen de la manera següent:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \text{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

Es poden representar de la manera següent:



Es tracta, doncs, de dues funcions periòdiques de període 2π, les característiques essencials de les quals són:

- Els dominis són:
  - La funció secant: tots els nombres excepte $\frac{\pi}{2} + k\pi$, on k és un nombre enter.
  - La funció cosecant: tots els nombres excepte $k\pi$, on k és un nombre enter.
- La imatge es compon de tots els nombres reals, excepte l'interval $(-1, 1)$.
- Els intervals de creixement són (sense comptar els punts que no són del domini):
  - La funció secant: és creixent en $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ i decreixent en $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, on k és qualsevol nombre enter.
  - La funció cosecant: és creixent en $\left((4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+3)\frac{\pi}{2}\right)$ i decreixent en $\left((4k+3)\frac{\pi}{2}, (4k+5)\frac{\pi}{2}\right)$, on k és qualsevol nombre enter.
- Màxims i mínims:

- La funció secant: té mínims en $(2k\pi, 1)$, i màxims en $((2k+1)\pi, -1)$, on k és un nombre enter.
- La funció cosecant: té mínims en $\left((4k+1)\frac{\pi}{2}, 1\right)$ i màxims en $\left((4k+3)\frac{\pi}{2}, -1\right)$, on k és un nombre enter.

- La secant té un únic punt de tall amb l'eix Y en el punt $(0, 1)$ mentre que la cosecant no en té cap.

8.5. Funcions inverses

8.5.1. Definició i exemples

Totes les funcions trigonomètriques tenen inversa en l'interval de periodicitat propi de la funció. En qualsevol cas, les més importants són les funcions inverses del sinus, cosinus i tangent. Per a denominar-les, totes precedeixen el nom de la funció original del terme **arc**.

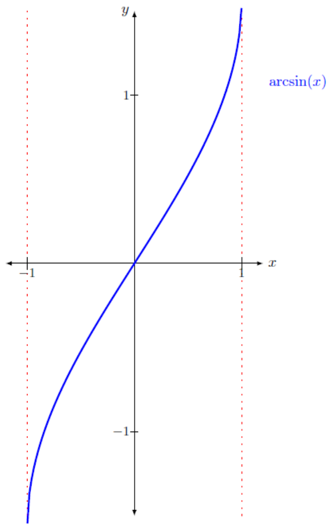
Moltes calculadores utilitzen $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ i $\tan^{-1}$ per referir-se a arcsin, arccos i arctan respectivament. Però aquesta notació no vol dir que siguin les funcions $\frac{1}{\sin(x)}$, $\frac{1}{\cos(x)}$ ni $\frac{1}{\tan(x)}$, sinò que són les funcions inverses.

- La funció inversa de la funció sinus es denomina **arc sinus** i és una funció que assigna a cada valor de l'interval $[-1, 1]$ l'angle el sinus del qual correspon a aquest valor. Com que hi ha molts valors en què passa això, solament s'utilitzen els valors dels angles entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Aquesta funció es designa amb el símbol arcsin. Per exemple, $\arcsin(0) = 0$, ja que l'angle que correspon al valor del sinus 0 és l'angle 0 radians.

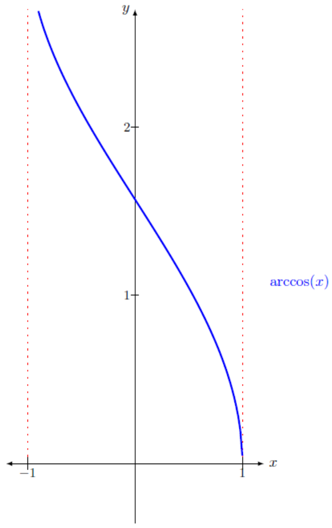
- La funció inversa de la funció cosinus es denomina **arc cosinus** i és una funció que assigna a cada valor de l'interval $[-1, 1]$ l'angle el cosinus del qual correspon a aquest valor. Com que hi ha molts valors en els quals passa això, solament s'utilitzen els valors dels angles entre $[0, \pi]$. Aquesta funció es designa amb el símbol *arccos*. Per exemple, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, ja que l'angle que correspon al valor del cosinus 0 és l'angle $\frac{\pi}{2}$ radians.

- La funció inversa de la funció tangent es denomina **arc tangent** i és una funció que assigna a cada valor real l'angle la tangent del qual correspon a aquest valor. Com que hi ha molts valors en els quals passa això, solament s'utilitzen els valors dels angles entre $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Aquesta funció es designa amb el símbol arctan. Per exemple, $\arctan(0) = 0$, ja que l'angle que correspon al valor de la tangent 0 és l'angle 0 radians.

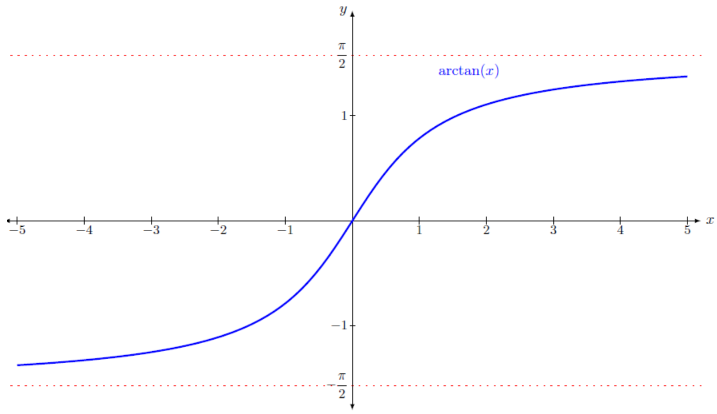
Aquestes són les representacions d'aquestes funcions que són funcions simètriques de la funció original respecte de la recta $y = x$ per ser funcions inverses:



y
1
−1
−1
1
x
arcsin(x)



y
2
1
−1
1
x
arccos(x)

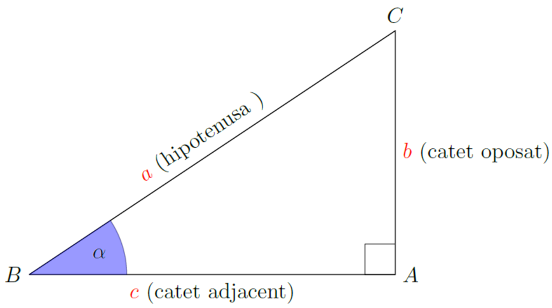


y
π/2
1
−1
−π/2
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5
x
arctan(x)

Resum

Funcions Trigonomètriques

En un triangle rectangle ABC com el següent,



podem definir les raons trigonomètriques de l'angle agut α de la manera següent:

sinus de l'angle α

$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}}$$

cosinus de l'angle α

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{\text{catet adjacent}}{\text{hipotenusa}}}$$

tangent de l'angle α

$$\boxed{\text{tg}(\alpha) = \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{c} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}}}$$

Els angles es poden mesurar en graus ($^\circ$) o bé en radians (rad).

Radian Si en un circumferència agafem un arc de longitud igual a la del radi, l'angle corresponent té una mesura que anomenem **radian (rad)**.

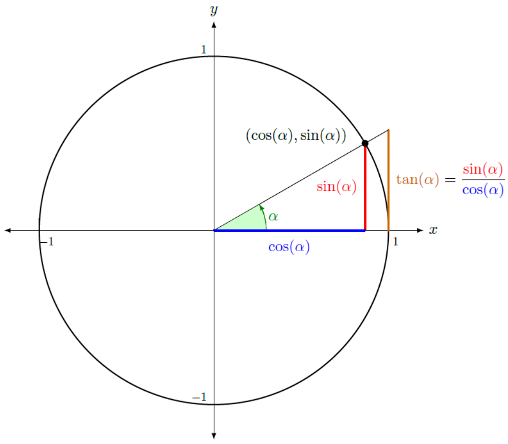
La seva amplitud no depèn del radi i, de fet, com que la longitud de la circumferència és $2\pi r$ i l'angle d'una volta sencera és 360°, tenim

$$360^\circ = 2\pi \,\text{rad}.$$

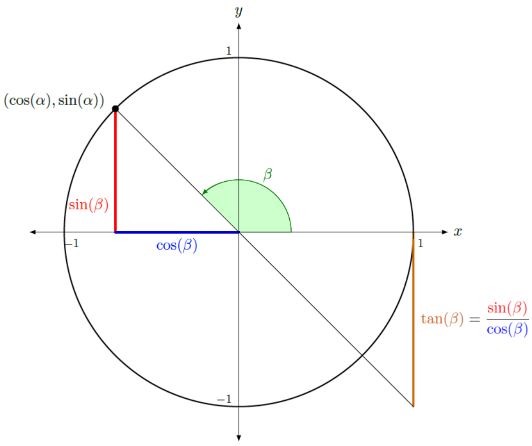
Teorema fonamental de la trigonometria

$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

Raons principals d'un angle qualsevol. Treballarem amb la circumferència unitat. Per això, es dibuixa l'angle α del qual volem calcular les raons trigonomètriques, amb el seu vèrtex al centre, el seu primer costat sobre l'eix X i el segon tallant la circumferència unitat. Com que la hipotenusa coincideix amb el radi, que és 1, tenim que el punt de tall amb la circumferència unitat té coordenades $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.



En el cas d'un angle obtús β, quedaria així:

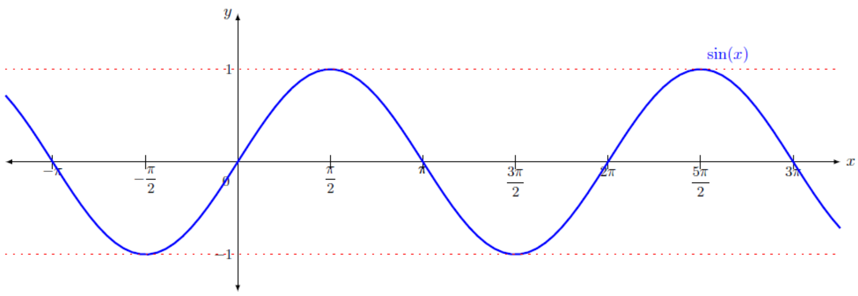


Podem trobar les raons trigonomètriques d'un angle qualsevol a partir de les relacions següents, prenent $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

Observem que l'angle $-\alpha$ és el mateix que l'angle $2\pi - \alpha$.

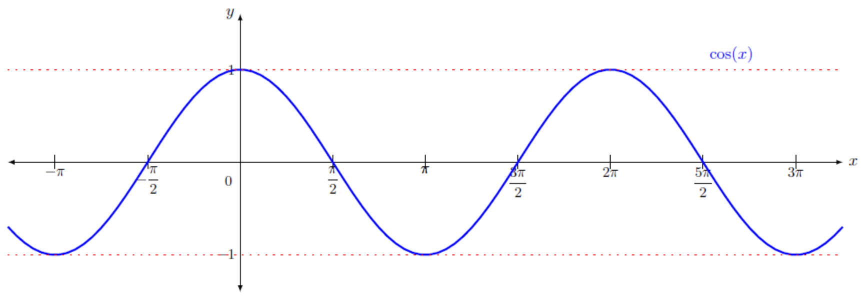
Funció sinus



Algunes de les característiques fonamentals de la funció sinus són:

- Imatge: $[-1,1]$.
- Període: 2π.
- Punts de tall amb l'eix X: $(k\pi,0)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- Creixent en els intervals: $\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k, \frac{5\pi}{2}+2\pi k\right)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- Decreixent en els intervals: $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- Màxims en $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, 1\right)$ i mínims en $\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k, -1\right)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- Funció senar o simètrica respecte l'origen. Compleix $\sin(-x) = -\sin(x)$.

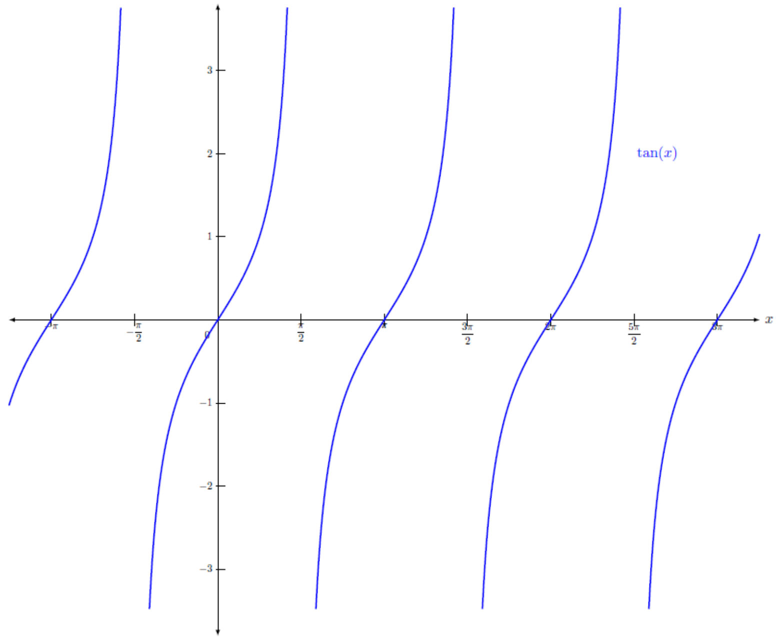
Funció cosinus



Algunes de les característiques de la funció cosinus són:

- Imatge: $[-1,1]$.
- Període: 2π.
- Punts de tall amb l'eix X: $\left((2k+1)\frac{\pi}{2},0\right)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- Creixent en els intervals $(\pi+2\pi k, 2\pi+2\pi k)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- Decreixent en els intervals: $(2\pi k, \pi+2\pi k)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- Màxims en $(2\pi k, 1)$ i mínims en $(\pi+2\pi k, -1)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- Funció parell o simètrica respecte l'eix X. Compleix $\cos(x) = \cos(-x)$.

Funció tangent



Algunes de les característiques fonamentals de la funció tangent són:

- Domini: $\mathbb{R} \smallsetminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, on k és un nombre enter qualsevol.
- Imatge: tots els nombres reals.
- Període: π.
- punts de tall amb l'eix X: $(k\pi, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- Funció creixent en tot el domini.
- No té màxims ni mínims.

Les transformacions del sinus i cosinus que podem tenir són:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= C \cdot \sin(ax + b) + k \\ g(x) &= C \cdot \cos(ax + b) + k \end{aligned}}$$

k **Translacions verticals**. La gràfica es desplaça k unitats verticalment. Puja en $k > 0$ o baixa en $k < 0$.

C **Dilatacions/contraccions verticals**. En $|C| < 1$ la gràfica s'aixafa, en $|C| > 1$ la gràfica s'estira. En $C < 0$ hi ha una simetria respecte de l'eix X.

b **Translacions horitzontals**. La gràfica es desplaça b unitats horitzontalment, cap a l'esquerra en $b > 0$ o cap a la dreta en $b < 0$.

a **Dilatacions/contraccions horitzontals**. Hi ha un canvi de període que afecta totes les característiques de la funció. En $0 < a < 1$ el període serà més gran i en $a > 1$ el període serà més petit.

Exercicis resolts

1. **Considera la funció $f(x) = \sin(x)\cos(x - a)$.**

(a) Per $a = 0$ dona tots els punts de tall amb l'eix X.

(b) Per $a = \frac{\pi}{2}$, calcula la seva amplitud.

Solució:

(a) Per a trobar tots els punts de tall amb l'eix X, imposem $\sin(x)\cos(x) = 0$, i per tant seran els punts tals que $\sin(x) = 0$ o $\cos(x) = 0$, i els punts $x = \pi k$ per una banda i els punts $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ per l'altra amb $k \in \mathbb{Z}$. Si unim tots els punts podem dir que la funció s'anul·larà en el punts $x = \frac{\pi}{2}k$ amb $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Ens fixem que $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ és igual a $\sin(x)$, i per tant la funció que considerem és $f(x) = \sin^2(x)$. Aquesta funció només pren valors positius menors que 1, i per tant la seva amplitud és 1.

2. **Resol les equacions trigonomètriques següents:**

(a) $\sin^2(x) + 3\sin(x) + 2 = 0$

(b) $2\sin^2(x) + 3\cos(x) = 3$

Solució:

(a) Per a resoldre l'equació $\sin^2(x) + 3\sin(x) + 2 = 0$, anomenarem $y = \sin(x)$, de manera que l'equació queda de la forma $y^2 + 3y + 2 = 0$.
Si resolem aquesta equació de segon grau, obtenim dues solucions $y = -2$ i $y = -1$.
Com que $y = \sin(x)$, podem descartar la primera de les dues solucions, ja que el $\sin(x)$ només pren valors entre -1 i 1. Les solucions de l'equació inicial seran les solucions de l'equació $\sin(x) = -1$, i aquestes són $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ amb $k \in \mathbb{Z}$.

(b) En primer lloc, veiem que l'equació té termes en $\sin(x)$ i $\cos(x)$. Utilitzarem el teorema fonamental de la trigonometria per tal de reescriure l'equació només en termes de $\cos(x)$.
Com que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, obtenim $2(1 - \cos^2(x)) + 3\cos(x) = 3$, que simplifiquem per obtenir

$$-2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 1 = 0$$

Com en el cas anterior, anomenarem

$$y = \cos(x)$$

, de manera que l'equació queda $-2y^2 + 3y - 1 = 0$.
Resolem aquesta equació de segon grau i obtenim dues solucions: $y = 1$ i $y = \frac{1}{2}$. Per tant, les solucions seran els valors tals que $\cos(x) = 1$ o $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
Busquem aquests valors i obtenim les solucions de l'equació inicial $x = 2\pi k$ per a la primera i $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ i $x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$ amb $k \in \mathbb{Z}$. Per tant, tots aquests valors són solució de l'equació inicial.

3. **A partir del teorema fonamental de la trigonometria demostra que**

(a) $\mathbf{sec}^2(x) = 1 + \tan^2(x)$

(b) $\mathbf{cosec}^2(x) = 1 + \mathbf{cotan}^2(x)$

Solució:

(a) Per una banda a partir de la definició obtenim que $\sec^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ i per altra banda

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

per tant obtenim la igualtat que volíem.

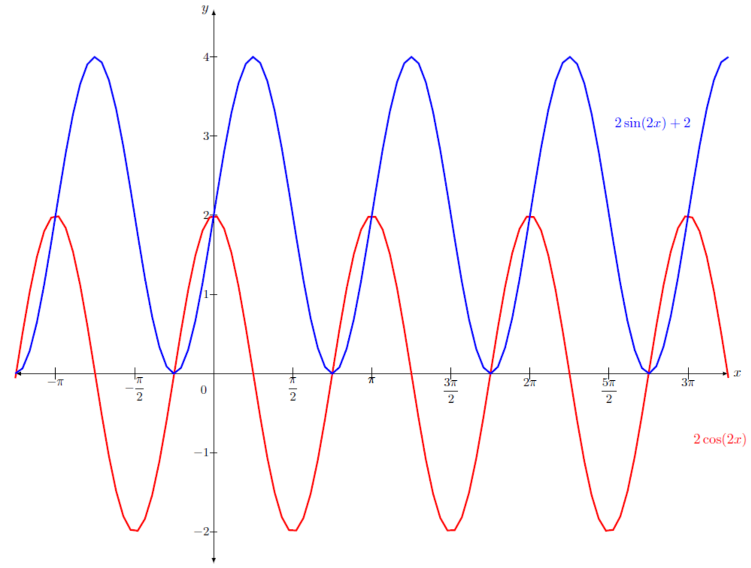
(b) Igual que abans veiem per una banda a partir de la definició que $\operatorname{cosec}^2(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)}$ i per l'altra banda

$$1 + \operatorname{cotan}^2(x) = 1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

4. **Troba una funció amb sinus o cosinus que tingui amplitud 2, període π i tal que $f(0) = 2$.**

Solució:

Proposem un parell de solucions, una amb sinus i una amb cosinus (no són úniques). En ambdós casos hem multiplicat la x per 2 per tal que el període sigui la meitat del període del sinus i cosinus. També hem multiplicat per 2 la funció per tal d'aconseguir l'amplitud desitjada. Finalment podem jugar amb les translacions (horitzontals i verticals) per tal que la funció passi pel punt $(0, 2)$.
Veiem la gràfica de dues funcions amb aquestes característiques: $f(x) = 2\sin(2x) + 2$ i $g(x) = 2\cos(2x)$.



5. **Pots trobar valors de x tals que $\sin(x) = \tan(x)$?**

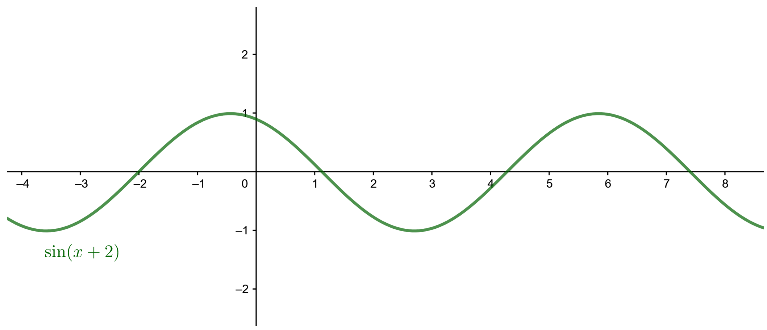
Solució:

A paritr de la definicío de $\tan(x)$ podem escriure l'equació de la forma

$$\sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Leftrightarrow \sin(x)\cos(x) = \sin(x) \Leftrightarrow \sin(x)(\cos(x) - 1) = 0$$

Per tant, veiem que aquesta igualtat es complirà en els casos en què $\sin(x) = 0$ o $\cos(x) = 1$, però ens fixem que si es compleix la primera igualtat segur que es compleix la segona ja que en els punts a on $\sin(x) = 0$ tenim que $\cos(x) = \pm 1$ (no és cert el recíproc). Per tant, els punts on coincideixen la funció sinus i la tangent són els punts on totes dues s'anul·len, $x = \pi k$ per $k \in \mathbb{Z}$.

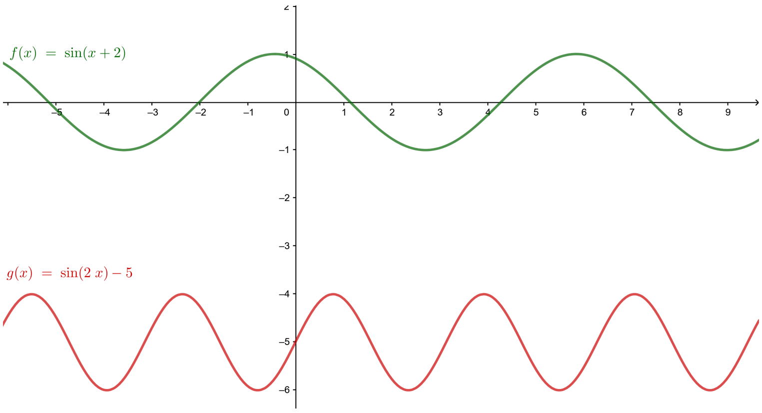
6. **A partir de la gràfica de $\sin(x+2)$ justifica i construeix la gràfica de $\sin(2x) - 5$ i $3\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.**



Solució:
Comencem escrivint $g(x) = \sin(2x) - 5$ a partir de transformacions de la funció $\sin(x+2)$

$$g(x) = \sin(2(x+2) - 4) - 5$$

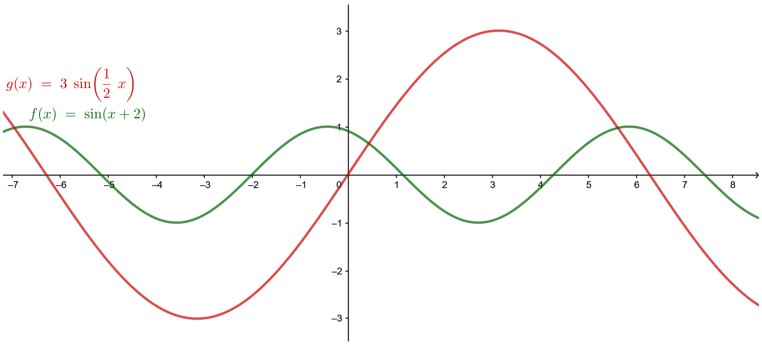
Això vol dir que desplacem la funció $\sin(x+2)$, 5 unitats cap avall, 4 unitats a la dreta i la contraiem horitzontalment dividint el període inicial per 2.



Fem el mateix per $g(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ i obtenim

$$g(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}(x+2) - 1\right)$$

Per tant en aquest cas, hem desplaçat la funció 1 unitat a la dreta, hem dilatat hortitzontalment la funció obtenint un període el doble de l'inicial i hem dilatat la funció verticalment 3 unitats.



Exercicis per a practicar amb les solucions

7. **Determina el període de les funcions següents:**

(a) $\sin(2x)$

(b) $\cos(3x)$

(c) $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

(d) $\tan(4x)$

8. **Resol les següents equacions trigonomètriques**

(a) $\tan^2(x) - \tan(x) = 0$

(b) $1 - \cos^2(x) = \cos^2(x)$

9. **Utilitza les relacions trigonomètriques conegudes per a simplificar les següents expressions**

(a) $\dfrac{\sin(\pi + x) - \sin(\pi - x)}{\cos(\pi + x) + \cos(\pi - x)}$

(b) $\dfrac{\cos(x) - \sin(x)}{1 - \tan(x)}$

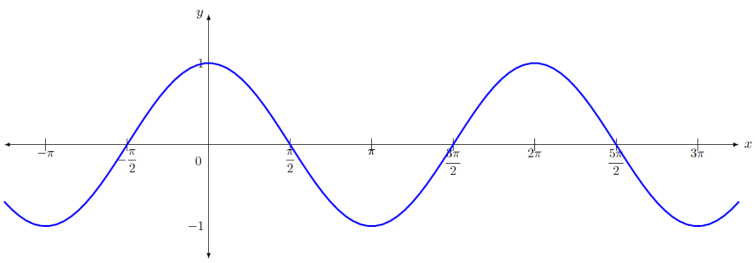
10. **Troba tots els valors tals que**

(a) $\sin\left(\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

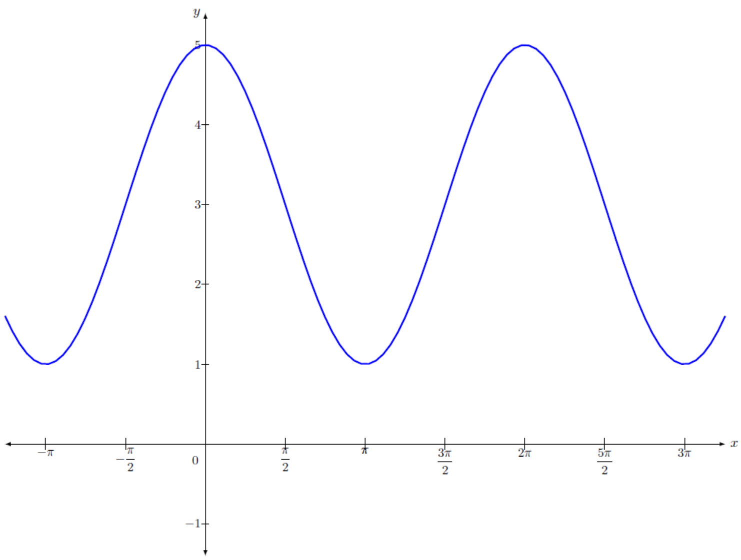
(b) $\tan\left(\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

11. **És parell la funció $f(x) = \sin(x^2) + \cos(x) + 3$? (Recorda que una funció és parell si $f(-x) = f(x)$ per qualsevol valor de x).**

12. **Troba l'expressió algebraica d'aquesta funció utilitzant només el sinus**



13. **Troba l'expressió algebraica d'aquesta funció utilitzant només el cosinus**



Solucions:

7. (a) π
   (b) $\frac{2\pi}{3}$
   (c) 4π
   (d) $\frac{\pi}{2}$
8. (a) $x = \pi k$ i $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ amb $k \in \mathbb{Z}$
   (b) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $x = \frac{5\pi}{4} + \pi k$ i $x = \frac{7\pi}{4} + \pi k$ amb $k \in \mathbb{Z}$
9. (a) $\tan(x)$
   (b) $\cos(x)$
10. (a) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
    (b) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
11. Sí, la funció $f(x)$ és parell.
12. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
13. $2\cos(2x) + 3$

9. Funcions exponencial i logarítmica

Índex

9.1. La funció exponencial

9.1.1. Definició i exemple

La **funció exponencial** de base a es defineix a partir de les potències de nombres. En general, si a és un nombre positiu, la funció exponencial de base a es defineix com a a^x.

Què és una funció exponencial?
Una funció exponencial es defineix a partir de les potències dels nombres. La seva expressió és de la forma a^x , amb $a > 0$.
Dom$(a^x) = \mathbb{R}$ i Im $(a^x) = \mathbb{R}^+$. Són funcions sempre creixents per a $a > 1$, decreixents per a $a < 1$. No tenen ni màxims ni mínims.

Exemple. Funció exponencial de base 3.

$$g(x) = 3^x$$

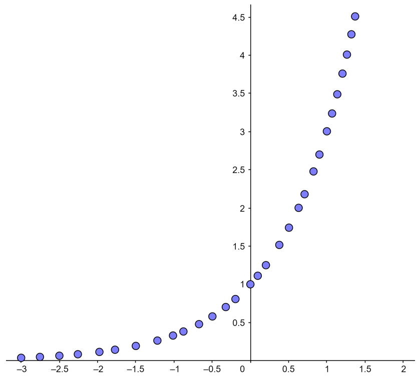
Aleshores,
$g(0) = 3^0 = 1,\ g(1) = 3^1 = 3,\ g(2) = 3^2 = 9,\ g(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3},\ g\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\ldots$

Una de les funcions exponencials essencials és la que té com a base el nombre irracional e, els primers decimals del qual són 2.71828182845904523... En aquest cas, la funció s'anomena simplement exponencial, sense especificar-ne la base, i s'escriu $\exp(x)$ o simplement e^x.

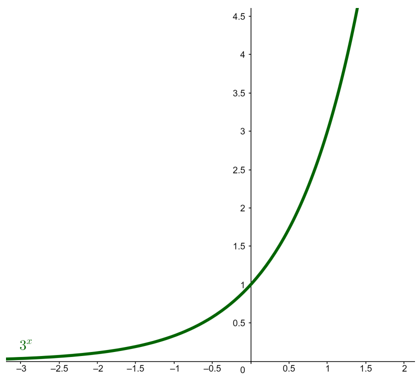
9.1.2. Gràfica

Podem deduir la forma general de la gràfica de qualsevol funció exponencial a partir d'un exemple concret.

En representar la gràfica d'una taula d'una funció exponencial, per exemple, $g(x) = 3^x$ en el domini $[-3, 2]$, s'obté una gràfica de punts amb aquest aspecte:



De la representació anterior, no és complicat deduir que la gràfica de la funció exponencial de base 3 en el domini $[-3, 2]$ esdevé la següent:



A partir de la gràfica s'observa com qualsevol valor de la funció és sempre positiu, és a dir, que la funció sempre és positiva. A més, s'observa que la gràfica passa pel punt $(0, 1)$. Aquestes són dues propietats de totes les funcions exponencials, perquè la potència d'un nombre qualsevol és sempre un nombre positiu i perquè qualsevol nombre elevat a 0 és sempre 1. En particular, doncs, es té que la gràfica d'una funció exponencial sempre queda per sobre de l'eix X.

9.1.3. Propietats

D'acord amb els fets observats anteriorment, es compleixen certes propietats per a totes les funcions exponencials. Si escrivim $y = a^x$, amb $a > 0$ aquestes propietats són:

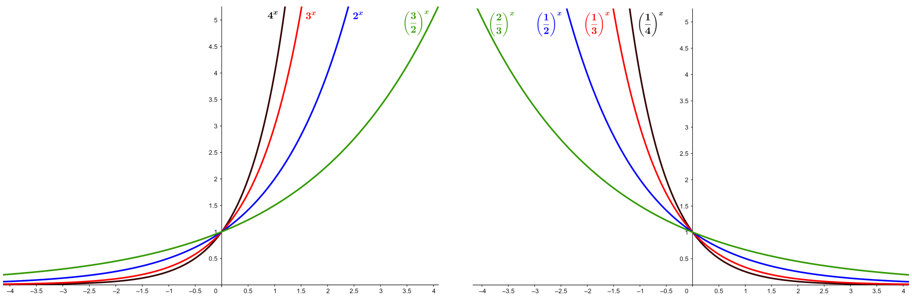
- El domini de qualsevol funció exponencial són tots els reals: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
- La imatge de qualsevol funció exponencial de base $a \neq 1$ és $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.
- La gràfica d'una funció exponencial sempre passa pel punt $(0, 1)$.
- Si la base a és més gran que 1 $(a > 1)$:

   - Si $x_1 < x_2$, $a^{x_1} < a^{x_2}$, és a dir, la funció creix en augmentar la variable. En definitiva, la funció és creixent. A més, el creixement és més gran com més gran és la base.
   - Com més petit és el valor de la variable x, més s'acosta a 0 el valor de la imatge y, tot i que no s'arriba a assolir mai aquest valor.

- Si la base a és menor que 1 ($a < 1$):
   - Si $x_1 < x_2$, $a^{x_1} > a^{x_2}$, és a dir, la funció decreix en augmentar la variable. En definitiva, la funció és decreixent. A més, el decreixement és més gran com més petita és la base.
   - Com més gran és el valor de la variable x, més s'acosta a 0 el valor de la imatge y, tot i que no arriba a assolir a mai aquest valor.

- Si la base és 1 ($a = 1$): la funció és constant, ja que $1^x = \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{x} = 1$.

Aquestes propietats s'observen en les gràfiques de qualsevol funció exponencial. Identifiquem-les en les següents:



La imatge de l'esquerra mostra les gràfiques de 4^x, 3^x, 2^x i $\left(\frac{3}{2}\right)^x$. Observem que, per ser la base major que 1, són funcions creixents, amb un creixement més gran com més gran és la base. A més, notem que, com més a l'esquerra de $x = -1$, per exemple, el valor de les funcions s'aproxima molt ràpidament a 0, però sense assolir aquest valor.
La imatge de la dreta mostra les gràfiques de $\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $\left(\frac{2}{3}\right)^x$. Observem que, per ser la base menor que 1, són funcions decreixents, amb un decreixement més gran com més petita és la base. A més, notem que, com més a la dreta de $x = -1$, per exemple, el valor de les funcions s'aproxima molt ràpidament a 0, però sense assolir aquest valor.
Finalment, observem com les gràfiques de 4^x, 3^x, 2^x i $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ i les gràfiques de $\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ són simètriques respecte de l'eix Y. Aquest fet és degut a

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$$

La funció exponencial és una de les funcions més importants per les seves aplicacions, ja que és capaç de descriure una gran varietat de fenòmens, especialment els de creixement. Pe això és habitual que aquestes funcions també es denominin *funcions de creixement*. En particular, s'apliquen a fets tan importants com el creixement d'una població de bacteris en un laboratori, el creixement demogràfic del nombre d'animals, la manera com decreix la matèria radioactiva (creixement negatiu), la raó amb la qual un obrer aprèn un cert procés, o la velocitat amb què una malaltia contagiosa es dissemina amb el temps. Les funcions exponencials també són útils per a calcular l'interès obtingut en un compte bancari, ja que descriuen l'augment monetari a un interès compost.

