Iniciació a les matemàtiques per a l'enginyeria

PID_00270081

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat Oberta de Catalunya

3. Sistemes d'equacions

Índex

3.1. Sistemes lineals de dues equacions i dues incògnites

3.1.1. Definició

Un **sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites** és un conjunt de dues equacions de primer grau amb dues incògnites cadascuna com a màxim, representades amb les mateixes incògnites.

Exemple. Sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

Tal com es pot observar, per a indicar que es tracta d'un sistema d'equacions i no de dues equacions independents, les dues equacions van encapçalades per una clau $\{$, que les agrupa.

És molt comú escriure les equacions de la manera següent: tots els termes amb incògnites se solen trobar en el membre de l'esquerra, mentre que tots els nombres (termes independents) se solen trobar en el membre de la dreta. Si les equacions no estan expressades d'aquesta manera, convé transformar-les en d'altres d'equivalents que ho siguin d'aquesta manera.

3.1.2. Solucions i tipus de sistemes

S'ha d'insistir que una **solució** d'un sistema amb dues incògnites, si existeix, és un parell numèric, és a dir, ha de constar de **dos nombres**un per a cada incògnita, i que aquests dos nombres han de satisfer les dues equacions alhora. Pel que fa al **nombre de solucions** d'un sistema d'equacions, ens podem trobar amb tres casos:

- Un sistema amb **una única solució**. Per exemple:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

que té una única solució $(x, y) = (4, 3)$.

- Un sistema amb **infintes solucions**. Per exemple:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 20 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

que té aquestes (i moltes altres) solucions: $(x, y) = (4, 3)$, $(x, y) = (2, 4)$, $(x, y) = (0, 5)$, ...

- Un sistema **sense solucions**. Per exemple:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

En aquest cas, és fàcil comprovar que no és possible que la mateixa expressió pugui resultar igual a 8 en un cas i igual a 1 en l'altre.

3.1.3. Mètodes de resolució

Resoldre un sistema d'equacions significa trobar les solucions del sistema, és a dir, aquells nombres que, en substituir les incògnites, transformin les equacions en igualtats numèriques certes. Cal destacar que els mateixos nombres han de substituir les incògnites en **ambdues** equacions alhora.

Exemple. Solució d'un sistema de dues equacions i dues incògnites:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x + 4y = 17 \end{cases}$$

té com a solució $(x, y) = (5, 3)$, ja que

$$\begin{cases} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19 \\ 5 + 4 \cdot 3 = 17 \end{cases}$$

Per a trobar la solució de sistemes d'equacions lineals amb dues incògnites, hi ha principalment tres de mètodes de resolució.

Mètode de substitució. Consisteix a aïllar una de les incògnites en una de les dues equacions i substituir-ne l'expressió en l'altra equació. Una vegada resolta aquesta última equació es resol l'altra equació introduint el valor trobat.

Exemple. Per a resoldre el sistema d'equacions

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

pel mètode de substitució, s'han de seguir aquests passos:

1) *Es tria una de les equacions.* Per exemple, $x + 4y = -2$. (Si hi ha una equació en què el coeficient de la x o de la y és 1, triem aquesta equació per simplificar els càlculs.)

2) *S'aïlla una de les incògnites d'aquesta equació.* Per exemple, es pot aïllar la x de la manera següent:

$$x = -2 - 4y$$

3) *Se substitueix la incògnita anterior* (la x) *de l'altra equació* $(2x - 3y = 7)$ *pel valor que hem trobat en aïllar-la* $(-2 - 4y)$. En l'exemple,

$$2 \cdot (-2 - 4y) - 3y = 7$$

4) *Es resol aquesta equació de primer grau amb una incògnita.* En l'exemple, la solució és $y = -1$.

5) *Se substitueix aquest valor trobat en una de les dues equacions del sistema inicial. Obtindrem una equació de primer grau amb una incògnita, que podem resoldre.* Per exemple, si se substitueix $x = -1$ en l'equació $x + 4y = -2$, l'equació resultant és $x + 4 \cdot (-1) = -2$, la solució de la qual és $x = 2$.

Per tant, la solució del sistema és $(x, y) = (2, -1)$.
És recomanable comprovar que aquests valors resolen realment el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7 \\ 2 + 4 \cdot (-1) = -2 \end{cases}$$

són igualtats certes. Així, doncs, $(x, y) = (2, -1)$ és la solució del sistema.

Mètode d'igualació. El mètode d'igualació consisteix a aïllar la mateixa incògnita en ambdues equacions del sistema. A continuació, s'han "d'igualar" les dues expressions que han resultat d'aïllar aquesta incògnita, i definir així una nova equació. Una vegada resolta aquesta equació, se substitueix el valor en una de les equacions inicials i es resol per trobar l'altre valor.

Exemple. Si es vol resoldre el sistema anterior

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

pel mètode d'igualació, s'han de seguir aquests passos:

1) *S'aïlla la mateixa incògnita en ambdues equacions.* Per exemple, la x:

$$x = \frac{7+3y}{2} \qquad x = -2 - 4y$$

2) *S'igualen les expressions que resulten d'aïllar la incògnita:*

$$\frac{7+3y}{2} = -2 - 4y$$

3) *Es resol aquesta equació de primer grau amb una incògnita.* En l'exemple

$$7 + 3y = 2 \cdot (-2 - 4y)$$

$$7 + 3y = -4 - 8y$$

$$3y + 8y = -4 - 7$$

$$11y = -11$$

$$y = -1$$

4) *Se substitueix el valor d'aquesta incògnita en qualsevol de les equacions del sistema inicial, i es resol l'equació de primer grau amb una incògnita resultant.* En l'exemple, substituïm la y de la segona equació per -1:

$$x + 4 \cdot (-1) = -2$$

La solució d'aquesta equació és $x = 2$.

