Iniciació a les matemàtiques per a l'enginyeria

PID_00270073

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat
Oberta
de Catalunya

1. Nombres

Índex

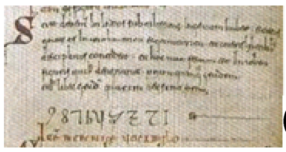
1.1. Nombres naturals **7**
1.1.1. Definició 7
1.1.2. Operacions 7
1.1.3. Múltiples i divisors 9
1.2. Nombres enters **12**
1.2.1. Definició i exemples 12
1.2.2. Operacions 14
1.3. Nombres racionals **16**
1.3.1. Nombres fraccionaris 16
1.3.2. Definició 19
1.3.3. Operacions 20
1.3.4. Forma decimal 23
1.4. Nombres reals **25**
1.4.1. Potències 25
1.4.2. Nombres irracionals 29
1.4.3. Definició 31
1.4.4. Operacions 33
1.5. Expressions numèriques **35**
1.5.1. La recta numèrica 35
1.5.2. Notació científica 37
1.5.3. Igualtats notables 38

1.1. Nombres naturals

1.1.1. Definició

Els **nombres naturals** són els que ens permeten comptar objectes. La llista dels nombres naturals s'inicia amb l'1 i no té fi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Fixem-nos que aquesta llista no inclou el 0.

Des de fa alguns segles els nombres naturals se solen representar amb les xifres decimals del 0 al 9. Aquestes xifres són d'origen hindú i es van introduir a Europa mitjançant textos àrabs. Un dels motius determinants per a usar aquestes xifres en lloc d'altres representacions és la facilitat per a calcular les operacions bàsiques que ofereixen: suma, resta, multiplicació i divisió.



Fragment d'una pàgina del *Codex Virgilanus* (s.X) on es poden observar les nou xifres en ordre invers.

1.1.2. Operacions

Suma És una operació que es representa amb el signe + (es llegeix "més") interposat entre els dos nombres que se sumen. Per a indicar el resultat, s'afegeix el signe = i, finalment, el resultat de la suma. Per exemple, $12 + 19 = 31$.
Els nombres que se sumen es denominen **sumands**, i el resultat de l'operació rep el nom de **suma**. En l'exemple, el 12 i el 19 són els sumands, i el 31 és la suma.

Resta (o diferència o subtracció) És una operació que es representa amb el signe − (es llegeix "menys") interposat entre els dos nombres que es volen restar. Per exemple, $14 - 6 = 8$.
El nombre anterior al signe − es denomina **minuend**, el nombre que segueix el signe − es denomina **subtrahend** i el resultat de la resta es denomina **diferència**. En l'exemple, el 14 és el minuend, el 6 és el subtrahend i el 8 és la diferència. La suma i la resta són operacions oposades. Aquest fet permet afirmar que en una resta la diferència més el subtrahend és igual al minuend. En l'exemple veiem que $8 + 6 = 14$.

Multiplicació (o producte) És una operació que es basa en la suma: la suma de diversos sumands iguals es transforma en una multiplicació del sumand pel el nombre de cops que aquest se suma. El signe que es fa servir és $\cdot$ o bé $\times$ (es llegeix "per"). Nosaltres optarem pel primer dels dos signes. Per exemple: $6+6+6+6+6 = 5 \cdot 6 = 30$ és a dir, la suma de 5 vegades el 6 és igual a *5 per 6*.
Els nombres multiplicats es denominen **factors**, o el resultat de la multiplicació es denomina **producte**. En l'exemple, els factors són 5 i 6, mentre que el producte és 30.

Divisió El signe que es fa servir és : o bé /. Aquest signe es llegeix "entre".
El nombre dividit es denomina **dividend**, el nombre que divideix es denomina **divisor** i el resultat es denomina **quocient**. Així, per exemple, en la divisió $15 : 3 = 5$, el 15 es denomina dividend, el 3 divisor, i el 5 quocient.
Aquesta operació és oposada al producte, i això ens permet trobar el resultat de qualsevol divisió. Per exemple, per a conèixer el quocient de 72 entre 8, s'ha de trobar el nombre que, multiplicat pel divisor, proporciona el dividend, és a dir: $8 \cdot ? = 72$. Evidentment, el nombre buscat és 9, perquè $8 \cdot 9 = 72$. Així, doncs, $72 : 8 = 9$.

Observacions per a la resta i divisió. Hem de tenir en compte que la resta i la divisió de nombres naturals no sempre es poden fer per dos nombres naturals qualssevol.

El primer problema el trobem quan volem restar d'un nombre un altre de més gran o igual. En aquest cas no la resta pot donar com a resultat un nombre natural: hauríem de definir un altre tipus de nombres, els nombres enters (tema que veurem a continuació), perquè aquesta operació fos possible.

De manera similar, el quocient entre dos nombres naturals tampoc no és sempre un nombre natural. Per exemple, $13 : 5$ no pot ser igual a un nombre natural perquè no hi ha cap nombre que multiplicat per 5 doni 13. En aquest cas, es pot descompondre la divisió anterior de la manera següent: $13 = 5 \cdot 2 + 3$, on el 3, denominat **residu**, és menor que el divisor 5. Per tant, la regla general per a la divisió s'enuncia així:

$$\text{dividend} = \text{divisor} \cdot \text{quocient} + \text{residu (forma abreujada: D} = \text{d} \cdot \text{q} + \text{r)}$$

on D és el dividend, d el divisor, c el quocient, i r el residu. Sempre que el residu sigui 0, es diu que la divisió és **exacta**.

Ordre d'operacions. De vegades se'ns presenta un grup d'operacions amb nombres naturals, que es denomina **expressió numèrica**. Per exemple:

$$4 \cdot 5 - (5 \cdot 3 + 8 : 2)$$

Per a trobar el resultat d'aquesta expressió, s'ha de seguir l'ordre d'operacions següent:

1) Operacions que es troben a l'interior dels parèntesis: del més extern al més intern.

2) Multiplicacions i divisions: les divisions sempre abans que les multiplicacions.

3) Sumes i restes: primer les restes i després les sumes.

L'ordre de les operacions és: primer els parèntesis, a continuació les divisions i les multiplicacions, i, finalment, les restes i sumes.

Exemple. Ordre de les operacions.

Resolguem l'exemple proposat

$4 \cdot 5 - (5 \cdot 3 + \boxed{8 : 2}) = 4 \cdot 5 - (\boxed{5 \cdot 3} + \boxed{4}) = 4 \cdot 5 - \boxed{(\boxed{15} + 4)} = \boxed{4 \cdot 5} - \boxed{19} = \boxed{20} - 19 = 1$

Observem la importància dels parèntesis amb el mateix exemple sense parèntesis:

$$4 \cdot 5 - 5 \cdot 3 + \boxed{8 : 2} = \boxed{4 \cdot 5} - \boxed{5 \cdot 3} + \boxed{4} = \boxed{20} - \boxed{15} + 4 = 9$$

1.1.3. Múltiples i divisors

Un nombre és **múltiple** d'un altre si es pot obtenir multiplicant aquest per algun altre nombre natural.

Quan una divisió entre dos nombres naturals és exacta, per exemple, $15 : 3 = 5$, es diu que 15 és **divisible** entre 3 (o per 3). En aquest cas, també es diu que 3 és un **divisor** de 15. Una notació habitual en aquesta situació és $3|15$.

Per tant, es pot observar que els conceptes de múltiple, divisor i divisibilitat estan lligats estretament. Si un nombre és múltiple d'un altre, també es pot afirmar que el primer és divisible pel segon. De la mateixa manera, el segon ha de ser un divisor del primer. És a dir, si a és múltiple de b, llavors b és divisor de a i a és divisible per b.

Exemple. Múltiples i divisors.
36 és un múltiple de 2, 3, 6, 12 i 18. I, per tant, podem dir que 2, 3, 6, 12 i 18 són divisors de 36. A més, 36 és divisible per 2, 3, 6, 12 i 18.

Propietats

- Qualsevol nombre natural és divisor (i múltiple) d'ell mateix: $a|a$ per qualsevol nombre a. Aquesta és la propietat **reflexiva**.
- Si un nombre és divisor d'un altre i aquest és divisor d'un tercer, llavors el primer nombre també és divisor del tercer (passa el mateix en el cas de ser múltiple), és a dir, si $a|b$ i $b|c$ aleshores tindrem segur que $a|c$. Aquesta és la propietat **transitiva**.
- Si un nombre és divisor d'un altre i aquest ho és del primer, llavors ambdós nombres són el mateix nombre (el mateix es pot dir en el cas de ser múltiple), és a dir, si $a|b$ i $b|a$, aleshores, per força, $a = b$. Aquesta és la propietat **antisimètrica**.

Criteris de divisibilitat. El concepte de divisibilitat ens permet establir alguns criteris per a detectar si un nombre és divisible per un altre sense haver de calcular la divisió. Alguns d'aquests criteris són els següents:

Divisible per	Criteri de divisibilitat	Exemples
2	L'última xifra és parell.	54**8** és divisible per 2, ja que 8 ho és.
3	La suma de les seves xifres és divisible per 3.	18.231 és divisible per 3, ja que $1 + 8 + 2 + 3 + 1 = 15$ ho és.
4	El nombre format per les dues últimes xifres és divisible per 4.	8**28** és divisible per 4, ja que 28 ho és.
5	L'última xifra és 0 o 5.	32**5** és divisible per 5, ja que 5 ho és.
9	La suma de les seves xifres és divisible per 9.	94.833 és divisible per 9, ja que $9 + 4 + 8 + 3 + 3 = 27$ ho és.
10	L'última xifra és 0.	100 és divisible per 10, ja que acaba en 0.
11	La diferència entre la suma de les xifres de les posicions parells i la suma de les xifres de les posicions senars és múltiple d'11.	12.111 és divisible per 11, ja que la diferéncia entre $1 + 1 + 1 = 3$ i $2 + 1 = 3$ és 0 ho és.

Nombres primers. Un nombre natural es diu que és un **nombre primer** quan els únics divisors que té són el mateix nombre i l'1. En contrapartida, anomenem

nombres compostos els que no són primers. Observem que 1 és un nombre que no és primer ni compost.

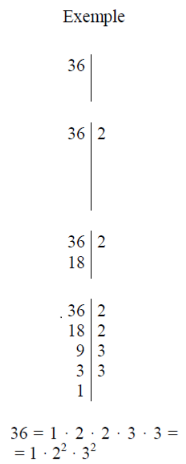
Procediment Per a saber si un nombre és primer, s'ha de dividir entre tots i cadascun dels nombres primers menors que el nombre en qüestió, començant pel 2. Si cap d'aquests nombres no és un divisor seu, llavors el nombre és primer.

El garbell o sedàs d'Eratòstenes és un algoritme que serveix per a buscar tots els nombres primers fins a un nombre determinat N. Aquest mètode consisteix a escriure tots els nombres naturals menors que N i, començant amb el primer nombre primer, esborrar tots els seus múltiples. Es continuen esborrant tots els múltiples del segon nombre primer fins a $\sqrt{N}$.

Factorització. Factoritzar un nombre és descompondre'l en factors primers. Això vol dir expressar-lo com a producte dels seus divisors primers, que podem detectar amb els criteris de divisibilitat.

Passos per a la factorització

1) Dividim el nostre valor pel nombre primer més petit que en sigui divisor. Aquest serà el nombre primer factor.
2) Fem la divisió i ens quedem amb el quocient. Repetim el procés ara amb el quocient tantes vegades com siguin necessàries fins a obtenir l'1 de quocient. Ja tenim tots els factors primers.
3) Comprovem que el nombre inicial és igual al producte de tots els primers que hem obtingut.



Exemple de factorització

Màxim comú divisor (MCD). El màxim comú divisor de dos (o més) nombres naturals és el nombre que compleix aquests dos requisits:

- És un divisor comú d'ambdós (o tots els) nombres.
- És el més gran d'aquests divisors.

Un dels mètodes per a trobar el MCD entre dos nombres consta d'aquests dos passos:

1) Es descomponen els dos (o més) nombres en factors primers.
2) Es multipliquen els nombres primers comuns a ambdues (o totes) descomposicions fent servir el de menor exponent, i el resultat és l'MCD.