9.2. El logaritme

9.2.1. Definició

El **logaritme de base** a, amb $a > 0$, d'un nombre real positiu x, es calcula de la manera següent:

$$\log_a x = \log_a(x) = y \text{ si } x = a^y$$

Per exemple, el logaritme de base 2 de 8 és igual a 3 perquè $2^3 = 8$. Aleshores, podem escriure

$$\log_2 8 = \log_2(8) = 3, \text{ perquè } 2^3 = 8$$

En general, doncs, s'escriu $\log_a$ per indicar precisament aquesta operació: el logaritme de base a.

Exemple. Logaritmes de bases

- Logaritme de base 3 de 81: $\log_3(81) = 4$ perquè $3^4 = 81$.
- Logaritme de base 5 de 25: $\log_5(25) = 2$ perquè $5^2 = 25$.
- Logaritme de base 7 de 49: $\log_7(49) = 2$ perquè $7^2 = 49$.

L'origen del concepte de logaritme està en un problema de matemàtica aplicada: la necessitat de simplificar la tasca dels calculadors, excessivament complicada quan es tractava de fer multiplicacions, divisions i, fins i tot, potències o extraccions d'arrels en problemes relacionats inicialment amb l'agrimensura i l'astronomia, especialment quan s'havia d'aplicar a la navegació. Arquimedes ja tenia una idea fonamental que generaria els logaritmes. No va ser, però, fins a John Napier (s. XV) que s'aprofitaria la idea llançada per Arquimedes. Els logaritmes van ser de gran ajuda per al naixement de la física matemàtica al final del segle XV.

9.2.2. Propietats

Les propietats del logaritme deriven de les propietats de les potències, atesa la relació que hi ha entre les dues operacions. Així, per a un logaritme de base a, $\log_a$, es compleixen les propietats següents sigui quin sigui el valor de $a > 0$:

1) $\log_a(a) = 1$ i $\log_a(1) = 0$

2) El logaritme del producte és igual a la suma de logaritmes:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

ja que

$$a^{\log_a(x \cdot y)} = x \cdot y = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x) + \log_a(y)}$$

3) El logaritme d'una potència és igual al producte de l'exponent pel logaritme de la base:

$$\log_a\left(x^y\right) = y \cdot \log_a(x)$$

ja que

$$a^{\log_a(x^y)} = x^y = \left(a^{\log_a(x)}\right)^y = a^{y \cdot \log_a(x)}$$

4) El logaritme d'un quocient és el logaritme del numerador menys el logaritme del denominador:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

ja que

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x \cdot y^{-1}\right) = \log_a(x) + \log_a\left(y^{-1}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

5) És possible relacionar dos logaritmes de bases diferents, a i b, amb aquesta fórmula:

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

ja que si denominem $y = \log_a(x)$ i $z = \log_b(x)$, aleshores $x = a^y = b^z$.
A més, com que $b = a^{\log_a(b)}$ podem escriure $a^x = \left(a^{\log_a(b)}\right)^y = a^{y \cdot \log_a(b)}$.
Per tant,

$$\log_a(x) = y = z \cdot \log_a(b) = \log_b(x) \cdot \log_a(b)$$

d'on es dedueix la propietat enunciada.

9.3. La funció logarítmica

9.3.1. Definició i exemples

La **funció logarítmica de base** a, amb $a > 0$ i $a \neq 1$, és la funció inversa de la funció exponencial de base a. És a dir,

$$y = \log_a(x) \text{ si } x = a^y$$

Com que la funció es defineix a partir de les propietats del logaritme, també se l'anomena directament **funció logaritme**.

Hi ha dos casos particulars en la notació d'aquesta funció:

- Quan la base és el nombre irracional e, es parla de *logaritme neperià* i s'escriu ln. És a dir, s'entén $\ln = \log_e$.
- Quan la base és el nombre 10, es parla simplement de logaritme, sense especificar la base, i es sol escriure simplement log. És a dir, s'entén $\log = \log_{10}$.

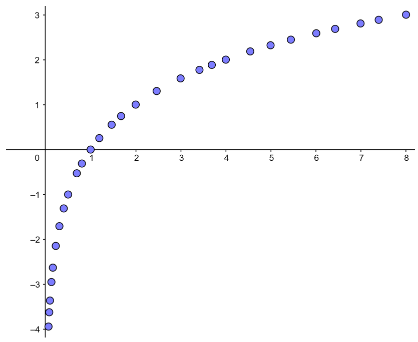
Què és una funció logarítmica?
Una funció logarítmica de base a és la funció inversa d'una funció exponencial de base a. La seva expressió és de la forma $\log_a(x)$, on $a > 0$. Dom $(\log_a(x)) = \mathbb{R}^+$ i Im$(\log_a(x)) = \mathbb{R}$. Són funcions sempre creixents per a $a > 1$ i decreixents per a $a < 1$. No tenen ni màxims ni mínims.

John Napier (i d'aquí el qualificatiu neperià) va néixer el 1550. Al 1614 va publicar el *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, on relaciona una progressió geomètrica amb una progressió aritmètica. La primera és la progressió de les distàncies recorregudes amb velocitats proporcionals a elles mateixes, i la segona, la progressió de les distàncies recorregudes amb velocitat constant, on aquestes distàncies s'on els "logaritmes" de les primeres. L'obra comprèn una taula de logaritmes de sinus, amb els angles que varien de minut en minut. El 1619 va aparèixer una segona obra, *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, on l'autor explica com calcular els logaritmes.

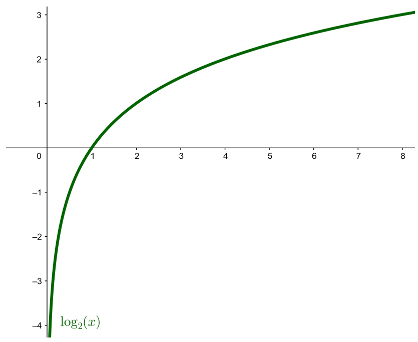
9.3.2. Gràfica

Podem deduir la forma general de la gràfica de qualsevol funció logarítmica a partir d'un exemple concret.

En representar gràficament una taula d'una funció logaritme, per exemple, la de base 2 en el domini $[0, 8]$, s'obté una gràfica de punts com aquesta:



A partir d'aquesta gràfica es pot deduir la gràfica de la funció. Així, en aquest cas, la gràfica de la funció logaritme de base 2 en el domini $[0,8]$ resulta



En la gràfica s'observa que la funció es defineix únicament per a valors positius, però la seva imatge abraça tots els valors reals. A més, observem que la gràfica de la funció passa pel punt $(1,0)$. Això passa en totes les funcions logarítmiques degut al fet que el logaritme es defineix a partir de les potències dels nombres. En particular, notem que la gràfica d'una funció logarítmica sempre queda a la dreta de l'eix Y.

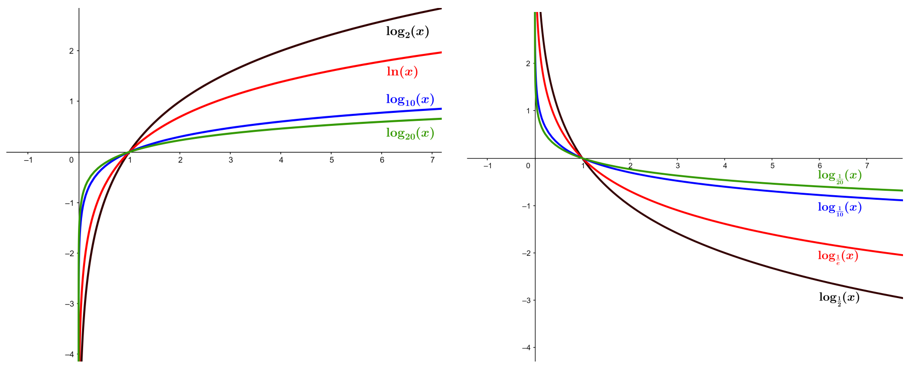
9.3.3. Propietats

D'acord amb els fets observats anteriorment, es compleixen certes propietats per a les funcions logarítmiques. Si escrivim $y = \log_a(x)$, amb $a > 0$ i $a \neq 1$, aquestes propietats són:

- El domini de qualsevol funció logarítmica de base a és igual a $\mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$, ja que correspon a la imatge de la funció exponencial de base a.
- La imatge de qualsevol funció logarítmica de base a és igual a tots els nombres reals: $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$, ja que és el domini de la funció exponencial de base a.
- La gràfica de qualsevol funció logarítmica sempre passa pel punt $(1,0)$.
- Si la base a és més gran que 1 $(a > 1)$:
  - Si $x_1 < x_2$, llavors $\log_a(x_1) < \log_a(x_2)$, és a dir, la funció creix en augmentar la variable. En definitiva, la funció és creixent. A més, no hi ha límit per al creixement de la funció: quan el valor de variable x augmenta, la imatge y també augmenta. Aquest creixement és més gran com més petita és la base.
  - Com més a prop de 0 és la variable x, el valor de la imatge y és menor; per això es diu que la funció $\log_a(x)$ tendeix a $-\infty$ quan la x tendeix a 0.
- Si la base a és menor que 1 $(a < 1)$:
  - Si $x_1 < x_2$, llavors $\log_a(x_1) > \log_a(x_2)$, és a dir, la funció decreix en augmentar la variable. En definitiva, la funció és decreixent. A més, no hi ha límit per al decreixement de la funció. Aquest decreixement és més gran com més gran és la base.
  - Com més gran és el valor de la variable x, més s'acosta el valor de la imatge y a 0, tot i que sense arribar a assolir-lo mai.

Aquestes propietats s'observen en les gràfiques de qualsevol funció logarítmica.

Identifiquem-les en les gràfiques següents:



La imatge de l'esquerra mostra les gràfiques de les funcions $\log_2(x)$, $\ln(x)$, $\log(x)$, $\log_{20}(x)$. Recordem que $\ln(x)$ és el logaritme neperià (de base e), i $\log(x)$ (sense indicar la base) fa referència al logaritme de base 10. Observem que, són funcions creixents perquè la base és major que 1, amb un creixement més gran com més petita és la base. A més, notem que com més a l'esquerra de, $x = 1$, per exemple, el valor de les funcions decreix molt ràpidament, sense límit concret.

La imatge de la dreta mostra les gràfiques de les funcions logarítmiques de bases inverses a les anteriors, és a dir, de bases $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{e}$, $\frac{1}{10}$ i $\frac{1}{20}$. Observem que són funcions decreixents perquè la base és menor que 1, amb un decreixement més gran com més gran és la base. A més, notem que, com més a l'esquerra de, $x = 1$, per exemple, el valor de les funcions creix ràpidament, sense límit concret.

Finalment, observem que les gràfiques $\log_a(x)$ i $\log_{\frac{1}{a}}(x)$ són simètriques respecte de l'eix X. Això és així perquè

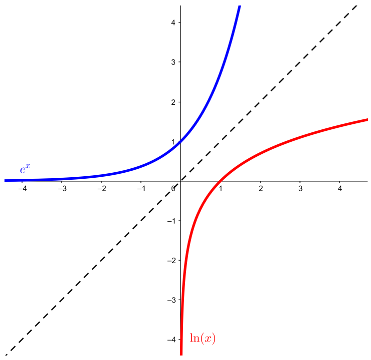
$$\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x)$$

Les funcions logarítmiques són importants per a estudiar fenòmens físics, per exemple, la descomposició radioactiva.

9.4. Relació entre les gràfiques exponencial i logarítmica

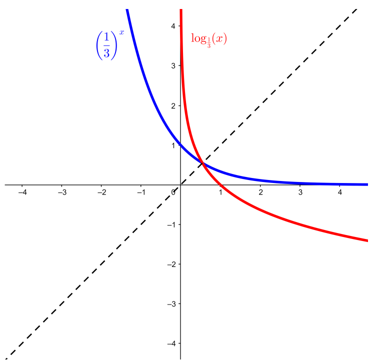
Hi ha una relació estreta entre les gràfiques d'una funció exponencial i d'una funció logarítmica de la mateixa base, atesa la definició del logaritme a partir de les potències de nombres. Les deduïm a partir d'algun exemple concret.

Considerem, per exemple, les gràfiques de la funció logaritme neperià, $\ln(x)$, i de la funció exponencial, e^x, i comparem-les. Recordem que la gràfica de qualsevol funció s'interpreta d'esquerra a dreta i s'ha d'analitzar amb precaució perquè sempre és aproximada i és possible no interpretar-la correctament.



En representar les dues gràfiques corresponents a $\ln(x)$ i e^x conjuntament, en el domini $[-4,4]$, per exemple, observem que ambdues funcions són simètriques respecte de la recta $y = x$. És a dir, que si es doblega el paper amb les dues funcions per la recta $y = x$, ambdues corbes coincideixen després del plegat.

Aquest fet també passa si les funcions tenen la base menor que 1. Per exemple, les funcions exponencial i logarítmica de base $\frac{1}{3}$: $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ i $\log_{\frac{1}{3}}(x)$ en el domini $[-4,4]$:



Tal com hem anticipat, es pot observar que les funcions són també simètriques respecte de la recta $y = x$.

Aquest fet no és solament aplicable a aquestes funcions. De manera general, es té que si dues funcions qualssevol són inverses una de l'altra, les seves gràfiques compleixen aquesta propietat: són simètriques respecte de la recta $y = x$. Això és fàcil d'explicar, ja que la inversa d'una funció intercanvia els papers de la x i la y. Per tant, la funció inversa ha de tenir la mateixa forma que la funció original, tret que els eixos X i Y s'han d'intercanviar.

9.5. Equacions exponencial i logarítmica

Equació exponencial. És una equació amb funcions exponencials.
Resoldre aquest tipus d'equacions no és fàcil en general, i no hi ha cap fórmula de resolució general. El que convé en aquests casos és agrupar al màxim i convenientment les potències que així ho permetin per a intentar substituir l'equació exponencial per una equació lineal o quadràtica. Per això és fonamental identificar i aplicar les propietats de les potències. A continuació hi ha alguns exemples d'això.

Què és una equació exponencial?
És una equació amb funcions exponencials. Per a resoldre una equació exponencial, convé agrupar al màxim les potències per a poder substituir l'equació exponencial per una equació lineal o quadràtica. De la mateixa manera, es poden resoldre sistemes d'equacions exponencials.

Un primer exemple d'equació exponencial de resolució senzilla a causa de la igualtat entre les bases podria ser aquest:

Exemple. Resolució d'equació exponencial (1).

$$2^{x+1} = 2^2$$

Com que les bases són iguals, els exponents han de ser iguals:

$$x + 1 = 2 \Rightarrow x = 2 - 1 = 1$$

Efectivament, $2^{1+1} = 2^2$.

Així mateix, la resolució d'equacions exponencials pot ser més complexa, com és per exemple la següent:

Exemple. Resolució d'equació exponencial (2).

$$7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$$

S'ha d'intentar treure 7^x com a factor comú aplicant les propietats de les potències:

$$7^x \cdot \left(1 + 7 + 7^2\right) = 2793$$

Operem els elements entre parèntesis:

$$7^x \cdot 57 = 2793$$

d'on resulta

$$7^x = \frac{2793}{57} = 49 = 7^2$$

i, per tant,

$$x = 2$$

Això es pot complicar més. És el cas d'una equació com aquesta:

Exemple. Resolució d'equació exponencial (3).

$$5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$$

S'ha d'intentar eliminar el denominador. Multipliquem tota l'expressió per 5^{x-2}:

$$5^{x-1} \cdot 5^{x-2} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3$$

Operem i passem tots els termes a l'esquerre:

$$5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$$

Reescrivim:

$$5 \cdot 5^{2x-4} - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$$

Agrupem termes de manera convenient:

$$5 \cdot \left(5^{(5x-2)}\right)^2 - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$$

Obtenim així una equació de segon grau amb incògnita 5^{x-2}. Anomenem $z = 5^{x-2}$ i intentem resoldre l'equació:

$$5z^2 - 2z - 3 = 0$$

Apliquem la fórmula per a les equacions de segon grau i obtenim

$$z = 1 \text{ i } z = -\frac{3}{5}$$

Comprovem si les solucions obtingudes compleixen l'equació original:

$z = -\frac{3}{5}$ no és possible perquè s'hauria de complir que $z = 5^{x-2} = -\frac{3}{5}$, que no possible perquè $5x - 2$ no pot ser negatiu.

$z = 1$ proporciona solució:

$$z = 5^{x-2} = 1 = 5^0 \Rightarrow 5^{x-2} = 5^0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

De la mateixa manera, també es poden resoldre sistemes d'equacions exponencials convertint-los en sistemes d'equacions lineals en manipular convenientment les potències. Aquest n'és un exemple:

Exemple. Resolució de sistema d'equacions exponencials.

$$\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases}$$

Reescrivim la primera equació de manera convenient:

$$5^x = 5^y \cdot 5^4 \Rightarrow 5^{x-y} = 5^4$$

Reescrivim també la segona equació de manera convenient:

$$2^x \cdot 2^y = 2^8 \Rightarrow 2^{x+y} = 2^8$$

El sistema original queda reduït a un sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

En resoldre aquest sistema, per exemple, per reducció, s'obtenim la solució

$$(x, y) = (6, 2)$$

Finalment, comprovem que la solució obtinguda satisfà el sistema original.

Equació logarítmica. És una equació on apareixen funcions logarítmiques. Resoldre aquest tipus d'equacions no és en general fàcil, i no hi ha cap fórmula general de resolució. El que convé en aquests casos és agrupar al màxim i convenientment els logaritmes que ho permetin per a intentar substituir l'equació logarítmica per una equació lineal o quadràtica. Per a això, és fonamental identificar i aplicar les propietats dels logaritmes. Vegem-ho amb la resolució d'alguns exemples.

Què és una equació logarítmica?
És una equació amb funcions logarítmiques. Per a resoldre una equació logarítmica, convé agrupar al màxim els logaritmes per a poder substituir l'equació logarítmica per una equació lineal o quadràtica. De la mateixa manera, es poden resoldre sistemes d'equacions logarítmiques.

Un exemple a resoldre podria ser l'equació següent:

Exemple. Resolució d'equació logarítmica.

$$2\log(x) - \log(x-16) = 2$$

Reescrivim el terme de l'esquerre, atès $2\log(x) = \log\left(x^2\right)$:

$$\log\left(x^2\right) - \log(x-16) = 2$$

Apliquem la propietat del logaritme del quocient, $\log\left(x^2\right) - \log(x-16) = \log\left(\frac{x^2}{x-16}\right)$:

$$\log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) = 2$$

Reescrivim el terme de la dreta, atès $2 = \log(100)$:

$$\log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) = \log(100)$$

d'on resulta

$$\frac{x^2}{x-16} = 100$$

Ordenem els termes:

$$x^2 - 100x + 1600 = 0$$

i es tracta de resoldre una equació de segon grau.

Apliquem la fórmula de resolució per a les equacions de segon grau i obtenim

$$x = 20 \text{ i } x = 80$$

Per acabar, comprovem si aquestes també verifiquen l'equació logarítmica inicial. En aquest cas, en substituir els valors en l'equació original, comprovem que ambdues són solució.

També es poden resoldre sistemes d'equacions logarítmiques procedint de manera similar, és a dir, intentant sempre agrupar els logaritmes que ho permetin per a convertir les equacions inicials en equacions lineals o quadràtiques. Un exemple a resoldre de sistema d'equacions logarítmiques podria ser el següent:ple a resoldre de sistema d'equacions logarítmiques, podria ser el següent:

Exemple. Resolució de sistema d'quacions logarítmiques.

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ \log(x) + \log(y) = 3 \end{cases}$$

La primera equació ja és lineal, i per tant ens centrem a intentar transformar la segona en una equació lineal.

Reescrivim la segona equació tenint en compte el logaritme d'un producte: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ i que $\log(1000) = 3$:

$$\log(x \cdot y) = \log(1000)$$

Aquesta equació es redueix $x \cdot y = 1000$, i per tant, es tracta de resoldre el sistema

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ x \cdot y = 1000 \end{cases}$$

En resoldre aquest sistema d'equacions, obtenim dues alternatives:

$$(x, y) = (40, 25) \text{ o bé } (x, y) = (25, 40)$$

Finalment, comprovem les possibles solucions obtingudes en el sistema original.

Resum

Funcions exponencials i logarítmiques

Funcions exponencials

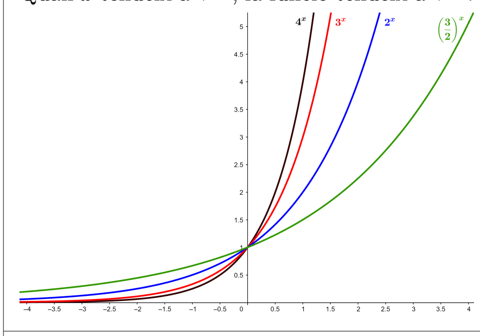
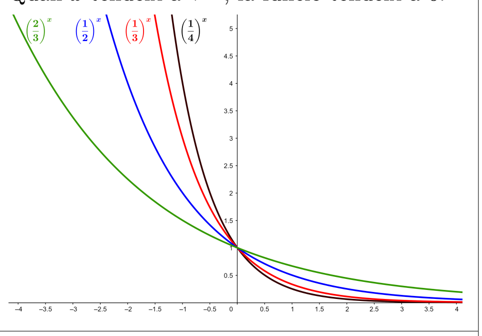
Definició. Una funció exponencial de base $a > 0$ és la que es defineix a partir de les potències dels nombres.

Expressió. $y = a^x$, amb $a > 0$.
Una de les funcions exponencials més importants és la de base $e \cong 2.71828182845904523$.
La seva expressió és $y = e^x$.

Propietats.

- Domini: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Imatge: $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$
- No tenen ni màxims ni mínims.
- Passen pel punt $(0, 1)$.

Gràfiques.

<table>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$a < 1$</td></tr>
<tr><td>Funció creixent
Quan x tendeix a $-\infty$, la funció tendeix a 0.
Quan x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a $+\infty$.
</td><td>Funció decreixent
Quan x tendeix a $-\infty$, la funció tendeix a $+\infty$.
Quan x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a 0.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Les gràfiques de a^x i $\left(\frac{1}{a}\right)^x$, per a $a > 0$ qualsevol, són simètriques respecte de l'eix Y.</td></tr>
</table>

Logaritme

Definició. El logaritme de base a, amb $a > 0$, d'un nombre real x és

$$\log_a(x) = y \text{ si } x = a^y$$

Propietats.

1) $\log_a(a) = 1$ i $\log_a(1) = 0$.

2) El logaritme del producte és igual a la suma de logaritmes:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

3) El logaritme d'una potència és igual al producte de l'exponent pel logaritme de la base:

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$$

4) El logaritme d'un quocient és el logaritme del numerador menys el logaritme del denominador:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

5) És possible relacionar dos logaritmes de diferents bases, a i b, amb aquesta fórmula:

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Funcions logarítmiques

Definició. La funció logarítmica de base a, amb $a > 0$ i $a \neq 1$, és la funció inversa de la funció exponencial de base a.

Expressió. $y = \log_a(x)$ si $x = a^y$.
Una de les funcions logarítmiques més importants és la de base $e \cong 2.71828182845904523$.
La seva expressió és $y = \ln(x)$.
Quan la base de la funció logaritme és el nombre 10, s'expressa simplement $y = \log(x)$.

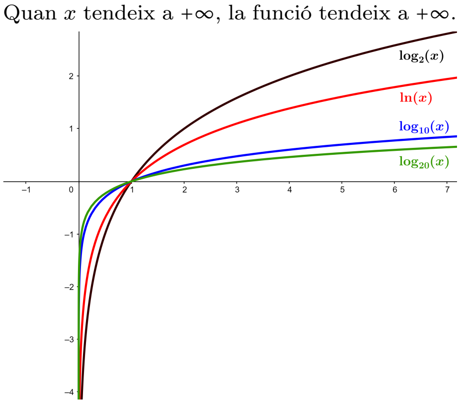
Propietats

- Domini: $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$
- Imatge: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- No tenen ni màxims ni mínims.
- Passen pel punt $(1, 0)$.

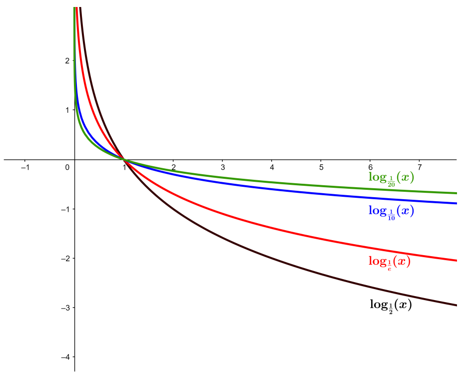
Gràfiques

<table>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$a < 1$</td></tr>
<tr><td>Funció creixent

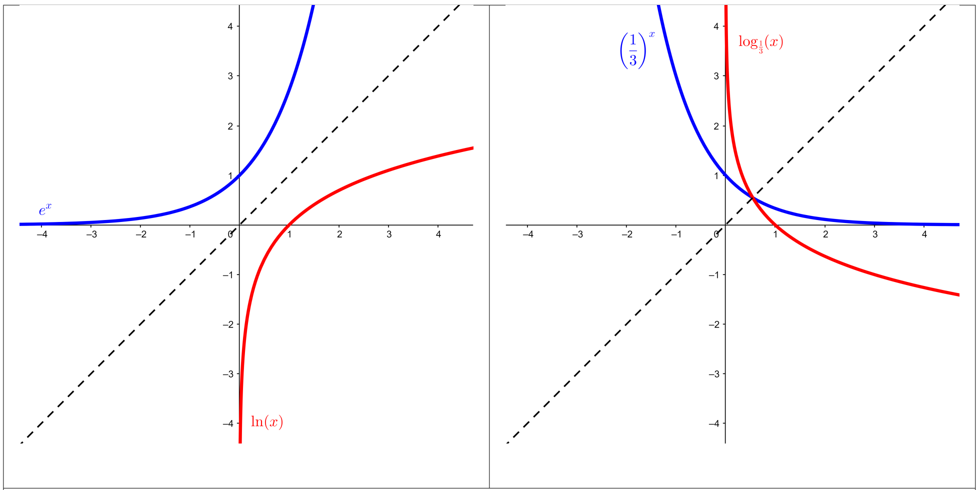
Quan x tendeix a 0, la funció tendeix a $-\infty$.

Quan x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a $+\infty$.
</td><td>Funció decreixent

Quan x tendeix a 0, la funció tendeix a $+\infty$.

Quan x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a $-\infty$.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Les gràfiques de $\log_a$ i $\log_{\frac{1}{a}}$, per a $a > 0$ qualsevol, són simètriques respecte de l'eix X.</td></tr>
</table>

Gràfiques de les funcions exponencials i logarítmiques



Les gràfiques de les funcions exponencials i logarítmiques de la mateixa base són simètriques respecte de la recta $y = x$.

Equacions exponencials i logarítmiques

Equació exponencial. És una equació que inclou funcions exponencials. Per a resoldre una equació exponencial, s'han d'agrupar al màxim i de manera convenient les potències per tal de substituir l'equació exponencial per una equació lineal o quadràtica.

De la mateixa manera, es poden resoldre sistemes d'equacions exponencials convertint-los en sistemes d'equacions lineals. Això es fa manipulant convenientment les potències.

Exemple d'equació	*Exemple de sistema*
$7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$ $7^x + 7 \cdot 7^x + 7^2 \cdot 7^x = 2793$ $7^x \cdot \left(1 + 7 + 7^2\right) = 2793$ $7^x \cdot 57 = 2793$ $7^x = \frac{2793}{57} = 49$ $7^x = 7^2$ d'on resulta $x = 2$ que també verifica l'equació original.	$\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases}$ $5^x = 5^y \cdot 625 \Rightarrow 5^x = 5^y \cdot 5^4 \Rightarrow 5^{x-y} = 5^4$ $2^x \cdot 2^y = 256 \Rightarrow 2^x \cdot 2^y = 2^8 \Rightarrow 2^{x+y} = 2^8$ per tant, es tracta de resoldre $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$ d'on resulten $x = 6$ i $y = 2$ que també verifiquen el sistema original.

Equació logarítmica. És una equació amb funcions logarítmiques. Per a resoldre una equació logarítmica, s'han d'agrupar al màxim i de manera convenient els logaritmes per tal de substituir l'equació logarítmica per una equació lineal o quadràtica.

De la mateixa manera, es poden resoldre sistemes d'equacions logarítmiques convertint-los en sistemes d'equacions lineals. Això es fa manipulant convenientment els logaritmes.

Exemple d'equació	*Exemple de sistema*
$$2\log(x) - \log(x-16) = 2$$ $$\log\left(x^2\right) - \log(x-16) = 2$$ $$\log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) = \log(100)$$ $$\frac{x^2}{x-16} = 100$$ $$x^2 - 100x + 1600 = 0$$ d'on resulten $$x = 20 \text{ i } x = 80$$ que també verifiquen l'equació original.	$$\begin{cases} x + y = 65 \\ \log(x) + \log(y) = 3 \end{cases}$$ $\log(x) + \log(y) = 3 \Rightarrow \log(x \cdot y) = 3 = \log(1000)$ per tant, es tracta de resoldre $$\begin{cases} x + y = 65 \\ x \cdot y = 1000 \end{cases}$$ d'on resulten $$x = 40 \text{ i } y = 25 \text{ o bé } x = 25 \text{ i } y = 40$$ que també verifiquen el sistema original.

Exercicis resolts

1. **Trobeu una funció exponencial del tipus $f(x) = a^x$ que compleixi $f(6) = 64$.**

Solució:
S'ha de complir $f(6) = a^6 = 64$. Sabem $2^6 = 64$. Aleshores, una possibilitat és considerar $a = 2$. Per tant, una funció exponencial que compleix la condició demanada és $f(x) = 2^x$.

2. **Determineu quines d'aquestes funcions són creixents i quines decreixents, i ordeneu-les de major creixement a major decreixement. Justifiqueu la resposta.**

$$f(x) = 11^x, g(x) = 13^x, h(x) = 0.1^x, t(x) = 0.3^x$$

Solució:

$f(x) = 11^x$ i $g(x) = 13^x$ són creixents, perquè són funcions exponencials i la seva base és major que 1.

$h(x) = 0.1^x$ i $t(x) = 0.3^x$ són decreixents, perquè són funcions exponencials i la seva base és menor que 1.

Per a ordenar aquestes funcions exponencials de major creixement a major decreixement, cal tenir en compte que si la base és més gran que 1, el creixement de la funció és més gran com més gran és la base. En canvi, si la base és menor que 1, el decreixement de la funció és més gran com més petita és la base. Per tant, l'ordre ha de ser aquest:

$$g(x) = 13^x, f(x) = 11^x, t(x) = 0.3^x \text{ i } h(x) = 0.1^x$$

3. **Calculeu aquests logaritmes sense usar la calculadora:**

(a) $\log_2(32)$

(b) $\log_9(81)$

(c) $\log_5\left(5^3\right)$

(d) $\log_3\left(\sqrt{243}\right)$

Solució:
Per a trobar el valor d'aquests logaritmes, cal fer tres coses.
En primer lloc, conèixer el valor d'algunes potències bàsiques, per exemple:

$$32 = 2^5, 81 = 9^2 \text{ i } 243 = 3^5$$

En segon lloc, aplicar la suma de logaritmes per al logaritme d'un producte, en particular

$$\log_a(x^n) = \log_a(\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{n } vegades}) = \underbrace{\log_a(x) + \ldots \log_a(x)}_{\text{n } vegades} = n \cdot \log_a(x)$$

Finalment, recordar que $\log_a(a) = 1$.
D'acord amb això, es té:

(a) $\log_2(32) = \log_2(2^5) = 5 \cdot \log_2(2) = 5 \cdot 1 = 5$

(b) $\log_9(81) = \log_9(9^2) = 2 \cdot \log_9(9) = 2 \cdot 1 = 2$

(c) $\log_5(5^3) = 3 \cdot \log_5(5) = 3 \cdot 1 = 3$

(d) $\log_3\left(\sqrt{243}\right) = \log_3\left(243^{\frac{1}{2}}\right) = \log_3\left(3^5\right)^{\frac{1}{2}} = \log_3\left(3^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{5}{2} \cdot \log_3(3) = \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$

4. **Trobeu una funció logarítmica del tipus $f(x) = \log_a(x)$ $\log_a(x)$ que compleixi $f(125) = 3$.**

Solució:
S'ha de complir $f(125) = \log_a(125) = \log_a\left(5^3\right) = 3$. Per la definició i propietats de la funció logaritme, resulta

$$3 = \log_a\left(5^3\right) = 3 \cdot \log_a(5) \Rightarrow 1 = \log_a(5)$$

que només és possible si $a = 5$. Per tant, la funció logarítmica a considerar és $f(x) = \log_5(x)$.

5. **Determineu quines d'aquestes funcions són creixents i quines decreixents, i ordeneu-les de major creixement a major decreixement. Justifiqueu la resposta.**

$$f(x) = \log_3(x), g(x) = \log_{0.2}(x), h(x) = \log_{13}(x), t(x) = \log_{0.1}(x)$$

Solució:

$f(x) = \log_3(x)$ i $h(x) = \log_{13}(x)$ són creixents, perquè són funcions logarítmiques i la seva la seva base és major que 1.

$g(x) = \log_{0.2}(x)$ i $t(x) = \log_{0.1}(x)$ són decreixents, perquè són funcions logarítmiques i la seva base és menor que 1.

Per a ordenar aquestes funcions logarítmiques de major creixement a major decreixement, cal tenir en compte que si la base és més gran que 1, el creixement de la funció és més gran com més petita és la base. En canvi, si la base és menor que 1, el decreixement de la funció és més gran com més gran és la base. Per tant, l'ordre ha de ser aquest:

$$f(x) = \log_3(x), h(x) = \log_{13}(x), t(x) = \log_{0.1}(x) \text{ i } g(x) = \log_{0.2}(x)$$

6. **Trobeu el valor de x que compleix aquestes igualtats:**

(a) $\log_4(x) = 4$

(b) $\log_x(27) = x$

(c) $\log_{\frac{1}{2}}(4) = x$

(d) $\log_3\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{3}{2}$

Solució:
Per a resoldre aquestes igualtats, cal aplicar la definició del logaritme, és a dir,

$$y = \log_a(x) \text{ si } x = a^y$$

D'acord amb aquesta definició, tenim:

(a) $4 = \log_4(x)$ si $x = 4^4 = 256 \Rightarrow x = 256$

(b) $\log_x(27) = x$ si $27 = x^x \Rightarrow x = 3$

(c) $\log_{\frac{1}{2}}(4) = x$ si $4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2^x} \Rightarrow x = -2$, ja que $4 = 2^2$

(d) $\log_3\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{3}{2}$ si$\sqrt{x} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} \Rightarrow x = 3^3 = 27$

7. **Resoleu aquestes equacions:**

- $3^{2x} - 5 \cdot 3^x = 36$
- $2\log(10x) - \log(12 - 4x) = 2$

Solució:

$3^{2x} - 5 \cdot 3^x = 36$	$\log\left(100x^2\right) - \log\left(12 - 4x\right) = \log\left(10^2\right)$
Per la propietat d'una potència d'una potència, reescrivim $$(3^x)^2 - 5 \cdot 3^x = 36$$ Agrupem de manera convenient: $$(3^x)^2 - 5 \cdot 3^x - 36 = 0$$ Prenem $t = 3^x$ i substituim en l'equació: $$t^2 - 5t - 36 = 0$$ Es tracta d'una equació de segon grau. Podem resoldre-la aplicant la fórmula, i obtenim les solucions $$t = -4,\ t = 9$$ Desfem el canvi per a trobar els valors de x: $3^x = t = -4 = -2^2$ no és possible per ser -2^2 un valor negatiu. $3^x = t = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2$. Substituïm $x = 2$ en l'equació original i comprovem que sí n'és solució: $$3^{2\cdot 2} - 5 \cdot 3^2 = 81 - 45 = 36$$	Per la propietat del quoacient de logaritmes, $$\log\left(\frac{100x^2}{12 - 4x}\right) = \log(10^2)$$ Per tant, $$\frac{100x^2}{12 - 4x} = 100$$ Simplifiquem: $$\frac{x^2}{12 - 4x} = 1$$ Operem: $$x^2 = 12 - 4x$$ I ordenem termes: $$x^2 + 4x - 12 = 0$$ Resolem aplicant la fórmula per equacions de segon grau i obtenim les solucions $$x = -6 \text{ i } x = 2$$ Finalment, substituïm els valors trobats en l'equació original i comprovem que ambdós en són solució.