De la mateixa que abans, comprovem que els valors obtinguts resolen el sistema d'equacions proposat.

Mètode de reducció. El mètode de reducció consisteix a multiplicar convenientment les dues equacions del sistema per uns nombres de manera que en restar les equacions resultants es "redueixi" el nombre d'incògnites de dues a una. Una vegada resolta l'equació resultant, es pot substituir aquest valor en una de les equacions inicials i resoldre-la per a obtenir la solució general.

Exemple. Si volem resoldre el mateix sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

pel mètode de reducció, s'han de seguir aquests passos:

1) *Es tria una de les incògnites.* Per exemple, la x.

2) *Es multiplica cada equació per un nombre triat convenientment, de manera que les equacions resultants tinguin el terme idèntic amb la incògnita triada.* La manera més senzilla de fer-ho consisteix a multiplicar els membres de la primera equació pel coeficient de la incògnita escollida en la segona equació, i els membres de la segona equació pel coeficient de la incògnita escollida en la primera equació.

   En l'exemple, multipliquem $2x-3y = 7$ per 1 (coeficient de la x en l'equació $x+4y = -2$) i multipliquen $x+4y = -2$ per 2 (coeficient de la x en l'equació $2x - 3y = 7$) i obtenim així les equacions amb el mateix terme en x.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 2x + 8y = -4 \end{cases}$$

3) *Es resten ambdues equacions resultants, membre a membre.* En l'exemple:

$$\begin{array}{rrl} 2x & -3y & = 7 \\ -(2x & +8y & = -4) \\ \hline & -11y & = 11 \end{array}$$

4) *Es resol l'equació de primer grau resultant.* En l'exemple, la solució de $-11y = 11$ és $y = -1$.

5) *Se substitueix el valor d'aquesta incògnita en qualsevol de les equacions del sistema i es resol l'equació de primer grau amb una incògnita resultant.* En l'exemple, substituïm la y de la segona equació per -1:

$$x + 4 \cdot (-1) = -2$$

   La solució d'aquesta equació és $x = 2$. I, per tant, la solució del sistema és $(x, y) = (2, -1)$.

Tal com hem vist abans, comprovem que els valors obtinguts resolen el sistema d'equacions proposat.

Observem que, després de resoldre el mateix sistema amb els tres mètodes, el mètode que s'utilitza per a resoldre un sistema d'equacions no influeix en la solució del sistema.

3.2. Sistemes lineals de tres equacions i tres incògnites

3.2.1. Definció

Igual que abans, podem definir un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites com un conjunt de tres equacions de primer grau amb les tres mateixes incògnites en cadascuna de les equacions.

Exemple. Sistema de tres equacions i tres incògnites.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 4x - 2y - 3z = -4 \end{cases}$$

3.2.2. Mètode de resolució

La solució d'un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites consta de tres nombres que, en substituir les incògnites corresponents alhora, permeten resoldre el sistema.

Exemple. Solució d'un sistema de 3 equacions lineals amb 3 incògnites.
$(x, y, z) = (1, 2, -3)$ és la solució del sistema següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 5y - 2z = -2 \\ 3x + 4y + z = 8 \end{cases}$$

ja que

$$\begin{cases} 1 + 2 + (-3) = 0 \\ 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = -2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-3) = 8 \end{cases}$$

Per a resoldre un sistema d'aquest tipus, es pot utilitzar un mètode semblant al de reducció operant de la manera següent:

1) *Operar adequadament amb la primera equació per eliminar la primera incògnita de les dues equacions següents.*
En multiplicar la primera equació per 2 i restar-la de la segona s'obté $-7y-4z = -2$. Multiplicant la primera equació per 3 i restant-la de la tercera, s'obté $y - 2z = 8$. Evidentment, ambdós sistemes són equivalents.

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ 2x - 5y - 2z &= -2 \\ 3x + 4y + z &= 8 \end{cases} \xrightarrow[Eq3=Eq3-3\cdot Eq1]{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1} \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ -7y - 4z &= -2 \\ y - 2z &= 8 \end{cases}$$

2) *Operar adequadament amb la segona equació del nou sistema per eliminar la segona incògnita de la tercera equació.*
Per a trobar la tercera equació nova, multipliquem la tercera equació per 7 i ho sumem a la segona. Observem que en l'última equació queda ara una sola incòg-

nita.

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ -7y-4z &= -2 \\ y-2z &= 8 \end{cases} \xrightarrow{Eq3=7\cdot Eq3+Eq2} \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ -7y-4z &= -2 \\ -18z &= 54 \end{cases}$$

3) *Resoldre l'última equació que tindrà només una incògnita:*

$$-18z = 54 \Leftrightarrow z = \frac{-54}{18} = -3.$$

4) *Resoldre la segona equació de l'últim sistema, substituint la z pel valor trobat.* En aquest cas tenim que $z = -3$

$$7y - 4\cdot(-3) = -2 \Leftrightarrow y = \frac{-2-12}{7} = 2$$

Obtenim que $y = 2$.

5) *Finalment, substituir els valors trobats de la y i la z en la primera equació, i trobar la x.* Utilitzant $z = -3$ i $y = 2$, tenim

$$x + 2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

En aquest cas, $x = 1$.

Per tant la solució del sistema és $(x, y, z) = (1, 2, -3)$.

Aquest mètode s'anomena **mètode de Gauss**.