Exemple. Càlcul dem màxim comú divisor.
Calculem el màxim comú divisor de 36 i 30. Per a fer-ho, podem escriure una llista de tots els divisors de 36 i una altra amb els de 30:

divisors de 36:	1	2	3	4	6	9	12	18	36
divisors de 30:	1	2	3	5	6	10	15	30	

Podem comprovar que de tots els divisors comuns (en lila) el més gran és el 6.
Per tant, $\mathrm{MCD}(30,36) = 6$.
Una altra manera de fer-ho és descompondre el dos nombres en factors primers: $36 = 1\cdot 2^2\cdot 3^2$, mentre que $30 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5$. Els primers comuns són 1, 2 i 3 i el seu exponent ha de ser 1, perquè és el menor. Per tant, $\mathrm{MCD}(36,30) = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$.

Amb la definició de MCD, diem que dos nombres són **coprimers** o **primers entre ells** si el seu MCD val 1 (o si no tenen factors primers comuns).

Mínim comú múltiple (MCM). El mínim comú múltiple de dos (o més) nombres és un nombre que:

- És un múltiple de cadascun d'aquests dos (o més) nombres.
- És el menor d'aquests múltiples.

Un mètode per a trobar l'MCM de dos (o més) nombres consisteix a fer el següent:

1) Es descomponen els dos (o més) nombres en factors primers.
2) Es multipliquen els nombres primers de les descomposicions que siguin comuns als dos (o més) nombres utilitzant els d'exponent més gran, i també els que no són comuns amb l'exponent corresponent.

Exemple: càlcul del mínim comú múltiple.
Calculem el mínim comú múltiple dels nombres 4 i 10. Comencem escrivint la llista de múltiples d'aquests dos nombres:

múltiples de 4:	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
múltiples de 10:	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

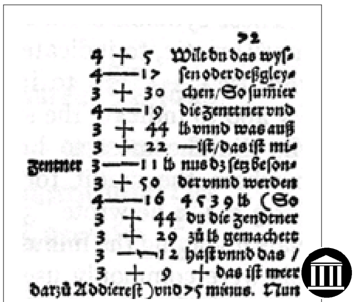
Hem destacat (en verd) el múltiples comuns d'ambdós. Veiem que el menor d'aquests múltiples comuns és el 20.

Una altra manera de fer-ho és descompondre els nombres 4 i 10 en nombres primers: $4 = 1 \cdot 2^2$ i $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5$. Veiem que els primers comuns són l'1 i el 2, aquest últim elevat al quadrat perquè és el d'exponent major. Pel que fa als primers no comuns, només hi ha el 5. Així, doncs, $\mathrm{mcm}(4, 10) = 1 \cdot 2^2 \cdot 5 = 20$.

1.2. Nombres enters

1.2.1. Definició i exemples

Els **nombres enters** permeten comptar, entre moltes altres coses, tant allò que es té com allò que es deu. Més genèricament, els nombres enters permeten representar les situacions en les quals els objectes comptats es poden dividir en dos grups, un de format pels objectes que es compten a partir d'un punt en endavant i l'altre format pels que es compten a partir d'aquest mateix punt cap enrere. Així, podem classificar els nombres enters en tres grups:



Els símbols + i - van aparèixer impresos per primera vegada en *Aritmètica Mercantil*, de Johannes Widmann, publicada a Leipzig el 1489. L'autor va utilitzar aquests símbols per a referir-se a guanys i pèrdues en problemes comercials.

- **Enters positius.** Són els que permeten comptar allò que es té. Compten a partir d'un punt en endavant. Es poden associar als nombres naturals. De fet, es poden escriure tal com s'escriuen els nombres naturals o bé precedits del signe +.

- **Enters negatius.** Són els que permeten comptar el que es deu. Compten a partir d'un punt endarrere. Els enters negatius s'escriuen utilitzant un nombre natural precedit d'un signe −. Així, un enter negatiu podria ser -6, que es llegeix "menys 6".
- El **zero**. És un enter ni positiu ni negatiu.

Signes de desigualtat. Donats dos nombres enters diferents qualssevol, un d'ells sempre és més gran que l'altre. Aquest fet tan senzill es pot expressar mitjançant els signes de desigualtat ($<$ i $>$):

- El signe $>$ es llegeix "major que", i indica que el nombre que està a l'esquerra del signe és més gran que el que és a la dreta.

> L'expressió $6 > 4$ indica que el 6 és més gran que el 4.

- El signe $<$ es llegeix "menor que" i indica que el que és a l'esquerra del signe és més petit que el que és a la dreta.

> L'expressió $1 < 17$ indica que l'1 és menor que el 17.

Hem de tenir en compte que es poden encadenar diversos signes $<$ o $>$ en la mateixa expressió. Ara bé, només poden aparèixer signes $<$ o $>$ del mateix tipus. Per exemple, és correcte escriure $5 < 7 < 8$. En canvi, és incorrecte escriure $8 > 1 < 2$ (encara que ambdues parts de l'expressió siguin correctes per separat).

Amb aquesta eina, es poden ordenar tots els nombres enters tenint en compte que:

- Qualsevol nombre positiu sempre és més gran que qualsevol nombre negatiu.

> +3€ és més gran que -9€; és a dir, es tenen més diners tenint 3€ que devent 9€. Així, doncs, $+3 > -9$ (o bé, $-9 < +3$).

- El 0 és més gran que qualsevol nombre negatiu i menor que qualsevol nombre positiu.

> No tenir cap euro (0€) és tenir més que deure'n trenta (-30€) però és tenir menys que quatre euros (+4€). Així, doncs, $-30 < 0 < 4$ (o bé, $4 > 0 > -30$).

- Entre dos enters negatius, el més gran és aquell que, sense signe (el nombre sense signe l'anomenem **valor absolut**), és el menor.

Valor Absolut. El valor absolut d'un nombre enter és igual al mateix nombre enter sense el seu signe. És a dir, per a trobar el valor absolut d'un nombre enter, n'hi ha prou amb treure-li el signe i convertir-lo en un nombre natural. Així, per exemple, el valor absolut del +6 és igual a 6, el valor absolut de −23 és igual a 23 i el valor absolut de 0 és 0.

Per a expressar el valor absolut d'un nombre, es fan servir dos petits segments verticals col·locats a banda i banda del nombre. Així, el valor absolut de +6 és $|+6| = 6$, el valor absolut de −23 $|-23| = 23$ i el valor absolut de 0 és $|0| = 0$.

1.2.2. Operacions

Les operacions entre nombres enters són les mateixes que entre els nombres naturals i compleixen, a més, les mateixes propietats. Ara bé, tenen certes regles de càlcul específiques per la distinció que hi ha entre enters positius i enters negatius. En tot cas, la denominació d'operacions i elements que formen part de cada operació es manté.

$\boxed{\text{Suma}}$ Les regles per a sumar nombres enters són les següents:

- Per a sumar dos nombres que tenen el mateix signe, se sumen els seus valors absoluts i al resultat s'hi afegeix el signe comú.

$$+17 + (+12) = +29$$

$$-10 + (-6) = -16$$

- Per a sumar dos nombres amb signe diferent, s'han de restar els seus valors absoluts, el més gran del més petit. Finalment, s'ha d'afegir el signe del nombre que té el valor absolut més gran.

$+13 + (-11) = +2$ (el valor absolut de +13 és més gran que el valor absolut de −11, 11; per tant, el signe és +)
$+6 + (-11) = -5$ (el valor absolut de −11 és més gran que el valor absolut de +6; per tant, el signe és −)

$\boxed{\text{Resta}}$ La diferència de dos nombres enters és igual a la suma del minuend amb l'oposat del subtrahend.

Sempre signifiquen el mateix els signes + i - ? Els signes + i - poden expressar tant una operació com el signe d'un nombre (positiu o negatiu). Cada vegada que es detecta un signe d'aquest tipus en una expressió numèrica, s'ha de distingir quin és el seu sentit.

$$-(+3) = 14 + (-3) = 11$$

$$-12 - (+16) = -12 + (-16) = -28$$

Un **exemple** una mica més llarg amb sumes i restes és:

$$-5 + (-8) - (-13) + (-2) - (+4) + (+6) = -5 - 8 + 13 - 2 - 4 + 6 = 0$$

Una manera ràpida d'obtenir el resultat final és:

- S'eliminen tots els parèntesis (substituïm per un + si tenim dos signes consecutius iguals i per un - si els tenim diferents).
- Se sumen tots els nombres positius; per altra banda, se sumen tots els negatius.
- Es fa la suma d'aquests dos valors tenint en compte que tenen signes diferents.

Multiplicació Per a fer una multiplicació amb dos nombres enters, en primer lloc s'obté el producte dels seus valors absoluts i després s'estableix el signe del resultat. Amb aquesta finalitat, només cal recordar la regla de signes següent:

- Si ambdós nombres tenen el mateix signe, el seu producte és positiu.
- Si els dos nombres tenen signe diferent, el seu producte és negatiu.

Hem de tenir en compte que dins d'una expressió numèrica no hi pot haver dos signes consecutius. Si hi fossin, seria convenient usar parèntesis per a obtenir una expressió correcta.

Divisió Les mateixes regles del producte són vàlides per a la divisió canviant el signe de multiplicar pel de dividir.

En cas que la divisió sigui exacta, es diu, igual que amb els nombres naturals, que el dividend és un múltiple del divisor. Les regles i propietats de múltiples i divisors són també les mateixes utilitzant el valor absolut dels nombres.

El -3 és un divisor del 12 ($-3|12$) perquè $|12| : |-3| = 4$ és una divisió exacta.

Les operacions i l'ordre. És important conèixer la influència que exerceixen les operacions en l'ordre dels nombres enters. En altres paraules, donats dos nombres enters qualssevol, com influeix l'operació (suma, resta, multiplicació o divisió) amb un altre nombre en la seva ordenació? Es distingeixen dos casos:

Com afecten les operacions a l'ordre dels nombres enters? En sumar o restar un mateix nombre a dos nombres enters, els resultats mantenen la mateixa relació d'ordre que els dos nombres originals; en canvi, en multiplicar o dividir dos nombres per un mateix nombre enter, els resultats mantenen la mateixa relació d'ordre només si aquest últim nombre és positiu; si no, es gira la relació.

Suma i resta Si se suma o resta un mateix nombre en els dos costats d'una desigualtat, la desigualtat es manté. També es pot dir que la suma i la resta mantenen l'ordre dels enters.

Exemple. L'ordre i la suma i resta.
Tenim $-4 < 8$. Sumant 3 a banda i banda de la desigualtat, tenim $-4+3 < 8+3$, d'on resulta $-1 < 11$, per la qual cosa es manté la desigualtat. Així, doncs, els resultats mantenen el mateix ordre que els nombres inicials.
Si ara restem 4 a banda i banda de la desigualtat, $-4 - 4 < 8 - 4$, obtenim $-8 < 4$ amb la qual cosa també es manté la desigualtat.

Multiplicació i divisió En canvi, quan es multipliquen o es divideixen ambdós costats d'una desigualtat per un mateix nombre, no passa sempre el mateix.

- Es manté el mateix ordre si el nombre pel qual es multipliquen o divideixen és positiu.
- S'inverteix l'ordre si el nombre pel qual es multipliquen o divideixen és negatiu.

Exemple. L'ordre i la multiplicació i divisió.
Multipliquem per +3 a banda i banda d'aquesta desigualtat:

$$-5 < 3$$

Aleshores el resultat és $-5 \cdot 3 < 3 \cdot 3$, és a dir, $-15 < 9$. L'ordre de resultat continua essent el mateix.
En canvi, si es multiplica per un nombre negatiu, per exemple, -4, el resultat és$-5 \cdot (-4) > 3 \cdot (-4)$, és a dir, $20 > -12$.
En aquest cas, l'ordre és exactament el contrari, com es pot observar, ja que s'ha canviat el signe $<$ pel signe $>$.
Ara provem-ho amb la divisió: $-15 < 30$. Si es divideixen ambdós costats entre 5, $-15 : 5 < 30 : 5$ s'obté $-3 < 6$, en canvi, si a $-36 < -30$ es divideixen ambdós costats entre -2 $-36 : (-2) > -30 : (-2)$ s'obté $18 > 15$, com es podia preveure.

1.3. Nombres racionals

1.3.1. Nombres fraccionaris

Sempre que se sumen, resten o multipliquen dos nombres enters, el resultat és un nombre enter. Però, en canvi, això no succeeix quan els nombres es divideixen.

Si dividim 12 entre 4, 12/4, el resultat és un nombre enter, el 3.
Si dividim 1 entre 2, 1/2, el resultat no és un nombre enter.

En aquest últim cas sorgeix la qüestió del significat d'aquesta última expressió, 1/2, i d'altres de similars.