8. **Resoleu aquestes equacions:**

- $\ln(x) + \ln(x - 1) = 0$
- $\log(x) - \log\left(x^2\right) = \log(7)$

Solució:

<table>
<tr><th>$\ln(x) + \ln(x-1) = 0$</th><th>$\log(x) - \log\left(x^2\right) = \log(7)$</th></tr>
<tr><td>Apliquem la propietat del producte de logaritmes:
$$\ln\left(x \cdot (x-1)\right) = 0$$
Apliquem l'exponencial i tenim en compte que $e^0 = 1$:
$$x \cdot (x-1) = 1$$
Operem:
$$x^2 - x - 1 = 0$$
Resolem l'equació de segon gau i obtenim
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
Finalment, comprovem si les solucions obtingudes satisfan l'equació original.</td><td>Apliquem la propietat del quocient de potències:
$$\log\left(\frac{x}{x^2}\right) = \log(7)$$
Per tant, es tracta de resoldre
$$\frac{x}{x^2} = 7$$
Ordenem termes:
$$7x^2 - x = 0$$
I operem:
$$x \cdot (7x - 1) = 0$$
d'on resulta
$$x = 0, x = \frac{1}{7}$$
Finalment, comprovem les possibles solucions en l'equació original: $x = 0$ no és possible; en canvi, si que n'és solució el valor $x = \frac{1}{7}$</td></tr>
</table>

Exercicis per a practicar amb les solucions

9. **Trobeu les funcions inverses de** $f(x) = e^{3x}$ **i** $g(x) = \ln(4x + 3)$**.**

10. **Resoleu les equacions següents:**

(a) $2^{x-1} = 2^6$

(b) $5^{x+3} = \frac{1}{5}$

(c) $3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} = -27$

(d) $\log_5(4x) = 2 \; x = \frac{25}{4}$

(e) $\log_9(x+1) + \log_9(9 \cdot (x+1)) = 2$

(f) $3\log_2(x) - 2\log_4(x) = 2$

11. **Una substància es desintegra seguint la funció**

$$D(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{5}}$$

on D **és la quantitat (en grams) de substància que hi ha al cap de** t **anys. Quina quantitat de substància hi haurà d'aquí a 15 anys?**

12. **Per a predir el creixement de la població d'una ciutat, s'utilitza la funció**

$$P(t) = P_0 \cdot e^{0.03t}$$

on P_0 **representa la població inicial i** t **representa el temps (en anys). Si la població actual de la ciutat és de 50.000 habitants, quant de temps (en anys) haurà de passar per tal que la població es dupliqui?**

Solucions:

9. $$f^{-1}(x) = \ln\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$$
$$g^{-1}(x) = \frac{e^x - 3}{4}$$

10. (a) $x = 5$
 (b) $x = -4$
 (c) $x = 1, x = 2$
 (d) $x = 2$
 (e) $x = 2$

11. 12.5 grams.

12. Prop de 23.1 anys.

10. Continuïtat de funcions

Índex

10.1. Límits de funcions

10.1.1. Noció intuïtiva de límit

El límit funcional és un concepte relacionat amb la tendència dels valors d'una funció a mesura que varien els valors de la variable i tendeixen a un valor determinat. El límit d'una funció en un valor determinat de x és igual a un nombre al qual tendeix la funció quan la variable tendeix a aquest valor, aproximant-se cada cop més al nombre objectiu però no arribant mai a prendre aquest valor.

El **límit d'una funció** en un valor x és igual a un nombre al qual tendeix la funció quan la variable tendeix a aquest valor (sense arribar mai a ser-ho). Si el límit d'una funció $f(x)$ en un valor a és igual a b, s'escriu d'aquesta manera:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

També es diu que "*la funció $f(x)$ té límit b quan la x tendeix a a*". Per exemple, si $f(x)$ és una funció que compleix que, quan la x tendeix a 3, la funció tendeix a 1, aquest fet s'escriurà així:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 1$$

Amb la notació anterior, es pot entendre que $x \to 3$ és una forma de representar la frase "*x tendeix a 3*", que vol dir que el nombre x s'aproxima infinitament a 3 però sense arribar mai a prendre aquest valor.

Així, doncs, el límit d'una funció en un valor a dona una idea de la tendència de la funció quan el valor de la x tendeix a aquest valor. Per a estudiar el límit d'una funció en un valor, es pot crear una taula amb diferents valors de la funció el component de la qual x tendeix al valor a (però mai és a).

Exemple. Noció intuïtiva de límit.

Si la funció és $f(x) = 2x + 1$, i es vol calcular

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

podem avaluar uns quants punts que s'aproximin a 1 de la manera següent:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \longrightarrow & f(0) = 1 \\ 0.1 & \longrightarrow & f(0.1) = 1.2 \\ 0.5 & \longrightarrow & f(0.5) = 2 \\ 0.7 & \longrightarrow & f(0.7) = 2.4 \\ 0.9 & \longrightarrow & f(0.9) = 2.8 \\ 0.99 & \longrightarrow & f(0.99) = 2.98 \end{array}$$

Sembla evident que com més a prop d'1 és la x més a prop de 3 és $f(x)$. Així, doncs, podem deduir

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3.$$

Exemple. Noció intuïtiva de límit.

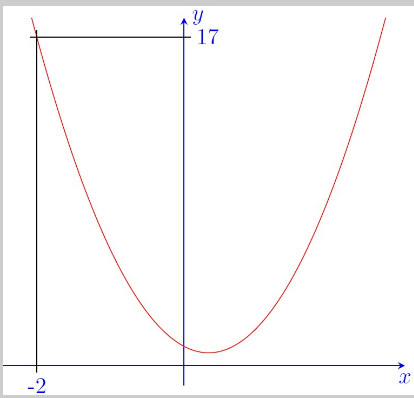
Si $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, podem intentar calcular el límit d'aquesta funció quan x tendeix a -2. Tornem a avaluar la funció en uns quants punts aproximant-se a -2 igual que abans:

$$\begin{array}{rcl} -3 & \longrightarrow & f(-3) = 34 \\ -2.9 & \longrightarrow & f(-2.9) = 32.03 \\ -2.5 & \longrightarrow & f(-2.5) = 24.75 \\ -2.3 & \longrightarrow & f(-2.3) = 21.47 \\ -2.1 & \longrightarrow & f(-2.1) = 18.43 \\ -2.01 & \longrightarrow & f(-2.01) = 17.1403 \\ -2.001 & \longrightarrow & f(-2.001) = 17.014003 \end{array}$$

Amb la informació anterior, és fàcil deduir la seqüència de valors de la funció que s'aproxima a 17. Per tant,

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 17$$

cosa que es pot observar a la gràfica



10.1.2. Concepte i definició

A partir de la noció intuïtiva que podem deduir dels exemples anteriors, donem la definició formal del concepte de límit d'una funció:

El **límit de la funció** $f(x)$ quan x tendeix a al valor a és b:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

si es compleix que, donat qualsevol nombre real $\varepsilon > 0$, hi ha un nombre real $\delta > 0$ de manera que si $0 < |x - a| < \delta$ es compleix $|f(x) - b| < \varepsilon$.

En altres paraules, diem que **una funció** $f(x)$ **té límit** b **quan** x **tendeix a** a si, i solament si, donat un interval qualsevol centrat en b, hi ha un interval de centre $a$de manera que tots els punts d'aquest interval, excepte el punt a, tenen la seva imatge en l'interval de centre b anterior.

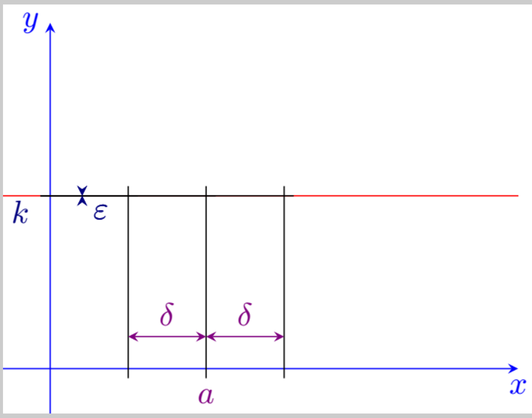
En general, no es recorre a la definició de límit per buscar el límit d'una funció en un punt, sinó que s'utilitzen límits ja coneguts, unes regles senzilles de càlcul amb límits i l'ús de taules de valors amb successions el límit de les quals sigui el valor en què es vol buscar el límit.

Abans de veure totes aquestes tècniques, vegem exemples senzills que expliquen aquesta definició i l'enllacen amb la noció intuïtiva de límit funcional que hem discutit abans.

Exemple. Límit d'una funció constant.
Donada la funció constant $f(x) = k$, per k un nombre qualsevol, es compleix

$$\lim_{x \to a} f(x) = k$$

per a qualsevol valor a.



Prenem un interval centrat en k tan petit com vulguem (en la imatge agafem $\varepsilon > 0$ tan petita que gairebé sembla 0). Considerem qualsevol interval centrat en a i anomenem-lo $(a - \delta, a + \delta)$ per $\delta > 0$ qualsevol. La imatge de cada punt d'aquest interval per la funció valdrà exactament k (ja que la funció és constant), i per tant cau dins l'interval $(k - \varepsilon, k + \varepsilon)$.

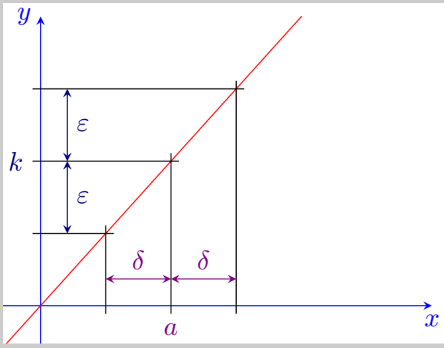
Exemple. Límit de la funció identitat.

Considerem ara la funció identitat $f(x) = x$. Per a qualsevol valor a es compleix

$$\lim_{x\to a} f(x) = a.$$

Agafem qualsevol valor $\varepsilon > 0$ i considerem l'interval $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$, que no es més que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ perquè $f(a) = a$. Ara hem de trobar un valor $\delta > 0$ que depengui només de la ε (però no del valor a) tal que la imatge de l'interval $(a-\delta, a+\delta)$ estigui dins de l'interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Això és, considerant que avaluar un interval no és més que evaluar tots els punts que hi pertanyen,

$$f((a-\delta, a+\delta)) \subseteq (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon).$$



En el nostre cas de la funció identitat $f(x) = x$, no és més que trobar un $\delta > 0$ tal que

$$(a-\delta, a+\delta) \subseteq (a-\varepsilon, a+\varepsilon).$$

Això es compleix prenent qualsevol $\delta \leq \varepsilon$.

10.1.3. Operacions amb límits

El càlcul de límits respecta habitualment les operacions bàsiques: si se sumen, resten, multipliquen, divideixen, i es calcula la potència del límit de dues funcions, dona el límit d'operar aquestes dues funcions. Això és:

Suma i resta El límit de la suma (o resta) de dues funcions en un punt és igual a la suma (o resta) de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir,

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

Producte El límit del producte de dues funcions en un punt és igual al producte de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir,

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Divisió El límit del quocient de dues funcions en un punt és igual al quocient de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió sempre que el denominador no sigui 0, és a dir,

Si observem les dues primeres propietats mencionades, podem veure que el càlcul del límit d'un polinomi en qualsevol número no és mes que el valor que pren el polinomi en aquest número particular. Això és degut al fet que un polinomi no conté més que sumes, restes i productes, el límit dels quals no és més que la suma, resta i producte de límits. Per tant, només cal calcular el límit de x, que coincideix, tal com hem vist en els exemples anteriors, amb el nombre al qual tendeix la x, i operar-lo amb les operacions del polinomi.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

$\boxed{\textbf{Exponencial}}$ El límit de l'exponencial d'una funció per una altra en un punt és igual a l'exponencial de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió sempre que ambdues funcions no prenguin el valor 0 alhora, és a dir,

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} f(x)^{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

10.1.4. Límits laterals

El **límit lateral esquerre** d'una funció $f(x)$en un punt a és el límit de la funció quan es considera que la variable només pot prendre valors més petits que el punt, això és, el valor que pren la funció quan ens aproximem al punt objectiu des de punts per l'esquerra d'aquest. Aquest límit es denota per

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

El **límit lateral dret** d'una funció $f(x)$ en un punt a és el límit de la funció quan es considera que la variable només pot prendre valors més grans que el punt, això és, el valor que pren la funció quan ens aproximem al punt objectiu des de punts per la dreta d'aquest. Aquest límit es denota per

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$$

En particular, podem veure que si el límit d'una funció en un cert punt existeix, coincidirà amb els límits laterals quan aquests tinguin sentit. El fet recíproc també és cert: si els dos límits laterals existeixen i coincideixen amb el mateix valor, el límit de la funció també existirà i prendrà el mateix valor. Tanmateix, si els dos límits laterals prenen valors diferents, el límit de la funció en aquell punt no existeix (encara que la funció sí que sigui definida en aquell punt).

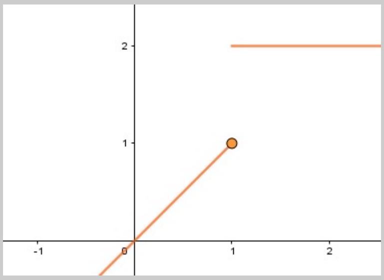
Matemàticament, això es pot escriure

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) \text{ existeix i val } b \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = b}$$

Exemple. Límits laterals.

Considerem la funció definida a trossos

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Observem que el límit per l'esquerra en 1 dona

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1,$$

mentre que el límit per la dreta val

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2.$$

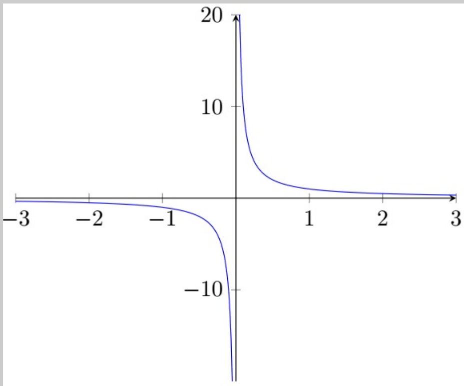
Com els dos límits no coincideixen, podem afirmar que el límit de la funció $f(x)$ quan $x \to 1$ no existeix, tot i que la funció en aquest punt és definida i pren valor $f(1) = 1$.

En canvi, si calculem els límits laterals quan $x \to 1.5$, podem veure que els dos existeixen i valen 2, per tant $\lim_{x \to 1.5} f(x) = 2$ i coincideix amb el valor $f(1.5)$.

Exemple. Límits laterals divergents.
Considerem ara la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$ i estudiem-ne els seus límits laterals quan $x \to 0$.

Per a calcular el límit lateral per la dreta, hem de considerar valors positius de x que aproximin 0:

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longrightarrow & f(1) = 1 \\ 0.1 & \longrightarrow & f(0.1) = 10 \\ 0.01 & \longrightarrow & f(0.01) = 100 \\ 0.001 & \longrightarrow & f(0.001) = 1000 \\ 0.0001 & \longrightarrow & f(0.0001) = 10000 \end{array}$$



És fàcil adonar-se'n que, com més ens aproximem al valor 0 per la dreta, més gran és el valor que pren la funció, però aquesta no s'aproxima pas a cap nombre en concret, sinó que creix infinitament. Per aquest motiu, direm que el límit lateral a 0 per la dreta **divergeix**:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

De manera similar, es pot comprovar com el límit lateral a 0 per l'esquerra també divergeix:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

Només amb un d'aquests dos fets ja podem afirmar que el límit de la funció en 0 no existeix. A més, al contrari que en l'exemple anterior, la funció no existeix en aquest punt.

10.1.5. Límits a l'infinit

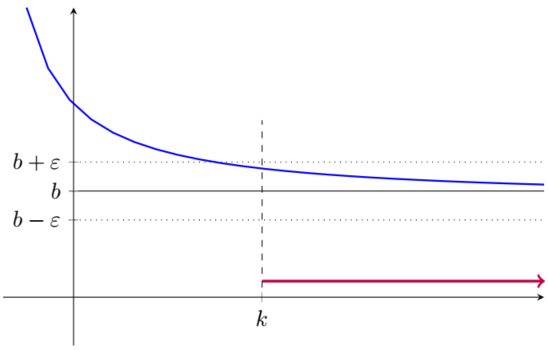
Es diu que el **límit d'una funció** $f(x)$ **quan** x **tendeix a** $+\infty$ val b si, per a qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix un cert nombre k tal que, per a $x > k$, $|f(x) - b| < \varepsilon$. De manera similar, es diu que el **límit d'una funció** $f(x)$ **quan** x **tendeix a** $-\infty$ val b si, per a qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix un cert nombre k tal que, per a $x < k$, $|f(x) - b| < \varepsilon$.

El concepte d'infinit no es comença a fer servir assíduament fins al segle xv per a designar allò que és més gran que qualsevol altra cosa imaginable. És llavors que es comença a usar com a símbol una corba denominada lemniscata ∞.

Aquests límits es denoten respectivament

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Intuïtivament, que el punt b sigui el límit de la funció en $\pm\infty$ vol dir que la funció s'apropa més a b com més gran sigui el punt x en què l'avaluem. En particular, tots els nombres més grans que un cert nombre k són molt a prop de b (en l'interval de radi ε), tal com es pot veure en la gràfica:



Per a poder fer-nos una idea de quin és el valor d'aquest límit, podem avaluar la funció en nombres cada cop més grans de manera similar a com havíem fet abans.

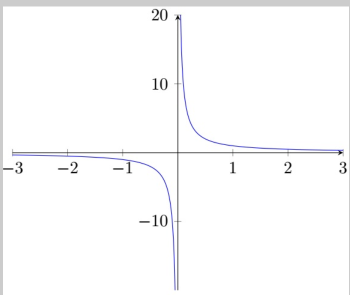
Exemple. Càlcul de límits a l'infinit.
Considerem de nou la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$ i estudiem els seus límits en l'infinit.
Per a calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, avaluem

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longrightarrow & f(1) = 1 \\ 10 & \longrightarrow & f(10) = 0.1 \\ 100 & \longrightarrow & f(100) = 0.01 \\ 1000 & \longrightarrow & f(1000) = 0.001 \\ 10000 & \longrightarrow & f(10000) = 0.0001 \\ 100000 & \longrightarrow & f(100000) = 0.00001 \end{array}$$

d'on podem deduir

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Per a demostrar-ho, hem de buscar el valor k (en funció de ε) tal que, per a $x > k$, tenim $|f(x) - 0| < \varepsilon$. En particular, si agafem $k \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$, la condició se satisfà.



De manera similar podem comprovar com el límit en $-\infty$ també satisfà:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Exemple. Càlcul del límit en l'infinit d'un polinomi.

Calcular el límit d'un polinomi a l'infinit és un tasca senzilla si analitzem cadascun dels monomis que el conformen per separat.

A mesura que x pren valors més grans, el terme que creix a més velocitat serà sempre aquell que té l'exponent més gran, i per tant el límit del polinomi quan $x \to +\infty$ serà ∞ amb el mateix signe que el coeficient del monomi de grau superior al polinomi (**terme dominant**).

Per exemple, $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 - x - 7 = +\infty$, mentre que $\lim_{x\to+\infty} -x^5 + 2x^2 + 7 = -\infty$, ja que els termes de grau inferior creixen cap a ∞ a velocitat més lenta que el terme dominant, i per tant, quan x és prou gran, restar-los no fa variar pràcticament el valor del polinomi.

Per altra banda, el càlcul del límit d'un polinomi quan $x \to -\infty$ serà ∞, però per a saber el signe corresponent hem de separar dos casos:

- Si el grau del terme dominant és **parell**, el signe serà el mateix que en el del coeficient del del monomi de major grau.
- Si el grau del terme dominant és **senar**, el signe serà oposat al del coeficient del monomi de major grau, ja que estarem avaluant nombres negatius i per tant el signe haurà de canviar.

Amb els exemples anteriors, $\lim_{x\to-\infty} 3x^2 - x - 7 = -\infty$, i $\lim_{x\to-\infty} -x^5 + 2x^2 + 7 = +\infty$.

10.1.6. Regles bàsiques de càlcul de límits

A l'hora de trobar límits hi ha algunes regles senzilles que es poden deduir de la definició de límit i que és útil tenir presents per a agilitzar el càlcul:

$\boxed{k \cdot \infty = \infty, k \neq 0}$ En un producte, si un factor tendeix a infinit i l'altre tendeix a un e 0, el producte tendeix a infinit i té un signe que resulta del signe de l'infinit del primer factor multiplicat pel signe del nombre al qual tendeix el segon factor.

Exemple. Càlcul de límits de tipus $k \cdot \infty = \infty, k \neq 0$.

- $\lim_{x\to+\infty} (2x^2 + 1) \cdot \left(4 - \frac{1}{x}\right) = [+\infty \cdot 4] = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} 5x \cdot \left(4 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x}\right) = [-\infty \cdot 4] = -\infty$
- $\lim_{x\to0^+} (-3x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x} = [-3 \cdot (+\infty)] = -\infty$
- $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^5} \cdot \left(-3 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x}\right) = [-\infty \cdot (-3)] = +\infty$

$\boxed{+\infty + \infty = +\infty, k + \infty = +\infty, \ -\infty - \infty = -\infty, k - \infty = -\infty}$ En una suma, si un o més sumands tendeixen a infinit amb el mateix signe, la suma tendeix a infinit amb el signe corresponent.

Exemple. Càlcul de límits de tipus $k + \infty = \infty$, $+\infty + \infty = +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} + 2x^2 + 7\right) = \left[-\infty + 7\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} + 7 + \frac{2}{x}\right) = \left[+\infty + 7\right] = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} + x\right) = \left[+\infty + \infty\right] = +\infty$

$\boxed{\frac{k}{\infty} = 0}$ En un quocient, si el denominador tendeix a infinit i el numerador tendeix cap a una constant k, el quocient tendeix a 0.

Exemple. Càlcul de límits de tipus $\frac{k}{\infty} = 0$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{6}{x^4 - 3} = \left[\frac{6}{-} + \infty\right] = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{5 + 2x}{4 - \frac{6}{x}} = \left[\frac{5}{+\infty}\right] = 0^+$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4 - \frac{6}{x}}{2x + 4} = \left[\frac{4}{-\infty}\right] = 0^-$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^4 + 2}{\frac{6}{x^2+8}} = \left[\frac{2}{+\infty}\right] = 0^+$

$\boxed{\frac{k}{0} = \infty, k \neq 0}$ En un quocient, si el numerador tendeix a una constant diferent de 0 i el denominador tendeix a 0, el quocient tendeix a infinit amb un signe que resulta del signe per a la direcció que s'aproxima el 0 del denominador multiplicat pel signe del nombre al qual tendeix el numerador.

Exemple. Càlcul de límits de tipus $\frac{k}{0} = \infty, k \neq 0$.

- $\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{x^2 + 2}{x - 4} = \left[\frac{18}{0^+}\right] = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{3x^2 + 1}{x - 2} = \left[\frac{13}{0^-}\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{3x^2 + 1}{(x - 2)^2} = \left[\frac{13}{0^+}\right] = +\infty$

10.1.7. Indeterminacions

Normalment, per a poder calcular el límit d'una funció en un punt ens basarem en les propietats de càlcul estudiades prèviament. Però què passa quan estem en un dels casos en què no podem aplicar-les perquè no hi funcionen (com per exemple quan el límit del denominador d'una fracció val 0, o quan tant la base com l'exponent d'una potència valen 0)?

Hi ha molts casos en què el límit de la funció en un punt no es pot calcular perquè el resultat no és cap nombre; ni tan sols és infinit. En aquests casos diem que som davant d'una **indeterminació**, i cadascuna s'ha de resoldre d'una manera particular per a poder trobar el valor del límit en aquell punt.

Vegem els diferents tipus d'indeterminacions:

$\boxed{\text{Indeterminació de tipus } \frac{0}{0}}$ Se sol donar quan la nostra funció és resultat d'un quocient de polinomis les dues funcions dels quals tendeixen a 0 en el punt per al qual volem calcular el límit, i quan no podem aplicar per tant la regla per al límit d'una divisió.

Quan ens trobem davant d'aquesta indeterminació causada per una fracció de polinomis, el problema és producte del fet que tant el polinomi del numerador com el del denominador comparteixen una arrel k. Només cal factoritzar els dos polinomis i dividir els factors comuns per a resoldre la inderminació.

Exemple. Indeterminació de tipus $\frac{0}{0}$.

Per a la funció $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ el límit en 2 és una indeterminació, ja que a la fracció

$$\frac{\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 4}{\lim\limits_{x \to 2} x - 2}$$

els límit del numerador i el denominador valen 0.

Les arrels del numerador són $x = \pm 2$, mentre que el numerador només s'anul·la en $x = 2$. Per tant, l'arrel $x = 2$ és una arrel comuna als dos polinomis, i

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{1} = 4.$$

$\boxed{\text{Indeterminació de tipus } \frac{\infty}{\infty}}$ Es tracta de límits en què la funció és una fracció el numerador i denominador de la qual tendeixen a ∞ (independentment del signe de l'infinit). El numerador i denominador de la fracció són sovint polinomis (és el cas que trobarem sovint en aquest curs).

En aquest cas escrivim $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ i busquem el terme dominant de cada polinomi (el terme de grau superior), i dividim cadascun dels dos polinomis entre el terme dominant, de manera que gairebé tots els termes de cada polinomi quedaran convertits en límits del tipus $\frac{k}{\infty}$, que ja sabem que s'anul·len. Els únics termes que no s'anul·laran són els del mateix grau que el terme dominant, en els quals es cancel·len les variables i queden només els seus coeficients.

Suposem de moment que el numerador s'escriu $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, amb $a_i \in \mathbb{R}$ els coeficients del polinomi, i el denominador $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, també amb $b_i \in \mathbb{R}$.

Suposem, a més, que $p(x)$ és de grau superior a $q(x)$ $\boxed{n > m}$, i el terme dominant és x^n. Aleshores, si dividim $p(x)$ i $q(x)$ entre el terme dominant x^n queda

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{x^n} &= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{x^n} \\ &= \frac{a_n x^n}{x^n} + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{x^n} + \ldots + \frac{a_1 x}{x^n} + \frac{a_0}{x^n} \\ &= a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^n} \end{aligned}$$

i, similarment,

$$\frac{q(x)}{x^n} = \frac{b_m}{x^{n-m}} + \ldots \frac{b_1}{x^n}.$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{x^n} &= a_n \\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{q(x)}{x^n} &= 0 \end{aligned}$$

Finalment, el límit queda

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{p(x)}{x^n}}{\frac{q(x)}{x^n}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{0} = \boxed{\infty}$$

El límit serà ∞ i, per a saber el signe, haurem de separar el cas $+\infty$ del cas $-\infty$, fixar-nos en el signe dels coeficients dels termes dominants i si els termes dominants són de grau parell o imparell.

Similarment, si el grau de $q(x)$ fos superior al de $p(x)$ $\boxed{m > n}$, dividiríem el numerador i el denominador per x^m, obtenint

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{x^m} &= 0 \\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{q(x)}{x^m} &= b_m \end{aligned}$$

I, per tant,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{p(x)}{x^m}}{\frac{q(x)}{x^m}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{0}{b_m} = \boxed{0}$$

Finalment, si el grau de $q(x)$ fos igual al grau de $p(x)$ $\boxed{n = m}$, el límit anterior quedaría

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{p(x)}{x^n}}{\frac{q(x)}{x^n}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} = \boxed{\frac{a_n}{b_m}}$$

i aquest cas el resultat del límit seria el quocient entre els coeficients dels termes dominants.

Exemple. Indeterminació de tipus $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2}{2x^2+7x-5}.$$

Si intentem calcular directament el límit, obtenim una indeterminació $\frac{\infty}{\infty}$.

Observem com tant el numerador com el denominador tenen grau 2, de manera que haurem de dividir els dos polinomis per x^2:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2}{2x^2+7x-5} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2-2}{x^2}}{\frac{2x^2+7x-5}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}} \\
&= \frac{\lim_{x\to+\infty} 3-\frac{2}{x^2}}{\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}} \\
&= \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

I això no és més que la fracció entre els coeficients dels termes dominants dels dos polinomis.

$\boxed{\text{Indeterminació de tipus } 0\cdot\infty}$ Aquesta situació sempre es dona en límits del tipus

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x),$$

on un dels límits de les funcions val 0 i l'altre ∞ (independentment del seu signe).

Veiem que el producte el podem reescriure

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

de manera que la nostra indeterminació s'ha convertit en una del tipus $\dfrac{\infty}{\infty}$, que ja sabem resoldre.

$\boxed{\text{Indeterminació de tipus } \infty-\infty}$ Aquesta indeterminació és habitual en diferències de funcions que contenen arrels. En aquests casos s'ha de multiplicar i dividir la funció per la seva conjugada (la mateixa expressió canviant la resta per una suma) i fer servir la igualtat notable $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Exemple. Indeterminació de tipus $\infty - \infty$.

Calculem el límit per a $x \to +\infty$ de la funció $f(x) = \sqrt{x^2+x} - (x+1)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - (x+1) &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - (x+1) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x} + (x+1)}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - (x+1)\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+x} + (x+1)\right)}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x - \left(x^2 + 2x + 1\right)}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x-1}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)}
\end{aligned}$$

Aquest límit és una indeterminació del tipus $\frac{\infty}{\infty}$, on el numerador és un polinomi de grau 1 i el denominador també té com a terme dominant de grau 1 (ja que l'exponent de x^2 s'anul·la en certa manera amb l'arrel quadrada). Així, per a resoldre aquesta nova indeterminació haurem de dividir numerador i denominador per x:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - (x+1) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-x-1}{x}}{\frac{(\sqrt{x^2+x}+(x+1))}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 + \frac{1}{x}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} -1-\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 + \frac{1}{x}} \\
&= \frac{-1-0}{\sqrt{1+0}+1+0} = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Indeterminació de tipus } 1^\infty}$ És una indeterminació que es dona quan tenim una funció exponencial en què la base tendeix a 1 i l'exponent a ∞.

Això és, si tenim la nostra funció escrita com a $f(x)^{g(x)}$ on $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, aleshores $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ dona lloc a aquest tipus d'indeterminació.

Se soluciona mitjançant el canvi

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}.$$

Exemple. Indeterminació de tipus 1^∞.

Calculem $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+2}\right)^x$, i dona lloc a una indeterminació del tipus 1^∞. Per tant, operem

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+2}-1\right)\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x+2}=\frac{3}{2},$$

ja que és una indeterminació de tipus $\frac{\infty}{\infty}$ amb els polinomis del numerador i denominador del mateix grau.

Per tant,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+2}\right)^x=e^{\frac{3}{2}}.$$

10.2. Continuïtats

10.2.1. Funció contínua en un punt

Es diu que una funció $f(x)$ és **contínua en un punt** x_0 si es pot avaluar en aquest punt i el seu valor coincideix amb el límit de la funció quan x tendeix a x_0, és a dir,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Intuïtivament, això vol dir que el valor que pren la funció en el punt x_0 és exactament aquell al qual ens aproximem a mesura que avaluem punts cada cop més propers a x_0. Dit amb altres paraules, quan dibuixem la gràfica de la funció, no fa cap salt i podem resseguir-la tota sense aixecar el bolígraf del paper.

Exemple. Considerem l'exemple que ja hem estudiat prèviament,

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\le 1\\ 2 & \text{si } x>1\end{cases}$$

i estudiem-ne la continuitat en $x=1$.

En aquest cas, com hem vist, els límits laterals de la funció no coincideixen, i per tant el límit de la funció en $x=1$ no existeix. Com que no existeix, no pot ser igual al valor de la funció en el punt $f(1)=1$, i la funció és discontínua en aquest punt.

Es diu que una funció és **contínua** quan ho és en tots els punts del seu domini.

10.2.2. Discontinuïtats d'una funció

Una funció que no és contínua en un punt particular pot ser-ho per diferents causes. Pot ser que la funció no estigui definida en aquell punt particular, però els límits laterals sí que existeixin; pot ser que els límits laterals no coincideixin (i per tant el límit en aquell punt no és definit); pot ser que el límit de la funció en el punt no existeixi (sia perquè els límits laterals no coincideixen o perquè divergeixin) i que la funció tampoc no estigui definida, etc.

Seguidament estudiarem tres casos de discontinuïtat de funcions, que són els que trobarem més habitualment.

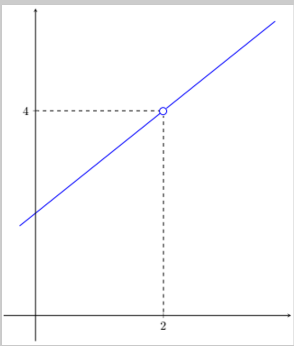
Discontinuïtat evitable Aquest tipus de discontinuïtat es dona quan la funció no és definida en el punt x_0 però els límits laterals existeixen i coincideixen. És a dir,

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x), \text{ però } \nexists f(x_0).}$$

Es fa servir el terme de *discontinuïtat evitable* perquè es una discontinuïtat que es pot evitar si redefinim la funció perquè sigui contínua, com quan el valor en el punt problemàtic és igual al límit de la funció en aquell punt, és a dir, considerant la funció $\widetilde{f}$ definida per

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Exemple. Discontinuïtat evitable.
Considerem $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. Tal com hem estudiat prèviament, aquesta funció no és definida en el punt $x = 2$, però el límit quan x tendeix a 2 sí que existeix, i val 4. Per tant, som davant una discontinuïtat evitable en $x = 2$.



Aleshores, considerem la funció

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

La funció $\widetilde{f}(x)$ és idèntica en gairebé tots els punts a la funció $f(x)$, llevat del punt $x = 2$, on $f(x)$ no és definida però $\widetilde{f}(x)$ sí ho és. El límit de $\widetilde{f}(x)$ en $x \to 2$ coincideix amb el seu valor en el punt, i per tant la funció és contínua en aquest punt.

$\boxed{\textbf{Discontinuïtat de salt}}$ Aquest és el cas quan els dos límits laterals de la funció existeixen però no prenen el mateix valor, independentment de si la funció és definida en aquell punt o no. És a dir,

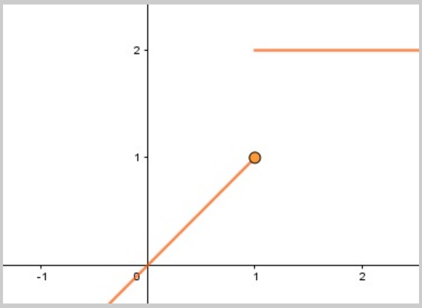
$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)}$$

Exemple. Discontinuïtat de salt.