3.3. Sistemes lineals de m equacions i n incògnites

Ara volem estudiar com treballar amb sistemes d'equacions lineals amb qualsevol nombre d'equacions lineals i incògnites.

3.3.1. Definició

Un **sistema de m equacions i n incògnites** (que denominarem x_1, x_2, …, x_n) amb termes independents b_1, …, b_n, també denominats constants i on m i n són dos nombres naturals, té la forma següent:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Com en la resta de sistemes, una **solució d'aquest sistema** és un **n-tupla** (és a dir, una col·lecció de n nombres) que, en substituir x_1, x_2, x_3, …, x_n convenientment en aquest sistema, resol totes les equacions simultàniament. És evident que algun dels coeficients de cada incògnita ha de ser diferent de 0 en alguna de les equacions (en cas contrari, aquesta incògnita seria supèrflua).

3.3.2. Mètode de Gauss

Tal com hem vist en el cas de sistemes amb tres equacions i tres incògnites, el mètode de Gauss consisteix a aplicar una sèrie de transformacions lineals al sistema inicial fins a obtenir un sistema més fàcil de resoldre.

Les transformacions lineals que podem aplicar quan utilitzem el mètode de Gauss són:

- Dues equacions qualssevol són intercanviables.
- Una equació qualsevol del sistema es pot multiplicar (en ambdós membres) per una constant diferent de zero.
- Una equació qualsevol del sistema es pot reemplaçar per l'equació que resulta de sumar a aquesta mateixa equació qualsevol altra equació del sistema, la qual es pot multiplicar a més per qualsevol nombre.

Aquestes tres transformacions elementals se solen denominar (en aquest ordre): *intercanviar equacions, reescalar* (és a dir, multiplicar per un nombre) i *pivotar.*

En cada una de les equacions del sistema lineal, la primera incògnita que apareix amb un coeficient diferent de zero es denomina **incògnita inicial** de l'equació. Es diu que un sistema està en **forma esglaonada** (o és **triangular**) si la incògnita inicial en cada equació (òbviament, excepte en la primera) és a la dreta de la incògnita inicial de l'equació que la precedeix. És a dir que (en cas que tinguem el mateix nombre d'equacions que d'incògnites, $m = n$) la forma del sistema en forma esglaonada és la següent:

$$
\left\{
\begin{array}{cccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{1(n-1)}x_{n-1} & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{2(n-1)}x_{n-1} & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
 & & +a_{33}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{3(n-1)}x_{n-1} & +a_{3n}x_n & = b_3 \\
 & & & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & = \dots \\
 & 0 & & & +\dots & +\dots & +\dots & = \dots \\
 & & & & & +a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & +a_{(n-1)n}x_n & = b_{n-1} \\
 & & & & & & +a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}
\right.
$$

El **mètode de Gauss** consisteix a utilitzar les tres transformacions elementals entre equacions (intercanviar, reescalar i pivotar) per trobar un sistema equivalent a l'inicial en forma esglaonada. Així, començant per l'última incògnita, podrem resoldre fàcilment el sistema.

Per a aconseguir-ho:

1) Comencem repassant tots els coeficients de x_1 (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}) fins a trobar el primer coeficient que sigui diferent de zero. Aquest coeficient podria ser el mateix a_{11}. Si no és el primer, s'intercanvia l'equació amb la primera que tingui aquest terme diferent de 0.

2) Considerem que un nou sistema té un nombre diferent de 0 com coeficient a_{11}.

3) Mitjançant les operacions de reescalar i pivotar, es fa que tots els coeficients que estiguin sota aquest nou a_{11} siguin 0. Així, si en l'equació que ocupa la fila k-èsima el seu primer coeficient a_{k1} és diferent de 0, es pivota multiplicant la primera fila per $\frac{a_{k1}}{a_{11}}$ i restant el resultat a la fila k-èsima. El resultat serà la nova fila k-èsima. El nou sistema tindrà aquesta forma:

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & +a'_{22}x_2 & +\ldots & +a'_{2n}x_n & = b'_2 \\ & \ldots & & & \\ & \ldots & & & \\ & +a'_{m2}x_2 & +\ldots & +a'_{mn}x_n & = b'_m \end{array}\right.$$

4) Una vegada eliminats tots els coeficients de la primera incògnita (excepte el de la primera equació), repetim el mateix procediment amb els coeficients de la segona incògnita, x_2, a partir de la segona equació.

5) A continuació, es fa el mateix procediment amb la tercera incògnita, x_3, a partir de la tercera equació. I així successivament fins a arribar a l'última equació. Una vegada arribat al final del procés, el nombre d'equacions que no són del tipus $0 = 0$ és igual a un cert nombre, que denominarem r, de manera que $r \leq m$.

3.3.3. Solucions i tipus de sistemes

Una vegada finalitzat el procediment de Gauss, el sistema resultant s'haurà de trobar en una d'aquestes situacions:

- Que aparegui una fila amb tots els coeficients iguals a zero i amb la constant diferent de zero. En aquest cas el sistema no té cap solució. Es diu que el sistema és **incompatible**.

- Que no aparegui cap equació amb zeros, o que totes les files amb coeficients iguals a zero tinguin també constants iguals a zero (en aquest cas totes aquestes files són supèrflues i es poden eliminar). Si això és així, el sistema té solució. Es diu que el sistema és **compatible**, i pot ser:

  ◦ **Compatible determinat**: la solució és única si el nombre r d'equacions resultants en el sistema esglaonat és igual a n (el nombre d'incògnites).

◦ **Compatible indeterminat**: amb infinites solucions si el nombre r d'equacions en el sistema esglaonat és menor que n (el nombre d'incògnites).