Aquest tipus d'expressions conformen els **nombres fraccionaris** i es poden associar, per exemple, al repartiment d'objectes entre diverses persones.

Exemple. Nombres fraccionaris i la repartició d'objectes.
Si es volen repartir 8 pastissos iguals entre 2 persones, cadascuna d'elles obtindrà 4 pastissos, ja que $8 : 2 = 4$.
Ara bé, si es vol repartir 1 pastís entre 2 persones, no hi ha cap nombre enter que pugui representar el resultat d'aquesta operació. En aquest cas, a cada persona no li correspon més que una part o fracció del pastís, en concret, la meitat del pastís.
El nombre que expressa aquest repartiment és simplement la forma de la divisió amb la barra, és a dir, 1/2. Aquest nombre és un nombre fraccionari.

Un **nombre fraccionari** (fracció o trencat) s'expressa en forma de quocient de nombres enters amb una barra entre ambdós nombres, que pot ser horitzontal o inclinada. Un exemple de fracció pot ser $\frac{12}{5}$ o també 12/5. En aquest cas, el 5 es denomina **denominador** (indica quantes parts es consideren) i el 12 **numerador** (marca en quantes parts hem de partir la unitat). Tal com es pot observar, doncs, els elements d'un nombre fraccionari es denominen de manera específica i diferenciada de la denominació dels elements d'una divisió entera.

Qualsevol nombre enter es pot convertir en un nombre fraccionari. Amb aquesta finalitat, la fracció ha de tenir el numerador igual al nombre enter en qüestió i el denominador ha de ser 1. Així, doncs, per exemple, $8 = \frac{8}{1}$. També, $-3 = \frac{-3}{1}$. Aquest fet ens mostra com els nombres enters són un subconjunt dels nombres fraccionaris o, dit d'una altra manera, qualsevol nombre enter és també un nombre fraccionari.

Com llegim una fracció? Amb el nom del nombre del numerador, seguit del plural del nombre al denominador (si el numerador és 1, s'utilitza el singular). Així, per exemple, 12/5 es llegeix "dotze cinquens", 1/7 és "un setè", 3/11 és "tres onzens", etc. Ara bé, de vegades, si el denominador és molt gran, s'utilitza simplement l'expressió "partit per", o bé, "entre", entre el numerador i el denominador. Així, 12/25 és "dotze partit per vint-i-cinc" o "dotze entre vint-i-cinc".

Signe. Tant el numerador com el denominador d'una fracció poden ser positius o negatius. Utilitzant la regla dels signes per a dividir nombres enters, es pot deduir el signe final d'una fracció. Una fracció és positiva si numerador i denominador tenen el mateix signe, i una fracció és negativa si numerador i denominador tenen signe diferent.

$\frac{+4}{+7} = \frac{4}{7}$ $\frac{-6}{-11} = \frac{6}{11}$ són fraccions positives

$\frac{-4}{+7} = \frac{-4}{7}$ $\frac{+6}{-11} = \frac{-6}{11}$ són fraccions negatives

Normalment, el signe de la fracció s'anteposa al numerador, mentre que el denominador no va precedit de cap signe, però també es pot situar avantposat a la línia fraccionària, a la mateixa altura:

$$\frac{-4}{7} = -\frac{4}{7}$$

Fraccions equivalents. Resulta fàcil observar que hi ha fraccions diferents que representen el mateix nombre. Per exemple, la fracció $\frac{1}{2}$ representa el mateix valor que la fracció $\frac{2}{4}$. La comprovació d'aquest fet és que si es reparteix un pastís equitativament entre dues persones, a cadascuna li correspondrà la meitat del pastís, és a dir, $\frac{1}{2}$. Si es reparteixen equitativament 2 pastissos entre 4 persones, a cadascuna li correspondrà, evidentment, la mateixa quantitat de pastís que en el cas anterior; ara bé, en aquest cas, la seva porció és igual a $\frac{2}{4}$. Queda clar, doncs, que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Quan dues fraccions expressen el mateix nombre, es diu que són **fraccions equivalents**.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$$

són fraccions equivalents, és a dir, totes expressen el mateix valor.

La manera més senzilla de trobar una fracció equivalent a una altra consisteix a multiplicar tant el numerador com el denominador d'aquesta per un mateix nombre. Per exemple, per a construir una fracció equivalent a $\frac{5}{11}$, es pot multiplicar numerador i denominador per 3, amb la qual cosa s'obté $\frac{15}{33}$; d'aquesta manera, es pot assegurar que ambdues fraccions són equivalents, és a dir, $\frac{5}{11} = \frac{15}{33}$. Evidentment, si es divideixen el numerador i el denominador d'una fracció pel mateix nombre, també s'obté una fracció equivalent.

Hi ha una prova senzilla que permet saber quan dues fraccions són equivalents. Es tracta de multiplicar el numerador d'una pel denominador de l'altra, i viceversa. De vegades, aquest procés es denomina, per a abreujar, **multiplicar en creu**:

Exemple. Comprovació de fraccions equivalents.

$$\frac{4}{10} \times \frac{6}{15} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow 10 \cdot 6 = 60 \\ \longrightarrow 4 \cdot 15 = 60 \end{array}$$

Per tant, $\frac{4}{10}$ i $\frac{6}{15}$ són fraccions equivalents, i en canvi

$$\frac{2}{6} \times \frac{7}{11} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow 6 \cdot 7 = 42 \\ \longrightarrow 2 \cdot 11 = 22 \end{array}$$

no són fraccions equivalents perquè $42 \neq 22$ (el símbol $\neq$ és el signe de desigualtat, i se situa entre dues expressions amb resultats diferents.)

Fracció irreductible. El fet que moltes fraccions puguin representar el mateix nombre en complica molt la manipulació. Per a evitar-ho, se sol destacar una fracció del conjunt de totes les fraccions que són equivalents entre elles, la denominada **fracció irreductible**. Una fracció irreductible es caracteritza pel fet que numerador i denominador són primers entre ells, això és, són nombres l'MCD dels quals és 1.

$\frac{8}{16}$ no és una fracció irreductible, ja que el $\text{MCD}(8, 16) = 8$. En canvi, $\frac{4}{9}$ és una fracció irreductible perquè el $\text{MCD}(4, 9) = 1$.

El procés de cerca de la fracció irreductible equivalent a una altra es denomina **simplificació** de la fracció. Donada una fracció qualsevol, sempre es pot trobar una fracció irreductible que en sigui equivalent. El mètode més senzill per a fer-ho consisteix a dividir el numerador i el denominador entre el seu MCD.

No és possible que dues fraccions irreductibles diferents siguin equivalents. Aquest fet permet seleccionar, d'entre totes les fraccions equivalents entre elles, la fracció irreductible com a representant de totes.

Per a convertir la fracció $\frac{18}{12}$ en una fracció irreductible, cal dividir numerador i denominador entre el $\text{MCD}(18, 12) = 6$. La fracció resultant és

$$\frac{18 : 6}{12 : 6} = \frac{3}{2}.$$

1.3.2. Definició

Un **nombre racional** és aquell que es pot expressar com una fracció, o com qualsevol fracció de les equivalents a aquesta. Un mateix nombre racional es pot expressar de diferents maneres (fraccions).

El nombre racional que s'expressa com la fracció irreductible $\frac{1}{3}$ també es pot expressar amb la fracció $\frac{2}{6}$ o amb la fracció $\frac{7}{21}$. En aquests casos, les fraccions són diferents, però el nombre racional representat és el mateix.

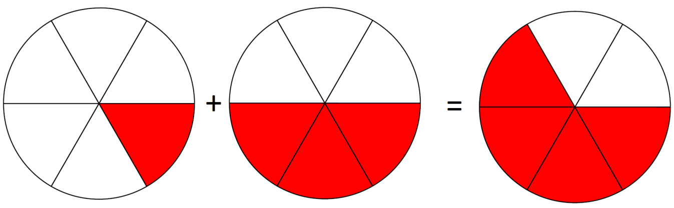
La millor manera d'expressar un nombre racional és mitjançant una fracció irreductible perquè aquesta sempre serà la més senzilla. En l'exemple, la millor manera de representar el nombre racional anterior és $\frac{1}{3}$, perquè és una fracció irreductible.

De vegades, els termes *nombre racional*, *nombre fraccionari*, *fracció* o *trencat* se solen usar indistintament, encara que siguin conceptes lleugerament diferents, per a indicar el concepte de nombre racional tal com s'acaba de definir. Se solen usar aquests últims, *fracció* i *trencat* amb preferència, ja que són els més breus.

1.3.3. Operacions

$\boxed{\text{Suma}}$ és una operació que expressa la reunió de les parts expressades pels nombres sumats, i estableix un nombre fraccionari que expressa aquesta reunió. Per a calcular-ho, diferenciem dos casos, segons si el denominador és comú o no.

$\boxed{\text{Fraccions amb el mateix denominador}}$ La suma de $\frac{1}{6}$ amb $\frac{3}{6}$ es pot representar amb la reunió d'aquests dos fragments acolorits:



És fàcil determinar que el resultat de la suma és $\frac{4}{6}$. Aquest fet es pot generalitzar de la manera següent: la suma de dos nombres amb el mateix denominador és igual a una fracció el numerador de la qual és la suma de numeradors i el denominador de la qual és el mateix denominador comú. En l'exemple:

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{1+3}{6} = \frac{4}{6}.$$

$\boxed{\text{Fraccions amb diferent denominador}}$ En aquest cas s'ha de substituir cadascuna per una altra fracció equivalent amb el mateix denominador. A continuació, se sumen les dues fraccions resultats tal com s'ha explicat en l'apartat anterior.

Exemple. Suma de fraccions.
Per a fer la suma $\frac{3}{18}+\frac{5}{12}$, s'ha de buscar una fracció equivalent a cadascuna que tingui el mateix denominador:

$$\frac{3}{18}=\frac{6}{36}=\frac{9}{54}=\ldots$$

$$\frac{5}{12}=\frac{10}{24}=\frac{15}{36}=\frac{20}{48}=\ldots$$

en aquest cas trobem que les fraccions $\frac{6}{36}$ i $\frac{15}{36}$ comparteixen el denominador. D'aquesta manera, la suma es pot fer fàcilment així:

$$\frac{3}{18}+\frac{5}{12}=\frac{6}{36}+\frac{15}{36}=\frac{21}{36}$$

Ara bé, aquest mètode pot arribar a ser realment costós perquè es podria trigar molt de temps a trobar dues fraccions amb el mateix denominador.

Hi ha dos mètodes que permeten fer el mateix de manera més ràpida:

1) **La multiplicació de denominadors.** Consisteix a multiplicar el numerador i el denominador de les dues fraccions que se sumen pel denominador de l'altra. Així s'aconsegueix que les fraccions resultants tinguin el mateix denominador i siguin equivalents a les originals.
En l'exemple anterior,

$$\frac{3}{18}+\frac{5}{12}=\frac{3\cdot 12}{18\cdot 12}+\frac{5\cdot 18}{12\cdot 18}=\frac{36}{216}+\frac{90}{216}=\frac{126}{216}$$

2) **El càlcul de l'MCM dels denominadors.** Aquest mètode es basa en el càlcul de l'MCM dels denominadors per a trobar el nou denominador comú. Els passos a seguir són:

a) Calcular l'MCM dels denominadors involucrats en la suma. Aquest resultat serà el denominador comú. En l'exemple, $\text{MCM}(12,18)=36$.

b) Multiplicar el numerador de cada fracció pel resultat de dividir l'MCM entre el denominador de la fracció respectiva. Així, en l'exemple, el numerador de la fracció $\frac{3}{18}$, que és 3, s'ha de multiplicar pel resultat de $36:18=2$; de la mateixa manera, el numerador de la fracció $\frac{5}{12}$, que és 5, s'ha de multiplicar pel resultat de $36:12=3$. Les fraccions resultants són equivalents a les anteriors i tenen el denominador comú:

$$\frac{3}{18}=\frac{6}{36}\qquad\frac{5}{12}=\frac{15}{36}$$

c) Finalment, cal sumar les fraccions amb el mateix denominador trobades en l'apartat anterior. En l'exemple,

$$\frac{3}{18}+\frac{5}{12}=\frac{6}{36}+\frac{15}{36}=\frac{21}{36}$$

Es pot observar que en general el primer mètode té el desavantatge d'oferir resultats amb nombres elevats, encara que evidentment es poden simplificar (això sempre és recomanable quan es manipulen fraccions), però sovint és més ràpid.