Sigui $f(x)$ la funció definida a trossos:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Abans hem comprovat que el límit per l'esquerra de la funció en $x \to 1$ val 1 i per la dreta val 2, i per tant la funció té una discontinuïtat de salt en $x = 1$.



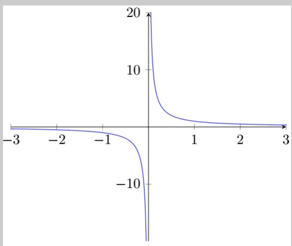
$\boxed{\textbf{Discontinuïtat asimptòtica}}$ Aquesta discontinuïtat és una versió extrema del cas anterior, en el qual almenys un dels dos límits laterals divergeix. Això és,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty.}$$

Es podria visualitzar en certa manera com una discontinuïtat de salt infinit.

Exemple. Discontinuïtat asimptòtica.

Considerem la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



Si calculem els límits laterals en 0 d'aquesta funció, tenim

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

Els dos límits divergeixen, i per tant tenim una discontinuïtat asimptòtica.

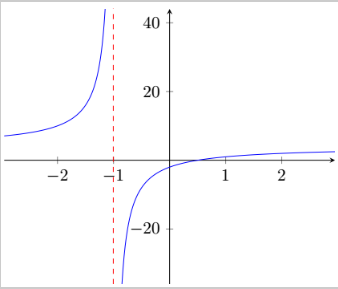
10.2.3. Asímptotes

Una **asímptota** és una recta a la qual la funció s'aproxima sense arribar mai a tocar-la perquè x tendeix a un cert nombre a (o als infinits).

Segons la seva inclinació, les asímptotes poden ser verticals, horitzontals o obliqües.

Asímptotes verticals Es donen en un punt k de l'eix X quan almenys un dels límits laterals en aquest punt tendeix a $\pm\infty$, és a dir, quan en la funció té una discontinuïtat asimptòtica en k. En aquest cas, la recta d'equació $\boxed{x = k}$ és l'asímptota vertical.

Exemple. Asímptota vertical.
La funció $f(x) = 3 + \dfrac{x-5}{x+1}$ té una discontinuitat asimptòtica en $x = -1$, i, per tant, la recta que té per equació $x = -1$ és l'asímptota vertical (en vermell en la imatge).

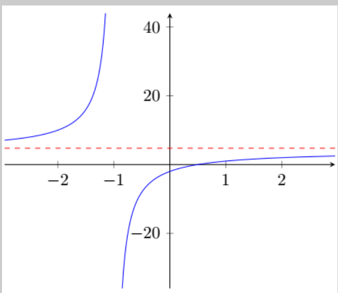


Asímptotes horitzontals Es donen quan existeix el límit en algun dels infinits. Per a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k$, la recta d'equació $\boxed{y = k}$ és l'asímptota horitzontal (ídem amb el límit amb $-\infty$). Una funció pot tenir fins a dues asímptotes horitzontals si els dos límits a $\pm\infty$ existeixen i prenen valors diferents.

Exemple. Asímptota horitzontal.
Prenem de nou la funció $f(x) = 3 + \dfrac{x-5}{x+1}$ i calculem-ne els límits:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= 3 \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= 3 \end{aligned}$$

En aquest cas particular els dos límits existeixen i tendeixen al mateix valor, 3. Per tant, la recta d'equació $y = 3$ serà l'única asímptota horitzontal de la funció (en vermell en la imatge).



Asímptotes obliqües Una asímptota obliqua és una recta d'equació $y = ax + b$ a la qual la funció s'aproxima a mesura que x tendeix a $\pm\infty$. Per a trobar l'equació de la recta, hem de trobar-ne els coeficients a, b tals que

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Igual que les asímptotes horitzontals, una funció pot tenir fins a dues asímptotes obliqües: una per al límit en $+\infty$ i una per al límit en $-\infty$.

Les asímptotes obliqües se solen donar sovint en funcions quocients de polinomis $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ en què el grau del numerador $p(x)$ supera en 1 el grau del denominador $q(x)$. En aquest cas particular, l'equació de l'asímptota és producte del quocient de la divisió de polinomis que defineix la funció $f(x)$:

$$\frac{\text{dividend}}{\text{divisor}} = \text{quocient} + \frac{\text{resta}}{\text{divisor}}$$

I, en calcular el límit quan x tendeix a infinit, el darrer terme tendeix a 0 i queda només el quocient (que és de grau 1 per ser la diferència entre els graus dels polinomis), que serà l'equació de l'asímptota.

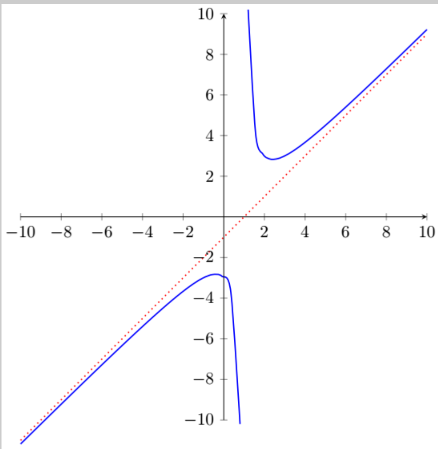
Si una funció té asímptota horitzontal en un dels límits, en aquell límit no podrà tenir asímptota obliqua. Fixeu-vos que una asímptota horitzontal és un cas particular d'asímptota oblíqua en $a = 0$.

Exemple. Asímptota oblíqua per un quocient de polinomis.

Sigui $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$. Quan calculem la divisió de polinomis ens queda

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} = \boxed{x - 1} + \frac{2}{x - 1},$$

on $x - 1$ és el quocient i 2 la resta de la divisió. Per tant, l'asímptota té per equació $x - 1$ (en vermell en la imatge), i veiem que és la mateixa asímptota per als dos límits.



En el cas general, en què $f(x)$ no ha de ser necessàriament un quocient de polinomis, s'ha d'usar la definició d'asímptota obliqua directament per a trobar l'equació de la recta.

Hi ha una asímptota oblíqua si, i només si, es compleix

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \infty\\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= a\\ \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] &= b\end{aligned}$$

on a, b són nombres reals i $y = ax + b$ és l'equació de l'asímptota.

Exemple. Asímptota oblíqua usant les condicions necessàries i suficients.

Sigui $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$. Calculem els límits d'abans per comprovar que té asímptota obliqua. Primerament, comprovem que el límit a l'infinit divergeix,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} = +\infty$$

ja que el numerador és de grau superior al denominador. Per a trobar el coeficient a, calculem el quocient entre x,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - x} = 1$$

ja que tant el numerador com el denominador són ara polinomis de grau 2, i la indeterminació $\dfrac{\infty}{\infty}$ es resol com a fracció dels termes dominants dels dos polinomis. Finalment, substituïm el valor $a = 1$ trobat al tercer límit per trobar b,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} - x\right] &= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} - \frac{x(x - 1)}{x - 1}\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} - \frac{x^2 - x)}{x - 1}\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x + 3}{x - 1} = -1\end{aligned}$$

d'on tenim $b = -1$, i per tant l'equació de l'asímptota oblíqua és

$$y = x - 1.$$

Resum

Continuïtat de funcions

Definició límit. El **límit d'una funció** en un valor x és igual a un nombre al qual tendeix la funció quan la variable tendeix a aquest valor (sense arribar mai a ser-ho). Si el límit d'una funció $f(x)$ en un valor a és igual a b, s'escriu d'aquesta manera:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

La definició formal del concepte de límit d'una funció és:

El **límit de la funció** $f(x)$ quan x tendeix al valor a és b,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

si es compleix que, donat qualsevol nombre real $\varepsilon > 0$, hi ha un nombre real $\delta > 0$ de manera que si $0 < |x-a| < \delta$ es compleix $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Operacions amb límits

Suma i resta El límit de la suma (o resta) de dues funcions en un punt és igual a la suma (o resta) de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir,

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

Producte El límit del producte de dues funcions en un punt és igual al producte de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir,

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Divisió El límit del quocient de dues funcions en un punt és igual al quocient de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió sempre que el denominador no sigui 0, és a dir,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Exponencial El límit de l'exponencial d'una funció per una altra en un punt és igual a l'exponencial de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió sempre que ambdues funcions no prenguin el valor 0 alhora, és a dir,

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Límits laterals. El **límit lateral per l'esquerra (la dreta)** d'una funció $f(x)$ en un punt a és el límit de la funció quan es considera que la variable només pot prendre valors més petits (o més grans) que el punt, això és, el valor que pren la funció quan ens aproximem al punt objectiu des de punts per l'esquerra (o per la dreta) d'aquest. Aquest límit es denota per

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b \qquad (\lim_{x \to a^+} f(x) = b)$$

En particular, podem veure que si el límit d'una funció en un cert punt existeix, coincidirà amb els límits laterals quan aquests tinguin sentit. El fet recíproc també és cert: si els dos límits laterals existeixen i coincideixen amb el mateix valor, el límit de la funció també existirà i prendrà el mateix valor. Tanmateix, si els dos límits laterals prenen valors diferents, el límit de la funció en aquell punt no existeix (encara que la funció sí que estigui definida en aquell punt).

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) \text{ existeix i val } b \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = b}$$

Límits a l'infinit

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Es diu que el **límit d'una funció $f(x)$ quan x tendeix a** $+\infty$ val b si per a qualsevol $\varepsilon > 0$ existeix un cert nombre k tal que si $x > k$ aleshores $|f(x)-b| < \varepsilon$. De manera similar, es diu que el **límit d'una funció $f(x)$ quan x tendeix a** $-\infty$ val b si, per a qualsevol $\varepsilon > 0$ existeix un cert nombre k tal que si $x < k$ aleshores $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Regles de càlcul

$\boxed{k \cdot \infty = \infty, k \neq 0}$ En un producte, si un factor tendeix a infinit i l'altre tendeix a un e 0, el producte tendeix a infinit, i té un signe que resulta del signe de l'infinit del primer factor multiplicat pel signe del nombre al qual tendeix el segon factor.

$\boxed{\infty + \infty = \infty, k + \infty = \infty}$ En una suma, si un o més sumands tendeixen a infinit amb endeix a infinit amb el signe corresponent.

$\boxed{\frac{k}{\infty} = 0}$ En un quocient, si el denominador tendeix a infinit i el numerador tendeix cap a una constant k, el quocient tendeix a 0.

$\boxed{\frac{k}{0} = \infty, k \neq 0}$ En un quocient, si el numerador tendeix a una constant diferent de 0 i el denominador tendeix a 0, el quocient tendeix a infinit, i té un signe que resulta del signe de per a quina direcció s'aproxima el 0 del denominador multiplicat pel signe del nombre al qual tendeix el numerador.

Indeterminacions

$\boxed{\frac{0}{0}}$ Aquesta indeterminació se sol donar quan la funció és resultat d'un quocient de polinomis, les dues de les quals tendeixen a 0 en el punt per al qual volem calcular el límit, i per tant no podem aplicar la regla per al límit d'una divisió. Per a resoldre-la normalment, n'hi ha prou de factoritzar els dos polinomis i dividir els factors comuns.

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ Es tracta de límits en què la funció és una fracció el numerador i denominador de la qual tendeixen a ∞ (independentment del signe de l'infinit). En aquest cas, si

n és el grau del terme dominant del polinomi del numerador i m el del denominador tenim

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\begin{cases}0 & \text{si} \quad m>n\\ \infty & \text{si} \quad m<n\\ \dfrac{a_n}{b_n} & \text{si} \quad m=n\end{cases}$$

on a_n i b_n són els coeficients dels termes dominants de $p(x)$ i $q(x)$ respectivament i el signe de ∞ per a $m<n$ s'haurà d'estudiar en cada cas.

$\boxed{0\cdot\infty}$ Aquesta situació sempre es dona en límits del tipus

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x),$$

on un dels límits de les funcions val 0 i l'altre ∞ (independentment del seu signe). Veiem que podem reescriure el producte com a

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

de manera que la nostra indeterminació s'ha convertit en una del tipus $\dfrac{\infty}{\infty}$, que ja sabem resoldre.

$\boxed{\infty-\infty}$ Aquesta indeterminació és habitual en diferències de funcions que contenen arrels. En aquests casos s'ha de multiplicar i dividir la funció per la seva conjugada (la mateixa expressió canviant la resta per una suma) i fer servir la igualtat notable $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$\boxed{1^\infty}$ És una indeterminació que es dona quan tenim una funció exponencial en què la base tendeix cap a 1 i l'exponent cap a ∞.

Això és, si tenim la nostra funció escrita com a $f(x)^{g(x)}$ per a $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, aleshores $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ dona lloc a aquest tipus d'indeterminació.

Se soluciona mitjançant el canvi

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}.$$

Definició funció contínua. Es diu que una funció $f(x)$ és **contínua en un punt** x_0 si la funció es pot avaluar en aquest punt i el seu valor coincideix amb el límit de la funció quan x tendeix a x_0, és a dir,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Es diu que una funció és **contínua** quan és contínua en tots els punts del seu domini.

Tipus de discontinuïtats

Discontinuïtat evitable Aquest tipus de discontinuïtat es dona quan la funció no és definida en el punt x_0, però els límits laterals sí que existeixen i coincideixen. És a dir,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x),\ \text{però}\ \nexists f(x0).}$$

Discontinuïtat de salt Aquest és el cas quan els dos límits laterals de la funció existeixen però no prenen el mateix valor, independentment de si la funció és definida en aquell punt o no. És a dir,

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)}$$

Discontinuïtat asimptòtica Aquesta discontinuïtat és una versió extrema del cas anterior, en què almenys un dels dos límits laterals divergeix. Això és,

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.}$$

Asímptotes

Asímptotes verticals Es donen en un punt k de l'eix X quan almenys un dels límits laterals en aquest punt tendeix a $\pm\infty$, és a dir, quan en la funció té una discontinuïtat asimptòtica en k. En aquest cas, la recta d'equació $\boxed{x = k}$ és l'asímptota vertical.

Asímptotes horitzontals Es donen quan existeix el límit a algun dels infinits. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = k$, la recta d'equació $\boxed{y = k}$ és l'asímptota horitzontal (ídem amb el límit amb $-\infty$). Una funció pot tenir fins a dues asímptotes horitzontals si els dos límits a $\pm\infty$ existeixen i prenen valors diferents.

Asímptotes obliqües Si, i només si, es compleix

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pm\infty} f(x) &= \infty \\ \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= a \\ \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] &= b \end{aligned}$$

on a, b són nombres reals i $y = ax + b$ és l'equació de l'asímptota.

Exercicis resolts

1. **Calculeu els límits següents, si existeixen, pas a pas:**

(a) $\lim_{x\to 3} x^3 - 2x^2 + 1$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^3 - 4x}{3x - 5}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x} - (x+1)\right]$

(d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{2x^3 + x^2 - 9}$

(e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{-19}{(x-2)^3}$

(f) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}$

(g) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

(h) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$

(i) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + x + 1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

(j) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} - x\right)$

Solució:

(a) En aquest primer límit n'hi ha prou substituint el valor de x que és 3 a la funció de la qual calculem el límit, així obtenim que el límit és 10.

(b) Igual que hem fet en el cas anterior, si substituïm les x de la funció per 0 obtenim que el límit és 0.

(c) En aquest cas, en principi dona indeterminació $\infty - \infty$, i per tant el que farem serà multiplicar pel conjugat:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right] &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-(x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+x}+(x+1)\right)}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x-1}{\sqrt{x^2+x}+(x+1)}\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{-x-1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+\frac{(x+1)}{x}}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1+\frac{1}{x}}\right] = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

(d) Veiem que és el quocient de dos polinomis del mateix grau, i per tant,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+1}{2x^3+x^2-9} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-x^2+1}{x^3}}{\frac{2x^3+x^2-9}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x}-\frac{9}{x^3}} = \frac{1}{2}$$

(e) Observem que en aquest cas, si substituïm els valors de x per 0, ens queda $\frac{-19}{0}$, i per tant hem de treballar una mica més aquest límit per veure quant val en cas que existeixi. Ens fixem amb els límits laterals

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{-19}{(x-2)^3} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-19}{(x-2)^3} = +\infty$$

Com que els dos límits laterals són diferents, el límit no existeix.

(f) Veiem que aquest límit dona 1^∞, que sabem que és una indeterminació i, per tant, si ho escrivim apropiadament tenim

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e$$

(g) En aquest cas, quan substituïm les x per 2 observem que el resultat és $\frac{0}{0}$ i, per tant, una indeterminació. Intentem simplificar-ho:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}=4$$

(h) En aquest cas, quan substituïm les x per a observem que el resultat és $\frac{0}{0}$i, per tant, una indeterminació. Intentem simplificar-ho:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)}{(x^2+ax+a^2)}=\frac{a-1}{3a^2}$$

L'únic valor conflictiu és $a=0$ perquè anul·la el denominador. Ens mirem doncs aquest cas per separat.

Si $a=0$, el límit inicial és $\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2}$ i, per tant, com que el denominador és sempre positiu i de grau major que el numerador, tenim que aquest límit és $-\infty$ independentment que x sigui major o menor que 0.

(i) Observem que es tracta d'una indeterminació del tipus 1^∞, i per tant calculem $(f(x)-1)g(x)$, on $f(x)$ és la funció que tendeix a 1 i $g(x)$ la que va a infinit

$$(f(x)-1)g(x)=\left(\frac{x^2+x+1}{2x+1}-1\right)\frac{1}{x-1}=\frac{x^2-x}{2x+1}\frac{1}{x-1}=\frac{x\cancel{(x-1)}}{(2x+1)\cancel{(x-1)}}\xrightarrow{x\to 1}\frac{1}{3}$$

Per tant, el límit que busquem és $e^{\frac{1}{3}}$.

(j) Observem que es tracta d'una indeterminació del tipus $\infty-\infty$, i per tant intentarem operar les dues funcions per a poder resoldre-la.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+1}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+1-x^2+3x}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-3}=0$$

2. **Indiqueu els punts en què aquestes funcions no són contínues i el tipus de discontinuïtat que presenten. Raoneu la resposta.**

(a) $f(x)=\dfrac{x+3}{x}$

(b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \textbf{si } x\neq 0\\ 1 & \textbf{si } x=0\end{cases}$

(c) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$

Solució:

(a) Observem que aquesta funció presenta una discontinuïtat quan el denominador s'anul·la, i per tant per a $x=0$. I, a més, si calculem els límits laterals en aquest punt, tenim

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+3}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{x+3}{x}=-\infty$$

Per tant, en $x=0$ tenim una discontinuïtat asimptòtica.

(b) En aquest cas, similar a l'anterior, la funció presenta una discontinuïtat quan el denominador s'anul·la, i per tant per a $x=0$. I, a més, si calculem els límits laterals en aquest punt, tenim

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+3}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{x+3}{x}=-\infty$$

Però a diferencia de l'anterior, en $x=0$ tenim definida la imatge, i per tant és un cas especial de discontinuïtat asimptòtica.

(c) Com en els casos anteriors, vegem en quins punts s'anul·la el denominador. Veiem que és per a $x=1$. Calculem ara el límit en aquest punt per veure quin tipus de discontinuïtat tenim:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}x=1$$

Com que el límit existeix, veiem que la discontinuïtat és evitable.

3. **Considereu la funció**

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x}$$

Quin valor cal assignar a $f(0)$ perquè la funció f sigui contínua en $x=0$? Expliqueu-ho.

Solució:
Abans d'estudiar el punt $x = 0$, mirem quins són els punts de discontinuïtat (si n'hi ha) de la funció. Per a fer-ho, mirem en quins punts s'anul·la el denominador.

$$8x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(8x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Per tant, aquesta funció només té una discontinuïtat en $x = 0$. N'estudiem el límit i veiem que és una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$, i per tant

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{8x^3 + 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x^2 - 2x + 1)}{\cancel{x}(8x^2 + 3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x + 1}{8x^2 + 3} = \frac{1}{3}$$

Per tant, si prenem $f(0) = \frac{1}{3}$, la funció serà contínua.

4. **Calculeu el domini com a unió d'intervals de continuïtat, estudieu el comportament de la funció en els extrems del domini (asímptotes) i els tipus de discontinuïtats que presenten les funcions següents:**

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$

(b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 + x^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{e^{1/x} + 1}$

(d) $f(x) = \dfrac{6 + e^{1/x}}{2 + e^{1/x}}$

Solució:

(a) Veiem que el denominador d'aquesta funció s'anul·la per a $x = -2$ i $x = 3$, i per tant el domini serà

$$\text{Dom}f = (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$$

Per tant, ara hem d'estudiar els límits en $x = -2$, $x = 3$ i $\pm\infty$ per a saber quins tipus de discontinuïtats tenim i quines asímptotes té la funció

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1^- \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 1^+ \qquad \lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x\cancel{(x-3)}}{(x+2)\cancel{(x-3)}} = \frac{3}{5}$$

Per tant, podem concloure que aquesta funció té una discontinuïtat evitable en $x = 3$, una asímptota vertical en $x = -2$ i una asímptota horitzontal en $y = 1$.

(b) Veiem que el denominador d'aquesta funció s'anul·la per a $x = 0$ i $x = -1$, i per tant el domini serà

$$\text{Dom}f = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

Per tant, ara hem d'estudiar els límits en $x = -1$, $x = 0$ i $\pm\infty$ per a saber quins tipus de discontinuïtats tenim i quines asímptotes té la funció:

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

Per tant, podem concloure que aquesta funció té dues asímptotes verticals: una en $x = 0$ i una en $x = -1$. També té una asímptota horitzontal en $y = 0$.

(c) Veiem que el domini d'aquesta funció és $\text{Dom}f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Ara hem d'estudiar els límits en $x = 0$ i $\pm\infty$ per a saber quins tipus de discontinuïtats tenim i quines asímptotes té la funció

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \left[\frac{0}{1}\right] = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \left[\frac{0}{+\infty}\right] = 0$$

Per tant, aquesta funció presenta una discontinuïtat evitable en $x = 0$ i no té asímptotes.

(d) Com en el cas de la funció anterior, veiem que el domini d'aquesta funció és $\text{Dom}f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Ara hem d'estudiar els límits en $x = 0$ i $\pm\infty$ per a saber quins tipus de discontinuïtats tenim i quines asímptotes té la funció.

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \frac{6+1}{2+1} = \frac{7}{3} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{6+0}{2+0} = 3 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\frac{6}{e^{1/x}} + 1}{\frac{2}{e^{1/x}} + 1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

Per tant, aquesta funció presenta una discontinuïtat de salt en $x = 0$ i té una asímptota a horitzontal en $y = \frac{7}{3}$.

5. **Estudieu el domini i la continuïtat de la funció**

$$f(x) = \frac{x^3 - ax^2}{x^2 - 9}$$

en funció del paràmetre a, un nombre real positiu.

Solució:
En primer lloc observem que el denominador de la funció s'anul·la per a $x = 3$ i $x = -3$. Així, doncs, el domini d'aquesta funció és $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Ara hem d'estudiar els límits en aquests dos punts per a veure'n la continuïtat.
Comencem per $x = -3$ i mirem els límits laterals

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$$

ja que el numerador tendeix a $9(-3 - a)$ (un valor negatiu) i el denominador a 0 amb valors positius.

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$$

ja que el numerador tendeix a $9(-3 - a)$ (un valor negatiu) i el denominador a 0 amb valors negatius. Per tant, en $x = -3$ tenim una discontinuïtat asimptòtica per a qualsevol valor d'a.
Ara mirem què passa amb $x = 3$. I, de fet, si estudiem els límits laterals, ens trobarem
Mirem ara què passa amb $x = 3$. I de fet, si estudiem els límits laterals ens trobarem la mateixa situació que en el punt anterior exceptuant el cas $a = 3$. Si $a = 3$, tindrem

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - ax^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 \cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \frac{3}{2}$$

Per tant, si $a \neq 3$ tenim una discontinuïtat asimptòtica en $x = 3$, però si $a = 3$, la discontinuïtat serà evitable.

Exercicis per a practicar amb les solucions

6. **Calculeu els límits següents:**

(a) $\lim_{x\to 3}(x^2 - 2)$

(b) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+1}$

(c) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}$

(d) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-5x+3}{8x^3-2x^2+6}$

(e) $\lim_{x\to 1} 2e^{\frac{1}{(x-1)^2}}$

(f) $\lim_{x\to +\infty} x^2 - 3$

(g) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{1}{4x}$

(h) $\lim_{x\to \infty} x - \sqrt{x^2-3x}$

7. **Considereu la funció següent:**

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^3+3x^2-4}$$

(a) Trobeu el límit de la funció quan x tendeix a aquests valors: 0, 1, -2, $+\infty$, $-\infty$**.**

(b) Estudieu la continuïtat d'aquesta funció i digueu si presenta discontinuïtats i de quin tipus.

8. **Calculeu el límit de la funció següent quan x tendeix a 3:**

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \textbf{si} \quad x < 3 \\ 2x & \textbf{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

9. **Per quin valor de $p \in \mathbb{R}$ serà contínua la funció $f(x)$ següent?**

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - px + 3 & \textbf{si} \quad x \geq 1 \\ 2x + 3 & \textbf{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

10. **Trobeu les asímptotes horitzontals de la funció $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$, les asímptotes verticals de $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ i les asímptotes oblíqües de $h(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$.**

Solucions:

6. (a) 7
   (b) 0
   (c) $\dfrac{-3}{2}$
   (d) $\dfrac{1}{4}$
   (e) $+\infty$
   (f) $+\infty$
   (g) 0
   (h) $\dfrac{3}{2}$
7. (a) $\lim_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{3}{4}$, $\lim_{x\to 1} f(x) = -\dfrac{2}{9}$, $\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0$.
   (b) Aquesta funció és contínua excepte en $x = 1$ (discontinuïtat evitable) i $x = -2$ (discontinuïtat asimptòtica).
8. Calculem els dos límits laterals i veiem que tots dos són 6. Per tant, el límit quan $x$tendeix a 3 és 6.
9. $p = 0$
10. $y = 2$ és una asímptota horitzontal de $f(x)$, $x = 2$ és una asímptota vertical de $g(x)$ i $y = x + 1$ és una asímptota obliqua de $h(x)$.

11. Derivació de funcions

Índex

11.1. Derivada d'una funció en un punt

La derivada d'una funció en un punt és un dels conceptes que han revolucionat les matemàtiques. No és un concepte senzill, però, en canvi, té moltíssimes aplicacions. A més, tal com es veurà, el procés de càlcul de derivades no és excessivament complicat si se segueixen unes regles concretes.

11.1.1. Definició i interpretació

La **derivada d'una funció $f(x)$ en un punt concret** x_0 s'indica per $f'(x_0)$ i es defineix mitjançant el càlcul d'aquest límit:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}}$$

Alternativament, podem definir la derivada de la funció $f(x)$ en x_0 així:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Les dues definicions són totalment equivalents i es poden utilitzar indistintament.

Pot passar que aquest límit no es pugui calcular, i en aquest cas es diu que la funció no és derivable en el punt x_0. Pràcticament totes les funcions que s'han introduït en aquest curs són derivables en tot el seu domini.

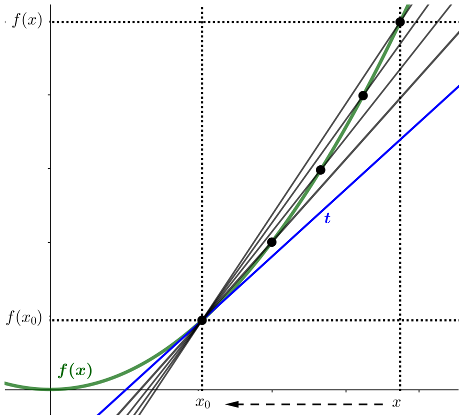
La definició de derivada d'una funció en un punt està lligada íntimament a la recta tangent a la funció en aquest punt. Vegem de quina manera.

La imatge que hi ha a continuació representa la gràfica d'una funció $f(x)$ i la recta tangent t a la funció en un punt $(x_0, f(x_0))$. També s'hi han traçat altres rectes, que

Què és la derivada d'una funció en un punt?
És igual a un cert límit que coincideix geomètricament amb el pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt. La derivada d'una funció $f(x)$ en un punt x_0 s'indica per $f'(x_0)$.

El càlcul diferencial és el terme amb què es fa referència al càlcul de derivades. Junt amb el càlcul integral, ha permès observar les matemàtiques des d'un nova perspectiva teòrica, a més de tenir un impacte extraordinari en la descripció i manipulació de la realitat física.
El concepte de límit, bàsic en càlcul diferencial, s'ha tractat des de l'antiguitat. Tanmateix, no va ser fins al segle XV que es va construir el càlcul diferencial (i integral) que coneixem avui en dia.

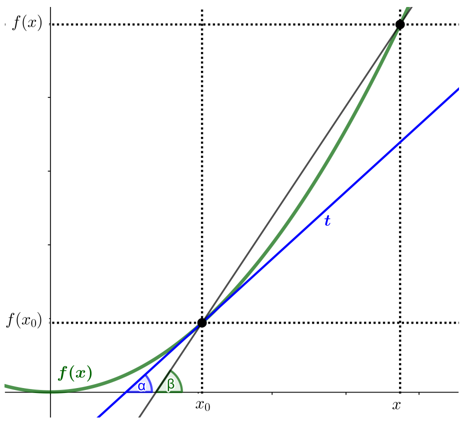
passen per aquest punt de tangència $(x_0, f(x_0))$ i altres punts de la funció, $(x, f(x))$, que es van acostant al punt de tangència $(x_0, f(x_0))$.



En analitzar aquesta situació notem que el quocient

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

representa la relació que hi ha entre els dos costats d'un triangle la hipotenusa del qual és la recta que passa pels punts $(x_0, f(x_0))$ i $(x, f(x))$. A més, observem que aquest quocient no és més que la tangent de l'angle que forma la recta tangent amb l'eix X i, per tant, el que determina el pendent d'aquesta recta, tal com pretén il·lustrar aquesta segona imatge:



Això vol dir que, com més a prop és un punt x de x_0, més a prop és la recta que passa per $(x_0, f(x_0))$ i $(x, f(x))$ de la recta tangent a la funció en x_0. Per tant, aquestes rectes coincideixen en el límit. Aquest fet explica per què el límit del quocient indicat ha de ser el pendent de la recta tangent en el punt $(x_0, f(x_0))$ i, això, la coincidència amb la definició de la derivada de la funció en el punt x_0.

D'acord amb aquesta situació geomètrica, aquest pendent no és més que la tangent de l'angle α, angle al qual tendeix l'angle β a mesura que s'aproxima a x_0. En definitiva:

$$f'(x_0) = \tan(\alpha)$$

on α és l'angle que hi ha entre l'eix X i la recta tangent a la funció en el punt x_0.

11.1.2. Càlcul

Els grans creadors del càlcul diferencial van ser l'anglès Isaac Newton (1642-1727) i l'alemany Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). De manera diferent i independent, van sistematitzar i generalitzar idees i procediments que havien estat abordats amb èxit parcial des de l'antiguitat.

La derivada d'una funció en un punt x_0 del seu domini es pot calcular aplicant la definició de derivada d'una funció en el punt x_0 en qüestió:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Vegem-ne alguns exemples concrets:

Exemple. Càlcul de la derivada d'una funció constant.
Sigui la funció constant

$$f(x) = 3$$

Calculem la seva derivada en el punt $x_0 = 2$ aplicant la definició de derivada d'una funció en aquest punt:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(2) - f(x)}{2 - x} = \lim_{x \to 2} \frac{3 - 3}{2 - x} = \lim_{x \to 2} \frac{0}{2 - x} = \lim_{x \to 2} 0 = 0$$

d'on resulta

$$f'(2) = 0$$

De fet, d'acord amb aquest procediment, es pot veure que la derivada d'aquesta funció, $f(x) = 3$, en qualsevol punt x_0 és sempre $f'(x_0) = 0$.
En general, la derivada d'una funció constant $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ en qualsevol punt x_0 és sempre $f'(x_0) = 0$.

Exemple. Càlcul de la derivada d'una funció lineal.
Sigui la funció lineal

$$f(x) = x$$

Calculem la seva derivada en el punt $x = 3$ aplicant la definició de derivada d'una funció en aquest punt:

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} = \lim_{x \to 3} \frac{3 - x}{3 - x} = \lim_{x \to 3} 1 = 1$$

d'on resulta

$$f'(3) = 1$$

De fet, d'acord amb aquest procediment, es pot veure com la derivada de la funció $f(x) = x$ en qualsevol punt x_0 és sempre $f'(x_0) = 1$.

Exemple. Càlcul de la derivada d'una funció quadràtica.

Sigui la funció quadràtica

$$f(x) = x^2$$

Calculem la seva derivada en el punt $x = 6$ aplicant la definició de derivada d'una funció en aquest punt:

$$f'(6) = \lim_{x\to 6} \frac{f(6) - f(x)}{6 - x} = \lim_{x\to 6} \frac{6^2 - x^2}{6 - x}$$

Sabem que $6^2 - x^2 = (6 - x)(6 + x)$, i per tant

$$f'(6) = \lim_{x\to 6} \frac{6^2 - x^2}{6 - x} = \lim_{x\to 6} \frac{\cancel{(6 - x)}(6 + x)}{\cancel{(6 - x)}} = \lim_{x\to 6}(6 + x) = 6 + 6 = 12$$

d'on resulta

$$f'(6) = 12$$

De fet, d'acord amb aquest procediment, es pot veure com la la derivada d'aquesta funció, $f(x) = x^2$, en qualsevol punt x_0 és sempre $f'(x_0) = 2x_0$.

Exemple. Càlcul de la derivada d'una funció polinòmica de grau 3.

Sigui la funció

$$f(x) = x^3$$

Calculem la seva derivada en el punt $x = 4$ aplicant la definició de derivada d'una funció en aquest punt:

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{f(4) - f(x)}{4 - x} = \lim_{x\to 4} \frac{4^3 - x^3}{4 - x}$$

Sabem que $4^3 - x^3 = (4 - x)\left(4^2 + 4x + x^2\right)$, i per tant

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{4^3 - x^3}{4 - x} = \lim_{x\to 4} \frac{(4 - x)\left(4^2 + 4x + x^2\right)}{4 - x} = \lim_{x\to 4}(4^2{+}4x{+}x^2) = 3{\cdot}4^2 = 48$$

d'on resulta

$$f'(4) = 48$$

De fet, d'acord amb aquest procediment, es pot veure com la derivada d'aquesta funció, $f(x) = x^3$, en qualsevol punt x_0 és sempre $f'(x_0) = 3x_0^2$.

11.2. Derivada d'una funció

11.2.1. Definició i interpretació

En calcular la derivada d'una funció $f(x)$, s'obté una nova funció en tots els punts del seu domini.

Aquesta nova funció s'anomena **funció derivada de** $f(x)$, es designa per $f'(x)$ i fa correspondre a cada punt del domini el valor de la derivada de la funció f en aquest punt.

El procés de trobar la funció derivada d'una funció donada es denomina **derivar la funció**.

