Iniciació a les matemàtiques per a l'enginyeria

PID_00270071

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat Oberta de Catalunya

2. Equacions

Índex

2.1. Expressions algebraiques

2.1.1. Definició

Per **expressió algebraica** s'entén qualsevol combinació de lletres i nombres relacionats entre ells per signes d'operacions. Així, si bé una expressió numèrica ve donada per nombres i signes d'operació entre ells, una expressió algebraica també conté lletres, que operen entre ells o amb altres nombres.

Qué és una expressió algebraica?
Per expressió algebraica s'entén qualsevol combinació de nombres, lletres i signes d'operació. Les lletres d'una expressió algebraica s'han de tractar com si fossin nombres, i per això es poden sumar, restar, multiplicar i dividir, seguint les mateixes regles que els nombres. Les expressions algebraiques permeten expressar operacions entre quantitats desconegudes substituint el valor desconegut per una lletra concreta.

Exemple. Expressió algebraica.

$$a - 23 \cdot c + 5 \cdot d - 7 \cdot a \cdot y$$

Les lletres d'una expressió algebraica s'han de tractar com si fossin nombres: es poden sumar, restar, multiplicar i dividir, i compleixen, com veurem, les mateixes propietats de les operacions entre nombres.

Les expressions algebraiques es poden usar en problemes reals, en els quals es desconeix el valor d'algun element. Així, per exemple, si una persona va a comprar i adquireix 3 kg de llimones a 1.09 € el quilogram, i 2 kg de patates a 0.78 € el quilogram, per a calcular el valor de la compra s'ha de fer:

$$3 \cdot 1.09 + 2 \cdot 0.78$$

Ara bé, si no es coneix el preu del quilogram de llimones ni tampoc el preu del quilogram de patates, es pot associar a cada valor una lletra (relacionada amb el nom sempre que sigui possible). Així, si per exemple usem l per al preu per quilogram de les llimones, i p per al preu per quilogram de les patates, el valor de la compra anterior vindria donat per l'expressió següent:

$$3 \cdot l + 2 \cdot p$$

Aquesta expressió algebraica permet calcular el valor total de la compra en el moment en què es coneguin els preus per quilogram de les llimones i de les patates, substituint les dues lletres pels seus valors reals.

En les expressions algebraiques, en multiplicar un nombre per una lletra normalment no es posa el signe de multiplicació, sinó que es manté la lletra seguida del nombre, i amb aquesta notació se sobreentén que es tracta d'un producte. D'acord amb aquest conveni, l'expressió algebraica anterior també es pot escriure així:

$$2l + 3p$$

Les lletres d'una expressió algebraica també es poden substituir per nombres concrets. Per exemple, en l'expressió algebraica $4x - 2y + 6$ es pot substituir la lletra x pel valor 3, i la lletra y pel valor 4. En aquest cas, l'expressió algebraica es transforma en

$$4 \cdot \underbrace{3}_{x} + 2 \cdot \underbrace{4}_{y} + 6$$

Aleshores, es diu que el valor numèric de l'expressió algebraica $4x - 2y + 6$, quan la x val 3 i y val 4, és igual a $4 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 6$, és a dir, és 10. En definitiva, el **valor numèric d'una expressió algebraica** es troba substituint-ne les lletres per nombres concrets, operant i obtenint-ne el resultat. És evident que el valor numèric d'una expressió algebraica depèn dels valors concrets que reben les lletres.

Exemple. Valors numèrics d'una expressió algebraica

Donada l'expressió algebraica

$$4x - 2y + 6$$

Si $x = 5$ i $y = 2$, el seu valor numèric és igual a $4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 6 = 22$

Si $x = -3$ i $y = -1$, el seu valor numèric és igual a $4 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) + 6 = -2$

Si $x = -2$ i $y = 5$, el seu valor numèric és igual a $4 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 + 6 = -12$

2.1.2. Elements

Una expressió algebraica es pot escriure a partir de diverses sumes (recordem que les restes són sumes amb l'oposat) de certs productes mixtos (o, fins i tot, divisions, encara que, de moment, no es faran servir divisions amb denominadors que continguin lletres) de nombres i lletres. Cadascun d'aquests sumands es denomina **terme**.