El segon mètode ofereix l'avantatge que el resultat es presenta de manera més simplificada. Això és més fàcil d'observar si la suma involucra diverses fraccions. Per tant, si no hi ha massa sumes i els nombres són petits, és possible utilitzar el primer mètode, però si n'hi ha tres o més, és recomanable seguir el mètode del càlcul de l'MCM.

Resta | És l'operació oposada a la suma, igual que passa entre els nombres enters. La resta de fraccions es redueix a la suma amb la fracció oposada.

$$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8} + \left(\frac{-2}{8}\right) = \frac{5 + (-2)}{8} = \frac{3}{8}.$$

Mutliplicació | El resultat de multiplicar dues fraccions és una fracció el numerador de la qual és el producte dels numeradors i el denominador de la qual és el producte dels denominadors.

$$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}.$$

La multiplicació permet calcular la **fracció d'un nombre** (part que s'agafa d'un nombre). Per exemple, per a trobar el triple de 39 es fa la multiplicació següent: $3 \cdot 39 = 117$. De la mateixa manera, per a calcular una fracció d'un nombre s'ha de multiplicar la fracció pel nombre. Així, tres quarts de 120 és igual a $\frac{3}{4} \cdot 120 = 90$.

En molts casos, les fraccions que tenen per denominador 100 s'expressen en forma de percentatge amb el símbol %, denominat tant per cent. Així, la fracció 23/100 es pot indicar també com 23%, i es llegeix "23 per cent". El càlcul de tants per cent es redueix al càlcul amb fraccions.

Divisió | La divisió de fraccions és el producte d'una fracció per la inversa de l'altra. La divisió de dues fraccions es pot indicar de dues maneres:

$$\frac{2}{3} : \frac{7}{11} \qquad \qquad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{11}}$$

Quin és l'ordre en què s'han de fer les operacions elementals entre fraccions? En una expressió en la qual s'encadenen diferents operacions entre fraccions, primer s'han de resoldre els parèntesis, tot seguit la divisió i la multiplicació i, finalment, la resta i la suma.

En el segon cas, convé la barra de divisió respecte de les barres de fracció per a no deixar lloc a dubtes sobre quin és el numerador i quin el denominador. El resultat de la divisió de dues fraccions és igual al producte de la fracció que és en el numerador, multiplicada per la inversa de la fracció del denominador.

$$\frac{2}{3} : \frac{7}{11} = \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{7} = \frac{22}{21}$$

Una altra regla fàcil de recordar per a fer una divisió és aquesta: es multipliquen en creu numeradors amb denominadors i els resultats també se situen en creu. En el cas anterior:

$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{11} \times \frac{2 \cdot 11}{3 \cdot 7} = \frac{22}{21}$$

A partir de la divisió de nombres, es pot expressar l'**invers d'un nombre racional** d'una altra manera: com a 1 dividit entre el nombre. Així, per exemple, l'invers de $4/7$ és $\frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$.

1.3.4. Forma decimal

La **forma decimal** d'una fracció és una expressió numèrica que està formada per una part entera, a l'esquerra del punt, i una part decimal o senzillament decimals, a la dreta del punt. Per a obtenir la forma decimal d'una fracció, s'ha de dividir el numerador entre el denominador, com en la divisió entera, però sense aturar-se fins que la resta sigui zero, afegint-hi els decimals corresponents. Per exemple, la forma decimal de $\frac{12}{5}$ és 2.4, és a dir, $\frac{12}{5} = 2.4$ (i es llegeix "2 coma 4").

Tipus de formes decimals:

- La forma decimal es denomina **estricta** si la divisió del numerador entre el denominador té un nombre de decimals finit. Per exemple: $\frac{12}{5} = 2.4$.
- La forma decimal es denomina **periòdica** en cas contrari. Per exemple: $\frac{1}{3} = 0.333333333\ldots = 0.\widehat{3}$. El barret que posem sobre el 3 indica el **període** (els decimals que es repeteixen infinites vegades). Es pot observar que la xifra o xifres que es repeteixen duen el símbol periòdic en la part superior. Diferenciem també dos tipus de nombres periòdics: si el període comença just després de la coma, parlem de nombre decimal **periòdic pur** ($0.\widehat{13}$); en canvi, si comença després d'un grup de xifres decimals que no es repeteixen, parlem d'un decimal **periòdic mixt** ($0.15\widehat{2}$). És evident que el grup de nombres repetits pot ser superior a un. Per exemple:

$$\frac{5627}{9900} = 0.56838383\ldots = 0.56\widehat{83}$$

En les formes decimals es pot separar la part entera de la decimal per un punt, una coma o un apòstrof. Nosaltres utilitzarem el punt, la mateixa notació que es fa servir en el món anglosaxó i en la majoria de calculadores.

Podem transformar la forma decimal d'un nombre en la forma fraccionària:

- Si la forma decimal és exacta, s'ha d'eliminar la coma del nombre decimal. El nombre resultant serà el numerador de la fracció. El denominador ha de ser un nombre la primera xifra del qual sigui un 1, i amb tants zeros com decimals té el nombre decimal. Per exemple, la forma fraccionària de 3.465 és $\frac{3465}{1000}$.
- Si la forma decimal és periòdica, s'han de seguir aquests passos:
  - El numerador és igual a la diferència entre el nombre en qüestió, sense coma ni símbol periòdic (amb la qual cosa es transforma en un nombre enter), i el mateix nombre, sense coma ni xifres a sota del símbol periòdic.

- El denominador ha de ser un enter amb tants 9 com xifres a sota del símbol periòdic, i tants 0 com xifres de la secció decimal que no són dintre del símbol periòdic. Per tant, la fracció que correspon al nombre periòdic és

$$23.4\widehat{52} = \frac{23452 - 234}{990} = \frac{23218}{990}$$

Aproximacions. Per a aproximar un nombre, distingim entre l'arrodoniment i el truncament.

L'**arrodoniment** d'un nombre fins a una xifra determinada, l'anomenada *xifra d'arrodoniment*, consisteix a escriure el nombre decimal més proper al nombre donat, de manera que només tingui xifres decimals fins a la d'arrodoniment. Per exemple, l'arrodoniment d'$\frac{1}{3}$ amb dos decimals consisteix a trobar el nombre decimal més proper a $\frac{1}{3}$ que tingui només dos decimals. En aquest cas, és fàcil adonar-se que és 0.33. Per a expressar que $\frac{1}{3}$ és aproximadament igual a 0.33, s'utilitza el símbol $\approx$, que es llegeix "aproximadament igual": $\frac{1}{3} \approx 0.33$. En tot cas, no cal abusar de l'ús d'aquest símbol.

Aquestes són les regles per a arrodonir un nombre fins a una xifra determinada:

Quan fem operacions amb fraccions sempre és millor treballar amb les fraccions que amb les formes decimals aproximades, perquè així obtenim el valor exacte de l'operació.

- Si la xifra següent a la de l'arrodoniment és inferior a 5, s'eliminen totes les xifres decimals posteriors a aquesta xifra. Així, per exemple, si es vol arrodonir el nombre 32.543613 a tres decimals, podem dir que $32.543613 \approx 32.54$.

- Si la xifra següent a la de l'arrodoniment és superior a 4, s'eliminen totes les xifres decimals posteriors a la xifra d'arrodoniment, i se suma una unitat a la xifra d'arrodoniment. Així, per exemple, si es vol arrodonir el nombre 32.5436134 a tres decimals queda 32.544.

- Si la xifra d'arrodoniment és 9, s'actua de la mateixa manera que en una suma de nombres decimals quan se suma 1 a una xifra 9. Per exemple, si es vol arrodonir el nombre 2.749623 a tres decimals, com que la xifra del quart decimal és 6, més gran que 4, s'ha de sumar una unitat a la tercera xifra decimal, 9, i per tant el nombre arrodonit serà igual a 2.750. Fixeu-vos que, tot i que 2.75 és el mateix que 2.750, el 0 ens indica que és una aproximació i no el valor exacte.

Podem considerar també el **truncament** (encara que no és tant habitual). El truncament és la reducció del número de dígits a la dreta del punt decimal, en la qual es descarten els menys significatius. Per exemple, el truncament del nombre 2.56147215 a 4 decimals és 2.5614.

Ordenació. La manera més senzilla d'ordenar dos nombres racionals és escriure'n l'expressió decimal, que mostra de manera immediata quin dels dos és més gran.

Observem que els nombres racionals tenen una propietat important: entre dos nombres racionals diferents sempre en podem trobar un altre (de fet, se'n poden trobar moltíssims). Per a trobar un nombre que estigui entre dos altres nombres qualssevol, només cal sumar-los i dividir el resultat entre 2.

El nombre $\frac{3}{4}$ és menor que el nombre $\frac{9}{5}$, aleshores és fàcil comprovar que $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{9}{5}}{2} = \frac{51}{40}$ és entre tots dos nombres, és a dir, $\frac{3}{4} < \frac{51}{40} < \frac{9}{5}$.

1.4. Nombres reals

Tots els nombres que hem vist fins ara formen part del conjunt de nombres reals que definirem en aquest apartat.

1.4.1. Potències

Quan es té una expressió amb un grup de multiplicacions amb els mateixos factors, per a abreujar-la es pot fer servir una potència. Per exemple:

$$\underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{5} = 7^5$$

Es pot observar que la potència és formada per dos nombres:

- La **base** de la potència, que és el nombre que es multiplica diverses vegades. En l'exemple, la base és 7.
- L'**exponent** de la potència, que indica el nombre de vegades que es repeteix la base en la multiplicació. En l'exemple, l'exponent és 5.

Per a designar una potència, s'usa l'expressió "elevat a". En l'exemple, 7^5 es llegeix "set elevat a cinc", o fins i tot "set elevat a la cinquena potència". Hi ha dos casos particulars: si l'exponent és 2, s'utilitza l'expressió "al quadrat" (per exemple, 8^2 es llegeix "vuit al quadrat"), i si l'exponent és 3, s'utilitza l'expressió "al cub" (per exemple, 5^3 es llegeix "cinc al cub").

Igual que en els nombres naturals, l'ús de potències en els nombres enters és una manera d'abreujar un producte reiterat d'un mateix nombre. Per exemple: $(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = (-3)^4$. Ara bé, en aquest cas és imprescindible posar-hi els parèntesis perquè l'exponent afecta tant el nombre com el signe. En cas contrari, no s'estaria indicant la mateixa operació, és a dir, $-3^4 = -3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$; per tant, l'exponent només afecta el nombre i no el signe. Per a establir el signe de la potència d'un nombre enter, s'han de tenir en compte el signe del nombre i la potència:

- Si el signe del nombre és positiu, el nombre resultant serà positiu. Per exemple, $(+2)^3 = 2^3$.
- Si el signe del nombre és negatiu, el nombre resultant:

- ◦ serà positiu si l'exponent és parell. Per exemple, $(-2)^4 = 2^4$, ja que el producte de 4 vegades un nombre negatiu és positiu.
- ◦ serà negatiu si l'exponent és senar. Per exemple, $(-2)^5 = -2^5$, ja que el producte de 5 vegades un nombre negatiu és negatiu.

La **potència d'una fracció** és igual a una altra fracció amb els mateixos numerador i denominador, però elevats a l'exponent de la potència. Així, per exemple:

$$\left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{7^3}{5^3}.$$

A més, es pot definir una potència amb exponent negatiu, que és igual a l'invers de la mateixa potència amb exponent positiu. Per exemple:

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{-6} = \frac{1}{\left(\frac{7}{9}\right)^6} \qquad \text{o} \qquad 6^{-1} = \frac{1}{6}.$$

Arrels. De la mateixa manera que la diferència és l'operació oposada a la suma, i la divisió és l'operació oposada a la multiplicació, la radicació és l'operació oposada a la potenciació. Els tipus més importants de radicació són:

- L'**arrel quadrada.** Es tracta de l'operació oposada a *elevar al quadrat.* S'usa el signe $\sqrt{}$, o signe radical, amb el nombre a l'interior. Per exemple, com que 5 al quadrat és 25, llavors, l'arrel quadrada de 25 és igual a 5,
$$5^2 = 25 \longrightarrow \sqrt{25} = 5$$
i es llegeix "l'arrel quadrada de 25 és 5" (o simplement "l'arrel de 25"). De la mateixa manera,
$$7^2 = 49 \longrightarrow \sqrt{49} = 7$$
El nombre que és a l'interior del signe radical s'anomena **radicant**, i el resultat s'anomena de vegades **arrel**.
- L'**arrel cúbica.** És l'operació oposada a "elevar al cub". Es fa servir el signe $\sqrt[3]{}$ amb el nombre a l'interior. En aquest cas, es diu que el 3 (que és a la part superior del signe) és l'**índex** de l'arrel. (Observem que en el cas de l'arrel quadrada no hi tenim l'índex.) Per exemple, com que 5 al cub és igual a 125, llavors l'arrel cúbica de 125 ha de ser igual a 5:
$$5^3 = 125 \longrightarrow \sqrt[3]{125} = 5$$
i es llegeix "l'arrel cúbica de 125 és 5". De la mateixa manera,
$$2^3 = 8 \longrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$$
- Altres arrels. De manera similar a l'arrel cúbica, es poden fer arrels de diferents índexs. Així, per exemple:
L'arrel d'índex 4, l'arrel quarta, de 625 és 5 ($\sqrt[4]{625} = 5$), ja que $5^4 = 625$.
L'arrel d'índex 5, l'arrel cinquena, de 32 és 2 ($\sqrt[5]{32} = 2$), ja que $2^5 = 32$.