Sembla raonable que, per a derivar qualsevol funció, s'hauria de calcular $f'(x)$ per a tots els punts del seu domini. En altres paraules, s'hauria calcular el límit que defineix

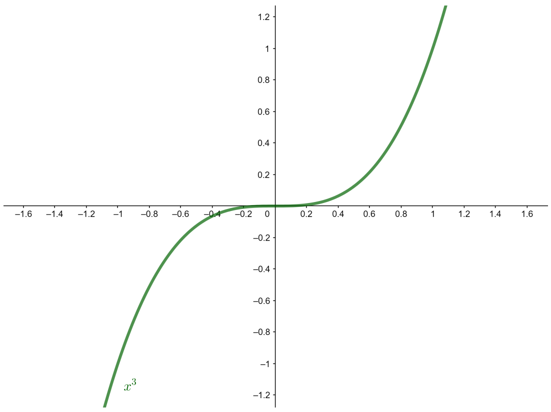
Què és la derivada d'una funció?
La derivada d'una funció f és aquella funció que associa a cada valor la derivada de la funció f. Aquesta nova funció es designa per f'. Encara que, teòricament, s'hauria de calcular el límit que condueix a la derivada per a cada punt, en la pràctica hi ha una taula amb les funcions derivades de les principals funcions.

la derivada en cadascun dels punts del seu domini. Aquest procés, però, és impossible. Ara bé, l'anàlisi dels límits que determinen la derivada de la funció en qualsevol punt del seu domini per a diferents funcions (de manera similar a com s'ha fet en l'apartat anterior per a diferents monomis) permet determinar una relació directa de les derivades de les principals funcions conegudes. Aquesta relació es presenta en format de taula, que es mostra a continuació.

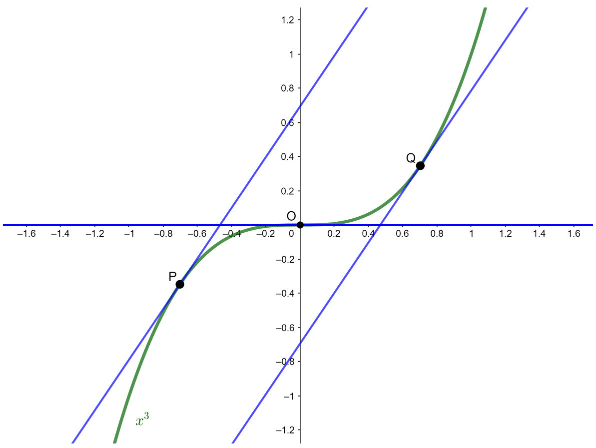
Taula de funcions derivades. Les derivades de les funcions principals són:

Taula de funcions derivades		
$f(x)$	$f'(x)$	**Exemples**
$k,\ k \in \mathbb{Z}$	0	$f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$
$a \cdot x,\ a \in \mathbb{R}$	a	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $g(x) = -4x \Rightarrow g'(x) = -4$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}$	$n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$	
$a^x,\ a \in \mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln(a)$	$f(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x \cdot \ln(3)$ $g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$
$\log_a(x)$	$\dfrac{1}{x} \cdot \log_a(e)$	$f(x) = \log_3(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \log_3(e)$ $g(x) = \ln(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$
$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

Estudiem un cas particular: el de la funció cúbica $f(x) = x^3$. Comencem per dibuixar-ne la gràfica:



D'acord amb això, la derivada d'aquesta funció en un punt qualsevol és igual al pendent de la recta tangent de la funció en el punt. Així ho confirma la imatge que hi ha a continuació, en la qual s'han traçat les tangents a la funció en diferents punts del seu domini.



En observar aquesta imatge notem:

(a) La recta tangent en el punt $(0, 0)$ és una recta horitzontal (casualment el mateix eix X) amb pendent 0. Aquest fet permet afirmar que la derivada de la funció en el 0 és exactament 0:

$$f'(0) = 0$$

(b) La derivada és la mateixa per a valors amb el mateix valor absolut: les tangents a la funció en els punts P, d'abscissa $x = -0.7$, i Q, d'abscissa $x = 0.7$ tenen el mateix pendent, és a dir, $f'(-0.7) = f'(0.7)$. Aquest fet en particular indica que en aquest cas la funció derivada ha de ser simètrica respecte de l'eix d'ordenades.

Analitzades les gràfiques de la funció $f(x) = x^3$ i les rectes tangents en alguns punts del seu domini, comprovem si aquestes característiques es compleixen en la funció derivada que obtenim mitjançant l'ús de la taula de les derivades.

Segons la taula, la derivada de la funció $f(x) = x^3$ és $f'(x) = 3x^2$. Aleshores, i com a confirmació del que hem observat anteriorment:

(a) $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$;

(b) La funció derivada $3x^2$ és una funció quadràtica senzilla d'estudiar:

- És sempre positiva i, en particular, compleix
$$f'(-0.7) = 3 \cdot (-0.7)^2 = 3(0.7)^2 = f'(0.7) = 1.47 > 0$$
- Té el vèrtex en el punt $(0,0)$, i això indica que és simètrica respecte de l'eix Y i per tant $f'(x) = f'(-x)$.

11.2.2. Regles de càlcul

La taula de derivades no permet calcular directament la derivada d'un polinomi, per exemple. Ara bé, hi ha una sèrie de regles per a la suma i resta, la multiplicació i divisió, la composició i la potència de funcions que es deriven de les regles de càlcul de límits (ja que la derivada no és més que un límit) i possibiliten calcular la derivada d'un gran nombre de funcions. Vegem quines són aquestes regles:

- La **derivada de la suma (i resta)** de dues funcions és igual a la suma (resta) de les derivades de cadascuna de les funcions:
$$\boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)}$$

Exemple. Derivada d'una suma de funcions.
Siguin $f(x) = x^3$ i $g(x) = x^2$. Tenim que $f'(x) = 3x^2$ i $g'(x) = 2x$.
Aleshores, la derivada de $f(x) + g(x)$ és
$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) = 3x^2 + 2x$$

Exemple. Derivada d'una resta de funcions.
Siguin $f(x) = x^5$ i $g(x) = x^2$. Tenim que $f'(x) = 5x^4$ i $g'(x) = 2x$.
Aleshores, la derivada de $f(x) - g(x)$ és
$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 5x^4 - 2x$$

- La **derivada del producte** de dues funcions és igual a la derivada de la primera funció multiplicada per la segona funció sense derivar més el producte de la primera funció sense derivar per la derivada de la segona funció.
$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Exemple. Derivada d'un producte de funcions polinòmiques
Considerem $h(x) = 3x^5$ com el producte de $f(x) = 3$ per $g(x) = x^5$.
La derivada de $f(x)$ és $f'(x) = 0$ i la derivada de $g(x)$ és $g'(x) = 5x^4$.
Aleshores, la derivada de $h(x)$ és
$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 0 \cdot x^5 + 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$$

Deduïm d'aquest exemple com la derivada de qualsevol monomi és igual al producte del coeficient per la derivada de la seva part literal.

Exemple. Derivada d'un producte de funcions no polinòmiques.
Siguin $f(x) = \cos(x)$ i $g(x) = \sin(x)$.
Considerem la funció producte $f(x) \cdot g(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$ la seva derivada és

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ &= -\sin(x) \cdot \sin(x) + \cos(x) \cdot \cos(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

- La **derivada del quocient** de dues funcions és igual a la derivada de la funció del numerador multiplicada per la funció del denominador sense derivar menys el producte de la funció del numerador sense derivar per la derivada de la funció del denominador, tot això dividit pel quadrat de la funció del denominador sense derivar.

$$\boxed{h'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

Exemple. Derivada d'un quocient entre funcions.
Considerem $h(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 4}{2x^3 + x}$ com el quocient entre $f(x) = 3x^2 - 4x + 4$ i $g(x) = 2x^3 + x$. Les derivades d'aquestes funcions són $f'(x) = 6x - 4$ i $g'(x) = 6x^2 + 1$.
Aleshores, la derivada de $h(x)$ és

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{(6x - 4) \cdot \left(2x^3 + x\right) - \left(3x^2 - 4x + 4\right) \cdot \left(6x^2 + 1\right)}{\left(2x^3 + x\right)^2} \\ &= \frac{-6x^4 + 16x^3 - 21x^2 - 4}{x^2 \cdot \left(2x^2 + 1\right)^2} \end{aligned}$$

- La **derivada de la composició** de dues funcions es calcula utilitzant la **regla de la cadena**, que consisteix en multiplicar la derivada de la funció que s'aplica en primer lloc per la derivada de la segona funció aplicada a la primera.

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

o, equivalentment,

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x)$$

Exemple. Derivada d'una composició de funcions.
Siguin $f(x) = \ln(x)$ i $g(x) = 3x^2 - 1$. Considerem la funció composició $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln\left(3x^2 - 1\right)$.
Calculem les derivades $f'(x) = \frac{1}{x}$ i $g'(x) = 6x$.
Aeshores, la derivada de $(f \circ g)(x)$ és

$$(f \circ g)'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) = \frac{6x}{3x^2 - 1}$$

- La **derivada d'una potència** de dues funcions es dedueix de la regla de la cadena:

  Si f i g són dues funcions, considerem la funció potència:
  $$h(x) = f(x)^{g(x)}$$
  Aleshores, podem considerar
  $$\ln(h(x)) = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)$$
  D'aquesta manera s'ha eliminat l'exponent.

  Derivem ambdós membres de la igualtat utilitzant la regla de la cadena i la regla del producte de funcions. La derivada del terme de l'esquerra és
  $$(\ln(h(x)))' = \frac{1}{h(x)}\cdot h'(x)$$
  I la derivada del terme de la dreta esdevé
  $$(g(x)\cdot\ln(f(x)))' = g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}$$
  D'aquesta manera, si igualem les dues derivades,
  $$\frac{1}{h(x)}\cdot h'(x) = g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}$$
  Si aïllem $h'(x)$ a l'esquerra, obtenim finalment
  $$\boxed{\begin{aligned} h'(x) &= h(x)\cdot\left(g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right) \\ &= f(x)^{g(x)}\cdot\left(g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)\end{aligned}}$$

Exemple. Derivada d'una composició de funcions.

Considerem $h(x) = x^{\sin(x)}$ com la potència de $f(x) = x$ elevada a $g(x) = \sin(x)$.

D'acord amb la definició de les funcions, f i g, $f'(x) = 1$ i $g'(x) = \cos(x)$.

Aeshores, la derivada de $h(x)$ és
$$\begin{aligned} h'(x) &= f(x)^{g(x)}\cdot\left(g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right) \\ &= x^{\sin(x)}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right)\end{aligned}$$

Amb aquestes regles i la taula de derivades, es pot derivar una gran quantitat de funcions.

11.3. Aplicacions de la derivada

Les aplicacions de la derivada en l'estudi de funcions són molt àmplies. Comprenen des del càlcul de certs elements interessants per a traçar-ne les gràfiques fins a problemes de maximització o minimització (anomenats també, de manera general, problemes d'extrems). Entre les moltes aplicacions importants que té la derivada en l'estudi de funcions, destaquem el fet d'identificar els intervals de creixement i decreixement d'una funció, i els de concavitat i convexitat, imprescindibles a l'hora de localitzar-ne els extrems (màxims i mínims) i els punts d'inflexió. Proporcionar aquesta informació és clau per a representar gràficament qualsevol funció.

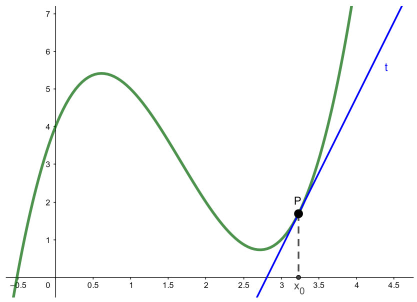
11.3.1. Creixement i decreixement d'una funció

Hem vist que la derivada de la funció en un punt és igual al pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt. Vegem amb alguns exemples la relació de la derivada amb la monotonia de la funció, és a dir, amb el seu creixement i decreixement.

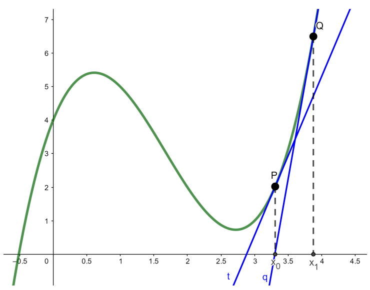
Quina relació hi ha entre la derivada d'una funció i el seu creixement/decreixement?
La derivada de la funció en un punt és igual al pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt. En conseqüència:
– Si una funció és creixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en el punt és positiva. A més, com més ràpidament creix la funció més gran és el valor de la derivada en el punt.
– Si una funció és decreixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en el punt és negativa, i com més ràpidament decreix la funció menor és el valor de la derivada en el punt.

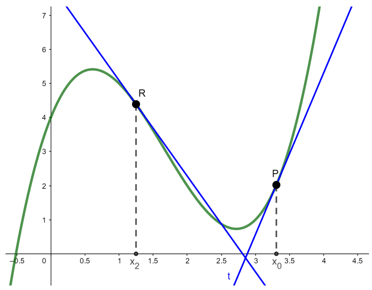
La imatge que hi ha a continuació mostra la gràfica d'una funció $f(x)$, en la qual s'ha traçat la recta t tangent a la gràfica en el punt P de coordenades (x_0, y_0).

Que t sigui una recta tangent en el punt P vol dir que és una recta que talla la gràfica de la funció en aquest punt P sense travessar-la, només recolzant-s'hi. El pendent d'aquesta recta, tal com s'ha vist abans, es correspon amb la derivada de la funció en aquest punt.



Considerem ara un segon punt de la funció f, Q de coordenades (x_1, y_1), on tracem la recta tangent q, tal com mostra la primera de les dues imatges de sota. En comparar el pendent d'aquesta nova recta tangent $q$amb l'anterior recta t, notem que aquest és superior al de la recta tangent t. Aquest fet permet assegurar que la derivada de la funció f en x_0 és menor que la derivada de f en x_1. A més, deduïm que en aquests dos punts, P i Q, la derivada ha de ser positiva, perquè si la recta és creixent el seu pendent és positiu. D'acord amb aquest exemple, podem generalitzar dient que sempre que la funció sigui creixent (com en aquests dos casos) la derivada serà positiva perquè el pendent de la recta tangent ho és (ja que és una recta creixent) i, a més, es compleix $0 < f'(x_0) < f'(x_1)$, si $x_0 < x_1$.





Per altra banda, sempre que la funció sigui decreixent, la derivada serà negativa perquè el pendent de la recta tangent ho és (ja que és una recta decreixent), és a dir, $f'(x_2) < 0$. Així es visualitza en el cas de la recta tangent r a la funció f en el punt $R = (x_2, y_2)$, que presenta la segona de les dues imatges anteriors.

D'acord amb el que acabem d'observar, podem concloure:

- Si una funció és creixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en aquest punt és positiva. A més, com més ràpidament creix la funció, més gran és el valor de la derivada en el punt.
- Si una funció és decreixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en aquest punt és negativa. A més, com més ràpidament decreix la funció, menor és el valor de la derivada en el punt.

Exemple. La derivada i els intervals de creixement/decreixement d'una funció.

Sigui la funció

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

La seva derivada és la funció

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

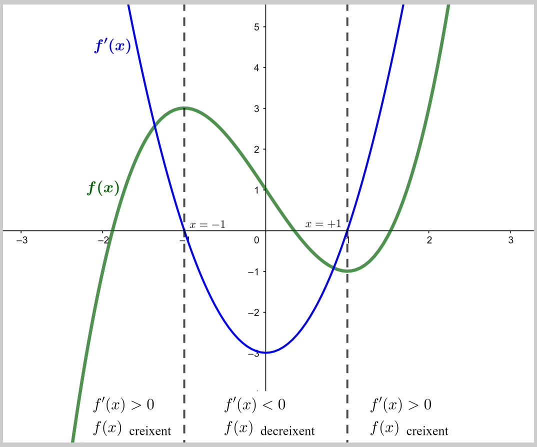
Aquesta funció és positiva en els intervals $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$ i negativa en l'interval $(-1, 1)$.

Aquest fet permet dir:

$f(x)$ és creixent en els intervals $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$.

$f(x)$ és decreixent en l'interval $(-1, 1)$.

Així ho mostra la gràfica de la funció $f(x)$:



11.3.2. Màxims i mínims d'una funció

Una de les aplicacions més importants de les derivades és la recerca de punts extrems (màxims i mínims) d'una funció.

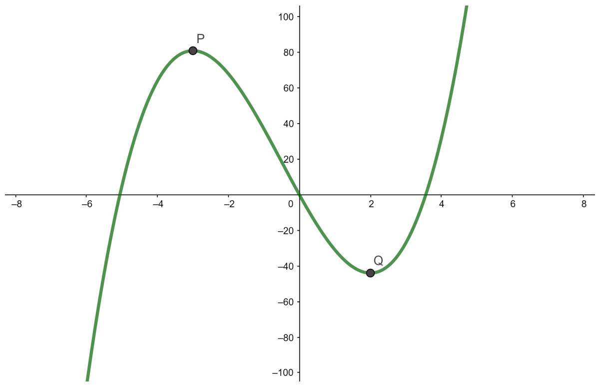
Definicions. Un **màxim** és un punt d'una funció la imatge del qual és més gran o igual que la imatge de qualsevol altre punt que és proper a aquest punt. Un **mínim** és un punt d'una funció la imatge del qual és menor o igual que la imatge de qualsevol punt que sigui proper a aquest punt. D'acord amb aquestes definicions, donada una funció $f(x)$, s'escriu

$(x_0, f(x_0))$ màxim de $f(x)$ en el cas que, per a tot x d'un entorn de x_0, $f(x_0) \geq f(x)$

$(x_0, f(x_0))$ mínim de $f(x)$ en el cas que, per a tot x d'un entorn de x_0, $f(x_0) \leq f(x)$

Identifiquem aquests punts destacats d'una funció en un exemple concret. Agafem, per exemple, el de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$. La gràfica d'aquesta funció és:

Com es localitzen màxims i mínims d'una funció utilitzant-ne la derivada?
Una funció $f(x)$, té un màxim en un punt x_0 si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$.
Una funció té un mínim en x_0 si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$.
També es poden trobar màxims i mínims analitzant el signe de la derivada de $f(x)$ en un entorn del punt x_0.



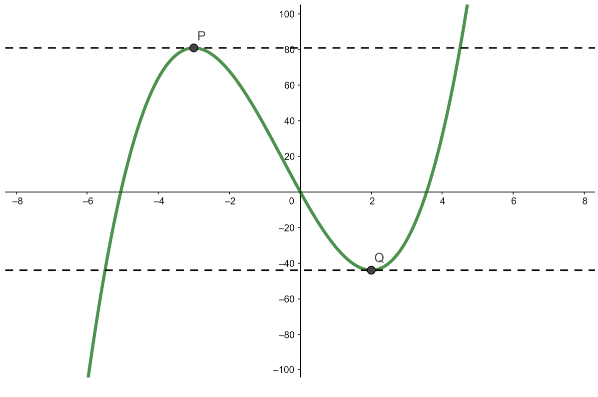
En aquesta gràfica s'hi han marcat dos punts de la funció, P i Q. Aquests punts corresponen respectivament a un màxim local (o relatiu) i a un mínim local (o relatiu) de la funció $f(x)$. Usem el terme *local (o relatiu)* perquè fem referència a un màxim i un mínim en un entorn dels punts extrems, però no a un màxim i un mínim globals de la funció, és a dir, en tot el seu domini.

En el cas del màxim, P, observem que la funció és creixent abans d'arribar al punt, mentre que la funció és decreixent després del punt màxim. Així, abans del màxim la derivada de la funció ha de ser positiva (si una funció és creixent, la seva derivada és positiva), mentre que després del màxim la derivada de la funció ha de ser negativa (si una funció és decreixent, la seva derivada és negativa). Per tant, concloem que, en el punt màxim la derivada passa de ser positiva a ser negativa i, per tant, no queda cap més possibilitat que la derivada de la funció en el màxim de coordenades $(x_{max}, f(x_{max}))$ sigui exactament igual a 0, és a dir, $f'(x_{max}) = 0$.

En el cas de mínim, observem que la funció és decreixent abans d'arribar al punt, mentre que la funció és creixent després del punt mínim. Així, abans del mínim la derivada ha de ser negativa (si una funció és decreixent, la seva derivada és negativa) i després del mínim ha de ser positiva (si una funció és creixent, la seva derivada és positiva). Per tant, en el punt mínim de coordenades $(x_{min}, f(x_{min}))$ la derivada passa de ser negativa a positiva, i no queda altra possibilitat que la derivada de la funció en el mínim sigui exactament igual a 0, és a dir, $f'(x_{min}) = 0$.

En definitiva, quan un punt d'una funció és un màxim o un mínim, la seva derivada en aquests punts s'anul·la, és a dir, és exactament zero.

Aquest fet és comprovable visualment traçant simplement les tangents en aquests punts extrems. Recuperem la gràfica de la funció anterior $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ on, a més, tracem les rectes tangents a la funció en els punts extrems: en el màxim local P i en el mínim local Q.



Tant en el cas del màxim com en el del mínim, la recta tangent en ells és horitzontal i, per tant, amb pendent nul (és a dir, igual a 0), i això indica que la derivada de la funció és 0 en aquests punts.

Exemple. Localització de màxims i mínims d'una funció (I).
Sigui la funció

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

La seva derivada és

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 36$$

Resolem l'equació $f'(x) = 0$ i obtenim les solucions:

$$x = -3 \text{ i } x = 2$$

Això vol dir que els extrems de la funció estan en els punts $x = -3$ i $x = 2$. Més concretament, els punts extrems de la funció $f(x)$ són

$$(-3, f(-3)) = (-3, 81) \text{ i } (2, f(2)) = (2, -44)$$

i això confirma el que havíem observat amb la gràfica de la funció.

Per tant, és possible determinar si un punt és un extrem derivant la funció i resolent l'equació que resulta d'igualar la derivada a 0. Ara bé, **es pot saber quan un extrem és un màxim o un mínim sense haver d'estudiar la gràfica de la funció?**

Sí. Només cal derivar la funció una altra vegada.

Per a calcular la *segona derivada* de la funció, f'', s'utilitzen les regles de derivació habituals. Una vegada calculada la segona derivada de la funció, cal estudiar el signe que pren en ser avaluada en el punt x_0 en qüestió. Aleshores, la regla per a determinar si la funció presenta un màxim o mínim en el punt x_0 del seu domini és la següent:

- En $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$ el punt $(x_0, f(x_0))$ és un màxim de la funció f.
- En $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$ el punt $(x_0, f(x_0))$ és un mínim de la funció f.
- En $f''(x_0) = 0$ no es pot dir res sobre si es tracta d'un màxim o un mínim.

Exemple. Localització de màxims i mínims d'una funció (II).

Donada la funció anterior

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

La derivada de la funció f és

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$$

Els punts en què la derivada s'anul·la són

$$x = -3 \text{ i } x = 2$$

Derivem la derivada de la funció per obtenir la segona derivada de la funció:

$$f''(x) = 12x + 6$$

Estudiem el cas $x_0 = -3$:

$$f''(-3) = 12 \cdot (-3) + 6 = -30 < 0$$

Per tant, el punt $(-3, f(-3)) = (-3, 81)$ és un màxim de la funció, i això confirma el que s'ha observat amb la gràfica de la funció.

Estudiem el cas $x_0 = 2$:

$$f''(2) = 12 \cdot 2 + 6 = 30 > 0$$

Per tant, el punt $(2, f(2)) = (2, -44)$ és un mínim de la funció, i això confirma el que s'ha observat amb la gràfica de la funció.

Una altra manera per saber si una funció f presenta un màxim o un mínim en un punt $(x_0, f(x_0))$ és estudiar el creixement o decreixement de la funció en un entorn de x_0. Així, tenim:

- En $f'(x_0) = 0$ i si la derivada en aquest punt passa de ser negativa a positiva, i per tant la funció passa de decreixent a creixent, $(x_0, f(x_0))$ és un màxim.

- En $f'(x_0) = 0$ i si la derivada en aquest punt passa de ser positiva a negativa, i per tant la funció passa de creixent a decreixent, $(x_0, f(x_0))$ és un mínim.

Exemple. Localització de màxims i mínims d'una funció (III).

Donada la funció anterior $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ i la seva derivada $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$, veiem que els punts en què s'anul·la la derivada són

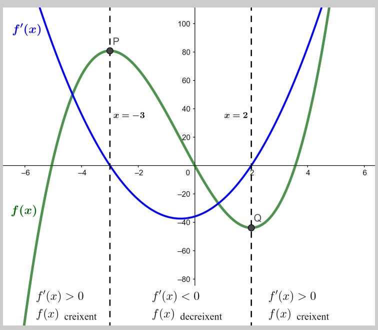
$$x = -3 \text{ i } x = 2$$

Avaluem la funció derivada en punts propers a $x = -3$ i $x = 2$ i notem:

- $f'(x) > 0$ en $x < -3$ i $f'(x) < 0$ en $x > -3$. Per tant, $x = -3$ és un màxim.

- $f'(x) < 2$ en $x < 2$ i $f'(x) > 0$ en $x > 2$. Per tant, $x = 2$ és un mínim.

Això es pot observar en la imatge amb els gràfics de la funció $f(x)$ i la seva derivada:



Problemes d'extrems. D'acord amb les definicions donades, una de les aplicacions de la derivada és la resolució de problemes de maximització i minimització.

En aquest sentit, es diu que un problema és de màxims o mínims, o de maximització o minimització, o en general un **problema d'extrems**, quan es vol resoldre una situació en la qual una determinada magnitud, diguem-li M, depèn d'una altra magnitud, diguem-li x, de manera que $M = f(x)$, i s'ha de trobar un màxim o un mínim de M.

En el cas d'un problema de màxims, es tracta de trobar un màxim de $f(x)$ i, per tant, s'ha de buscar un punt x_0 tal que compleixi alhora $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$. En canvi, en el cas d'un problema de mínims, es tracta de trobar un mínim de $f(x)$ i, per tant, un punt x_0 tal que compleixi alhora $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$.

En l'apartat de problemes resolts hi ha alguns exemples d'aquests tipus de problemes resolts pas a pas per tal d'il·lustrar com es pot procedir en aquests casos.

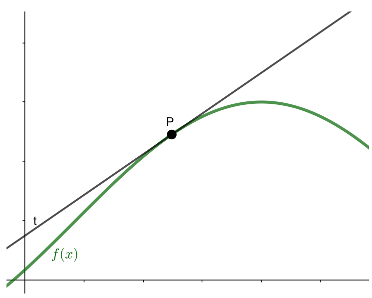
11.3.3. Concavitat i convexitat d'una funció

En els apartats anteriors s'ha parlat de la relació que hi ha entre la derivada d'una funció i la seva monotonia, és a dir, dels punts del domini en què la funció és creixent, constant o decreixent. En aquest apartat es parlarà de l'aplicació de la derivació per a estudiar la curvatura d'una funció, és a dir, dels punts del domini, en què una funció és còncava o convexa.

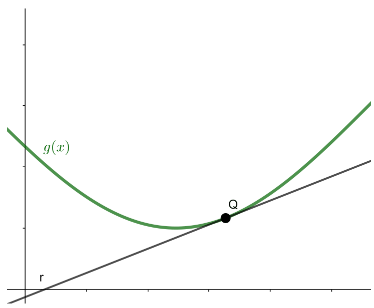
Quina relació hi ha entre la derivació i la concavitat i convexitat d'una funció?
Quan una funció a prop d'un punt és menor que la recta tangent en aquest punt, es diu que la funció és còncava, mentre que quan la funció és major que la recta tangent, es diu que la funció és convexa. Una funció és còncava en aquells punts en què la seva derivada segona és negativa, mentre que una funció és convexa en aquells punts en què la seva derivada segona és positiva.

Les imatges que hi ha a continuació representen un fragment de les gràfiques de dues funcions $f(x)$ i $g(x)$. En cada una s'hi ha marcat un punt concret. En aquests punts s'hi ha traçat la recta tangent a la funció corresponent.

Funció còncava



Funció convexa

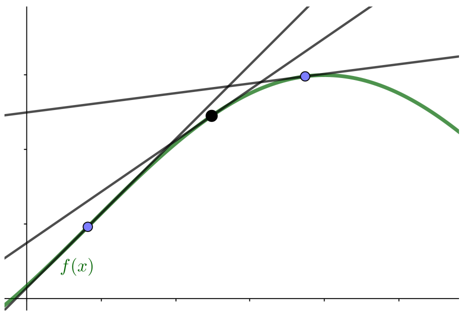


En ambdós casos, la tangent traçada és en un punt en què la funció és creixent. Així mateix, notem que la situació resultant no és la mateixa.

En el cas de la funció f, la tangent en el punt P és per sobre de la funció. Per tant, veiem que a prop del punt P la funció f pren valors més petits que els que pren la tangent, i es diu que la funció és **còncava**. Però en el cas de la funció g la tangent en el punt Q és per sota de la funció. Per tant, la funció g pren valors més grans que la tangent, i es diu que és **convexa**.

Per a conèixer en quins punts del seu domini una funció és còncava i en quins punts és convexa, és essencial estudiar la segona derivada de la funció, tal com veurem amb alguns exemples.

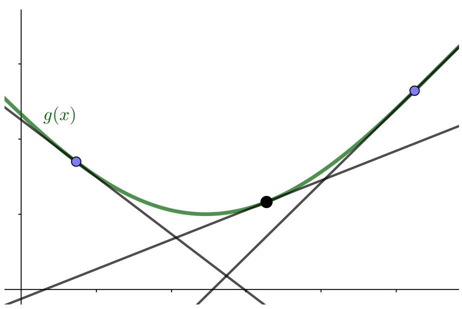
La imatge que hi ha a continuació recupera la gràfica de la funció $f(x)$ anterior que, d'acord amb les descripcions donades, és una funció còncava. Juntament amb la funció, hi trobem dibuixada la recta tangent en diferents punts del seu domini:



Podem observar que el pendent de la recta tangent disminueix a mesura que la variable x pren valors més grans. Com sabem, el pendent de la recta tangent a una funció no és altra cosa que la derivada de la funció. Per tant, deduïm que quan la funció és còncava, la derivada de la funció derivada disminueix a mesura que augmenta la variable x. Això vol dir que quan la funció és còncava, la funció derivada és una funció decreixent. Al seu torn, si la funció derivada és decreixent, la seva derivada (és a dir, la derivada segona de la funció original) ha de ser negativa. Per tant:

*una **funció és còncava** en aquells punts en què la seva derivada segona és negativa.*

De manera similar, deduïm la relació entre la derivada segona d'una funció i la seva convexitat. La imatge que hi ha a continuació mostra la gràfica de la funció $g(x)$ que, d'acord amb la descripció anterior, és una funció convexa. Juntament amb la funció, s'ha traçat la recta tangent en diferents punts del seu domini.



Podem observar que el pendent de la recta tangent augmenta a mesura que la variable x pren valors més grans. Tal com s'ha recordat abans, el pendent de la recta tangent a una funció no és altra cosa que la derivada de la funció. Per tant, deduïm que quan la funció és convexa, la derivada de la funció derivada augmenta a mesura que augmenta la variable x. Això vol dir que quan la funció és convexa, la funció derivada és una funció creixent. Al seu torn, si la funció derivada és creixent, la derivada segona de la funció original ha de ser positiva. Per tant:

*una **funció és convexa** en aquells punts en què la seva derivada segona és positiva.*

Analitzem ara aquestes fets amb algun exemple concret.

Exemple. Estudi de la concavitat i convexitat d'una funció.

Sigui la funció

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

La seva derivada és

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$$

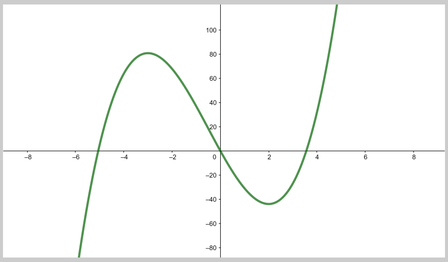
I la seva segona derivada és

$$f''(x) = 12x + 6$$

Notem:

- La funció derivada segona és negativa $f''(x) < 0$ per a $x < -\frac{1}{2}$.
  Per tant, $f(x)$ ha de ser còncava en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.
- La funció derivada segona és positiva $f''(x) > 0$ per a $x > -\frac{1}{2}$.
  Per tant, $f(x)$ ha de ser convexa en $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

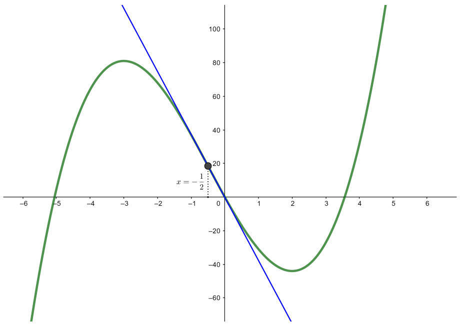
En observar la gràfica de la funció,



comprovem que és així: la funció és còncava en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ i és convexa en $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Ara bé, què passa en el punt que canvia la curvatura d'una funció, com és el punt $x = -\frac{1}{2}$ en el cas de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ de l'exemple? Si derivem la funció $f(x)$ dos cops, observem que en $x = -\frac{1}{2}$, la segona derivada de la funció s'anul·la:

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = 0$$



Per tant, d'acord amb les descripcions anteriors, no podem dir que en aquest punt del domini $x = -\frac{1}{2}$ la funció f sigui còncava o convexa. Ara bé, si estudiem el comportament de la tangent en un entorn d'aquest punt $x = -\frac{1}{2}$ notem que a la seva esquerra la funció és còncava, mentre que a la dreta la funció és convexa. En altres paraules, a l'esquerra de $x = -\frac{1}{2}$ la tangent és més gran que la funció, mentre que a la seva dreta la funció és més petita que la tangent. Es tracta d'un punt on la funció passa de ser còncava a convexa. Els punts en què la funció canvia de curvatura s'anomenen **punts d'inflexió**.

Tal com veurem, una de les característiques dels punts d'inflexió és que la segona derivada de la funció s'hi anuanul·la. Això es deu al fet que els punts d'inflexió són aquells punts on la derivada de la funció té algun màxim o mínim. Si recuperem l'exemple anterior, només cal adonar-se que quan ens acostem al punt d'inflexió $x = -\frac{1}{2}$ la funció f cada vegada decreix més ràpidament, però en passar aquest punt la funció comença a decréixer més lentament. En general, en acostar-nos a un punt d'inflexió la funció cada vegada creix (o decreix) més ràpidament, però en sobrepassar el punt d'inflexió la funció comença a créixer (o decréixer) més lentament. Aquests fets indiquen justament que on hi ha un punt d'inflexió la derivada de la funció té un extrem. Per això mateix, podem trobar els punts d'inflexió buscant zeros de la segona derivada de la funció.

Tal com acabem de dir, si una funció té un punt d'inflexió en un punt x_0, la segona derivada és $f''(x_0) = 0$. Ara bé, que la segona derivada sigui zero en un punt no és condició suficient perquè en aquest punt hi hagi un punt d'inflexió. Ens hem d'assegurar que la curvatura de la funció canvia. Per això, es pot estudiar el comportament de la funció a esquerra i dreta del punt o bé considerar les derivades d'ordre superior a f''. En aquest cas, s'ha de tenir en compte:

- Si la primera derivada (per sobre de f'') que no s'anul·la és d'ordre parell, el punt no és d'inflexió.
- Si la primera derivada (per sobre de f'') que no s'anul·la és d'ordre senar, el punt és d'inflexió.

En definitiva, per a trobar els intervals de concavitat i convexitat d'una funció, cal trobar en primer lloc els valors x del seu domini on la segona derivada de la funció s'anul·la (és a dir, resoldre $f''(x) = 0$) i els valors $\widetilde{x}$ on aquesta segona derivada no existeix, i estudiar posteriorment el signe de la segona derivada en ells. En particular, si la segona derivada canvia de signe en un entorn de x, el punt $(x, f(x))$ és un punt d'inflexió de la funció $f(x)$.