Quins són els elements bàsics i les propietats de les expressions algebraiques? Els sumands d'una expressió algebraica estan formats per lletres i nombres. Cada un dels sumands es denomina terme i les lletres es denominen variables. Una expressió algebraica es pot convertir en una d'equivalent aplicant les propietats de les operacions entre lletres i nombres, que són les mateixes que les propietats de les operacions entre nombres reals.

Exemple. Termes d'una expressió algebraica.
Donada l'expressió algebraica:

$$a - 3c + 2d - 5ax$$

identifiquem:

Termes (n'hi ha 4): $a, -3c, 2d$ i $-5ax$

Variables: a, c, d, x.

Recordem que entre variables o entre nombres i variables és preferible obviar els signes de multiplicar $\cdot$ o $\times$.

Propietats de la suma i el producte. Les propietats de la suma i el producte de nombres i lletres són les propietats ja conegudes de les operacions entre nombres reals.

- **Element neutre de la suma.** És el 0 perquè, sumat a qualsevol altra lletra o nombre, no el modifica: $a + 0 = 0 + a = a$.
- **Element neutre del producte.** És l'1 perquè, multiplicat per qualsevol altra lletra o nombre, no el modifica: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
- **Element oposat d'a.** És $-a$ perquè, sumats, el resultat és l'element neutre de la suma: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- **Invers d'a.** És $\frac{1}{a}$ (essent $a \neq 0$) perquè el seu producte és l'element neutre del producte: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.
- **La resta.** És l'operació que consisteix a sumar l'oposat: $a - b = a + (-b)$.
- **La divisió.** És l'operació que consisteix a multiplicar per l'invers: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, essent $b \neq 0$.
- **Propietat commutativa de la suma.** La suma de dos elements no depèn de l'ordre en què es fa: $a + b = b + a$.
- **Propietat associativa de la suma.** La suma de tres elements no depèn de l'ordre en què es facin les diferents sumes: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$.
- **Propietat commutativa del producte.** El producte de dos elements no depèn de l'ordre en què es fa: $a \cdot b = b \cdot a$.

- **Propietat associativa del producte.** El producte de tres elements no depèn de l'ordre en què es facin els diferents productes: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- **Propietat distributiva del producte respecte de la suma.** Un producte d'un element per una suma es pot descompondre com la suma dels productes de l'element per cadascun dels sumands: $a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c$.

2.1.3. Manipulació

Amb la finalitat de simplificar una expressió algebraica d'una certa longitud, s'han d'aplicar les propietats de la suma, resta, multiplicació i divisió. La **simplificació** consisteix a convertir l'expressió original en una altra que en sigui equivalent però amb el mínim nombre de termes possible. Encara que la manera de simplificar no és única (les propietats es poden aplicar en un altre ordre), el resultat final és generalment molt semblant.

En què consisteix simplificar una expressió algebraica? La simplificació d'una expressió algebraica consisteix en la seva reducció al mínim nombre de termes possible utilitzant les propietats de les operacions que hi intervenen. Encara que les propietats es poden aplicar en ordre diferent, el resultat final ha de ser el mateix.

Vegem com utilitzar les diferents propietats en la mateixa expressió amb l'objectiu de simplificar-la. Considerem l'expressió algebraica

$$a - 4b - 3a + 5a - b$$

1) Es resol la suma $-3a + 5a$ utilitzant la propietat distributiva:

$$-3a + 5a = (-3 + 5) \cdot a = 2a$$

Per tant,

$$a - 4b - 3a + 5a - b = a - 4b + 2a - b$$

2) Per la propietat commutativa, podem agrupar els termes amb a i els termes amb b

$$a - 4b + 2a - b = a + 2a - 4b - b$$

3) Per la propietat de l'element neutre de la suma, $a = 1 \cdot a$

$$a - 4b + 2a - b = 1a + 2a - 4b - 1b$$

4) Per la propietat distributiva aplicada dues vegades, una als termes amb a i l'altra als termes amb b,

$$1a + 2a - 4b - 1b = (1 + 2) \cdot a + (-4 - 1) \cdot b$$

i simplificant una mica més,

$$1a + 2a - 4b - 1b = 3a - 5b$$

Exemple. Simplificació

$a - 4b - 3a + 5a - b$ és equivalent a $3a - 5b$.