En el cas dels nombres negatius, s'ha de tenir en compte que no és possible calcular l'arrel d'índex parell. Per exemple, l'expressió $\sqrt{-4}$ és incorrecta perquè no hi ha cap nombre enter el quadrat del qual sigui 4; en general, no hi ha cap nombre el quadrat del qual sigui un nombre negatiu. En el cas dels nombres fraccionaris, la seva arrel es calcula:

$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \qquad \text{ja que} \qquad \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

En tot cas, l'arrel d'una fracció sempre es pot expressar com una fracció d'arrels. Per exemple:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$$

Tota arrel es pot expressar també com una potència amb exponent un nombre fraccionari igual a l'invers de l'índex. Per exemple:

$$\sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}} \qquad \text{o també} \qquad \sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}}$$

D'aquesta manera, es pot expressar conjuntament l'arrel d'una potència. Per exemple: $\sqrt[3]{27^2} = 27^{\frac{2}{3}}$. És a dir, l'arrel d'una potència és igual a una potència l'exponent de la qual és una fracció de numerador igual al de la potència i de denominador igual a l'índex de l'arrel. Un altre exemple:

$$\sqrt[4]{\left(\frac{16}{81}\right)^{-3}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

Propietats potències i arrels. Per a simplificar els càlculs amb potències i arrels (recordem que una arrel es pot expressar en forma de potència d'exponent fraccionari), és útil fer servir aquestes propietats:

- **Potència d'exponent 1.** El resultat d'una potència d'exponent 1 és igual a la base $\boxed{a^1 = a}$

  $5^1 = 5$ o bé $(-3)^1 = -3$

- **Producte de potències de la mateixa base.** Per a multiplicar potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de sumar els exponents deixant la base sense modificacions $\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$

  $3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$, ja que $3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$.

  $$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{11}{4}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}+\frac{11}{3}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{21}{4}}$$

- **Quocient de potències de la mateixa base.** Per a dividir potències amb la mateixa base, n'hi ha prou de restar els exponents deixant la base sense modificacions. $\boxed{a^p : a^q = a^{p-q}}$

$7^6 : 7^4 = 7^2$, ja que $7^6 : 7^4 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) : (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 = 7^2$

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} : \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{11}{4}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}-\frac{11}{3}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{-1}{4}}$$

- **Potència d'exponent 0.** Qualsevol potència (amb base diferent del 0) d'exponent 0 resulta sempre igual a 1 $\boxed{a^0 = 1}$

$9^0 = 1$, ja que $9^{3-3} = 9^3 : 9^3 = 1$

- **Potència d'una potència.** El resultat d'elevar una potència qualsevol a un altre exponent és igual a una potència que té per base la base de la potència, i l'exponent de la qual és el producte d'exponents $\boxed{(a^p)^q = a^{p \cdot q}}$

$(5^4)^3 = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$, ja que $(5^4)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{12}$.

$$\left(\left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{21}{6}}.$$

- **Producte de potències amb el mateix exponent.** El resultat de multiplicar diverses potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el producte de bases i l'exponent de la qual és l'exponent comú. $\boxed{a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p}$

$8^3 \cdot 5^3 = (8 \cdot 5)^3 = 40^3$, ja que $8^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (8 \cdot 5) \cdot (8 \cdot 5) \cdot (8 \cdot 5) = (8 \cdot 5)^3 = 40^3$

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{8}{81} \cdot \frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{200}{324}\right)^{\frac{5}{2}}$$

- **Quocient de potències amb el mateix exponent.** El resultat de dividir dues potències amb el mateix exponent és igual a una potència la base de la qual és el quocient de bases i l'exponent de la qual és l'exponent comú. $\boxed{a^p : b^p = (a : b)^p}$

$12^5 : 3^5 = (12 : 3)^5 = 4^5$, ja que $12^5 : 3^5 = (12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12) : (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) ==$
$(4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3) : (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} : \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{8}{81} : \frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{32}{2025}\right)^{\frac{5}{2}}$$

S'ha de tenir en compte que aquestes propietats són correctes sempre que a, b, p, q siguin nombres racionals correctes per a l'operació que s'ha de fer. Per exemple, en el cas de la potència d'exponent 0, la base no pot ser 0; en el cas dels exponents, sabem que no poden tenir el denominador parell si la base és negativa (perquè no existeix l'arrel d'índex parell d'un nombre negatiu).

No és el mateix dir que el producte de potències és igual a la potència de la suma, que la suma de potències és igual a la potència del producte (això últim és fals). És a dir, no és cert que: $a^p + a^q = a^{p \cdot q}$

1.4.2. Nombres irracionals

Després d'estudiar els nombres racionals ens podem preguntar si hi ha nombres que no són racionals. Recordem que un nombre racional s'ha de poder expressar en forma de fracció de nombres enters o, el que és el mateix, en forma de nombre decimal exacte o periòdic. Però hi ha nombres que no es poden expressar d'aquesta manera, ja que per molts decimals que es calculin, no apareixen repeticions constants de xifres. Per exemple:

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980 8\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1.7320508075688772935274463415058723 7\ldots$$

Aquest tipus de nombres es denominen **nombres irracionals**.
Dit d'una altra manera, els nombres irracionals són aquells que no es poden expressar en forma d'una fracció de nombres enters, és a dir, són que no són racionals (de fet, el nom irracional ja fa referència a aquesta característica de no ser racional).

No és fàcil demostrar que un nombre, com $\sqrt{2}$ o $\sqrt{3}$, és irracional, ja que ningú no pot assegurar que en xifres decimals més avançades no es pugui trobar la part periòdica del nombre, i tampoc no és senzill demostrar que un nombre no es pot expressar com una fracció de nombres enters.
Vegem com es faria per a comprovar que $\sqrt{2}$ **és un nombre irracional**.

Què és una demostració per reducció a l'absurd? Es comença assumint com a veritat el contrari del que es vol demostrar i s'acaba arribant a una contradicció perquè el que s'ha assumit no és cert.

Demostració: La prova que $\sqrt{2}$ és irracional es fa per reducció a l'absurd, és a dir, suposem que $\sqrt{2}$ és un nombre racional i veurem que aquesta suposició és absurda.

Així, doncs, comencem suposant que aquest nombre és racional: dit d'una altra manera, que es pot expressar com una fracció irreductible $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ de manera que a, b són nombres naturals i tals que $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$.

Si fem el quadrat de la igualtat, tenim que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ i si es multipliquen ambdós costats d'aquesta igualtat per b^2, obtenim que $2 \cdot b^2 = a^2$.

Si ara descomponem el nombre $2 \cdot b^2$, obtindrem com a mínim un 2 (si no més). Per tant, com que a^2 ha de ser igual a $2 \cdot b^2$, també la descomposició de a^2 haurà de tenir com a mínim un 2. En altres paraules, hi ha d'haver un nombre a' de manera que $a = 2 \cdot a'$. Per tant, $a^2 = (2 \cdot a')^2 = 4 \cdot a'^2$.

Recopilem aquestes dues informacions: $2 \cdot b^2 = a^2 = 4 \cdot a'^2$ i per tant $2 \cdot b^2 = 4 \cdot a'^2$, simplificant, $b^2 = 2 \cdot a'^2$.

De manera similar a com ho acabem de fer per a a, podem dir que hi ha un nombre b' que compleix que $b = 2 \cdot b'$. Així, doncs, de la mateixa manera que abans, $b^2 = (2 \cdot b')^2 = 4 \cdot b'^2$.

Per tant, podem arribar a la conclusió que, d'una banda, $a = 2 \cdot a'$ i, de l'altra, $b = 2 \cdot b'$ llavors, a i b tenen un divisor comú: el 2. Però aquest fet no és possible: havíem afirmat que a i b havien de ser primers entre ells, el $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$.

En definitiva, és absurd suposar que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, essent a i b primers entre ells, ja que aquesta suposició ens duu a la conclusió que a i b mai no poden ser primers entre ells. Aquest fet demostra que $\sqrt{2}$ no pot ser un nombre racional. Per tant, ha de ser un nombre irracional. ∎

Es podria generalitzar aquest fet a qualsevol arrel quadrada d'un nombre primer, és a dir, es podria demostrar de manera semblant que tot nombre de la forma $\sqrt{p}$, amb p un nombre natural primer, és irracional.

La major part de les arrels (de qualsevol índex) de qualsevol nombre racional són nombres irracionals, però no tots els nombres irracionals són arrels perquè hi ha una multitud de nombres irracionals que tampoc no es poden expressar com una arrel d'un nombre racional.

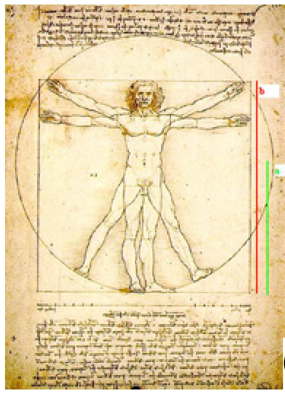
Entre aquests nombres hi ha el denominat **pi**, que prové de la lletra de l'alfabet grec que el representa, π. El nombre π indica quantes vegades més gran és la longitud de la circumferència ($2\pi r$, on r és el radi de la circumferència) en relació amb el seu diàmetre, i la seva forma decimal és:

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419 72...$$

Un altre nombre irracional molt important és el denominat nombre e, el valor del qual és:

$$e = 2.718281828459045235360287471352662 4...$$

Es pot observar que els nombres irracionals coneguts, a part de les arrels, es designen amb una lletra (amb una expressió alfabètica, el nom del descobridor o el nom que la comunitat científica ha decidit); això és així perquè aquests nombres no es poden expressar de manera exacta de cap altra manera coneguda: ni mitjançant una expressió decimal (ni fraccionària) ni com a arrel.



Leonardo da Vinci, en el dibuix *L'home de Vitrubi*, que representa un home dintre d'un cercle i un quadrat, ha volgut representar la secció àuria: el quocient entre l'altura total de l'home (b) i l'altura fins al melic (a) és, aproximadament la raó àuria, un nombre irracional.

Altres exemples:

- **Secció àuria o divina proporció (ϕ).** És el nombre conegut des de l'antiguitat per a expressar diferents relacions entre elements de certes figures geomètriques. Per exemple, la relació entre la diagonal d'un pentàgon regular i un dels seus costats és igual a la secció àuria. L'arquitectura grega és plena de temples que semblen tenir relació amb la secció àuria: el quocient entre el costat més llarg i el més curt de la base se sol acostar moltíssim a aquest nombre. Numèricament, la raó àuria es pot calcular de manera senzilla: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- **Constant de Brun.** És la suma dels inversos dels nombres primers de les formes p i $p+2$ (anomenats primers bessons). Es tracta de trobar aquesta suma:
$$B = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)\dots$$
El 1919 Brun va demostrar que la suma de tots els primers bessons és un nombre, encara que no es pot assegurar amb total certesa que sigui un nombre irracional.

- **Constant de Catalan (cognom del matemàtic belga del segle XIX Eugène Catalan).** És la suma o resta alternada de la inversa de tots els nombres senars:

$$G = \frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{11^2}\dots$$

Hi ha matemàtics que s'han dedicat a buscar el màxim nombre de xifres decimals possibles d'alguns d'aquests nombres irracionals amb l'ajut d'ordinadors i programes potents.