Vegem com són les solucions en el cas de sistemes compatibles:

$\boxed{\text{Cas } r = n}$ El sistema resultant en forma esglaonada, després d'utilitzar el mètode de Gauss serà de la forma:

$$\left\{\begin{array}{cccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{1(n-1)}x_{n-1} & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{2(n-1)}x_{n-1} & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
 & & +a_{33}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{3(n-1)}x_{n-1} & +a_{3n}x_n & = b_3 \\
 & & & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & = \dots \\
 & 0 & & & +\dots & +\dots & +\dots & = \dots \\
 & & & & & +a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & +a_{(n-1)n}x_n & = b_{n-1} \\
 & & & & & & +a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}\right.$$

Per a trobar la solució única d'aquest sistema, s'utilitza l'anomenada *substitució cap enrere* (un procés molt semblant s'ha seguit en els sistemes de tres equacions lineals):

1) S'aïlla x_n de l'última equació:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

2) Se substitueix aquest valor en l'equació anterior i es troba el valor de x_{n-1}:

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{(n-1)n} \cdot \frac{b_n}{a_{nn}}\right)$$

3) Se segueix el mateix procediment de substitució cap enrere fins que s'han trobat els valors per a totes les incògnites.

$\boxed{\text{Cas } r < n}$ El sistema d'equacions quedaria de la manera següent:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
0 & & \dots & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & = \dots \\
 & & & & a_{rn}x_r & +a_{r(n+1)}x_{r+1} & +\dots & +a_{rn}x_n & = b_r
\end{array}\right.$$

Per a resoldre aquest sistema, farem:

- Reduir aquest sistema a un sistema amb tantes incògnites com files. Per fer això, es passen totes les incògnites a partir de x_{r+1} a l'altre membre.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}x_r - \ldots - a_{1n}x_n \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}x_r - \ldots - a_{2n}x_n \\ \qquad \ldots \\ \qquad a_{rn}x_r = b_r - a_{r(n+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

- D'aquesta manera, tenim les r primeres incògnites en el membre esquerre de les equacions i les $n-r$ incògnites del membre de la dreta de les equacions es tracten com si fossin valors coneguts (com els nombres b_i). Obtenim així un sistema amb r equacions i r incògnites, que es pot resoldre fent el procés de substitució cap enrere.

- Ara bé, s'obtindrà la solució per a les r primeres incògnites, que dependran del valor que tinguin les $n-r$ incògnites restants, i aquestes $n-r$ podran prendre qualsevol valor real. Per això mateix, aquest tipus de sistemes té **més d'una solució** (de fet, té infinites solucions).

3.4. Sistemes d'inequacions

3.4.1. Sistemes d'inequacions lineals amb una incògnita

Definició. Un sistema d'inequacions lineals amb una única incògnita és format per diverses inequacions lineals i limitat per una clau que indica precisament que es tracta d'un sistema, i no d'inequacions independents.

Exemple. Un sistema d'inequacions podria ser:

$$\begin{cases} 3x + 4 \leq 2x + 8 \\ 2x - 1 > x \end{cases}$$

Un nombre és solució d'un sistema d'inequacions d'aquest tipus si és solució de totes les inequacions que formen el sistema. Tinguem en compte que la solució d'un sistema d'inequacions lineals amb una incògnita pot tenir solució o no, i en cas que tingui solució aquesta pot ser un sol nombre, un interval de nombres o bé la unió de diversos intervals.

Exemple. $x = 3$ és una solució del sistema d'inequacions anterior, ja que

$$\begin{cases} 3 \cdot 3 + 4 \leq 2 \cdot 3 + 8 \\ 2 \cdot 3 - 1 > 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 13 \leq 14 \\ 5 > 3 \end{cases}$$

Mètodes de resolució. Per a resoldre sistemes d'inequacions, proposem dos mètodes diferents.

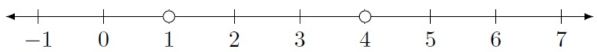
En el **primer mètode**, els passos per a la resolució són els següents:

1) *Es resolen per separat les equacions associades a cada una de les inequacions del sistema.* L'equació associada a una inequació és la resultant de substituir la desigualtat de la inequació per una igualtat. En l'exemple anterior, hem de resoldre cada una de les dues equacions següents:

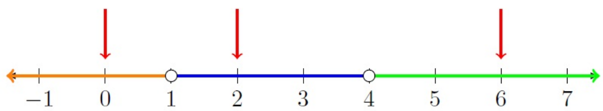
$$3x + 4 = 2x + 8 \Leftrightarrow x = 4$$

$$2x - 1 = x \Leftrightarrow x = 1$$

2) *Es marquen en la recta real les solucions anteriors.* Això farà que la recta real quedi dividida en 3 parts. En l'exemple:

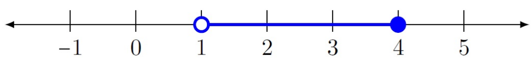


3) *Se selecciona un nombre de cadascuna de les parts en les quals queda dividida la recta pels nombres anteriors.* En l'exemple, es poden escollir els nombres 0, 2 i 6.



4) *Es comprova quins d'aquests nombres, a més de les solucions de les equacions, són solució de tot el sistema d'inequacions.* En l'exemple, s'han de provar el 0, 2 i 6 que hem marcat en el pas anterior i les dues solucions 1 i 4. És fàcil comprovar que són únicament solució del sistema el 2 i el 4.