11.3.4. Representació gràfica d'una funció

Per a traçar la gràfica d'una funció, és necessari conèixer diferents aspectes de la funció, com el domini o els talls amb els eixos. Entre aquests aspectes també n'hi ha que requereixen el càlcul de derivades, com la *monotonia* (creixement i decreixement de la funció), l'*existència d'extrems* (màxims i mínims de la funció) o la *curvatura* (concavitat i convexitat de la funció). A continuació veurem amb més detalls quins són aquests aspectes útils i més importants per al traçat (aproximat) de la gràfica d'una funció. Els exemplificarem amb l'estudi de la funció racional

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Els aspectes més importants per a la representació aproximada d'una funció són:

- **Domini**. Els punts on la funció és ben definida.

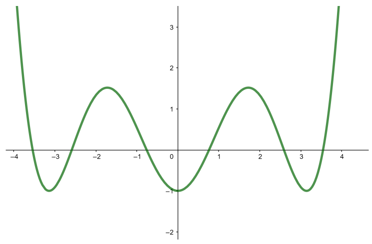
Quina informació cal conèixer per a representar la gràfica d'una funció?
La informació bàsica que s'ha de buscar per a representar una funció és: domini, punts de tall amb els eixos, possibles simetries, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims, intervals de concavitat i convexitat, punts d'inflexió i comportament asimptòtic. Veiem que el càlcul de derivades esdevé una eina vital per a determinar aquestes informacions.

La funció $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ és una funció racional. Per tant, és ben definida per a tots els punts que no anul·len el denominador. Això vol dir que el seu domini són tots els x tals que $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \{-1,1\}$. Per tant, Dom $(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

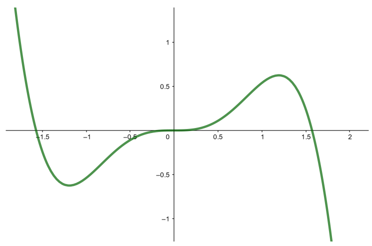
- **Punts de tall amb els eixos**. Els punts de la gràfica de la funció del tipus $(0, f(0))$ i $(x, 0)$.

Eix Y: $x = 0$: $f(0) = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow$ punt $P(0,0)$
Eix X: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Per tant, hi ha un únic punt de tall amb els eixos, que és el punt $P(0,0)$.

- **Simetria**. Determinar si es dona alguna de les condicions següents:
  - Es diu que una funció $f(x)$ és parell o **simètrica respecte de l'eix X** si es compleix $f(-x) = f(x)$.



  - Es diu que una funció $f(x)$ és senar o **simètrica respecte de l'origen** si es compleix $f(-x) = -f(x)$.



Val a dir que una funció pot ser que no sigui ni simètrica respecte de l'eix X ni simètrica respecte de l'origen.

La funció de l'exemple és simètrica respecte de l'origen, ja que

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$$

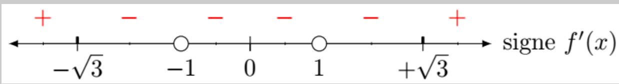
- **Intervals de creixement i decreixement**. Els intervals del domini on la funció creix és constant o decreix. Es poden determinar trobant els punts on s'anul·la la derivada de la funció i estudiant el signe que pren la derivada en ells.

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$$

Per a veure en quins punts la derivada de la funció és positiva o negativa, n'hi ha prou d'estudiar el signe del numerador, ja que el denominador és sempre positiu per ser un quadrat.

Calculem els punts on s'anul·la el numerador. Tenint en compte $x^4 - 3x^2 = x^2(x^2 - 3)$, obtenim els punts $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ i $x = -\sqrt{3}$. Per a estudiar el signe de la derivada, també hem de tenir en compte els punts on no és definida. En aquest cas, $x = \pm 1$.

Així, doncs, tots aquest punts ens divideixen el domini en sis intervals on la funció pren valors negatius i positius. Vegem el signe dels sis intervals definits en la imatge següent:



Per tant, tenim

$f(x)$ és creixent en $(-\infty, -\sqrt{3})$ i $(\sqrt{3}, +\infty)$

$f(x)$ és decreixent en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\sqrt{3})$.

- **Extrems: màxims i mínims**. Els punts en què la funció assoleix els valors màxims i mínims. Es poden trobar estudiant el comportament de la funció en un entorn dels punts on s'anul·la la derivada de la funció.

La derivada de la funció f

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

s'anul·la en

$$x = 0,\ x = -\sqrt{3} \text{ i } x = \sqrt{3}$$

En estudiar el comportament de la funció en aquests punts, notem:

- En $x = 0$: $0 \in (-1, 1)$ que és un interval on la funció és creixent. Per tant, en $x = 0$ no hi ha ni màxim ni mínim.
- En $x = -\sqrt{3}$: tenint en compte els intervals de creixement i decreixement, veiem que en aquest punt la funció passa de ser creixent a decreixent i per tant hi ha un màxim. El màxim és $\left(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})\right) = \left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.
- En $x = \sqrt{3}$: a partir dels intervals de creixement i decreixement veiem que la funció passa de decreixent a creixent en aquest punt. Per tant, en $x = \sqrt{3}$ hi ha un mínim i el punt màxim és $\left(+\sqrt{3}, f(+\sqrt{3})\right) = \left(+\sqrt{3}, +\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

- **Concavitat, convexitat i punts d'inflexió**. Els intervals del domini on la funció és còncava o convexa i els punts d'inflexió. Es poden determinar trobant els punts on s'anul·la la segona derivada de la funció i on aquesta derivada no és definida i, a continuació, estudiant el signe de la segona derivada en ells.

Busquem els punts on s'anul·la la segona derivada de la funció i on aquesta no és definida:

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = 0$$

L'única arrel del numerador és $x = 0$. Per al denominador, les arrels són $x = \pm 1$. Cal estudiar el signe de la $f''(x)$ en les zones que determinen aquests punts, i per tant en els intervals $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(+1, +\infty)$. I tenim:

- $f''(x) > 0$ per a $x \in (-\infty, -1)$ i $x \in (0, +1)$. Per tant, $f(x)$ és convexa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
- $f''(x) < 0$ per a $x \in (-1, 0)$ i $x \in (+1, +\infty)$. Per tant, $f(x)$ és còncava en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.
- $f''(0) = 0$ i en $x = 0$ la funció f passa de còncava a convexa. Per tant, en $x = 0$ hi ha un punt d'inflexió $(0, f(0)) = (0, 0)$.

- **Asímptotes**. Rectes (verticals, horitzontals o obliqües) a les quals s'aproxima la corba de la gràfica de la funció. Per a les verticals, s'han d'estudiar els límits en els punts que no pertanyen al domini i, per a les horitzontals, els límits quan x tendeix a $\pm\infty$. Les asímptotes obliqües se solen trobar en funcions racionals en les quals el polinomi del numerador és d'un grau superior al del polinomi denominador.

- $\boxed{\text{Asímptotes verticals}}$ S'han d'estudiar els límits en els punts que no pertanyen al domini, que són $x = -1$ i $x = +1$:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +1^+} f(x) = +\infty$$

  Per tant, les rectes $x = -1$ i $x = 1$ són asímptotes verticals.

- $\boxed{\text{Asímptotes horitzontals}}$ No en té, ja que els límits de la funció quan x tendeix $\pm\infty$ són ambdós infinits i no tendeixen a cap valor concret.

- $\boxed{\text{Asímptotes obliqües}}$ $f(x)$ és una funció racional tal que el grau del seu polinomi numerador (3) és d'un grau superior al del seu polinomi denominador (2). Podem trobar l'expressió d'aquesta recta, que ha de ser de la forma $y = mx + n$, calculant els límits corresponents:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x \cdot (x^2 - 1)} = 1$$
$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{(x^2 - 1)} - x \right) = 0$$

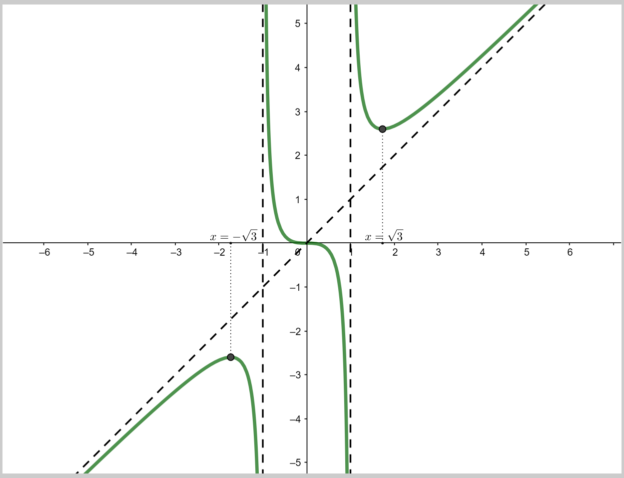
  Per tant, la recta $y = x$ és una asímptota oblíqua de la funció $f(x)$. Ho comprovem així:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0 \text{ i } \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$$

- **Gràfica de la funció**. Una vegada identificats tots aquests elements, és possible la gràfica següent.

Gràfica de la funció

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$



Resum

Derivació de funcions

Derivada d'una funció en un punt

Definició. La derivada d'una funció f en un punt x_0 s'indica per $f'(x_0)$ i es defineix per aquest límit:

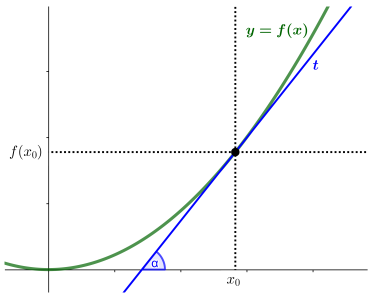
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}}$$

Si aquest límit no existeix, es diu que la funció $f(x)$ no és derivable en x_0.

Interpretació. La derivada d'una funció $f(x)$ en un punt x_0 del seu domini coincideix amb el pendent de la recta tangent de la funció en aquest punt. És a dir,

$$f'(x_0) = \tan(\alpha)$$

on α és l'angle que hi ha entre l'eix X i la recta tangent a la funció en el punt x_0.



Derivada d'una funció

Definició. La derivada d'una funció f és aquella funció que associa a cada punt x del domini la derivada d'aquesta funció. La funció derivada es designa per $f'(x)$.

Taula de derivades. Les principals derivades de funcions són:

Taula de derivades		
$f(x)$	$f'(x)$	**Exemples**
$k,\ k \in \mathbb{Z}$	0	$f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$
$a \cdot x,\ a \in \mathbb{R}$	a	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $g(x) = -4x \Rightarrow g'(x) = -4$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}$	$n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$	
$a^x,\ a \in \mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln(a)$	$f(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x \cdot \ln(3)$ $g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a(e)$	$f(x) = \log_3(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \log_3(e)$ $g(x) = \ln(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Regles de càlcul

- Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions, la derivada de la suma (o resta) de les dues funcions és

$$\boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)}$$

- Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions, la derivada del producte de les dues funcions és

$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

- Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions, la derivada del quocient de les dues funcions és

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

- Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions, la derivada de la composició de les dues funcions és

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

- Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions, per a derivar la potència de f elevada a g, $h(x) = f(x)^{g(x)}$ cal extreure en primer lloc el ln d'aquesta funció:

$$\ln(h(x)) = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x) \cdot \ln(f(x))$$

Llavors es deriva aquesta segona funció aplicant la regla de la cadena:

$$\boxed{h'(x) = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}\right)}$$

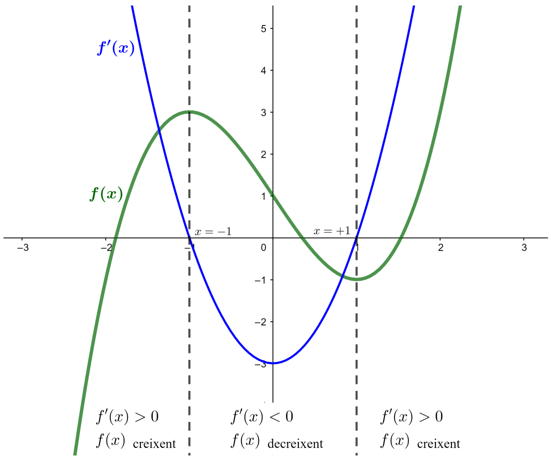
Creixement i decreixement

Definicions

- **Funció creixent**. Si una funció f és creixent en un punt x_0, la seva derivada en aquest punt x_0 és positiva: $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ és creixent en x_0.
  A més, com més ràpidament creix la funció, més gran és el valor de la derivada en el punt.

- **Funció decreixent**. Si una funció f és decreixent en un punt x_0, la seva derivada en aquest punt x_0 és negativa: $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ és decreixent en x_0.
  A més, com més ràpidament decreix la funció, més petit és el valor de la derivada en el punt,.

Exemple



Localització d'extrems

Els extrems d'una funció són els punts màxims i punts mínims que presenta la funció.

Definició d'extrems. Distingim dos tipus d'extrems:

- Un **màxim** d'una funció f és un punt de la funció la imatge del qual és més gran o igual que la imatge de qualsevol altre punt que és proper al punt:
  $$(x_0, f(x_0)) \text{ màxim de } f(x) \text{ si } \forall x \text{ d'un entorn de } x_0 : f(x_0) \geq f(x)$$

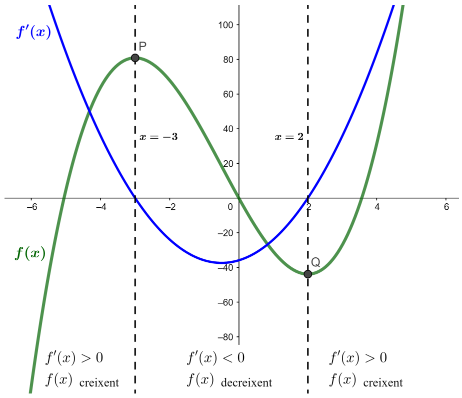
- Un **mínim** és un punt de la funció la imatge del qual és menor o igual que la imatge de qualsevol altre punt que és proper al punt:
  $$(x_0, f(x_0)) \text{ mínim de } f(x) \text{ si } \forall x \text{ d'un entorn de } x_0 : f(x_0) \leq f(x)$$

Recerca d'extrems. Hi ha dues maneres de trobar els màxims i mínims de $f(x)$:

- Trobar la primera i segona derivades de la funció. Aleshores:
  $$(x_0, f(x_0)) \text{ màxim de } f(x) \text{ si } f'(x_0) = 0 \text{ i } f''(x_0) < 0$$
  $$(x_0, f(x_0)) \text{ mínim de } f(x) \text{ si } f'(x_0) = 0 \text{ i } f''(x_0) > 0$$

- Trobar la primera derivada i estudiar el comporament de la funció. Aleshores:
  $(x_0, f(x_0))$ és màxim de $f(x)$ en $f'(x_0) = 0$, i la derivada en aquest punt passa de ser positiva a negativa.
  $(x_0, f(x_0)$ és mínim de $f(x)$ en $f'(x_0) = 0$, i la derivada en aquest punt passa de ser negativa a positiva.

Exemple



Problema d'extrems. Es demana resoldre una situació en la qual una certa magnitud M depèn d'una altra magnitud x de manera que $M = f(x)$, i s'ha de trobar el màxim o el mínim d'aquesta funció M. Es distingeixen dos casos:

- En el cas d'un problema de màxims, es tracta de trobar un màxim de $f(x)$ i, per tant, s'ha de buscar un punt x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ i, alhora, $f''(x_0) < 0$.
- En el cas d'un problema de mínims, es tracta de trobar un mínim de $f(x)$ i, per tant, s'ha de buscar un punt x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ i, alhora, $f''(x_0) > 0$.

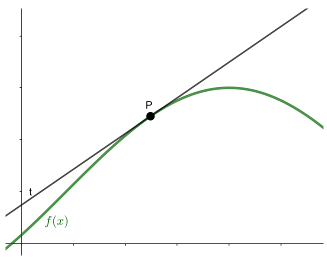
Concavitat i convexitat

Definicions

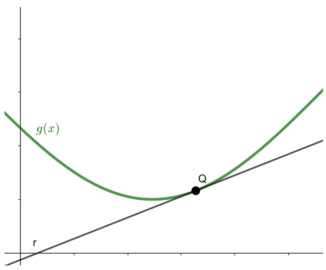
- Una funció $f(x)$ és **convexa** en un punt (x_0, y_0) quan el valor d'aquesta funció és més gran que el valor de la tangent de la funció en un entorn d'aquest punt. En aquest cas, $f''(x_0) > 0$.
- Una funció f és **còncava** en un punt (x_0, y_0) quan el valor d'aquesta funció és més petit que el valor de la tangent de la funció en un entorn d'aquest punt. En aquest cas, $f''(x_0) < 0$.
- Un **punt d'inflexió** d'una funció f és un punt en el qual la funció canvia la seva curvatura, és a dir, passa de ser còncava a convexa, o viceversa. En aquest cas, $f''(x_0) = 0$.

Exemples

Funció còncava



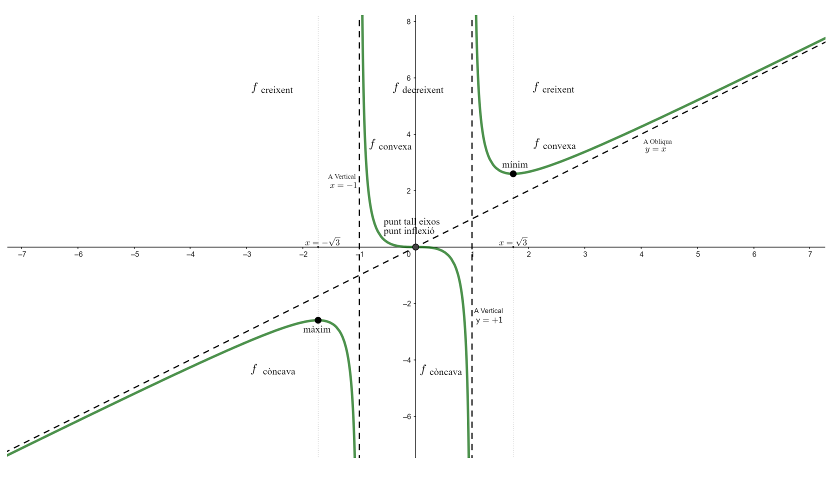
Funció convexa



Representació gràfica d'una funció

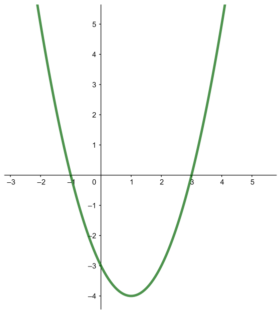
Per a representar gràficament una funció, cal conèixer certa informació. Il·lustrem aquesta informació imprescindible amb un exemple concret:

Descripció dels elements per a representar gràficament una funció $f(x)$.	**Exemple**. Representar gràficament $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$
Domini	
Punts de l'eix X on $f(x)$ és definida.	Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
Punts de tall amb els eixos	
Punts del tipus $(0, f(0))$ i $(x, 0)$.	Un únic punt de tall, el $(0,0)$
Simetria	
Una funció f és parell o simètrica respecte de l'eix Y quan $f(-x) = f(x)$. Una funció f és simètrica respecte de l'origen quan $f(-x) = -f(x)$.	És simètrica respecte de l'origen: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\dfrac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$
Intervals de creixement i decreixement	
Signe de la derivada de la funció: • $f(x)$ és creixent en $f'(x) > 0$. • $f(x)$ és decreixent en $f'(x) < 0$.	És creixent en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ i decreixent en $\left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right)$
Extrems: màxims i mínims	
Quan s'anul·la la derivada de la funció, • x_0 màxim de f si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$. • x_0 mínim de f si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$.	$\left(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})\right) = \left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ és màxim. $\left(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})\right) = \left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ és mínim.
Punts d'inflexió	
Quan s'anul·la la segona derivada de la funció, x_0 punt d'inflexió en $f''(x_0) = 0$ i f'' canvia de signe en un entorn de x_0.	$(0, f(0)) = (0,0)$ és un punt d'inflexió
Intervals de concavitat i convexitat	
Signe de la segona derivada de la funció: • $f(x)$ convexa si $f''(x) > 0$ • $f(x)$ còncava si $f''(x) < 0$	És còncava en $(-1, 0)$ i $(1, \infty)$. És convexa en $(-\infty, -1)$ i $(0, 1)$.
Comportament asimptòtic	
Estudi de l'existència d'asímptotes verticals, horitzontals o obliqües de la funció.	$x = -1$ i $x = 1$ són asímptotes verticals i $y = x$ és una asímptota oblíqua
Gràfica	



Exercicis resolts

1. **La imatge mostra la gràfica de la derivada, $f'(x)$, d'una funció, $f(x)$.**



Contesteu raonadament aquestes preguntes sobre la funció $f(x)$:

(a) A $x = 0$: és $f(x)$ creixent o decreixent?

(b) A $x = 3.5$: és $f(x)$ creixent o decreixent?

(c) Té $f(x)$ cap mínim?

(d) Té $f(x)$ cap màxim?

(e) Determineu els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$.

Solució:

(a) A $x = 0$: la derivada és negativa, i per tant $f(x)$ és decreixent en aquest punt.

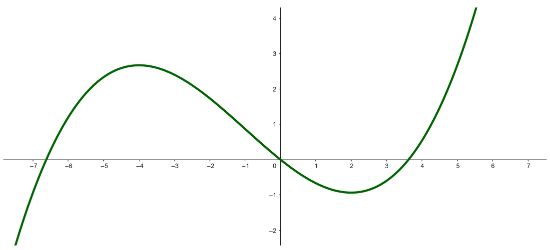
(b) A $x = 3.5$: la derivada és positiva, i per tant $f(x)$ és creixent en aquest punt.

(c) Sí, en el punt $x = 3$, perquè la derivada passa de ser negativa a positiva.

(d) Sí, en el punt $x = -1$, perquè la derivada passa de ser positiva a negativa.

(e) La funció $f(x)$ és decreixent en $[-1, 3]$ perquè la derivada és negativa en aquest interval, i $f(x)$ és creixent a la resta del domini, és a dir, en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, perquè és on la derivada és positiva.

2. **La gràfica d'una funció $f(x)$ és**



Contesteu raonadament aquestes preguntes sobre la funció derivada $f'(x)$:

(a) Quin és el signe de la derivada, $f'(x)$, en $x = 3$? I en $x = -0.5$?

(b) Hi ha cap punt en què la derivada, $f'(x)$, s'anul·li?

(c) Determineu el signe de la derivada, $f'(x)$, en tots els punts del domini de la funció.

Solució:

(a) En $x = 3$ la funció derivada $f'(x)$ és positiva perquè la funció $f(x)$ és creixent en aquest punt.
En $x = -0.5$ la funció derivada $f'(x)$ és negativa perquè la funció $f(x)$ és decreixent en aquest punt.

(b) Sí, en els punts $x = -4$ i $x = 2$, perquè s'hi troben, respectivament, un màxim i un mínim locals de la funció $f(x)$.

(c) La derivada $f'(x)$ és negativa en $(-4, 2)$ perquè la funció és decreixent en aquest interval. La derivada $f'(x)$ és positiva a $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$ perquè la funció és creixent en aquests intervals.

3. **Per a cadascuna d'questes tres funcions,**

$$f(x) = \frac{8x^2}{4 - x^2} \qquad g(x) = \frac{2x}{\ln(x)} \qquad h(x) = x^3 - 3x + 2$$

determineu:

(a) el domini de cadascuna,

(b) els seus punts de tall amb els eixos,

(c) els corresponents màxims i mínims,

(d) els punts d'inflexió,

(e) els intervals de creixement i decreixement,

(f) els intervals de concavitat i convexitat,

(g) les asímptotes,

(h) la seva gràfica.

Solucions:

Estudi de la primera funció:

$$f(x) = \frac{8x^2}{4 - x^2}$$

(a) Per ser $f(x)$ una funció racional, el seu domini consta de tots els nombres excepte aquells que anul·len el polinomi del denominador:

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \{-2, +2\}$$

Per tant, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\} = (0, -2) \cup (2, +\infty)$.

(b) Talls amb els eixos:

Eix Y: $f(0) = \dfrac{0}{4-0} = 0 \Rightarrow$ el punt $(0, 0)$.

Eix X: $f(x) = \dfrac{8x^2}{4 - x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ el punt $(0, 0)$.

(c) Per a trobar els màxims i mínims, derivem la funció i la igualem a 0:

$$f'(x) = \frac{16x \cdot \left(4 - x^2\right) - 8x^2 \cdot (-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{64x}{(4 - x^2)^2} = 0$$

Resolem l'equació i obtenim una única possibilitat:

$$x = 0$$

Calculem la segona derivada:

$$f''(x) = \frac{192x^2 + 256}{(4 - x^2)^3}$$

En avaluar la segona derivada en $x = 0$, obtenim que és positiva,

$$f''(0) = 4 > 0$$

la qual cosa informa que es tracta d'un mínim.

Per tant, $f(x)$ presenta únicament un mínim, que és el punt $(0, f(0)) = (0, 0)$.

(d) No hi ha cap punt d'inflexió perquè no trobem cap punt x_0 que compleixi $f''(x_0) = 0$.

(e) Hi ha quatre intervals de creixement o decreixement, separats pels límits del domini i pel mínim. Estudiem el comportament de la funció en cada un d'aquests quatre intervals avaluant la derivada en un punt interior en cada un:

- De $-\infty$ a -2: $f(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ és decreixent.
- De -2 a 0: $f(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ és decreixent.
- De 0 a 2: $f(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ és creixent.
- De 2 a $+\infty$: $f(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ és creixent.

(f) Per a determinar els intervals de concavitat i convexitat, n'hi ha prou d'estudiar el signe de la segona derivada de la funció entre els límits del domini únicament, atès que no hi ha cap punt d'inflexió (on $f''(x) = 0$):

- De $-\infty$ a -2: $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ és còncava
- De -2 a $+2$: $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ és convexa.
- De $+2$ a $+\infty$: $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ és còncava.

(g) Té tres asímptotes: dues de verticals i una d'horitzontal:

- Asímptotes verticals: s'han d'estudiar els límits en els punts que no pertanyen al domini, que són $x = -2$ i $x = +2$:

  $$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$$
  $$\lim_{x \to +2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +2^+} f(x) = +\infty$$

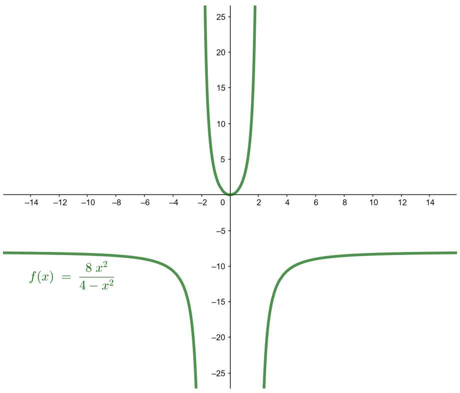
  Per tant, les rectes $x = -2$ i $x = +2$ són asímptotes verticals.

- Asímptotes horitzontals: s'han d'estudiar els límits de la funció quan x tendeix $-\infty$ i $+\infty$:

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -8 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

  Per tant, la recta $y = -8$ és una asímptota horitzontal de la funció f

(h) La gràfica de la funció f és



Estudi de la segona funció:

$$g(x) = \frac{2x}{\ln(x)}$$

(a) Domini:
Per ser $g(x)$ una funció amb un logaritme en el denominador, la funció és ben definida per a tots els nombres més grans que 0 (ja que el logaritme només és definit per a nombres positius), excepte aquells que anul·len el denominador:

$$\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

Per tant, $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,+\infty)$.

(b) Talls amb els eixos:
Eix Y: $g(0)$ no es pot calcular, ja que $x = 0$ no pertany al domini. Per tant, no n'hi ha.
Eix X: $g(x) = \dfrac{2x}{\ln(x)} = 0 \Rightarrow$ 0, però $x = 0$ no pertany al domini. Per tant, no n'hi ha.

(c) Per a trobar els màxims i mínims, derivem la funció i la igualem a 0:

$$g'(x) = \frac{2\ln(x) - 2}{\ln^2(x)}$$

Resolem l'equació i obtenim una única possibilitat:

$$x = e$$

Calculem la segona derivada:

$$g''(x) = -\frac{2 \cdot \ln(x) - 4}{x \cdot \ln^3(x)}$$

En avaluar la segona derivada en $x = e$, obtenim que és positiva,

$$\frac{2}{e} > 0$$

la qual cosa informa que es tracta d'un mínim.
Per tant, $g(x)$ presenta únicament un mínim, que és el punt $(e, g(e)) = (e, 2e)$.

(d) Per a trobar els punts d'inflexió, igualem la segona derivada a 0 i resolem l'equació resultant:

$$g''(x) = -\frac{2 \cdot \ln(x) - 4}{x \cdot \ln^3(x)} = 0 \Rightarrow x = e^2$$

A més,

$$g'''(x) = \frac{2 \cdot \ln^2(x) - 12}{x^2 \cdot \ln^4(x)}$$

d'on resulta

$$g'''(e^2) \neq 0$$

Per tant, $\left(e^2, g(e^2)\right) = (e^2, e^2)$ és un punt d'inflexió de g.

(e) Hi ha tres intervals de creixement o decreixement, separats pels límits del domini i pel mínim. Estudiem el comportament de la funció en cada un d'aquests tres intervals avaluant la derivada en un punt interior en cada un:

- De 0 a 1: $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ és decreixent
- De 1 a e: $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ és decreixent
- De e a $+\infty$: $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ és creixent

(f) Per a determinar els intervals de concavitat i convexitat, cal estudiar la segona derivada de la funció entre els límits del domini i el punt d'inflexió:

- De 0 a 1: $g''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ és còncava.
- De 1 a e^2: $g''(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ és convexa.
- De e^2 a $+\infty$: $g''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ és còncava.

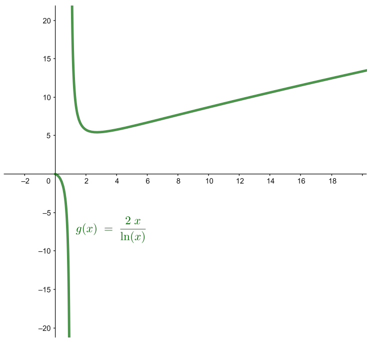
(g) Té una asímptota únicament, que és vertical:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

Per tant, la recta $x = 1$ és una asímptota vertical de la funció g.
A més, notem

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

(h) La gràfica de la funció g és



Estudi de la tercera funció:

$$h(x) = x^3 - 3x + 2$$

(a) Per ser $h(x)$ una funció polinòmica, el seu domini consta de tots els nombres reals. Per tant, $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$.

(b) Talls amb els eixos:
Eix Y: $h(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow$ el punt $(0, 2)$.
Eix X: $h(x) = x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ i $x = 1 \Rightarrow$ els punts $Q(-2, 0)$ i $(1, 0)$.

(c) Per a trobar els màxims i mínims, derivem la funció i la igualem a 0:

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

Resolem l'equació i obtenim dues possibilitats: $x = -1$ i $x = +1$.
Calculem la segona derivada:

$$h''(x) = 6x$$

L'avaluem en $x = -1$ i $x = +1$ i obtenim:

$$h''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \text{ i } h''(+1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$$

Per tant, h té un màxim en $(-1, h(-1)) = (-1, 4)$ i un mínim en $(1, h(1)) = (1, 0)$.

(d) Per a trobar els punts d'inflexió, igualem la segona derivada a 0 i resolem l'equació resultant:

$$h''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

A més, $h'''(x) = 6 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Per tant, el punt $(0, h(0)) = (0, 2)$ és un punt d'inflexió de h.

(e) Hi ha tres intervals de creixement o decreixement, separats pels extrems trobats (el màxim i el mínim). Estudiem el comportament de la funció en cada un d'aquests tres intervals avaluant la derivada en un punt interior en cada un:

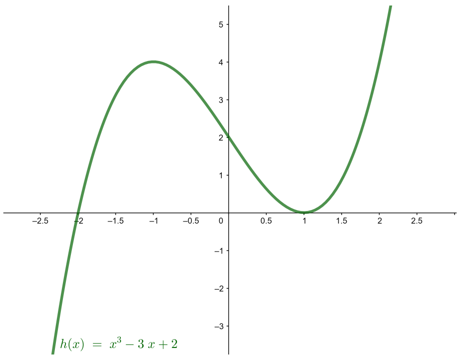
- De $-\infty$ a -1: $h'(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ és creixent
- De -1 a 1: $h'(x) < 0 \Rightarrow h(x)$ és decreixent
- De 1 a $+\infty$: $h'(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ és creixent

(f) Per a determinar els intervals de concavitat i convexitat, només cal estudiar la segona derivada de la funció abans i després del punt d'inflexió (ja que el domini són tots els reals):

- De $-\infty$ a 0: $h''(x) < 0 \Rightarrow h(x)$ és còncava.
- De 0 a $+\infty$: $h''(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ és convexa.

(g) Aquesta funció no té cap asímptota

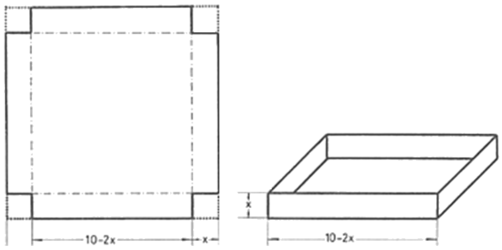
(h) La gràfica de la funció h és



4. **Amb una peça de cartolina de** 10 **dm de costat es vol construir una caixa retallant peces quadrades de costat** x **en cada vèrtex del quadrat. Quin valor s'ha de donar a** x **perquè el volum de la caixa sigui el màxim?**

Solució

Comencem per representar gràficament la situació que descriu l'enunciat del problema:



Notem que el volum de la caixa es correspon amb el volum d'un prisma rectangular. El seu valor es pot trobar multiplicant amplada per llargada i per altura. Si sabem, a més, que la cartolina fa 10 dm de costat, el volum del prisma és producte de l'expressió

$$V(x) = (10 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$

Així, queda clar que el volum de la caixa depèn del valor de x. Trobada la funció amb què treballar, es tracta de trobar-ne un màxim en l'interval $(0, 5)$ per simetria, ja que el tall en els extrems no pot superar 5 dm. En particular, notem que el volum de la caixa, tant en 0 com en 5, és igual a 0:

$$V(0) = V(5) = 0$$

Vegem, doncs, si podem trobar el màxim en l'interior d'aquest interval. Per això, tractarem de trobar un punt, $x_0 \in (0, 5)$, que compleixi les condicions de màxim, és a dir, que compleixi alhora

$$V'(x_0) = 0 \text{ i } V''(x_0) < 0$$

Trobem la derivada de la funció i la igualem a 0:

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 4 \cdot (3x^2 - 20x + 25) = 0$$

Resolem l'equació obtinguda aplicant la fórmula de resolució per a equacions de segon grau i trobem que s'anul·la en dos punts:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} = \left\{5, \frac{5}{3}\right\}$$

El primer valor, $x = 5$, no és dintre de l'interval $(0, 5)$ considerat, i per tant només podem considerar el segon resultat: $x = \frac{5}{3}$. Per a saber si en aquest punt hi ha un màxim o un mínim de la funció, hem de calcular la segona derivada de la funció i avaluar-la en aquest punt:

$$V''(x) = 24x - 80 \text{ i } V''\left(\frac{5}{3}\right) = 24 \cdot \frac{5}{3} - 80 = -40 < 0$$

Per tant, podem concloure que en $x = \frac{5}{3} \approx 1.66$ hi ha un màxim de la funció.