Aquests són alguns dels nombres irracionals més famosos amb els seus primers dígits decimals (en molts casos no s'ha demostrat encara que es tracta de nombres irracionals, tot i que s'intueix que sí).

	First digits	Computed digits	Who - Year
Brun's constant	1.902160582...	9	*T. Nicely - 1999 & P. Sebah - 2002*
Gauss-Kuzmin-Wirsing	0.30366300289873265...	468	*K. Briggs - 2003*
Artin's constant	0.37395581361920228...	1,000	*G. Niklasch - 1999*
Fransén-Robinson	2.80777024202851936...	1,025	*P. Sebah - 2001*
Twin prime constant	0.66016181584686957...	5,020	*P. Sebah - 2001*
Mertens' constant	0.26149721284764278...	8,010	*P. Sebah - 2001*
Landau-Ramanujan K	0.76422365358922066...	30,010	*P. Sebah - 2002*
Soldner-Ramanujan	1.45136923488338105...	75,500	*P. Sebah - 2001*
Khintchine's constant	2.68545200106530644...	110,000	*X. Gourdon - 1998*
$\Gamma(1/4)$	3.62560990822190831...	10,000,000,000	*S. Kondo & S. Pagliarulo - 2010*
$\Gamma(1/3)$	2.67893853470774763...	10,000,000,000	*S. Kondo & S. Pagliarulo - 2009*
Euler's constant γ	0.57721566490153286...	29,844,489,545	*R. Chan & A.J. Yee - 2009*
Catalan's constant G	0.91596559417721901...	31,026,000,000	*R. Chan & A.J. Yee - 2009*
$\zeta(3)$	1.20205690315959428...	31,026,000,000	*R. Chan & A.J. Yee - 2009*
log 2	0.69314718055994530...	31,026,000,000	*R. Chan & A.J. Yee - 2009*
Golden ratio ϕ	1.61803398874989484...	1,000,000,000,000	*A.J. Yee - 2010*
e	2.71828182845904523...	1,000,000,000,000	*S. Kondo & A.J. Yee - 2010*
$\sqrt{2}$	1.41421356237309504...	1,000,000,000,000	*S. Kondo & A.J. Yee - 2010*
π	3.14159265358979323...	5,000,000,000,000	*S. Kondo & A.J. Yee - 2010*

Font: http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html. Dades del 2010.

A la pràctica, se sol utilitzar una aproximació decimal (per arrodoniment) de qualsevol nombre irracional, amb el nombre suficient de decimals segons la situació real en la qual estem.

1.4.3. Definició

Tots els nombres, racionals o irracionals, formen part del denominat conjunt de **nombres reals**. El nombre $\frac{1}{3}$ és un nombre real que és racional, mentre que el nombre π és un nombre real que és irracional.

El conjunt de tots els nombres reals se simbolitza amb $\mathbb{R}$. A més, cadascun dels conjunts numèrics estudiats també es designa amb un símbol:

$\mathbb{N}$ designa el conjunt de nombres naturals.

$\mathbb{Z}$ designa el conjunt de nombres enters.

$\mathbb{Q}$ designa el conjunt de nombres racionals.

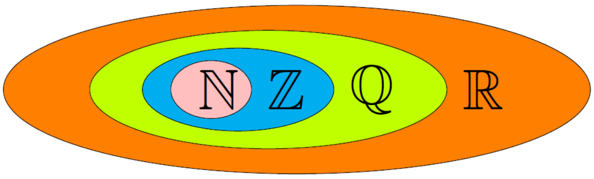
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ designa el conjunt de nombres irracionals.

Els diferents conjunts de nombres (naturals, enters, racionals i reals) mantenen relacions d'inclusió d'acord amb el que hem vist: el conjunt dels nombres naturals és inclòs en el conjunt dels nombres enters; aquest, al seu torn, és inclòs en el conjunt de nombres racionals; finalment, aquest és inclòs en el conjunt de nombres reals.

Per a assenyalar relacions d'inclusió, es fa servir el símbol $\subset$, que indica que el conjunt que se situa a l'esquerra és inclòs en el conjunt que se situa a la dreta. Així, doncs:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Gràficament:



Racionalització. No és usual deixar una fracció amb arrels en el denominador. Per això, és habitual eliminar-les sempre que sigui possible. Aquest procés s'anomena **racionalització** de la fracció. Per a aconseguir-ho, és molt comú multiplicar numerador i denominador per alguna expressió que permeti eliminar les arrels del denominador.

Exemple. Racionalització.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

En molts casos, també podem trobar una suma o resta d'arrels en el de- nominador. En aquests casos, s'ha de multiplicar el denominador i el numerador per l'operació oposada del denominador (*el conjugat del denominador*).

Exemple. Racionalització.

$$\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)} = \frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = -2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right).$$

Això és així perquè $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 3-5 = -2.$

1.4.4. Operacions

Les operacions bàsiques entre nombres reals són la suma i la multiplicació. La resta i la divisió es defineixen a partir de la suma i de la multiplicació. Amb aquesta finalitat, cal definir uns elements especials:

- L'**element neutre de la suma** és el 0, la propietat principal del qual és: si a és un nombre real, $a + 0 = 0 + a = a$.
- L'**element neutre de la multiplicació** és l'1, la propietat principal del qual és: si a és un nombre real, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

A partir d'aquests elements, es poden definir:

- L'**oposat** d'un nombre real a, que és $-a$ i que compleix: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- L'**invers** d'un nombre real a (excepte el 0), que és $\frac{1}{a}$ i que compleix: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

A partir d'aquests elements, es poden definir:

- La **resta** de dos nombres, que és igual a la suma amb l'oposat. És a dir, si a, b són nombres reals, $a - b = a + (-b)$.
- La **divisió** de dos nombres, que és igual a la multiplicació amb l'invers. És a dir, si a, b són nombres reals, i $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$.
- La **potenciació** de nombres reals, que és, sempre que sigui possible, si a és un nombre real, n i m són nombres enters (tots diferents de zero):

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Propietats de les operacions Les **propietats de la suma** de nombres reals (que també es compleixen per a nombres naturals, enters i racionals) són les següents:

- **Propietat commutativa**. L'ordre dels sumands en una suma de dos o més nombres no n'altera el resultat: $a + b = b + a$

$$7 + (-2) = -2 + (+7) = 5$$

$$-\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{6} + \left(-\frac{3}{6}\right) = -\frac{1}{6}$$

- **Propietat associativa**. El resultat d'una expressió amb dues o més sumes de nombres enters no depèn de l'ordre com s'agrupen las diferents sumes: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$

$$-3 + (+2) + (-5) = (-3 + (+2)) + (-5) = -3 + ((+2) + (-5)) = -6$$

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + \left(\frac{5}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}$$

- **Element neutre de la suma** de nombres igual a 0 és aquell que, sumat a qualsevol altre, no el modifica: $a + 0 = 0 + a = a$. Els nombres naturals no en tenen, ja que 0 no és un nombre natural.

- **Element oposat d'un nombre** és un altre nombre que, sumat a l'anterior, és igual a l'element neutre de la suma, és a dir, igual a 0. Observem que, per a calcular l'oposat d'un nombre, únicament s'ha de canviar el seu signe; l'element oposat de a és $-a$, i compleix: $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Tot nombre té un únic oposat i tots dos nombres tenen el mateix valor absolut. Els nombres naturals no tenen oposat, ja que en aquest conjunt no tenim nombres negatius.

  L'oposat de $+5$ és -5, perquè $+5 + (-5) = 0$, o l'oposat d'$\frac{1}{3}$ és $-\frac{1}{3}$ ja que $\frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) = 0$.

Igualment, també tenim les **propietats del producte** de nombres reals (això vol dir que també es compleixen per a nombres naturals, enters i racionals), que són les següents:

- **Propietat commutativa.** L'ordre dels factors d'un producte de dos o més nombres racionals no n'altera el resultat: $a \cdot b = b \cdot a$

  $$3 \cdot (-4) = (-4) \cdot 3 = -12$$

  $$-\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{6} \cdot \left(-\frac{3}{6}\right) = -\frac{6}{36} = -\frac{1}{6}$$

- **Propietat associativa.** El producte de més de dos factors no depèn de l'ordre com es fan las multiplicacions: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

  $$-3 \cdot (+2) \cdot (-4) = (-3 \cdot (+2)) \cdot (-4) = -3 \cdot ((+2) \cdot (-4)) = 24.$$

  $$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{5}\right) = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

- **Propietat distributiva del producte respecte de la suma.** El producte d'un nombre per la suma de dos nombres és igual a la suma dels productes del primer nombre per cadascun dels altres dos:

  $$a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c.$$

$$-5 \cdot (4 + (-3)) = -5 \cdot 4 + (-5) \cdot (-3)$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{7}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{18}{35}$$

- **Element neutre del producte.** És aquell que, multiplicat per qualsevol altre, no el modifica. L'element neutre de la multiplicació de l'1 és: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
- **L'invers d'un nombre.** És el nombre que compleix que el producte d'ambdós és igual a l'element neutre del producte, és a dir, és igual a 1. L'invers del nombre a és $\frac{1}{a}$, i compleix: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$. Els nombres naturals i enters no tenen invers; en canvi, tot nombre real, excepte el 0, té un invers. Per exemple, l'oposat de $\frac{2}{5}$ és $\frac{5}{2}$, ja que $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$.

1.5. Expressions numèriques

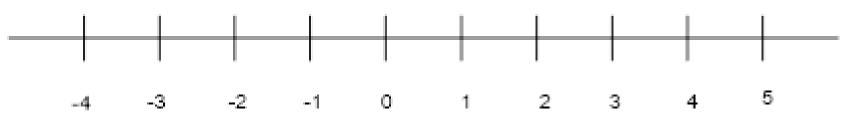
1.5.1. La recta numèrica

Una de les maneres habituals de representar els nombres és en una recta, que rep el nom de **recta numèrica**.
Comencem amb els nombres enters, que per les seves característiques es representen com a infinits punts equidistants (punts que són a la mateixa distància) en una recta.
Aquestes característiques són:

- No hi ha cap nombre enter que sigui el primer ni tampoc l'últim. És a dir, donat un nombre enter qualsevol, sempre es pot trobar un nombre que és menor i un altre nombre que és major. Aquest fet no es compleix amb els nombres naturals, amb els quals el menor sempre és 1.
- Un nombre enter i el següent sempre es diferencien per una unitat. (Aquesta característica és comuna amb els nombres naturals.)
- Els nombres enters es poden llistar ordenats d'esquerra a dreta i, evidentment, aquesta llista sempre és incompleta.

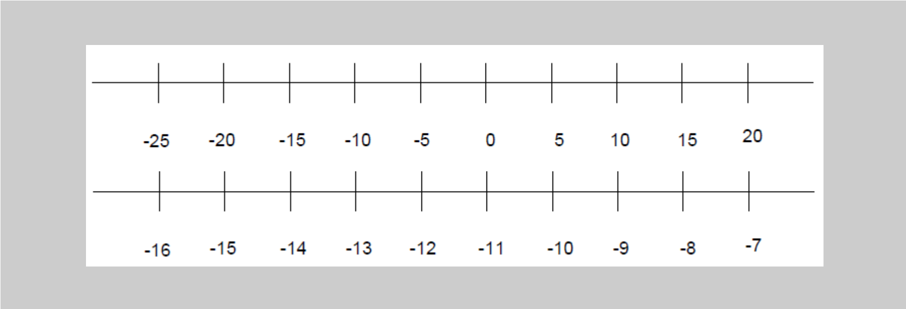
$$\ldots -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots$$

Així, doncs, una representació possible dels nombres enters pot ser aquesta:

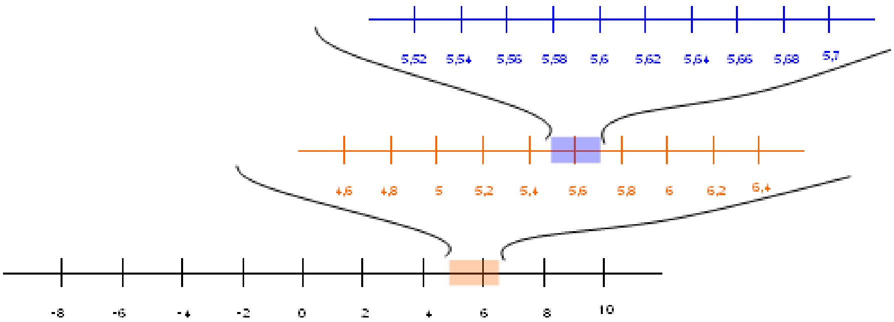


També és possible representar nombres enters no consecutius, encara que la diferència entre un i el següent sempre ha de ser habitualment la mateixa.