5) *Finalment, les solucions del del sistema són els nombres que estan en el mateix interval que els nombres que en el pas 4 hem comprovat que eren solució del sistema d'inequacions.* A més, inclourem les solucions obtingudes en l'apartat 1 si compleixen el sistema d'inequacions. En l'exemple, els nombres que són solució del sistema estan entre l'1 i el 4, més el 4, i per tant l'interval $(1, 4]$, la secció acolorida d'aquesta recta real:



Per tant, les solucions del sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} 3x + 4 \leq 2x + 8 \\ 2x - 1 > x \end{cases}$$

són tots els nombres més grans que 1 i menors o iguals a 4, és a dir, tots els nombres, x, que compleixen $1 < x \leq 4$. En forma d'interval, la solució s'expressaria de la manera següent:

$$(1, 4]$$

Un **segon mètode** per a resoldre aquest sistema és:

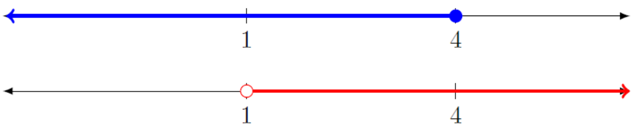
1) *Resolem la primera inequació.* En l'exemple, hem de resoldre

$$3x + 4 \le 2x + 8$$

Tal com hem vist en el mètode anterior, la solució de l'equació associada és $x = 4$, i si comprovem els valors 0, 4 i 5 a l'inequació obtenim com a solució l'interval $(-\infty, 4]$.

2) *Resolem la segona inequació.* En l'exemple, procedim de la mateixa manera que en el pas anterior i obtenim que la solució de $2x - 1 > x$ és l'interval $(1, +\infty]$.

3) *Busquem quins són els punts en comú que tenen les dues solucions obtingudes.* En l'exemple veiem que coincideixen en l'interval $(1, 4]$



3.4.2. Sistemes d'inequacions de segon grau amb una incògnita

Definició Un sistema d'inequacions de segon grau amb una única incògnita és format per diverses inequacions lineals o de segon grau i limitat per una clau.

Exemple. Un sistema d'inequacions de segon grau pot ser

$$\begin{cases} 2x + 5 \ge 2 - x \\ 2x^2 - 2x - 2 \le x^2 - x + 4 \end{cases}$$

Un nombre és solució d'un sistema d'inequacions d'aquest tipus si és solució de totes les inequacions que formen el sistema. Tinguem en compte que la solució d'un sistema d'inequacions lineals amb una incògnita pot tenir solució o no, i en cas que tingui solució aquesta pot ser un sol nombre, un interval de nombres o bé la unió de diversos intervals.

Exemple. $x = \frac{1}{2}$ és una solució del sistema d'inequacions, ja que

$$\begin{array}{l} 2\left(\frac{1}{2}\right) + 5 \ge 2 - \left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 6 \ge \frac{3}{2} \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 4 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \le \frac{15}{4} \end{array}$$

Mètode de resolució. Un procediment per a trobar les solucions d'un sistema d'inequacions de segon grau és molt semblant al de resolució de sistema d'inequacions lineals. De fet podem triar qualsevol dels dos mètodes que hem vist i utilitzar-los també en aquest cas. Triem per exemple el segon. Així, per trobar la solució del sistema cal resoldre cadascuna de les equacions a part, després buscar les solucions de les dues inequacions per separat i finalment buscar totes les zones comunes:

1) Es resolen les dues equacions associades.

$$\begin{cases} 2x + 5 = 2 - x \Leftrightarrow x = -1 \\ 2x^2 - 2x - 2 = x^2 - x + 4 \Leftrightarrow x = -2,\, 3 \end{cases}$$

2) Es resolen les dues inequacions per separat.

- La solució de $2x + 5 \geq 2 - x$ és $[-1, +\infty)$.

- La solució de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ és $[-2, 3]$.

3) Es busca la zona comuna de la solució d'ambdues inequacions, que és $[-1, 3]$:

Per tant, les solucions del sistema d'equacions de segon grau

$$\begin{cases} 2x + 5 \geq 2 - x \\ 2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4 \end{cases}$$

són tots els nombres més grans o iguals a -1 i menors o iguals a 3, és a dir, tots els nombres, x que compleixin $-1 \leq x \leq 3$. En forma d'interval, la solució s'expressaria de la manera següent: $[-1, 3]$.

Resum

Sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites	
Definició: és un conjunt de dues equacions de primer grau amb dues incògnites cadascuna, representades per les mateixes lletres.	*Exemple:* $\begin{cases} 3x - 6y = 5 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$
Escriptura habitual: termes amb incògnita en el membre de l'esquerra i termes numèrics en el de la dreta.	
Solució: un parell de nombres que, en substituir les incògnites corresponents en cada una de les equacions, donen lloc a dues igualtats certes.	$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ té solució $(x, y) = (2, 1)$, ja que $\begin{cases} 2 + 1 = 3 \\ 2 \cdot 2 - 1 = 3 \end{cases}$
Resolució: procés de cerca de les solucions del sistema.	
Mètodes de resolució	
Mètode de substitució	
Procediment	*Exemple:* $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$
1. Es tria una de les dues equacions.	$2x + y = 4$
2. S'aïlla una de les incògnites de l'equació triada.	$y = 4 - 2x$
3. Se substitueix el valor de la incògnita en l'altra equació.	$4x - 2 \cdot (\mathbf{4 - 2x}) = 8$
4. Es resol l'equació resultant.	$4x - 8 + 4x = 8 \Leftrightarrow 8x - 8 = 8$ $\Leftrightarrow 8x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{8} = 2$
5. Es substitueix el valor trobat en l'equació del pas 2 i obtenim el valor de l'altra incògnita i la solució.	$y = 4 - 2 \cdot \mathbf{2} = 0$ Solució: $(x, y) = (2, 0)$
6. Es comprova la solució.	$\begin{cases} 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \\ 2 \cdot 2 + 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \end{cases}$
Mètode d'igualació	
Procediment	*Exemple:* $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$
1. S'aïlla la mateixa incògnita en les dues equacions.	$y = \frac{4x - 8}{2} = 2x - 4$ $y = 4 - 2x$
2. S'igualen les dues expressions resultants.	$2x - 4 = 4 - 2x$
3. Es resol l'equació resultant.	$2x - 4 = 4 - 2x \Leftrightarrow 4x = 8$ $\Leftrightarrow x = \frac{8}{4} = 2$
4. Se substitueix la incògnita de qualsevol de les equacions del sistema del pas 1 pel valor trobat.	$y = 4 - 2 \cdot 2 = 0$ Solució: $(x, y) = (2, 0)$
5. Es comprova la solució.	$\begin{cases} 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \\ 2 \cdot 2 + 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \end{cases}$