Això vol dir que, per tal que la nova caixa tingui el volum màxim possible, s'hauran de retallar quadrats d'aproximadament 1.66 dm de costat. Aleshores, el volum de la caixa resultant, que serà màxim, serà

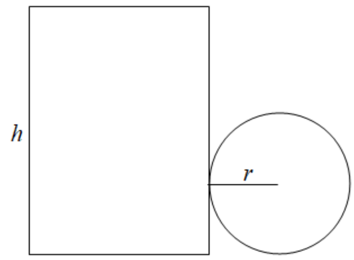
$$V\left(\frac{5}{3}\right) = \left(10 - 2 \cdot \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} = \left(\frac{20}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{2000}{27} \approx 74.07 \text{ dm}^3$$

5. **Es volen construir pots cilíndrics (com els de les begudes refrescants) de** 500 **cm**^{3} **de volum. Quines dimensions (altura i diàmetre de la base) s'han de donar a un envàs d'aquestes característiques perquè necessiti la mínima quantitat de material?**

Solució

Distingim dues possibilitats en funció de si el pot, que ha de ser cilíndric, té una o dues tapes.

Primer cas: pot amb una tapa. Si considerem que el pot, que és cilíndric, té una única tapa, el desenvolupament pla que li correspon és



Aleshores, el material necessari per a construir-lo ha de tenir una superfície de

$$S = 2\pi rh + \pi r^2$$

L'enunciat imposa que el volum del pot ha de ser de 500 cm^3, i per tant s'ha de complir

$$\pi r^2 h = 500$$

d'on, aïllant h en funció de r, resulta

$$h = \frac{500}{\pi r^2}$$

Per tant, la funció S a estudiar, que dependrà del radi r, esdevé

$$S(r) = 2\pi r \cdot \left(\frac{500}{\pi r^2}\right) + \pi r^2 = \frac{1000}{r} + \pi r^2$$

Així, es tracta de trobar un valor per a r de manera que faci mńim el valor de $S(r)$. Per això, sabem que si r_0 és el valor mínim d'aquesta funció, es compleix

$$S'(r_0) = 0 \text{ i } S''(r_0) > 0$$

Calculem, doncs, $S'(r)$ i igualem a 0:

$$\begin{aligned} S'(r) &= -\frac{1000}{r^2} + 2\pi r = 0 \\ 2\pi r &= \frac{1000}{r^2} \\ 2\pi r^3 &= 1000 \\ r &= \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}} \\ r &= 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \approx 5.42 \end{aligned}$$

Per tant, el radi hauria de mesurar aproximadament 5,42 cm.
Trobat el valor candidat a extrem, comprovem si es tracta realment d'un mínim de la funció i, per tant, fa mínim el valor de la funció:

$$S''(r) = \frac{3000}{r^3} + 2\pi \text{ i } S''(5.42) \approx 18.85 > 0$$

Confirmem així que en prendre $r \approx 5.42$ cm, la funció superfície $S(r)$ pren un valor mínim, que és igual a $S(5.42) \approx 276.8$ cm^2 aproximadament.

Segon cas: pot amb dues tapes. Si s'interpreta que el pot cilíndric té, com les llaunes de refrescs, dues tapes i no solament una, la funció superfície ha d'incloure la superfície de l'altra tapa. Aleshores, cal treballar amb la funció

$$S(r) = 2\pi rh + 2\left(\pi r^2\right)$$

En imposar la condició que el volum ha de ser de 500 cm^3, la funció en funció del radi r esdevé

$$S(r) = \frac{1000}{r} + 2\pi r^2$$

Aleshores,

$$S'(r) = -\frac{1000}{r^2} + 4\pi r = 0$$

d'on resulta

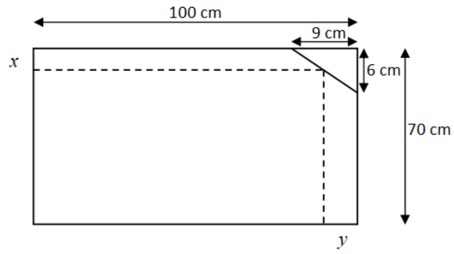
$$\begin{aligned} 4\pi r &= \frac{1000}{r^2} \\ r^3 &= \frac{1000}{4\pi} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{1000}{4\pi}} \\ r &= 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \approx 4.3 \end{aligned}$$

Per tant, el radi hauria de mesurar aproximadament 4,3 cm.
Trobat el valor candidat a extrem, comprovem si es tracta realment d'un mínim de la funció i, per tant, fa mínim el valor de la funció:

$$S''(r) = \frac{3000}{r^3} + 4\pi \text{ i } S''(4.3) \approx 37.7 > 0$$

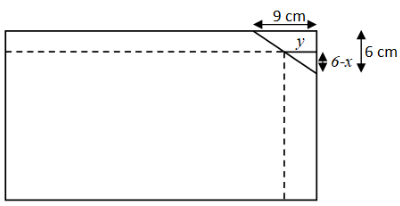
Confirmem així que en prendre $r \approx 4.3$ la funció superfície $S(r)$ pren un valor mínim, que és igual a $S(4.3) \approx 348.73$ cm^2 aproximadament.

6. **En traslladar un mirall de 70×100 cm s'ha trencat per un dels vèrtexs. El bocí trencat és un triangle rectangle de 6×9 cm de costat, tal com es veu en la figura. Calcula per on s'ha de tallar el mirall per a obtenir un altre mirall que també sigui rectangular i que tingui l'àrea més gran possible.**



Solució

Es tracta d'un problema de maximització, ja que es presenta una situació en què hem de maximitzar certes dimensions d'un objecte que podem mesurar. En aquest cas, en particular, l'àrea d'un rectangle corresponent a un mirall.
Per tal de resoldre el problema, refem gràficament la situació plantejada. Si ens fixem bé en aquesta representació,



notem que es tracta d'escollir les mesures x i y de manera que l'àrea del rectangle puntejat, que representa el nou rectangle, sigui la màxima possible.
D'acord amb aquesta imatge, l'àrea del nou mirall és producte de l'expressió:

$$(100 - y) \cdot (70 - x)$$

Ara bé, com que l'expressió és producte de dues variables, es fa necessari en primer lloc determinar una de les incògnites en funció de l'altra. Posem, per exemple, y en funció de x. Aquest canvi es pot fer gràcies a les raons de semblança entre triangles. En particular, en aquest cas s'ha de complir

$$\frac{y}{6 - x} = \frac{9}{6}$$

d'on podem aïllar y en funció de x i, per tant, podem considerar

$$y \Longrightarrow \frac{3}{2} \cdot (6 - x)$$

Per tant, en substituir y en funció de x, la funció àrea a maximitzar esdevé

$$f(x) = \left(100 - \frac{3}{2} \cdot (6 - x)\right)(70 - x)$$

$$f(x) = 6370 + 14x - \frac{3}{2}x^2$$

Ara busquem la seva derivada per trobar un màxim. Per això, calculem la derivada de la funció:

$$f'(x) = 14 - 3x$$

La igualem a 0 i resolem l'equació resultant:

$$14 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{14}{3}$$

Per tant, el valor candidat és $x = \frac{14}{3} \approx 4.67$ cm.
Com que

$$f''(x) = -3 < 0, \ \forall x$$

ens trobem, com buscàvem, davant d'un màxim.
D'acord amb aquest valor de x, el valor corresponent de y resulta

$$y = \frac{3}{2} \cdot \left(6 - \frac{14}{3}\right) = 2$$

Per tant, i d'acord amb la imatge considerada, les mesures que faran màxima l'àrea del nou mirall seran: $100 - 2 = 98$ cm de llarg per $70 - \frac{14}{3} = \frac{196}{3} \approx 65.33$ cm d'ample. És a dir, que s'hauria de retallar el mirall de manera que tingués 98 cm de llarg i aproximadament 65.33 cm d'ample. Aleshores, l'àrea d'aquest nou rectangle retallat, que serà màxima, serà de $98 \cdot \frac{196}{3} = 6402.7$ cm^2.

Exercicis per a practicar amb les solucions

7. **Donada la funció a trossos següent,**

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & \textbf{si } x < -1 \\ 1 & \textbf{si } -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{3}{4-x} & \textbf{si } x > 1 \end{cases}$$

estudia'n la derivabilitat i escriu l'expressió de la funció derivada $f'(x)$.

8. **Calcula les derivades d'aquestes funcions:**

(a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

(b) $g(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$

(c) $h(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$

(d) $r(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{\ln(x)}$

(e) $b(x) = e^{3x^2 - x - 1}$

9. **Troba les asímptotes de les funcions següents:**

$$f(x) = x \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^{-}1}}$$

Solucions

7. L'expressió de la funció derivada és

$$f'(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x \in (-\infty, -1) \\ 0 & \text{si } x \in (-1, +1) \\ \dfrac{3}{(4-x)^2} & \text{si } x \in (1, +\infty) \smallsetminus \{4\} \end{cases}$$

La funció és derivable en tot el seu domini menys en els punts $(-1, 1)$ i $(1, 1)$ perquè en ells no existeix el límit que defineix a derivada d'una funció en un punt (els límits per l'esquerra i la dreta són diferents).

8. Les derivades, simplificades al màxim, de les funcions són:

(a) $f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$

(b) $g'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

(c) $h'(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}}$

(d) $t'(x) = \dfrac{2e^{2x+1} \cdot \ln(x) - \frac{e^{2x+1}}{x}}{\ln^2(x)}$

(e) $b'(x) = (6x - 1)\, e^{3x^2 - x - 1}$

9. Les asímptotes són:
En el cas de $f(x)$: una asímptota vertical en $x = 1$ i una asímptota obliqua en $y = x + 1$.
En el cas de $g(x)$: dues asímptotes verticals: $x = -1$ i $x = +1$ i una asímptota obliqua en $y = x$.

12. Integració de funcions

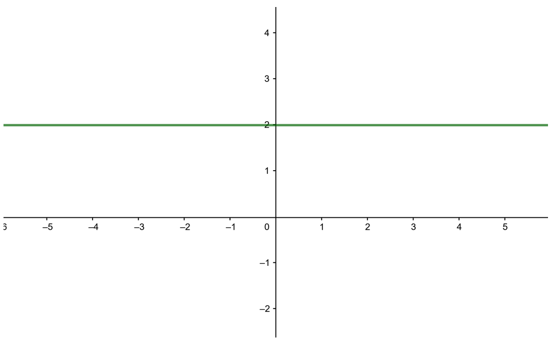
Índex

12.1. Integració d'una funció

12.1.1. Noció intuïtiva

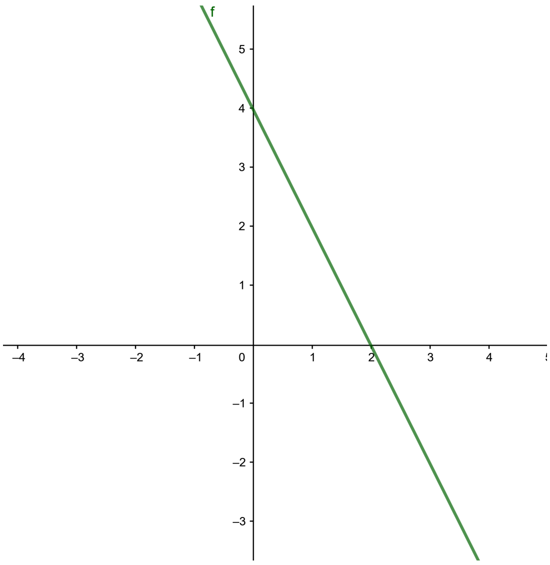
Donada una funció $f(x)$ és possible trobar la seva derivada $f'(x)$ utilitzant la taula de derivades i les regles pertinents. Aquesta transformació suggereix una pregunta: donada una funció $f(x)$, és possible trobar una funció $F(x)$ la derivada de la qual sigui la funció inicial $f(x)$, és a dir, $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$?

Per exemple, si sabem que la derivada d'una funció $F(x)$ té la gràfica següent, què podem dir sobre la funció $F(x)$?



Veiem en primer lloc que la derivada es correspon amb la funció constant 2. Per tant, sabem que la funció $F(x)$ podria ser $2x$. Però també podria ser $2x + 5$ o, entre altres possibilitats, $2x - 8$. Aleshores podem dir que la funció $F(x)$ serà de la forma $2x + C$, on C pot ser qualsevol nombre real.

Considerem un segon exemple: suposem que el gràfic següent ens mostra la derivada d'una funció $F(x)$



En aquest cas, primer hem de trobar l'expressió de la derivada. Veiem que la gràfica és una recta que passa pels punts $(0,4)$ i $(2,0)$ i per tant podem deduir que la seva expressió algebraica és $-2x+4$. Si pensem quines funcions tenen aquesta derivada, tenim per exemple $-x^2+4x$, $-x^2+4x-5$ o també, entre d'altres, $-x^2+4x-8$. Totes aquestes funcions tenen la mateixa derivada $-2x+4$, i per tant en aquest cas deduïm que $F(x) = -x^2+4x+C$, on C serà qualsevol nombre real.

Podem pensar en exemples més complicats. Donada la funció $f(x) = 3x^2+5$, podem trobar una funció, $F(x)$, la derivada de la qual sigui precisament $f(x)$? En aquest cas, es pot comprovar que la funció $F(x) = x^3+5x$ té com a derivada $F'(x) = f(x) = 3x^2+5$. Podríem trobar una altra funció que complís la mateixa condició? Notem que la funció $G(x) = x^3+5x+3$ també té com derivada $f(x)$. En general, tota funció de la forma x^3+5x+C, on C és un nombre, té la mateixa derivada, ja que la derivada de C sempre serà 0.

12.1.2. Definició i interpretació

Un procés d'aquest tipus es denomina **integració** de la funció $f(x)$, i la funció resultant es denomina **primitiva** de $f(x)$. La integració és, per tant, l'operació oposada a la derivació:

si $f(x)$ és la derivada de $F(x)$, $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$.

Així, podem afirmar que tota funció de la forma $F(x)+C$, on C és un nombre, també és una primitiva de $f(x)$. El conjunt de totes les primitives d'una funció $f(x)$ es denomina **integral indefinida** o simplement integral de la funció $f(x)$. Així, per exemple, la integral de la funció $f(x) = 3x^2+5$ (on C és un nombre real qualsevol), perquè qualsevol primitiva de la funció $f(x)$ s'escriurà d'aquesta manera. És a dir, l'única diferència entre una primitiva d'aquesta funció i una altra serà el seu terme independent.

Per a expressar la integració d'una funció, s'utilitza un símbol d'integral $\int$ anteposat a la funció **integrand**, i a continuació el símbol dx, denominat **diferencial** de x, que ens indica respecte de quina variable estem integrant. És a dir, la integral indefinida d'una funció $f(x)$ s'expressa així:

$$\int f(x)dx$$

Així, doncs, l'exemple anterior podem expressar-lo així:

$$\int (3x^2 + 5)dx = x^3 + 5x + C$$

12.1.3. Taula d'integrals immediates

Hi ha algunes integrals que es poden obtenir de manera immediata si tenim la integral de la derivada d'una funció. En aquest cas, n'hi ha prou de conèixer les regles de derivació de funcions per a calcular la integral desitjada. Aquestes integrals s'anomenen **integrals immediates**.

Presentem una taula de les integrals immediates més usuals. Recordem que C denota un nombre real qualsevol.

Taula d'integrals immediates		
$f(x)$	$\int f(x)dx$	**Exemples**
k constant	$k \cdot x + C$	$\int 3dx = 3x + C$
x^n si $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln(3)} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	

12.1.4. Regles de càlcul

El càlcul de la primitiva d'una funció qualsevol no és tan senzill com el de la derivada, ja que les úniques regles immediates que es poden aplicar són:

- La integral de la suma (o resta) de funcions és igual a la suma (o resta) de les integrals de les funcions.

$$\boxed{\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx}$$

- La integral del producte d'un nombre per una funció és igual al producte del nombre per la integral de la funció.

$$\boxed{\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx}$$

- En $g(x) = \int f(x)dx$, $g'(x) = f(x)$.
- La regla de la cadena $((f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g')$ ens permet escriure

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = f(g(x)) + C}$$

A partir de l'última regla podem generalitzar la taula d'integrals immediates anterior a les integrals que s'anomenen sovint **integrals quasi immediates**.

Integrals quasiimmediates	
Integral	**Exemples**
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq 1$	$\int [\sin(x)]^4 \cdot \cos(x)dx = \frac{[\sin(x)]^5}{5} + C$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+13}dx = \ln\lvert x^2 - 3x + 12\rvert + C$
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C$	$\int e^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)dx = e^{4x^2+3x-2} + C$
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + C$	$\int 5^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)dx = \frac{5^{4x^2+3x-2}}{\ln(5)} + C$
$\int f'(x) \cdot \sin(f(x))dx = -\cos(f(x)) + C$	$\int \cos(x)\sin(\sin(x))dx = -\cos(\sin(x)) + C$
$\int f'(x) \cdot \cos(f(x))dx = \sin(f(x)) + C$	$\int 6 \cdot \cos(6x-2)dx = \sin(6x-2) + C$
$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx = \arctan(f(x)) + C$	$\int \frac{\frac{1}{x}}{1+(\ln(x))^2}dx = \arctan(\ln(x)) + C$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \arcsin(f(x)) + C$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}dx = \arcsin(e^x) + C$

12.1.5. Mètodes d'integració

En general, per a calcular la integral d'una funció no en tenim prou de conèixer les integrals immediates i les regles d'integració que acabem de veure, sinó que necessitarem utilitzar alguns mètodes i tècniques que poden ajudar en el càlcul. Tot i això, no sempre és possible arribar a trobar una expressió algebraica que resolgui la integral plantejada.

Vegem les dues tècniques més utilitzades per a calcular integrals no immediates. L'objectiu dels dos mètodes és simplificar la integral per poder-la calcular com una integral immediata o quasiimmediata.

Mètode de substitució (o de canvi de variable). Amb aquest mètode es canvia la variable d'integració per una funció seva. Amb aquesta transformació es pretén obtenir una nova integral, més simplificada que la primera. Vegem de manera general quins són els passos a seguir. Suposem que volem resoldre la integral

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Considerem el canvi $x = g(t)$, on la funció $g(t)$ i la seva derivada $g'(t)$ són funcions contínues. Aleshores, per la regla de la cadena, tenim

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

Podem resumir l'aplicació d'aquest mètode amb els passos següents:

1) Substituïm x per $u(t)$ i dx per $u'(t)dt$

$$\int f(x)dx \xrightarrow[x=u(t)]{dx=u'(t)dt} \int f(u(t))u'(t)dt$$

2) Resolem la nova integral, que serà immediata o quasiimmediata.

$$\int f(u(t))u'(t)dt = G(t) + C$$

3) Aïllem la variable t de la igualtat $x = u(t)$ i obtenim $t = u^{-1}(x)$.

4) Desfem el canvi i obtenim

$$\int f(x)dx = G(u^{-1}(x)) + C$$

Vegem uns quants exemples de com aplicar aquest mètode.

Exemple. Integració per canvi de variable (1).

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$$

En aquest cas, no sabem calcular directament aquesta integral, però observem que si prenem $t = \sqrt{x-1}$ podem aïllar x de manera que obtenim $x = 1 + t^2$ i la seva derivada $dx = 2tdt$. Així, si apliquem aquest canvi ens queda

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{t^2+1}{t} \cdot 2tdt = 2\int (t^2+1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} + t\right) + C$$

Finalment, desfem el canvi (substituïm $t = \sqrt{x-1}$ en la solució) i tenim

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = 2\left(\frac{2(\sqrt{x-1})^3}{3} + \sqrt{x-1}\right) + C$$

Exemple. Integració per canvi de variable (2).

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

En aquest cas prenem $t = \ln(x)$ i, per tant, $dt = \frac{1}{x}dx$. Així doncs, tenim

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C$$

Per tant, desfent el canvi,

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + C$$

Exemple. Integració per canvi de variable (3).

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx$$

Podem fer el canvi $x = \sin(t)$ i, per tant, $dx = cos(t)dt$. Així, doncs,

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2(t)} = \cos(t)$$

Podem calcular la integral plantejada recordant que $\cos^2(t) = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \int \cos(t) \cdot \cos(t) dt = \int \cos^2(t) dt = \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int 1\,dt + \frac{1}{2} \int \cos(2t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \frac{\sin(2t)}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2} t + \frac{2\sin(t) \cdot \cos(t)}{4} + C$$

on hem utilitzat $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$. Si desfem el canvi, com que $x = \sin(t)$, $t = \arcsin(x)$ i $\sqrt{1 - x^2} = \cos(t)$. Si substituïm en l'expressió, tenim

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C$$

Observem que en els dos primers exemples els canvis de variable poden ser intuïtius si pensem que la idea és simplificar les integrals. En canvi, en l'últim exemple el canvi de variable requereix alguna indicació (o molta pràctica).

Mètode d'integració per parts. Aquest mètode es basa en la regla de la derivació del producte. Recordem que si f i g són dues funcions, sabem que la derivada del seu producte és

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

I, de fet, podem reescriure aquesta expressió de la forma

$$f(x) \cdot g'(x) = (f(x) \cdot g(x))' - f'(x) \cdot g(x)$$

Si ara integrem en ambdós termes de la igualtat, tenim

$$\int \left[f(x) \cdot g'(x)\right] dx = \int \left[(f(x) \cdot g(x))' - f'(x) \cdot g(x)\right] dx$$

I, per tant, d'aquí obtenim la fórmula d'integració per parts:

$$\boxed{\int \left[f(x) \cdot g'(x)\right] dx = (f(x) \cdot g(x)) - \int \left[f'(x) \cdot g(x)\right] dx}$$

Aquesta fórmula s'ha d'aplicar quan la integral del membre de la dreta és més senzilla que la de l'esquerra (per això, aquesta última s'ha de descompondre en el producte de dues funcions; una d'aquestes, $g'(x)$, ha de ser la derivada d'una altra funció g, que, a més, ha de ser fàcil de trobar).

Moltes vegades, per a simplificar la fórmula d'integració per parts s'utilitzen les variables u en lloc de $f(x)$, i v en lloc de $g(x)$, de manera que s'escriu

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Normalment, l'ordre en què es tria la funció u segons les funcions que tinguem a la integral inicial és: funcions logarítmiques, funcions potència, funcions trigonomètriques i, finalment, funcions exponencials.

Vegem uns quants exemples d'aquest mètode d'integració.

Exemple. Integració per parts (1).

$$\int xe^x dx$$

Triem $u = x$ i, per tant, $du = 1 \cdot dx$ i $dv = e^x dx$ i, per tant, $v = \int e^x dx = e^x$. Si ara apliquem la fórmula d'integració per parts, obtenim

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

de manera que la nova integral de la dreta ara és immediata i, per tant, obtenim

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Exemple. Integració per parts (2).

$$\int \ln(x)dx$$

Triem $u = \ln(x)$ i, per tant, $du = \frac{1}{x} \cdot dx$ i $dv = 1 \cdot dx$ i, per tant, $v = \int 1dx = x$. Si ara apliquem la fórmula d'integració per parts, obtenim

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot xdx = x\ln(x) - \int 1dx$$

de manera que la nova integral de la dreta ara és immediata i, per tant, obtenim

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + C = x(\ln(x) - 1) + C.$$

Exemple. Integració per parts (3).

$$\int e^x \sin(x)dx$$

Igual que en les anteriors integrals, triem $u = \sin(x)$ i, per tant, $du = \cos(x)$ i $dv = e^x\,dx$, de manera que $v = \int e^x dx = e^x$. Així, a partir de la fórmula d'integració per parts, obtenim

$$\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx$$

En aquest cas, no obtenim una integral immediata i per tant tornem a integrar per parts la integral que hem obtingut. Triem $u = \cos(x)$ i, per tant, $du = -\sin(x)$ i $dv = e^x\,dx$, de manera que $v = \int e^x dx = e^x$. D'aquesta manera tenim

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x)dx &= e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx \\ &= e^x \sin(x) - \left[e^x \cos(x) - \int e^x(-\sin(x))dx\right] \\ &= e^x\left(\sin(x) - \cos(x)\right) - \int e^x \sin(x)dx\end{aligned}$$

Veiem com abans que la integral que obtenim no és més fàcil que les anteriors, però aquesta vegada podem observar que és exactament igual a la inicial, i per tant el que fem en aquest cas és passar la integral al primer membre, de manera que obtenim

$$2\int e^x \sin(x)dx = e^x\left(\sin(x) - \cos(x)\right) + C$$

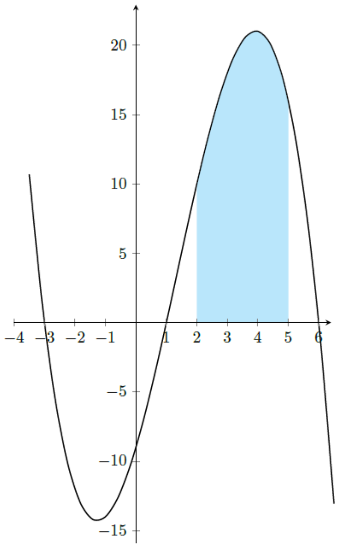
I, per tant, finalment obtenim

$$\int e^x \sin(x)dx = \frac{e^x}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right) + C$$

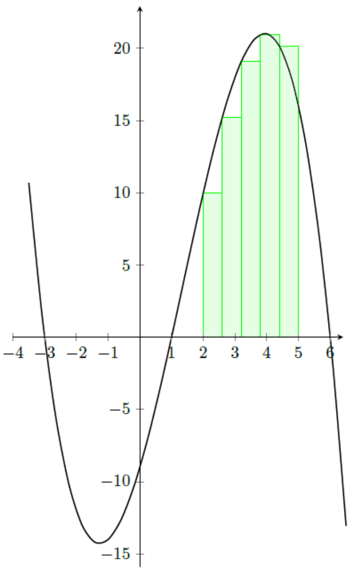
12.1.6. Integral definida. Regla de Barrow

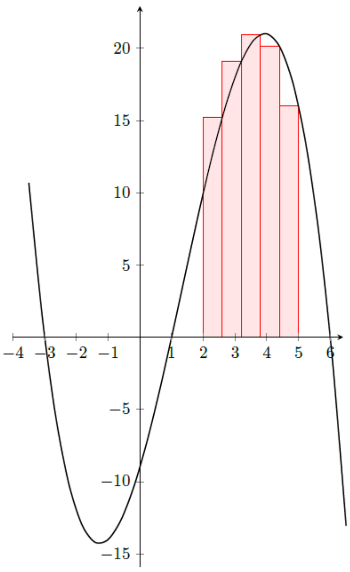
Integral definida. La integral definida neix de la necessitat de calcular l'àrea tancada per una funció i l'eix X en un cert interval. Aquesta àrea es pot aproximar sumant certs rectangles, la base dels quals és constant i l'altura és el valor de la funció en certs punts escollits convenientment. El límit d'aquest càlcul quan la base d'aquests rectangles tendeix a 0 és igual a la integral definida d'aquesta funció en aquest interval, és a dir, l'àrea que busquem.

Vegem-ho amb un exemple i alguns gràfics. Volem calcular l'àrea limitada per la funció $f(x) = -\frac{1}{2}(x-6)(x-1)(x+3)$ i l'eix X entre 2 i 5, tal i com es mostra en la gràfica següent:



L'àrea que tanca la gràfica entre els punts 2 i 5 (la part en blau) es pot aproximar per la suma de l'àrea d'alguns rectangles. Vegem en les gràfiques següents dos exemples de formes d'aproximar l'àrea com a suma de rectangles. (Tot i que presentem només dos exemples, hi ha altres maneres de definir els rectangles.)

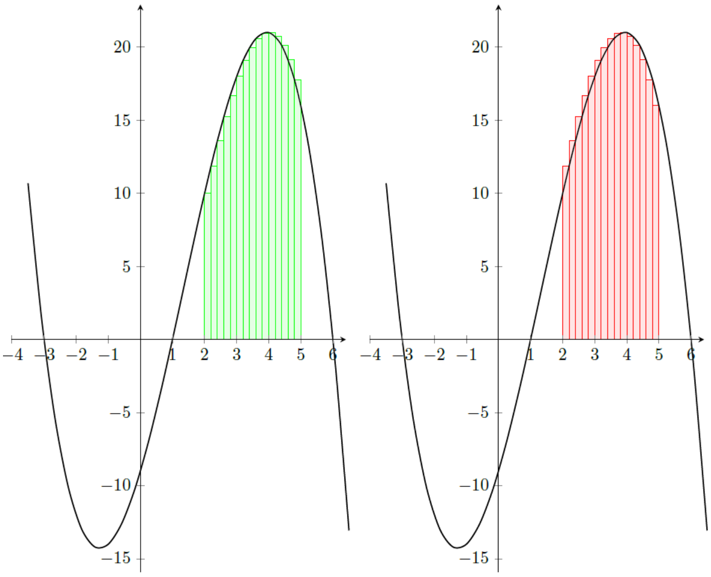




En ambdós casos, com en l'altre, hem dividit l'interval $[2, 5]$ en 5 parts. Per a cada part, hem construït un rectangle l'alçària del qual coincideix amb la imatge del primer punt de la base en la primera gràfica i amb la imatge del segon punt de la base en el cas de la segona gràfica.

D'aquesta manera, les bases de tots els rectangles són iguals: $\frac{5-2}{5} = 0.6$. Si ens fixem en el primer rectangle verd, la seva alçària és $f(2) = -\frac{1}{2}(2-6)(2-1)(2+3) = 10$ i, per tant, la seva àrea és $0.6 \cdot 10 = 6$. En canvi, si mirem el primer rectangle vermell, l'alçària és $f(2.6) = -\frac{1}{2}(2.6-6)(2.6-1)(2.6+3) = 15.23$ i, per tant, la seva àrea és $0.6 \cdot 15.23 = 9.13$

Si enlloc de 5 rectangles haguéssim dividit l'interval en més parts, obtindríem una millor aproximació de l'àrea que volem.



Així, en general, si volem calcular l'àrea d'una funció $f(x)$ en un interval (a,b), dividim aquest interval en n parts i siguin x_0, x_1, ..., x_n són els punts resultants, on $x_0 = a$ i $x_n = b$. Aleshores, si construïm els rectangles com en l'exemple dels rectangles en verd, tenim

$$A \cong \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

I, si ho fem com en l'exemple dels rectangles en vermell,

$$A \cong \sum_{i=0}^{n} f(x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

De fet, l'àrea que busquem és exactament igual a aquest límit:

$$A = \lim_{(x_{i+1}-x_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

és a dir, el límit quan la diferència entre una x_i i la següent tendeix a 0, és a dir, quan els rectangles tenen una base tan petita com vulguem i, per tant, tenim infinits rectangles.

$\sum_{i=0}^{n}$ és el símbol de **sumatori** i indica que s'han de sumar els termes de dins del sumatori des de $i = 0$ fins a $i = n$.

Aquest límit s'escriu normalment en forma d'integral quan la funció $f(x)$ és positiva:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{(x_{i+1}-x_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

on a i b es denominen **límits d'integració**. Aquesta expressió rep el nom d'**integral definida d'extrems a i b**.

Regla de Barrow. Es pot comprovar que tant la integral definida com la indefinida utilitzen pràcticament els mateixos símbols, amb la diferència dels límits d'integració que utilitza la integral definida. Això no és casual, perquè la integral definida es pot calcular a partir d'una primitiva de la funció. De fet, el càlcul de la integral definida es facilita a partir de la **Regla de Barrow**

Si $f(x)$ és una funció contínua en $[a,b]$ i $F(x)$ és una primitiva qualsevol de $f(x)$,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Fixem-nos que podem triar la primitiva que vulguem, però la triarem habitualment amb $C = 0$ perquè és més senzilla. Si en triéssim qualsevol altra, el resultat seria exactament el mateix, ja que estarien restant la C i es cancel·laria.

Per una funció $F(x)$ escriurem
$$F(x)]_a^b$$
per denotar que la funció $F(x)$ s'avalua en b i en a i es resten els resultats, o sigui que és equivalent a $F(b) - F(a)$.

Exemple. Regla de Barrow.

Calculem la integral

$$\int_1^3 (2x^2 + 3)dx$$

Per a calcular aquesta integral, hem de buscar una primitiva (prendrem $C = 0$) i avaluar-la en els extrems:

$$\int_1^3 (2x^2 + 3)dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x\Big]_1^3 = \left(\frac{2}{3}3^3 + 3 \cdot 3\right) - \left(\frac{2}{3}1^3 + 3 \cdot 1\right) = \frac{70}{3}$$

En el moment de la definició de la integral definida hem suposat $a < b$, però també podem considerar el cas $b < a$. Llavors tindrem

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Per tant, els límits d'integració poden ser qualssevol.

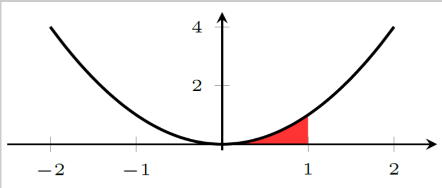
L'origen del símbol integral és una S allargada, que indica que es tracta d'un sumatori, mentre que l'origen del símbol diferencial, dx, prové del fet que es tracta de diferències de x (si es pren la inicial de "diferència" juntament amb la x, resulta, precisament, dx).

Utilitzant la regla de Barrow, podem comprovar que les propietats de la integral definida són molt semblants a les regles de càlcul establertes per la integral indefinida.

- $\int_a^b K \cdot f(x)dx = K \cdot \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- Siguin a, b, c nombres arbitraris
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

A partir de la definició de la integral definida, podem calcular l'àrea sota una funció (positiva) en un interval. Tot seguit aprofundirem en aquest tema, però vegem-ne uns primers exemples senzills.

Exemple. Càlcul d'àrea.
Volem calcular l'àrea sota la funció $f(x) = x^2$ en l'interval $(0, 1)$, és a dir, l'àrea marcada en vermell en la gràfica següent:



Observem que la funció és positiva, i per tant per trobar l'àrea hem de calcular la integral $\int_0^1 x^2 dx$. Podem calcular primer la integral indefinida:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

I, de totes les primitives, triem la més simple, és a dir, amb $C = 0$. Finalment, hem d'avaluar la integral en els dos extrems i restar-los:

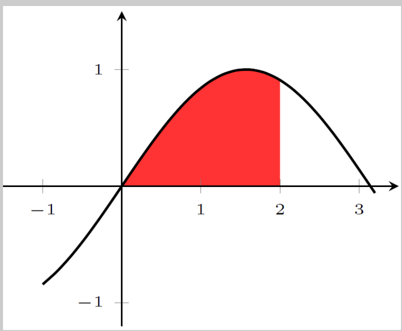
$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Per tant, l'àrea que volíem és $\frac{1}{3}\text{u}^2$.
Observem que si en lloc de prendre $C = 0$ haguéssim pres qualsevol altre valor, el resultat hauria sigut exactament el mateix:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3} + C\right]_0^1 = \frac{1}{3} + C - (0 + C) = \frac{1}{3}$$

Observem que, com que calculem àrees, el resultat final és en u^2, on u pot ser ser m, cm... depenent del context.