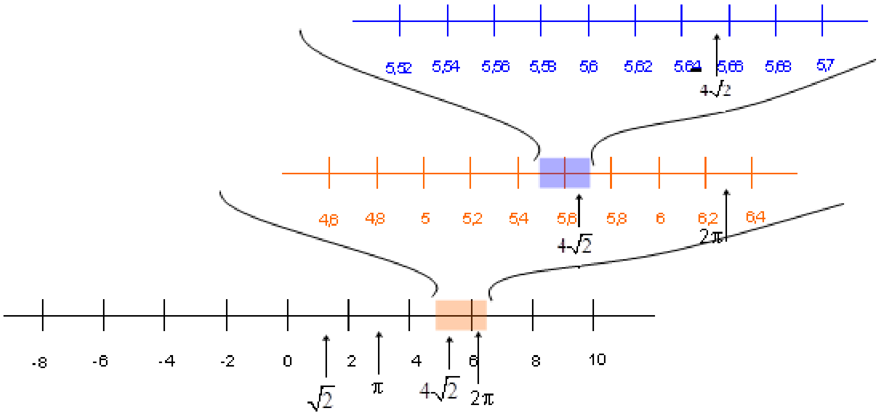
El 0 no cal que sigui al centre de la representació; fins i tot pot no ser entre els nombres representats.



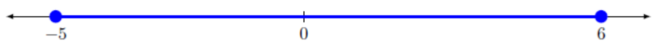
Pel que fa als nombres racionals, recordem que entre dos nombres racionals diferents sempre en podem trobar un altre. Aquesta circumstància permet preveure que els nombres racionals poden cobrir molts més punts de la recta en la qual es representen, i sempre podrem ampliar una secció qualsevol d'aquesta recta perquè sempre trobarem més nombres racionals



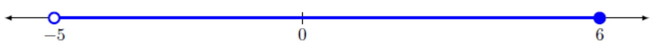
Els nombres reals (igual que els anteriors) són ordenats de més petit a més gran. Així, es poden representar els nombres reals en una recta, que anomenarem **recta real**. El fet que hi hagi molts més nombres irracionals que racionals dona una idea dels "buits" que hi ha en la representació dels nombres racionals en una recta. Això no passa amb els nombres reals: la recta real és completament plena de nombres reals; és a dir, cada punt de la recta es correspon amb un nombre real.



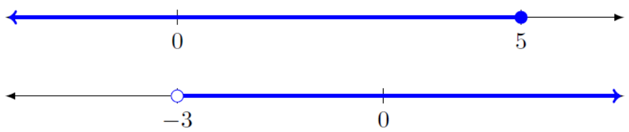
Intervals. Un interval és el conjunt de tots els nombres més petits (o iguals) que un nombre donat i més grans (o iguals) que un altre. Aquests dos nombres són els extrems de l'interval. Per exemple, els nombres compresos entre el -5 i el 6 formen un interval, els **extrems** del qual són el -5 i el 6. Aquest interval es pot representar en la recta real d'aquesta manera:



En cada interval s'ha d'indicar si algun dels extrems és inclòs en l'interval en qüestió: si un extrem pertany a l'interval, es denomina interval tancat per aquest extrem (i es denota amb un claudàtor); si un extrem no pertany a l'interval, es denomina interval obert per aquest extrem (i es denota amb un parèntesi). Per exemple, l'interval obert per l'esquerra i tancat per la dreta, d'extrems -5 i 6, s'escriu $(-5, 6]$, i la seva representació és la següent (el punt ple indica que aquest valor pertany a l'interval, ell punt blanc indica que el valor no hi pertany):



De vegades, s'ha de representar un interval que té un extrem però no l'altre; es fa servir el símbol ∞ (amb signe + o -), que es llegeix "infinit". Per exemple, tots els nombres reals fins al 5, el 5 inclòs, conformen l'interval $(-\infty,\ 5]$; tots els nombres més grans que -3, el -3 no inclòs, es representen amb l'interval $(-3,\ +\infty)$. La fletxa indica tots els valors fins a $-\infty$ o $+\infty$ respectivament.



1.5.2. Notació científica

Moltes ciències requereixen nombres molt grans o inusualment petits. L'astronomia, per exemple, necessita treballar amb nombres grans perquè les distàncies amb què treballa són immenses; en canvi, la física de partícules, com que investiga ens diminuts, utilitza nombres molt petits.

Per a evitar nombres com, per exemple:

1403400000000000000000000000000000000000000, o bé,

0.000000000000000000000000000000000874,

es requereix una notació més compacta i eficient: la **notació científica**.

Els nombres anteriors s'escriurien amb notació científica de la manera següent:

$$1.4034 \cdot 10^{42}$$
$$8.74 \cdot 10^{-34}$$

Es pot observar que l'expressió es descompon en dues parts:

(1) Un nombre decimal el valor absolut del qual és més gran que 1 o igual, i menor que 10, denominat *mantissa*.

(2) Una potència de deu, anomenada simplement *exponent*.

El producte d'ambdós nombres ha de coincidir amb el nombre en qüestió. Es pot observar que aquesta manera d'escriure un nombre simplifica l'escriptura, i la informació de quants 0 s'han de posar és en l'exponent. Així, doncs:

- Per a expressar un nombre que està en notació decimal en notació científica, s'ha de trobar la primera xifra diferent de zero per l'esquerra del nombre.
  - La mantissa és igual a un nombre la xifra de les unitats del qual és precisament aquesta xifra diferent de zero i les següents del qual formen la seva secció decimal (evitant escriure zeros innecessaris).

    La mantissa del nombre 0.000000000000323 és 3.23 i la mantissa del nombre 180200000000000 és 1.802.

  - L'exponent de la potència de 10 és igual al nombre de xifres del nombre menys un si el nombre no té decimals (el nombre és molt gran). En canvi, si es tracta d'un nombre amb decimals (el nombre és molt petit), l'exponent és negatiu i és igual, en valor absolut, al nombre de zeros del nombre.

    $180200000000000 = 1.802 \cdot 10^{14}$ o bé $0.000000000000323 = 3.23 \cdot 10^{-13}$

    En tot cas, l'exponent compleix les regles habituals de potenciació.

- El pas de la notació científica a la usual segueix les indicacions següents:
  - Si l'exponent és negatiu, s'ha de desplaçar la coma decimal de la mantissa cap a l'esquerra tantes posicions com indiqui el nombre de l'exponent (sense signe), afegint-hi tants 0 com sigui necessari. Per exemple, $1.032 \cdot 10^{-9} = 0.\underbrace{000000001}_{9 \text{ posicions}}032$.
  - Si l'exponent és positiu, s'ha de desplaçar la coma decimal de la mantissa cap a la dreta tantes posicions com indiqui l'exponent, afegint-hi els 0 que calgui. Per exemple: $5.201 \cdot 10^{11} = 5\underbrace{20100000000}_{11 \text{ posicions}}$.

1.5.3. Igualtats notables

Alguns càlculs acostumen a aparèixer recurrentment en diversos contextos matemàtics. Aquest és un bon motiu per a conèixer quin és el seu desenvolupament i les possibles equivalències amb altres expressions més útils o simples. Normalment, aquestes expressions acostumen a enunciar-se en forma de producte d'altres expressions, i per això es coneixen com a **igualtats notables**. Alguns d'aquests productes notables i els seus resultats són els següents (també es dona l'expressió amb la qual s'acostuma a denominar-los):

- Productes de 2 expressions:

  $(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$ el quadrat d'una suma

  $(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$ la diferència de quadrats

  $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ suma per diferència és igual a diferència de quadrats

  $(a-b)\cdot(a^3 + a^2\cdot b + a\cdot b^2 + b^3) = a^4 - b^4$

  $(a-b)\cdot(a^4 + a^3\cdot b + a^2\cdot b^2 + a\cdot b^3 + b^4) = a^5 - b^5$

  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\cdot a\cdot b + 2\cdot a\cdot c + 2\cdot b\cdot c$

- Producte de 3 expressions:

  $(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = (a+b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3$ cub d'una suma

  $(a-b)\cdot(a-b)\cdot(a-b) = (a-b)^3 = a^3 - 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 - b^3$ cub d'una diferència

Seguint les propietats esmentades amb anterioritat, es poden demostrar totes aquestes igualtats. Vegem-ne alguns exemples:

El quadrat de la suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$

Demostració: Desenvolupem $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$ S'hi aplica la propietat distributiva dues vegades, amb la qual cosa:

$$(a+b)\cdot(a+b) = (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b = a^2 + a\cdot b + b\cdot a + b^2$$

Per la propietat commutativa del producte $b\cdot a = a\cdot b$, de manera que $b\cdot a + a\cdot b = 2\cdot a\cdot b$.

Per tant, l'expressió anterior és igual a $a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$, tal com s'ha enunciat al principi.

∎

El quadrat de la diferència es troba de manera similar, tenint en compte que es tracta d'una resta.

La suma per la diferència: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Demostració: En aquest cas, també s'ha d'aplicar dues vegades la propietat distributiva:

$$(a+b)\cdot(a-b) = (a+b)\cdot a - (a+b)\cdot b = a^2 + b\cdot a - a\cdot b - b^2 = a^2 - b^2,$$

tal com es deia al principi. ∎

Resum

Els nombres naturals

Els nombres naturals són aquells que serveixen per a comptar: 1, 2, 3, ...

L'**ordre** de prioritat de les operacions és:

(1r) Parèntesis.

(2n) Divisió entera.

(3r) Producte.

(4t) Sumes i restes.

Important!

- La **resta** ha de sortir positiva perquè estigui ben definida.
- La **divisió**:

  Pot ser exacta. Per exemple, $15 : 3 = 5$; en aquest cas diem que 15 és textbf-múltiple de 3, i que 3 és **divisor** de 15.

  Pot ser no exacta. Per exemple, $17 : 3$ no dóna exacte; en aquest cas anomenem

$$\underbrace{17}_{\text{divident}} = \underbrace{3}_{\text{divisor}} \cdot \underbrace{5}_{\text{quocient}} + \underbrace{2}_{\text{residu}}$$

Un nombre es diu **primer** quan no té cap altre divisor que no sigui l'1 i ell mateix. Per exemple, 11 és primer, però 12 no ho és. Diem que 12 és un **nombre compost**.

Qualsevol nombre natural es pot escriure com a producte de nombres primers, que és el que anomenem **descomposició en factors primers**. Per exemple, $24 = 2^3 \cdot 3$.

La descomposició en factors primers es pot fer servir per a calcular el **mínim comú múltiple (MCM)** i el **màxim comú disor (MCD)**. Per exemple, calculem la descomposició de 24 i 90 i tenim que $24 = 2^3 \cdot 3$ i $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

- Per a calcular l'**MCM**, hem d'agafar els factors primers no comuns i després els comuns als dos nombres amb l'exponent més gran dels dos.

$$\mathrm{mcm}(24, 90) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360.$$

- Per a calcular l'**MCD**, hem d'agafar només els factors primers comuns als dos nombres.

$$\mathrm{MCD}(24, 90) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Dos nombres es diuen **coprimers** o **primers entre ells** si el seu MCD val 1 (de manera equivalent, si no tenen factors primers comuns).

Els nombres enters

Es tracta d'una generalització dels nombres naturals, inclosos el 0 i els negatius (que precedim del signe −, mentre que podem precedir els positius del signe + o no posar-los cap signe).

El **valor absolut** d'un nombre enter és el mateix nombre sense signe. Per exemple, $|-4| = |4| = 4$.

Les divisions i productes es calculen com si fossin nombres naturals però tenint en compte la regla dels signes següent:

- Si els dos nombres que multipliquem o dividim tenen el *mateix signe*, el resultat tindrà signe positiu. Per exemple, $2 \cdot 3 = 6$, i $(-4) \cdot (-1) = 4$.
- Si els dos nombres que multipliquem o dividim tenen *signes diferents*, el resultat tindrà signe negatiu. Per exemple, $(-2) \cdot 3 = -6$, i $4 \cdot (-1) = -4$.