Mètode de reducció

Procediment	*Exemple:* $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$
1. Es tria una de les dues incògnites.	Per exemple, y
2. Es multipliquen els dos membres de la primera equació pel coeficient de la incògnita escollida en la segona equació i els dos membres de la segona equació pel coeficient de la incògnita escollida en la primera equació.	$1 \cdot (4x - 2y = 8)$ $-2 \cdot (2x + y = 4)$ $\Downarrow$ $4x \quad -2y = 8$ $-4x \quad -2y = -8$
3. Es resten les dues equacions resultants.	$\begin{array}{rrrl} & 4x & -2y & = 8 \\ - & -4x & -2y & = -8 \\ \hline & 8x & & = 16 \end{array}$
4. Es resol l'equació resultant.	$x = 2$
5. Se substitueix el valor de la incògnita trobada en qualsevol de les equacions del sistema.	Se substitueix $x = 2$ a $2x + y = 4$: $2 \cdot 2 + y = 4$
6. Es resol l'equació resultant.	$4 + y = 4 \Rightarrow y = 0$ Solució: $(x, y) = (2, 0)$
7. Es comprova la solució.	$\begin{cases} 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \\ 2 \cdot 2 + 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \end{cases}$

Sistema de m equacions i n incògnites

Un **sistema de m equacions i n incògnites** (que denominarem x_1, x_2, ..., x_n), amb termes independents $b_1, \ldots, b_n$, denominats també constants, i en el qual m i n són dos nombres naturals, té la forma següent:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Resolució d'un sistema de diverses equacions lineals pel mètode de Gauss

1. Operar amb la primera equació per eliminar la primera incògnita de les altres equacions.	$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 5y - 2z = -2 \\ 3x + 4y + z = 8 \end{cases} \xrightarrow[Eq3=-3\cdot Eq1+Eq3]{Eq2=-2\cdot Eq1+Eq2}$ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y - 4z = -2 \\ y - 2z = 8 \end{cases}$
2. Operar amb la segona equació per eliminar la segona incògnita de les equacions següents. 3. Es fa la mateixa operació fins a exhaurir les equacions i s'obté un sistema esglaonat.	$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y - 4z = -2 \\ y - 2z = 8 \end{cases} \xrightarrow{Eq3=Eq2+7\cdot Eq3}$ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y - 4z = -2 \\ -18z = 54 \end{cases}$
4. Es resol l'última equació i se substitueixen els valors *cap* enrere.	$\begin{cases} 18z = 54 \Rightarrow z = -\frac{54}{18} = -3 \\ -7y - 4 \cdot (-3) = -2 \Rightarrow y = 2 \\ x + 2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

Nombre de solucions d'un sistema

Un sistema de m equacions i n incògnites pot no tenir solució, tenir-ne una o tenir-ne infinites.

- El sistema no té cap solució quan apareix una fila amb tots els coeficients iguals a 0 i amb la constant diferent de 0. Es diu que el sistema és **incompatible**.
- En cas contrari, el sistema té solució, s'anomena sistema **compatible** i pot ser:
  - **Compatible determinat** (amb solució única): si el nombre d'equacions resultants en el sistema esglaonat és igual al nombre d'incògnites.
  - **Compatible indeterminat** (amb infinites solucions): si el nombre d'equacions en el sistema esglaonat és menor que el nombre d'incògnites.

Sistemes d'inequacions

Un sistema d'inequacions amb una única incògnita és format per diverses inequacions i limitat per una clau que indica precisament que es tracta d'un sistema i no d'inequacions independents.

Resolució de sistemes d'inequacions

1) Es resolen les equacions associades a les inequacions del sistema.

2) Es marquen les solucions anteriors en la recta real.

3) Se selecciona un nombre de cadascuna de les parts en les quals queda dividida la recta pels nombres anteriors.

4) Es comprova quins d'aquests nombres són solució del sistema d'inequacions.

5) Les solucions del sistema són els nombres que estan en el mateix interval que els nombres que en l'apartat 4 hem comprovat que eren solució del sistema d'inequacions.