Exemple. Càlcul d'àrea.
Volem calcular l'àrea sota la funció $f(x) = \sin(x)$ en l'interval $(0, 2)$, és a dir, l'àrea marcada en vermell en la gràfica següent:



Observem que la funció és positiva, i per tant per trobar l'àrea, hem de calcular la integral $\int_0^2 \sin(x)dx$. En aquest segon exemple podem fer els càlculs directament sense calcular primer la integral indefinida. Així, doncs, tenim

$$\int_0^2 \sin(x)dx = -\cos(x)\Big]_0^2 = -\cos(2) + \cos(0) = -(-0.41615) + 1 = 1.41615\text{u}^2$$

Per tant, l'àrea és 1.41615u^2

12.2. Aplicacions

12.2.1. Càlcul d'àrees

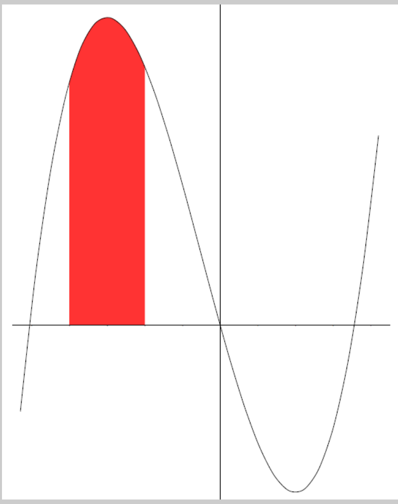
Ja hem vist que la integral definida ens permet calcular àrees sota la corba definida per $f(x)$ si $f(x)$ és positiva. Ara veurem els diferents casos en què ens podem trobar. Recordem sempre que l'àrea ha de ser un valor positiu (no pot ser mai negatiu, ja que és una mesura).

Càlcul àrea si $f(x) \geq 0$ en l'interval $[a, b]$. Si $f(x)$ és una funció positiva en l'interval $[a, b]$ ((és sempre per sobre de l'eix X), l'àrea que tanca aquesta funció i l'eix X, dins de l'interval $[a, b)]$, és igual a

$$\boxed{\mathrm{A} = \int_a^b f(x)dx}$$

tal com es desprèn de manera immediata de la definició d'integral definida.

Exemple. Càlcul d'àrea en $f(x) \geq 0$ a $[a, b]$.
Calculem l'àrea de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en l'interval $[-4, -2]$



Com que veiem que la funció és positiva en tot l'interval $[-4, -2]$, l'àrea que busquem és

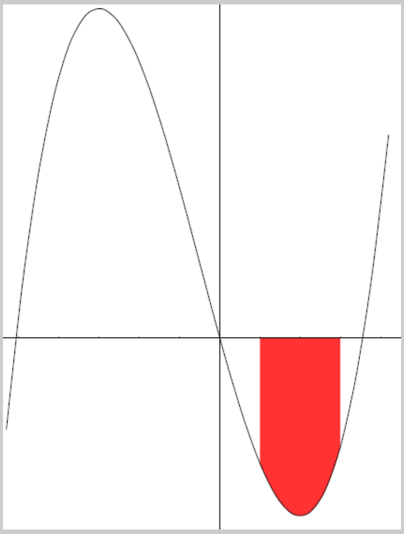
$$\int_{-4}^{-2} f(x)dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 36 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg]_{-4}^{-2} = 152$$

Veiem, doncs, que l'àrea és $152\mathrm{u}^2$.

Càlcul d'àrea si $f(x) \leq 0$ en l'interval $[a, b]$. Si $f(x)$ és una funció negativa en l'interval $[a, b]$ (és sempre per sota de l'eix X), l'àrea que tanca aquesta funció i l'eix X, dins de l'interval $[a, b]$, és igual a

$$\boxed{A = -\int_a^b f(x)dx}$$

Exemple. Càlcul d'àrea en $f(x) \leq 0$ a $[a, b]$.
Calculem l'àrea de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en l'interval $[1, 3]$:



Com que veiem que la funció és negativa en tot l'interval $[1, 3]$, l'àrea que busquem és

$$A = -\int_1^3 f(x)dx = -\left[2 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 36 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 78$$

Veiem, doncs, que l'àrea és 78u^2.

Observem que si sabem que la funció en l'interval $[a, b]$ és sempre per sobre o sota de l'eix X però no sabem quin dels dos casos és, podem calcular-ho com a

$$A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

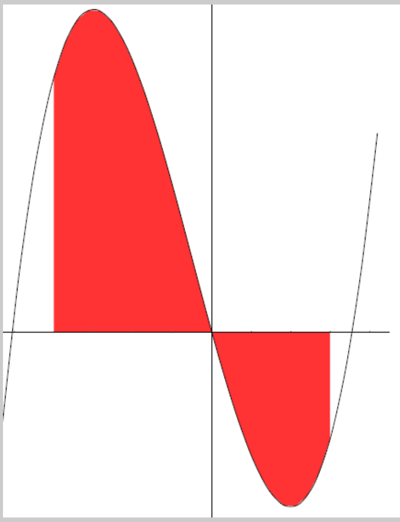
i així obtindrem sempre un valor positiu. Això ens serveix si la funció és sempre per sobre o per sota de l'eix X.

Càlcul d'àrea si $f(x)$ canvia de signe en l'interval $[a, b]$. En els dos casos anteriors hem calculat l'àrea d'una funció positiva o una funció negativa en tot l'interval $[a, b]$. En general, per a trobar l'àrea que es forma entre l'eix X i qualsevol funció $f(x)$, que pren valors positius i negatius entre els límits a i b, s'han de trobar les arrels de l'equació $f(x) = 0$ que són dins de l'interval $[a, b]$ i separar l'interval $[a, b]$ en subintervals que tinguin per extrems aquestes arrels.
Així, si tenim, per exemple, 3 arrels x_1, x_2, x_3 en l'interval $[a, b]$ tals $x_1 < x_2 < x_3$, l'àrea que busquem és

$$\boxed{A = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)dx\right|}$$

Fixeu-vos que el valor absolut ens permet no haver d'estudiar si la funció és per sobre o per sota de l'eix X en cada un dels intervals.

Exemple. Càlcul d'àrea si $f(x)$ és positiva i negativa en $[a,b]$.
Calculem l'àrea de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en l'interval $[-4,3]$:



Primer calculem les arrels de $f(x) = 0$ i veiem que són 0 i aproximadament -5.06 i 3.56. Ens fixem que només $x = 0$ és dins de l'interval $[-4,3]$. Així doncs, l'àrea que busquem és

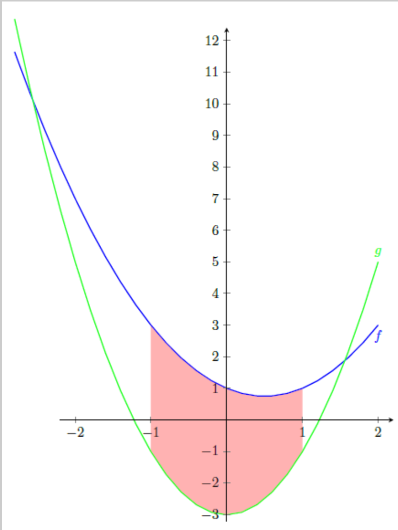
$$\begin{aligned} A &= \left|\int_{-4}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{3} f(x)dx\right| = \left|\left[2\cdot\frac{x^4}{4} + 3\cdot\frac{x^3}{3} - 36\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{0}\right| \\ &+ \left|\left[2\cdot\frac{x^4}{4} + 3\cdot\frac{x^3}{3} - 36\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right| = 224 + 94.5 = 318.5 \end{aligned}$$

Per tant, l'àrea val $318.5\mathrm{u}^2$.

Càlcul d'àrea entre dues corbes $f(x)$ i $g(x)$ en l'interval $[a,b]$. En aquest cas podem aplicar els casos anteriors amb una sola funció considerant la funció diferència $f(x)-g(x)$. Exactament igual que hem fet abans, haurem de separar els casos segons si la diferència és sempre positiva, sempre negativa o bé si canvia de signe dins de l'interval $[a,b]$, i per tant haurem de separar l'interval $[a,b]$ en els subintervals corresponents. Per tant, hem de començar buscant les arrels de $f(x) - g(x)$ (o sigui que hem de resoldre l'equació $f(x) - g(x) = 0$) i veure si pertanyen a l'interval $[a,b]$. Cal adonar-se que parlem del signe de la diferència de les funcions, no de si les funcions són per sobre o per sota de l'eix X.

El canvi de signe de la diferència de funcions es donarà quan canviï la funció de les dues que és per sobre.

Exemple. Càlcul d'àrea entre $f(x)$ i $g(x)$ a $[a,b]$.
Calculem l'àrea entre les funcions $f(x) = x^2 - x + 1$ i $g(x) = 2x^2 - 3$ en l'interval $[-1,1]$. Volem calcular, per tant, l'àrea marcada en vermell en la gràfica



1) Busquem els punts de tall entre les dues funcions, i per tant hem de resoldre
$$x^2 - x + 1 = 2x^2 - 3$$
o sigui que hem de resoldre l'equació $x^2 + x - 4 = 0$. Obtenim dues solucions que són aproximadament -2.56 i 1.56. Com que cap de les dues és en l'interval $[-1,1]$ en el nostre interval la diferència de les dues funcions no canvia de signe, o sigui que no canvia l'ordre de la funció que és per sobre en tot l'interval on calcular l'àrea.

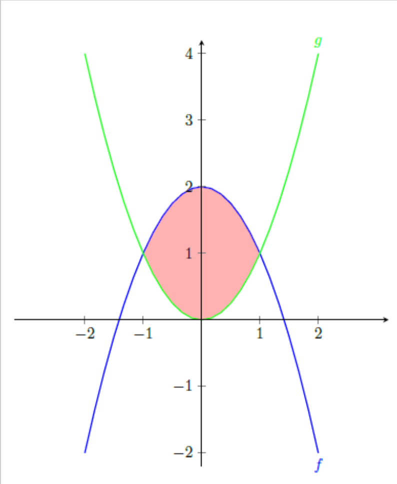
2) Calculem l'àrea:
$$A = \left|\int_{-1}^{1}[f(x) - g(x)]dx\right| = \left|\int_{-1}^{1}[-x^2 - x + 4]dx\right| = \left|-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{1}\Bigg| = \frac{22}{3}$$

Per tant, l'àrea que busquem és $\frac{22}{3}\mathrm{u}^2$.
Hauríem pogut treure el valor absolut si haguéssim estudiat primer quina de les dues funcions és per sobre i, per tant, si hem de calcular la integral de $f(x) - g(x)$ o bé $g(x) - f(x)$.

Càlcul d'àrea entre dues corbes $f(x)$ i $g(x)$. En aquest cas, a diferència dels anteriors, no ens limiten a l'interval, i per tant haurem d'estudiar els punts on es tallen les dues funcions per a trobar els límits d'integració. Per tant, haurem de resoldre l'equació $f(x) = g(x)$ i calcular l'àrea de cada regió limitada entre dos punts de tall seguits.

Exemple. Càlcul d'àrea entre $f(x)$ i $g(x)$.

Calculem l'àrea entre les funcions $f(x) = 2 - x^2$ i $g(x) = x^2$:



El primer pas que hem de fer és buscar els punts de tall de les dues funcions. Aquests punts de tall són els que ens donaran els límits d'integració. Igualem les dues funcions i resolem l'equació resultant:

$$2 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

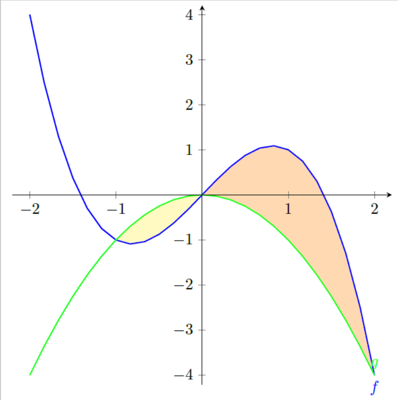
Per tant, per a obtenir l'àrea que volem, hem de calcular la integral següent:

$$A = \left| \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]dx \right| = \left| \int_{-1}^{1} [2 - 2x^2]dx \right| = \left| \left[2x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^{1} \right| = \frac{8}{3}$$

Per tant, l'àrea que busquem és $\frac{8}{3}\text{u}^2$.

Exemple. Càlcul d'àrea entre $f(x)$ i $g(x)$.

Calculem l'àrea entre les funcions $f(x) = 2x - x^3$ i $g(x) = -x^2$:



En aquest cas, ja podem intuir gràficament que hem de separar l'àrea que volem calcular en dos trossos perquè les gràfiques es tallen en 3 punts i, per tant, canvien la posició sobre quina de les dues és per sobre de l'altra.

Comencem, doncs, buscant els punts de tall de les dues funcions:

$$2x - x^3 = -x^2 \Leftrightarrow 2x - x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = -1,\ x = 2$$

Per tant,

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_{-1}^{0}[f(x) - g(x)]dx\right| + \left|\int_{0}^{2}[f(x) - g(x)]dx\right| = \left|\left[x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}\right| \\ &+ \left|\left[x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}\right| = \left|-\frac{5}{12}\right| + \left|\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}\mathrm{u}^2 \end{aligned}$$

Per tant, l'àrea que busquem és $\frac{37}{12}\mathrm{u}^2$.

Com abans, notem que hauríem pogut ometre el valor absolut si haguéssim estudiat el signe de $f(x) - g(x)$ en cada interval.

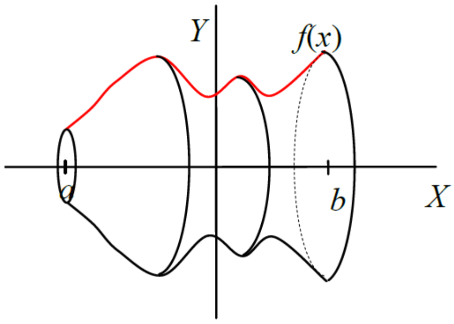
12.2.2. Càlcul de volums

La interpretació d'una integral com a suma d'infinits sumands infinitament petits ens permet calcular àrees i també volums.

Si $f(x)$ és una funció positiva en un interval $[a, b]$, el càlcul del volum de la figura que s'obté en girar sobre l'eix X aquesta funció, o sigui que la **figura de revolució** que té per **generatriu** la funció $f(x)$ es pot calcular a partir d'una integral.

Un cos o figura de revolució és la figura sòlida que resulta de fer voltar una corba plana (generatriu) al voltant d'una recta (eix de simetria).

Volem calcular, per exemple, el volum del cos de revolució que es genera en girar una funció positiva $f(x)$ en un interval $[a, b]$ sobre l'eix X, tal com mostra aquesta gràfica:



Els plans perpendiculars a l'eix X donen lloc a seccions circulars del cos de revolució. En particular, el pla que passa pel punt $x = b$ dona lloc a una secció circular de radi $f(x)$.

Per tant, ens podem mirar el cos com a format per "llesques" en forma de cilindre. En particular, aquests cilindres tenen:

Base: $\pi \cdot [f(x)]^2$

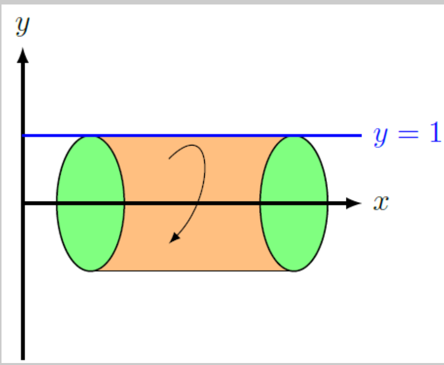
Altura: dx

Volum: $\pi \cdot [f(x)]^2 dx$

Per tant, si sumem tots aquests cilindres tindrem el volum buscat:

$$\boxed{V = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Exemple. Càlcul del volum d'un cos de revolució.



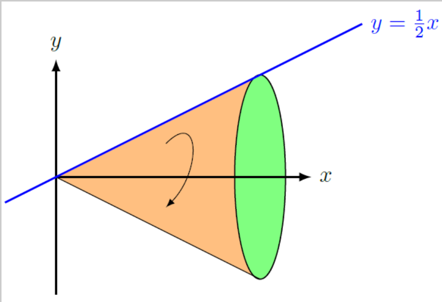
En aquest cas la funció $f(x)$ és senzilla, $f(x) = 1$. Si volem calcular el volum del cos de revolució que genera (un cilindre) en l'interval $[1, 4]$, tenim

$$V = \pi \int_1^4 [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^4 1^2 dx = \pi \cdot x]_1^4 = 3\pi.$$

Per tant, el volum del cilindre proposat és $3\pi\,\mathrm{u}^3$.

Observem que ara estem calculant volums, per tant el resultat serà en u^3.

Exemple. Càlcul del volum d'un cos de revolució.



En aquest segon cas la funció és $f(x) = \frac{1}{2}x$. Si volem calcular el volum del con generat a partir d'aquesta recta en l'interval $[0, 4]$ tenim

$$V = \pi \int_0^4 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx = \pi \cdot \frac{x^3}{6}\bigg]_0^4 = \frac{32}{3}\pi$$

Per tant, el volum del con proposat és $\frac{32}{3}\pi\,\mathrm{u}^3$.

A partir d'aquest segon exemple podem generalitzar el càlcul del volum d'un con d'altura h i radi de la base r. La generatriu $f(x)$ ha de complir

$$f(0) = 0 \quad f(h) = r$$

i, per tant, la funció lineal generatriu serà $f(x) = \frac{rx}{h}$. Per a trobar-ne el volum, s'ha d'integrar entre 0 a h:

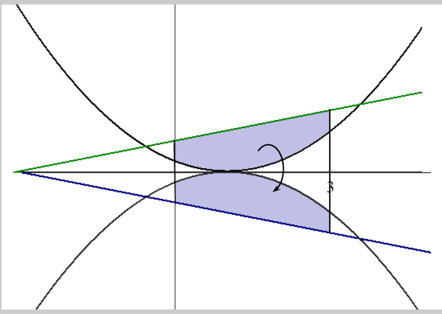
$$V = \pi \int_0^h (f(x))^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

Finalment, ens podem trobar en el cas d'haver de calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, en l'interval $[a, b]$ on $f(x)$, $g(x) \geq 0$. En aquest cas, n'hi ha prou de calcular el volum de la figura de revolució generada per $f(x)$ i restar-li el volum de la figura de revolució generada per $g(x)$. Afegim el valor absolut perquè no sabem a priori quina de les dues funcions és per sobre. Aleshores,

$$\boxed{V = \pi \left| \int_a^b (f(x))^2 dx - \pi \int_a^b (g(x))^2 dx \right| = \pi \left| \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] dx \right|}$$

Exemple. Càlcul del volum d'un cos de revolució engendrat per l'àrea entre $f(x)$ i $g(x)$.

Volem calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea limitada entre la recta $y = x+3$ i la paràbola $y = x^2 - 2x + 1$, tal com s'observa en aquest gràfica:



Evidentment, s'han de restar els volums generats per la rotació de cadascuna de les funcions en l'interval $[0,3]$ tenint en compte que la funció més gran és sempre la recta:

$$V = \pi \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx = \pi \int_0^3 \left[(x+3)^2 - \left(x^2 - 2x + 1\right)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^3 \left[-x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 10x + 8 \right] dx = \frac{282\pi}{5}$$

Per tant, el volum del con proposat és $\frac{282}{5}\pi\,\mathrm{u}^3$.

Resum

Integració de funcions

Integral indefinida

Definició. La integració és l'operació oposada a la derivació:

si $f(x)$ és la derivada de $F(x)$, llavors $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$.

Podem afirmar que tota funció de la forma $F(x) + C$ (on C és un nombre) també és una primitiva de $f(x)$. El conjunt de totes les primitives d'una funció $f(x)$ es denomina **integral indefinida** o, simplement, integral de la funció $f(x)$.

Expressió. Per a expressar la integració d'una funció, s'utilitza el símbol d'integral $\int$ anteposat a la funció **integrand**, i a continuació el símbol dx, denominat **diferencial** de x, que ens indica respecte de quina variable integrem. Per tant, l'expressió de la integral indefinida d'una funció $f(x)$ és

$$\int f(x)dx$$

Taula integrals immediates

Taula d'integrals immediates		
$f(x)$	$\int f(x)dx$	**Exemples**
k constant	$k \cdot x + C$	$\int 3dx = 3x + C$
x^n si $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln(3)} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arccos(x) + C$	

Regles de càlcul. El càlcul de la primitiva d'una funció qualsevol no és tan senzill com el de la derivada, ja que les úniques regles immediates que es poden aplicar són:

- La integral de la suma (o resta) de funcions és igual a la suma (o resta) de les integrals de les funcions.

$$\boxed{\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx}$$

- La integral del producte d'un nombre per una funció és igual al producte del nombre per la integral de la funció.

$$\boxed{\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx}$$

- Si $g(x) = \int f(x)dx$, aleshores $g'(x) = f(x)$.

- La regla de la cadena $((f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g')$ ens permet escriure

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + C}$$

A partir de l'última regla podem generalitzar la taula d'integrals immediates anterior a les integrals, que s'anomenen sovint **integrals quasiimmediates**.

Integrals quasiimmediates	
Integral	**Exemples**
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \dfrac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq 1$	$\int [\sin(x)]^4 \cdot \cos(x)dx = \dfrac{[\sin(x)]^5}{5} + C$
$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	$\int \dfrac{2x-3}{x^2-3x+13}dx = \ln\lvert x^2 - 3x + 12\rvert + C$
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C$	$\int e^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)dx = e^{4x^2+3x-2} + C$
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + C$	$\int 5^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)dx = \dfrac{5^{4x^2+3x-2}}{\ln(5)} + C$
$\int f'(x) \cdot \sin(f(x))dx = -\cos(f(x)) + C$	$\int \cos(x)\sin(\sin(x))dx = -\cos(\sin(x)) + C$
$\int f'(x) \cdot \cos(f(x))dx = \sin(f(x)) + C$	$\int 6 \cdot \cos(6x-2)dx = \sin(6x-2) + C$
$\int \dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx = \arctan(f(x)) + C$	$\int \dfrac{\frac{1}{x}}{1+(\ln(x))^2}dx = \arctan(\ln(x)) + C$
$\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \arcsin(f(x)) + C$	$\int \dfrac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}dx = \arcsin(e^x) + C$

Mètode de substitució. Mètode per a transformar una integral en una integral immediata o quasiimmediata mitjançant un canvi de variable. Els passos a seguir són:

1) Substituïm x per $u(t)$ i dx per $u'(t)dt$:

$$\int f(x)dx \xrightarrow[x=u(t)]{dx=u'(t)dt} \int f(u(t))u'(t)dt.$$

2) Resolem la nova integral:

$$\int f(u(t))u'(t)dt = G(t) + C$$

3) Aïllem la variable t de la igualtat $x = u(t)$ i obtenim $t = u^{-1}(x)$.

4) Desfem el canvi i obtenim

$$\int f(x)dx = G(u^{-1}(x)) + C$$

Mètode d'integració per parts. Mètode per a transformar una integral en una integral immediata o quasiimmediata a partir de la regla de la derivació del producte.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Si integrem a les dues bandes i ho reescrivim, obtenim

$$\boxed{\int \left[f(x) \cdot g'(x)\right] dx = (f(x) \cdot g(x)) - \int \left[f'(x) \cdot g(x)\right] dx}$$

Integral definida

La integral definida neix de la necessitat de calcular l'àrea tancada per una funció i l'eix X en un cert interval. Aquesta àrea es pot aproximar sumant certs rectangles la base dels quals sigui constant i l'altura el valor de la funció en certs punts escollits convenientment. El límit d'aquest càlcul quan la base d'aquests rectangles tendeix a 0 és igual a la integral definida d'aquesta funció en aquest interval, és a dir, l'àrea que busquem.

El càlcul de la integral definida es facilita a partir de la **Regla de Barrow**:

> Si $f(x)$ és una funció contínua en $[a, b]$ i $F(x)$ és una primitiva qualsevol de $f(x)$,
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Càlcul d'àrees

1) **Càlcul d'àrea entre $f(x)$ i l'eix X si $f(x) \geq 0$ en l'interval $[a, b]$.**

$$\mathrm{A} = \int_a^b f(x)dx$$

2) **Càlcul d'àrea $f(x)$ i l'eix X si $f(x) \leq 0$ en l'interval $[a, b]$.**

$$\mathrm{A} = -\int_a^b f(x)dx$$

De fet, podem unir els dos casos anteriors afegint un valor absolut:

$$\mathrm{A} = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

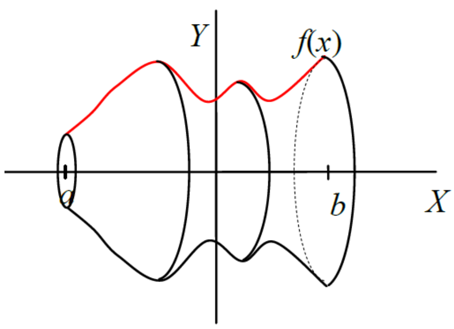
3) **Càlcul d'àrea $f(x)$ i l'eix X si $f(x)$ canvia de signe en l'interval $[a,b]$.** Així, si tenim, per exemple, 3 arrels x_1, x_2, x_3 en l'interval $[a,b]$ tals que $x_1 < x_2 < x_3$, l'àrea que busquem és

$$\text{A} = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)dx\right|$$

4) **Càlcul d'àrea entre dues corbes $f(x)$ i $g(x)$ en l'interval $[a,b]$.** Podem aplicar els casos anteriors amb una sola funció considerant la funció diferència $f(x) - g(x)$. Igual que hem fet abans, haurem de separar els casos segons si la diferència és sempre positiva, sempre negativa o bé si canvia de signe dins de l'interval $[a,b]$, i en aquest cas haurem de separar l'interval $[a,b]$ en subintervals d'extrems els punts on la diferència de les funcions canvia de signe.

5) **Càlcul àrea entre dues corbes $f(x)$ i $g(x)$.** En aquest cas, a diferència dels anteriors, no ens limita l'interval, i per tant haurem d'estudiar els punts on es tallen les dues funcions per a trobar els límits d'integració. Per tant, haurem de resoldre l'equació $f(x) = g(x)$ i calcular l'àrea de cada regió limitada entre dos punts de tall seguits.

Càlcul volums. Si $f(x)$ és una funció positiva en un interval $[a,b]$, el càlcul del volum de la figura que s'obté en girar sobre l'eix X aquesta funció, o sigui que la figura de revolució que té per generatriu la funció $f(x)$ es pot calcular a partir d'una integral.



$$\boxed{V = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

En conseqüència, calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, en l'interval $[a,b]$, de manera que $f(x)$, $g(x) \geq 0$.

$$\boxed{V = \pi \left|\int_a^b (f(x))^2 dx - \pi \int_a^b (g(x))^2 dx\right| = \pi \left|\int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] dx\right|}$$

Exercicis resolts

1. **Calculeu les integrals següents:**

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}dx$

(b) $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos^2(x)dx$

(c) $\displaystyle\int x^2e^{3x}dx$

Solucions

(a) Comencem fent un canvi de variable $u = x^2$ i, per tant, $du = 2xdx$. Així, la nostra integral ens queda

$$\int \frac{1}{2\cos^2(u)}du$$

Ara només ens cal recordar que la funció que hem d'integrar és justament la derivada de $\tan(u)$, i per tant ja sabem que el resultat de la integral és $\tan(u) + C$, Si desfem el canvi, tenim que el resultat de la integral és

$$\frac{\tan(x^2)}{2} + C$$

(b) Abans de començar a resoldre la integral, utilitzem $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, per tant l'integral ens queda

$$\int \sin(x)\cos^2(x)(1-\cos^2(x))dx$$

Ara utilitzem el mètode de substitució prenent $u = \cos(x)$ i, per tant, $du = -\sin(x)dx$. Així, obtenim

$$\int u^2(u^2-1)du = \int (u^4-u^2)du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C$$

Si ara desfem el canvi, obtenim

$$\frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} + C$$

(c) Per a resoldre aquesta integral, haurem d'aplicar la integració per parts dues vegades. Prenem $u = x^2$ i, per tant, $du = 2xdx$ i $dv = e^{3x}dx$ i $v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$. Així, tenim

$$\int x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx$$

Tornem a integrar per parts prenent $u = x$ i, per tant, $du = dx$ i $dv = e^{3x}dx$ i $v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$. Així, tenim

$$\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

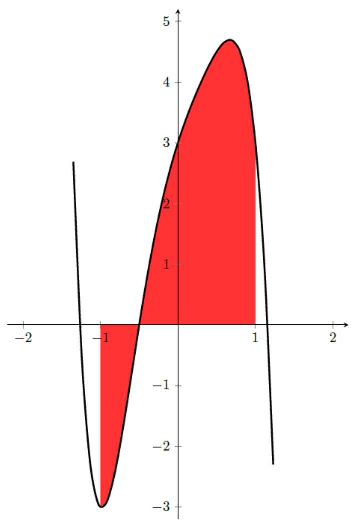
Si ara unim els dos resultats, tenim que la integral que busquem és

$$\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C = e^{3x}\left[\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right] + C$$

2. **Calculeu l'àrea entre l'eix X i la funció $f(x) = -4x^5+3x^3-3x^2+4x+3$ en l'interval $[-1,1]$.**

Solució

En primer lloc, sempre que puguem és bo fer la gràfica de la funció amb què treballem i l'àrea que volem calcular. En aquest cas tenim la gràfica següent:



Veiem que tenim una arrel de $f(x) = 0$ dins de l'interval $[-1, 1]$ i que tenim trossos de la funció per sobre i per sota de l'eix X. Per tant, comencem buscant les arrels de $f(x) = 0$ i tenim que són $x = -0.5$ (dins de l'interval) i aproximadament $x = -1.264$ i $x = 1.1557$ (fora de l'interval). Per tant, per a calcular l'àrea que volem, haurem de dividir l'interval en dos subintervals: $[-1, -0.5]$ i $[-0.5, 1]$. I llavors l'àrea que busquem serà

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^{-0.5} [-4x^5 + 3x^3 - 3x^2 + 4x + 3] dx \right| + \left| \int_{-0.5}^{1} [-4x^5 + 3x^3 - 3x^2 + 4x + 3] dx \right| \\ &= \left| -\frac{2x^6}{3} + \frac{3x^4}{4} - x^3 + 2x^2 + 3x \right]_{-1}^{-0.5} \Bigg| + \left| -\frac{2x^6}{3} + \frac{3x^4}{4} - x^3 + 2x^2 + 3x \right]_{-0.5}^{1} \Bigg| \\ &= \frac{59}{64} + \frac{315}{64} = \frac{187}{32} \end{aligned}$$

Per tant, l'àrea és $\frac{187}{32}$u^2.

3. **Calculeu el volum de la figura de revolució obtinguda en fer girar sobre l'eix X una circumferència de radi 2 d'equació**

$$x^2 + y^2 = 4$$

Solució

En primer lloc hem d'aïllar la y de l'expressió de la circumferència. Fixeu-vos que, de fet, n'hi ha prou d'aïllar y^2, ja que la integral que ens permet calcular el volum ens demana $f(x)^2$. Per tant, obtenim

$$y^2 = 4 - x^2$$

I podem calcular el volum a partir d'una integral

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^{2} (f(x))^2 dx = \pi \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \pi \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Bigg]_{-2}^{2} \\ &= \pi \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \left(4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right)\right) = \frac{32\pi}{3} \text{u}^3 \end{aligned}$$

Per tant, el volum serà $\frac{32\pi}{3}$u^3.

4. **Calculeu l'àrea tancada entre les gràfiques de $y = x^2 - 2x + 1$ i $y = x + 5$.**

Solució

En primer lloc, hem de calcular els punts en què es tallen ambdues funcions per a trobar els límits d'integració:

$$x^2 - 2x + 1 = x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4,\ x = -1$$

Els punts en què es tallen ambdues funcions són, per tant, $(-1, 4)$, $(4, 9)$. A més, la recta sempre és major que la paràbola en aquest interval. Per tant, l'àrea serà igual a la integral definida de la recta entre ambdós punts menys la integral de la paràbola entre ambdós punts:

$$\int_{-1}^{4} x + 5 - \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \int_{-1}^{4} -x^2 + 3x + 4 dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4\ x]_{-1}^{4} = \frac{125}{6}$$

Per tant, l'àrea és $\frac{125}{6}$u^2.

5. **Trobeu l'equació de la recta que passa per l'origen i delimita amb la gràfica de $f(x) = x^3$ dins del primer quadrant generant una àrea de $4u^2$.**

Solució

Com que busquem una recta que passa per l'origen aquesta de la de la forma $y = mx$.

La primera cosa que hem de calcular són els límits d'integració, que seran els punts de tall entre $f(x) = x^3$ i la recta $y = mx$

$$mx = x^3 \Leftrightarrow x(m - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad x = \pm\sqrt{m}$$

Per tant, necessitem que $m > 0$, i com que sabem que som en el primer quadrant, prenem només la solució $x = \sqrt{m}$ i així sabem

$$4 = \int_{0}^{\sqrt{m}} (mx - x^3) dx = \left[m\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{\sqrt{m}} = \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{4} = \frac{m^2}{4}$$

Per tant, $4 = \dfrac{m^2}{4}$ i llavors $m = \pm 4$, però descartem la solució negativa i, per tant, tenim $y = 4x$.

6. **Calculeu el volum engendrat per la regió entre la gràfica de $f(x) = \sqrt{x}$ i l'eix X en l'interval $[0, 4]$.**

Solució

En aquest cas, la funció $\sqrt{x}$ és sempre positiva per tant, l'àrea que busquem és

$$\int_{0}^{4} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big]_{0}^{4} = \frac{2}{3}\sqrt{4^3} = \frac{16}{3}.$$

Per tant, l'àrea és $\frac{16}{3}$u^2.

Exercicis per a practicar amb les solucions

7. **Calculeu les integrals següents:**

(a) $\int \left(3x^3 - 2x^2 + 4x - 4\right) dx$

(b) $\int x\left(x^2+1\right)^3 dx$

(c) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

(d) $\int \sqrt{2x-6} dx$

(e) $\int 3e^{-2x+1} dx$

(f) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

(g) $\int \sin(x)\cdot\cos(x) dx$

8. **Utilitzeu el mètode d'integració per parts per a calcular les integrals següents:**

(a) $\int 2xe^{-x} dx$

(b) $\int (x+1)\cos(2x) dx$

(c) $\int x \ln x dx$

(d) $\int x^2 e^x dx$

9. **Calculeu l'àrea que es forma entre les gràfiques de les funcions** $f(x) = \sqrt{x}$ **i** $g(x) = x^2$ **entre** $x = 0$ **i** $x = 1$**.**

10. **Calculeu l'àrea de la regió delimitada per les paràboles** $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ **i la recta** $y = 4$**.**

11. **Trobeu el volum de la** ***copa*** **que engendra la regió compresa entre la gràfica** $f(x) = \sqrt{x} - 1$ **i l'eix X en l'interval** $[0, 4]$**.**

Solucions

7. (a) $\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + c$
   (b) $\frac{\left(x^2+1\right)^4}{8} + C$
   (c) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$
   (d) $\frac{\sqrt{(2x-6)^3}}{3} + C$
   (e) $-\frac{3}{2}\cdot e^{-2x+1} + C$
   (f) $\frac{(\ln x)^2}{2} + C$
   (g) $\frac{(\sin x)^2}{2} + C$
8. (a) $-2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$
   (b) $(x+1)\sin(2x) + \frac{\cos(2x)}{4} + C$
   (c) $x\ln x - x^2 + C$
   (d) $e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C$
9. $\frac{1}{3}\mathrm{u}^2$
10. $8\mathrm{u}^2$
11. $\frac{153}{5}\pi\mathrm{u}^3$