Ordenació de nombres enters

Signes

$>$ significa *major que*: $58 > 12$

$<$ significa *menor que*: $-3 < 12$

Caracterització

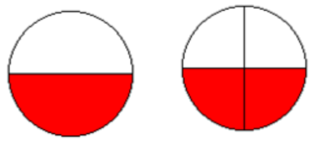
- Qualsevol nombre positiu sempre és major que qualsevol nombre negatiu.
- El 0 és major que qualsevol nombre negatiu i menor que qualsevol nombre positiu.
- Entre dos enters negatius, el major és aquell que és menor sense signe.

Operacions i desigualtats

- **Suma o resta** d'un mateix nombre amb dos nombres: es manté la mateixa relació d'ordre que en els dos nombres originals.
- **Multiplicació o divisió** de dos nombres per un mateix nombre enter: es manté la mateixa relació d'ordre només si aquest últim nombre és positiu, i la inverteix si és negatiu.

Els nombres racionals

Dues o més fraccions són *equivalents* si representen la mateixa part. Per exemple, la fracció 1/2 representa el mateix nombre que la fracció 2/4.



Totes les fraccions ***equivalents*** entre elles representen el mateix nombre racional, i la millor representació d'aquest nombre és la fracció ***irreductible***.

Els nombres fraccionaris o fraccions permeten representar les situacions en les quals s'obté o es deu una part d'un objecte.

Una fracció *irreductible* és aquella el numerador i denominador de la qual són primers entre ells.

La manera de trobar-la, denominada *simplificació*, consisteix a dividir numerador i denominador de la fracció original per l'MCD d'ambdós.

Forma decimal d'un nombre irracional

La forma decimal d'un nombre real és formada per una part **entera**, a l'esquerra del punt, i una part **decimal**, a la dreta del punt.

- La forma decimal s'anomena **estricta** si té una quantitat finita de decimals.
- La forma decimal s'anomena **periòdica** en cas contrari. En aquest cas, les xifres que es repeteixen s'indiquen mitjançant el símbol periòdic (barret) a la part superior

$$\frac{12}{5} = 2.4 \qquad \frac{5627}{9900} = 0.5683838383\ldots = 0.56\widehat{83}$$

De la forma fraccionària a la forma decimal

S'ha de dividir el numerador pel denominador: $\frac{12}{5} = 2.4$

De la forma decimal a la forma fraccionària

- Si la forma decimal és estricta: $3.465 = \frac{3465}{1000}$.
- Si la forma decimal és periòdica:

$$23.4\widehat{52} = \frac{23452 - 234}{990} = \frac{23218}{990}.$$

<table>
<tr><th colspan="3">Les operacions amb nombres fraccionaris</th></tr>
<tr><td colspan="3">La suma</td></tr>
<tr><td>Denominadors iguals</td><td colspan="2">Se sumen els numeradors i es manté el mateix denominador:
$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3+2}{4}=\frac{5}{4}$$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Denominadors diferents</td><td colspan="2">Es busquen fraccions equivalents amb el mateix denominador (normalment, l'MCM dels dos denominadors) i se sumen seguint el procediment anterior:
$$\frac{5}{6}+\frac{2}{9}=\frac{15}{18}+\frac{4}{18}=\frac{19}{18}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mètodes per a trobar el mateix denominador</td></tr>
<tr><td>Multiplicar els denominadors</td><td>$$\frac{5}{6}+\frac{2}{9}=\frac{5\cdot 9}{6\cdot 9}+\frac{2\cdot 6}{9\cdot 6}=\frac{45}{54}+\frac{12}{54}=\frac{57}{54}$$</td></tr>
<tr><td>Calcular l'MCM dels denominadors</td><td>$$\frac{5}{6}+\frac{2}{9}\underset{\substack{\downarrow\\ \text{MCM(6,9)=18}\\ 18/6=3\\ 18/9=2}}{=}\frac{5\cdot 3+2\cdot 2}{18}=\frac{15+4}{18}=\frac{19}{18}$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">La resta</td></tr>
<tr><td colspan="3">Suma amb l'oposat:
$$\frac{4}{7}-\frac{2}{3}=\frac{4}{7}+\left(\frac{-2}{3}\right)$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">La multiplicació</td></tr>
<tr><td colspan="3">Es multipliquen els numeradors entre ells per obtenir el nou numerador, i els denominadors entre ells per obtenir el nou denominador:
$$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{-2}{7}\right)=\frac{2\cdot(-2)}{3\cdot 7}=\frac{-4}{21}$$</td></tr>
<tr><td>La fracció d'un nombre</td><td colspan="2">dos terços de 125 és $\frac{2}{3}\cdot 125=\frac{2}{3}\cdot\frac{125}{1}=\frac{250}{3}$</td></tr>
<tr><td>L'invers d'un nombre</td><td colspan="2">$\frac{3}{7}$ és l'invers de $\frac{7}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">La divisió</td></tr>
<tr><td colspan="3">És el producte del numerador per l'invers del denominador
$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{4}:\frac{5}{6}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}=\frac{15}{24}$$</td></tr>
</table>

Potències i arrels

Potència i arrel són dues operacions inverses.

$$\text{Potència} \xleftrightarrow{\text{operacions inverses}} \text{Arrel}$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{base}}}{7}^{\overset{\substack{\text{Exponent}\\ \uparrow}}{3}} = 7\cdot 7\cdot 7 = 343 \quad\longrightarrow\quad \sqrt[\overset{\substack{\text{Índex}\\ \uparrow}}{3}]{\underset{\substack{\nwarrow\\ \text{base}}}{343}} = 27$$

Per a unificar les dues operacions, s'introdueix la potència d'exponent fraccionari:

$$\sqrt[c]{a} = a^{\frac{1}{c}} \qquad a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}.$$

Característiques de les arrels segons els tipus de nombres

	Potències	Arrels
Nombres naturals	Base i exponent són nombres naturals	Índex i base són nombres naturals
Nombres enters	Base i exponent són nombres enters	Índex i base són nombres enters Si l'índex és parell, la base ha de ser positiva
Nombres racionals	Base i exponent són nombres racionals Índex i exponent són inversos La base ha de ser positiva si el denominador de l'exponent és parell	

Propietats de les potències i les arrels. Suposem a, b, p, q nombres racionals.

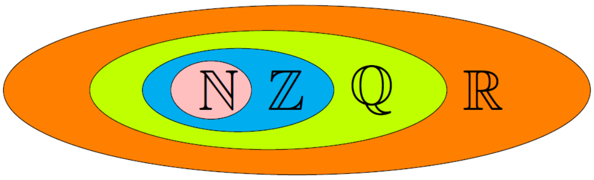
- La potència d'exponent 1 és igual a la base: $a^1 = a$.
- El producte de potències amb la mateixa base és la potència amb la mateixa base i la suma d'exponents: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
- El quocient de potències amb la mateixa base és la potència amb la mateixa base i la resta d'exponents: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
- La potència d'exponent 0 (amb base diferent de 0) val 1: $a^0 = 1$.
- La potència d'una potència resulta ser una potència amb la mateixa base i producte d'exponents: $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$.
- El producte de potències amb el mateix exponent és una potència amb el mateix exponent i el producte de les bases: $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$.
- El quocient de potències amb el mateix exponent és una potència amb el mateix exponent i el quocient de les bases: $\dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$.

Els nombres reals

Els **nombres reals** inclouen els **nombres racionals**, que alhora inclouen els **nombres naturals**, els quals inclouen els **nombres naturals**:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Els **nombres irracionals** ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) són tots aquells nombres reals que no són nombres racionals, és a dir, que no es poden expressar com una fracció d'enters.



Notació científica. Consisteix a escriure un nombre com a producte d'un decimal amb una única xifra no decimal el valor absolut de la qual és major o igual a 1 i menor que 10 (*mantissa*), i una potència de 10 (*exponent*):

$$\underset{\text{Mantissa}}{\underset{\downarrow}{1.352}} \cdot 10^{\overset{\text{Exponent}}{\overset{\uparrow}{36}}}$$

Exercicis resolts

1. **Simplifiqueu l'expressió següent:**

$$\frac{25 \cdot 8 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot 25^2 \cdot (-5)^3 \cdot 49^3}$$

Solució

Per a simplificar qualsevol expressió, s'han d'aplicar les propietats de les potències, amb la finalitat d'agrupar les potències amb la mateixa base, i simplificar posteriorment les potències repetides tant en el numerador com en el denominador.

El procediment és:

1) Descompondre cadascun dels factors tant del numerador com del denominador.
2) Ordenar els factors i agrupar els que tenen la base comuna:

$$\begin{aligned} 25 &= 5 \cdot 5 = 5^2 \\ 8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \\ 7 &= 7 \cdot 1 \\ 5 &= 5 \cdot 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1 \\ 49 &= 7 \cdot 7 = 7^2 \end{aligned}$$

3) Simplificar els factors comuns al numerador i al denominador:

$$\frac{25 \cdot 8 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot 25^2 \cdot (-5)^3 \cdot 49^3} = -\frac{5^2 \cdot 2^3 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot (5^2)^2 \cdot 5^3 \cdot (7^2)^3} = -\frac{5^2 \cdot 2^3 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot 5^4 \cdot 5^3 \cdot 7^6}$$

$$= -\frac{2^3 \cdot 7^7 \cdot 5^6}{3^5 \cdot 5^7 \cdot 7^6} = -\frac{2^3 \cdot 7}{3^5 \cdot 5} = -2^3 \cdot 7 \cdot 3^{-5} \cdot 5^{-1}.$$

2. **Simplifiqueu l'expressió següent:**

$$\sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\frac{8}{27}}}$$

Solució

Per a simplificar una expressió amb arrels i potències, s'han de descompondre els nombres de la base i aplicar les propietats de les potències per a arribar a l'expressió més senzilla possible.

Els passos que seguim són:

1) Descompondre la base.
2) Transformar les arrels en potències de fraccions.
3) Operar els exponents seguint les propietats de les potències:

$$\sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\frac{8}{27}}} = \sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\frac{2^3}{3^3}}} = \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}} = \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{3}} = \frac{2}{3}$$

3. **Racionalitzeu l'expressió següent:**

$$\frac{4}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$$

Solució

Racionalitzar una fracció consisteix a eliminar les arrels del denominador per obtenir una fracció equivalent:

Començarem multiplicant el numerador i el denominador pel conjugat del denominador $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, i utilitzarem que $\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 3 - 5 = -2$. Amb tot això tenim:

$$\frac{4}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{4 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)} = \frac{4 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)}{3 - 5} = \frac{4 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)}{-2} = -2 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)$$

4. **Racionalitzeu l'expressió següent:**

$$\frac{5}{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}}$$

Solució

Comencem per eliminar l'arrel cúbica del denominador multiplicant numerador i denominador per $\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2$

$$\frac{5\cdot\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{5\cdot\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2}{1+\sqrt{2}}$$

Ara procedim com en l'exemple anterior multiplicant i dividint amb el conjugat del denominador i, aplicant la igualtat notable d'una suma per una diferència, obtenim:

$$\frac{5\cdot\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{5\cdot\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{1-2}=-5\cdot\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)$$

Exercicis per a practicar amb les solucions

5. **Simplifiqueu les expressions següents expressant com una sola potència, arrel, etc. segons cada expressió:**

(a) $x\sqrt{x\sqrt{x}}$

(b) $7^2 \cdot 3^4 \cdot \sqrt{7^2 \cdot 3^3}$

(c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5^7}}$

(d) $x\sqrt{3} + y\sqrt{5} - 4x\sqrt{3} + 6y\sqrt{5}$

(e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[3]{2^2}$

(f) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt[3]{-27}}}$

(g) $\dfrac{\sqrt{180} + \sqrt{45} - \sqrt{405}}{3 - \sqrt{5}}$

6. **Racionalitzeu les expressions següents:**

(a) $\dfrac{3\sqrt{5} + 7\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$

(b) $\dfrac{4 + \sqrt{5}}{6\sqrt{3}}$

(c) $\dfrac{5 - 3\sqrt{3}}{5 + 3\sqrt{3}}$

Solucions

5. (a) $x^{\frac{7}{4}}$
   (b) $7^3 \cdot 3^{\frac{11}{2}}$
   (c) $5^{\frac{7}{12}}$
   (d) $-3x\sqrt{3} + 7y\sqrt{5}$
   (e) $2^{\frac{5}{3}}$
   (f) $(-3)^{-\frac{1}{3}}$
   (g) 0

6. (a) $\dfrac{1 + 4\sqrt{10}}{3}$
   (b) $\dfrac{4\sqrt{3} + \sqrt{15}}{18}$
   (c) $15\sqrt{3} - 26$