Exercicis resolts

1. **Troba les solucions al sistema d'equacions usant el mètode de Gauss:**

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

Solució:

S'observa que la primera incògnita inicial és la x en la primera equació, ja que el seu coeficient és diferent de 0 (és 1). Pivotant aquest element s'obté:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1} \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

Només la primera equació té incògnita x, i per tant la primera incògnita inicial, que és y, és en la tercera equació (ja que en la segona equació no hi ha incògnita y). Així, doncs, intercanviem les files:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{Eq1\leftrightarrow Eq2} \begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

D'aquesta manera, ja no hi ha més incògnites y. La nova incògnita inicial de la tercera equació és z; per tant, se'n pot mantenir a la posició i servirà de pivot per a eliminar la incògnita z de l'última equació:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{Eq4=Eq4-2\cdot Eq3} \begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ -3w = -3 \end{cases}$$

S'ha arribat a l'última equació, i la situació és d'igual nombre d'incògnites que d'equacions. Per tant, es tracta d'un sistema compatible determinat. S'aplica la substitució cap enrere a l'últim sistema per resoldre'l:

- Es dedueix que $w = 1$ de l'última equació.
- Se substitueix aquest valor en l'equació anterior i es resol:
  $$z + 2\cdot 1 = 4 \Rightarrow z = 4 - 2 = 2.$$
- Se substitueixen $z = 2$ i $w = 1$ en l'equació anterior:
  $$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1.$$
- Se substitueixen $y = -1$, $z = 2$, $w = 1$:
  $$x - (-1) = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Per tant, la solució del sistema és $x = -1$, $y = -1$, $z = 2$, $w = 1$. També es pot escriure $(x, y, z, w) = (-1, -1, 2, 1)$.

2. **Troba les solucions al sistema d'equacions usant el mètode de Gauss.**

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ 3x + 6z - 6w = 6 \\ -y + z - w = 1 \end{cases}$$

Solució:

Per a obtenir la forma esglaonada fem el següent:

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ 3x + 6z - 6w = 6 \\ -y + z - w = 1 \end{cases} \xrightarrow{Eq3=Eq3-3\cdot Eq1} \begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ -3y + 3z - 3w = 3 \\ -y + z - w = 1 \end{cases} \xrightarrow[Eq4=Eq4+Eq2]{Eq3=Eq3+3\cdot Eq2}$$

$$\xrightarrow[Eq4=Eq4+Eq2]{Eq3=Eq3+3\cdot Eq2}\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Eliminem les dues igualtats $0 = 0$, ja que són supèrflues. El sistema esglaonat és:

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \end{cases}$$

En aquest cas, $n = 4$ i $r = 2$; per tant, es tracta d'un sistema compatible indeterminat. Per a poder utilitzar el procediment de substitució cap enrere, hi ha d'haver tantes incògnites com equacions; per això, movem les dues incògnites restants al membre de la dreta.

$$\begin{cases} x + y = 1 - z + w \\ y = -1 + z - w \end{cases}$$

Ara ja podem resoldre el sistema. L'última equació ens dona el valor de la y.

$$y = -1 + z - w.$$

Si substituïm cap enrere el valor de la y en la primera equació,

$$x - 1 + z - w = 1 - z + w \Rightarrow x = 2 - 2z + 2w.$$

Així, les solucions són d'aquest tipus:

$$x = 2 - 2z + 2w$$
$$y = -1 + z - w$$

on z i w poden ser qualsevol nombre. Escriurem la solució $(x, y, z, w) = (2 - 2z + 2w, 1 + z - w, z, w)$ per $z, w \in \mathbb{R}$. Per això, el sistema té infinites solucions, tantes com valors es donin a z i w. Exemples concrets serien els següents:

- Si $z = 0$ i $w = 0$, llavors $x = 2$ i $y = -1$. Per tant, una solució del sistema és $x = 2$, $y = -1$, $z = 0$, $w = 0$.
- Si $z = 1$ i $w = -2$, la solució del sistema seria $x = -4$, $y = 2$, $z = 1$, $w = -2$.

Així doncs, per a cada parell de valors qualsevol z, w podem aconseguir una solució del sistema. És a dir, el sistema té solucions infinites.

3. **Troba les solucions del sistema.**

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x - 2y + z = -2 \\ 8x + 5y + 5z = 1 \end{cases}$$

Solució:

Solucionem el sistema trobant la forma esglaonada. Per això fem el següent:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ x - 2y + z = -2 \\ 8x + 5y + 5z = 1 \end{cases} \xrightarrow{Eq1\leftrightarrow Eq2} \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 8x + 5y + 5z = 1 \end{cases} \xrightarrow[Eq3=Eq3-8\cdot Eq1]{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1}$$

$$\xrightarrow[Eq3=Eq3-8\cdot Eq1]{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1} \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ 7y - z = 8 \\ 21y - 3z = 17 \end{cases} \xrightarrow{Eq3=Eq3-3\cdot Eq2} \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ 7y - z = 8 \\ 0 = -7 \end{cases}$$

En vista de la tercera equació, que no té cap possible solució perquè sempre és falsa, podem deduir que el sistema és incompatible.

4. **Afegeix una equació al sistema següent, de manera que resulti...**

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

(a) compatible determinat.
(b) compatible indeterminat.
(c) incompatible.

Solució:

(a) Ens hem d'assegurar de trobar una tercera equació que no doni lloc a un sistema incompatible o que sigui irrellevant. Com que la segona equació no té la variable y, podem donar una tercera equació amb aquesta variable, per exemple, $y = 0$. O bé, per a complicar més aquesta tercera equació, $y = 0$ més una combinació lineal de les altres dues equacions (de manera que en simplificar el sistema retorni a $y = 0$).

Amb aquesta tercera equació ($y = 0$), fent substitució cap enrere, ens queda el sistema

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases} \xrightarrow{Eq2 = Eq2 - Eq1} \begin{cases} x + z = 1 \\ \quad -2z = 1 \end{cases}$$

I com que és un sistema esglaonat de dues equacions i dues variables, ja sabem que és compatible determinat. Saps resoldre'l?

(b) Com que amb les dues equacions que ens donen ja tenim un sistema amb dues equacions i tres incògnites, si afegim una equació irrellevant mantindrem el mateix tipus de sistema.

Per exemple, la tercera equació podria ser $0 = 0$ (que sempre és certa i no dona més informació que la que ja tenim, i per tant és irrellevant), $x - z = 2$ (que és idèntica a la segona equació) o qualsevol combinació lineal de les equacions inicials.

(c) Per tal que el sistema resulti incompatible, n'hi ha prou amb donar una equació que no es pugui solucionar. Per exemple, si la tercera equació fos $0 = 1$ no hi hauria solució del sistema (ja que la tercera equació mai no seria certa), i per tant el sistema seria incompatible.

Una altra opció és donar una tercera equació que sigui realment incompatible amb alguna de les anteriors, per exemple, $x - z = 1$. Com que la segona equació és $x - z = 2$, no pot ser que les dues siguin certes alhora (dit d'una altra manera, en restar una equació de l'altra obtindríem $0 = 1$ com abans); per tant, el sistema és incompatible.

5. **Troba la solució del sistema d'inequacions següent:**

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{x-1}{3} > x \\ x - 1 < 3 - \dfrac{x+1}{2} \end{cases}$$

Solució:

Si operem la primera inequació, tenim:

$$\begin{aligned} 2x - x &> \frac{x-1}{3} \\ x &> \frac{x-1}{3} \\ 3x &> x - 1 \\ 2x &> -1 \\ x &> \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

Mentre que, per a la segona,

$$\begin{aligned} x - 4 &< -\frac{x+1}{2} \\ 2x - 8 &< -(x+1) \\ 3x &< 7 \\ x &< \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Per tant, si unim les dues solucions tenim la solució $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right)$.

6. **Resol el sistema d'inequacions següent:**

$$\begin{cases} 2x^2 - 3 \le 6x + 5 \\ 7x + 1 \le 13 + 4x \end{cases}$$

Solució:

Si reordenem la primera inequació, tenim

$$2x^2 - 6x - 8 \le 0.$$

Ara, si igualem la part de l'esquerra a 0 i solucionem l'equació aplicant la fórmula de l'equació de segon grau, tenim $x = -1, 4$ com a solucions. Aquests valors són on la inequació se satisfà amb una igualtat. Per a saber quin dels intervals que queden soluciona la inequació, prenem un valor de cada interval i els avaluem:

- Agafem un nombre més petit que -1, per exemple, -2, i el substituïm en la inequació, de manera que queda $8 \le 0$. Com que això no és cert, aleshores l'interval $(-\infty, -1)$ no pertany a la solució.

- Agafem un nombre entre -1 i 4, per exemple, el 0, i el substituïm a la inequació, de manera que queda $-8 \leq 0$. Com si és cert, aleshores aquest interval si pertany a la solució.
- Agafem un nombre més gran que 4, per exemple, 5, i el substituïm en la inequació, de manera que queda $12 \leq 0$. Com que això no és cert, l'interval $(4, +\infty)$ no pertany a la solució.

En conclusió, la primera inequació té com a solució l'interval $[-1, 4]$.

Solucionem la segona inequació de manera que queda

$$\begin{aligned} 7x + 1 &\leq 13 + 4x \\ 7x - 4x &\leq 13 - 1 \\ 3x &\leq 4 \end{aligned}$$

i, per tant, té com a solució $x \leq 4$.

Ara sabem que la solució del sistema serà la intersecció de les solucions de cadascuna de les inequacions. Així tindrem que la solució del sistema és $[-1, 4]$.

Exercicis per a practicar amb les solucions

7. **Troba les solucions dels sistemes d'equacions següents usant el mètode de Gauss:**

(a)

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ x - 2y = 9 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 3x + y + z + u + v = 0 \\ + z - u = 1 \\ 2v = 4 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} -2x + y + z - t = 2 \\ y + z + 2t = 4 \\ z + 2t = 3 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -4x + 5y - 6z = 1 \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

8. **Un sistema lineal s'ha resolt de dues maneres obtenint els dos conjunts de solucions següents:**

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3\mu - 1 \\ y = 3 - 6\mu \\ z = 1 + 3\mu \end{cases}$$

per a λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Prova que les dues solucions coincideixen.

9. **Resol els sistemes d'inequacions de grau 1 següents:**

(a)

$$\begin{cases} 2x - (x - 4) < 6 \\ x > 3 \cdot (2x - 1) + 18 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-4}{3} > 2x - 1 \\ 2x - \dfrac{x-5}{3} > x - 3 \end{cases}$$

10. **Resol els sistemes d'inequacions de grau 2 següents:**

(a)

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leq 0 \\ -x^2 + 8x > 7 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 1} \leq 0 \\ 7 \cdot (3 - x) \geq 5 \end{cases}$$

Solucions:

7.

(a) $x = 5, y = -2$

(b) $\left(\dfrac{-3 - y - 2u}{3}, y, 1 + u, u, 2\right)$

(c) $\left(1 - \dfrac{3t}{2}, 1, 3 - 2t, t\right)$

(d) $\left(\frac{-2}{3} - 11z, \frac{-1}{3} - 4z, z\right)$

(e) És un sistema incompatible

8. Comprovem que per a $\lambda = 3\mu - 1$ obtenim les mateixes expressions per a les solucions.

9.

(a) $(-\infty, -3)$

(b) $(-7, 1)$

10.

(a) $(1, 6]$

(b) $(-\infty, -3] \cup \left(1, \frac{16}{7}\right]$