Aquesta última expressió, com que és més breu que l'anterior, en facilita la manipulació. Per això, és recomanable simplificar tota expressió algebraica, de la mateixa manera que se simplifica una fracció fins a obtenir-ne la fracció irreductible o es troba el resultat d'una expressió numèrica.

2.1.4. Propietats

Una **igualtat entre expressions numèriques** és formada per dues expressions numèriques, denominades *membres de la igualtat*, i un *signe d'igualtat* (=) interposat entre ambdues. Les igualtats poden ser certes o falses.

Què són les igualtats entre expressions numèriques i entre expressions algebraiques? Una igualtat entre expressions numèriques és formada per dues expressions numèriques i un signe d'igualtat interposat entre ambdues, les quals poden ser certes o falses. Una igualtat entre expressions algebraiques és formada per dues expressions numèriques i un signe d'igualtat interposat entre ambdues, les quals poden ser certes o falses, però també poden ser ni certes ni falses.

- Una **igualtat numèrica és certa** si el resultat del membre de l'esquerra és igual al resultat del membre de la dreta. Per exemple:

$$3 \cdot 4 - 5 = 38 - 15 \cdot 2 - 1$$

  ja que tant el resultat de la dreta com el de l'esquerra és 7. En aquest cas, es diu que ambdues *expressions numèriques* són *iguals*.

- Una **igualtat numèrica és falsa** si el resultat del membre de l'esquerra no és igual al resultat del membre de la dreta. Per exemple, aquesta igualtat és falsa:

$$4 \cdot (-2) + 8 = 3 - 7 \cdot 11$$

  ja que el resultat de l'esquerra és 0, mentre que el resultat de la dreta és −74.

De manera semblant a una **igualtat numèrica, una igualtat entre expressions algebraiques** és formada per dues expressions algebraiques, denominades *membres de la igualtat*, i un signe d'igualtat (=) interposat entre ambdues. Les igualtats algebraiques també poden ser certes o falses.

- Una **igualtat algebraica és certa** si l'expressió algebraica del membre de l'esquerra es pot convertir en la de la dreta aplicant-hi les propietats de les operacions descrites anteriorment. Per exemple:

$$a - 4b - 2a + 5a - b = 4a - 5b$$

  és una igualtat certa perquè $a - 4b - 2a + 5a - b$ es pot transformar en $4a - 5b$ usant les propietats de les operacions.

- Una **igualtat algebraica és falsa** si l'expressió algebraica del membre de l'esquerra no es pot convertir en la de la dreta. Per exemple:

$$3a + 2 = 3a$$

  és una igualtat falsa perquè $3a + 2$ no pot mai resultar $3a$.

Ara bé, hi ha igualtats algebraiques que no són ni certes ni falses. Per exemple:

$$2a - 5b - 4 = 3x + y$$

En aquest cas, no es pot afirmar que l'expressió de la dreta es pugui transformar en la de l'esquerra, ni tampoc que això sigui impossible. Aquest tipus d'igualtats són les que poden denominar-se pròpiament equacions, i en parlem en el proper apartat.

2.2. Equacions

2.2.1. Definició

Què és una equació i què és una solució d'una equació? Una igualtat entre expressions algebraiques també es pot denominar equació. Les igualtats entre expressions algebraiques més interessants són aquelles en què no se'n pot establir a priori la certesa o falsedat. La solució d'una equació correspon a aquells nombres que, substituint-los en les incògnites, permeten transformar l'equació en una igualtat numèrica certa.

Una igualtat entre expressions algebraiques també es pot denominar equació. En aquest cas, les lletres es denominen **incògnites**.

Exemple. Equacions.

$$\begin{aligned} 4a - b + c &= 3a - 6b + 7 \\ 2x + 2y + 8 &= 2x + 7 \end{aligned}$$

En el primer cas, les incògnites són a, b i c. En el segon cas, són x i y.

Cada un dels sumands de cadascun dels membres es denomina **terme**. El nombre que multiplica cada terme es denomina **coeficient**. Un terme que no conté cap incògnita es denomina **terme numèric** o **terme independent**.

Cada terme d'una equació pot tenir diverses incògnites que es multipliquen. El nombre d'incògnites que es multipliquen és el **grau del terme**. Es diu que el **grau d'una equació** és el màxim grau dels termes que formen l'equació.

Exemple. Grau d'un terme i grau d'una equació.
Donada l'equació

$$3xy - 2a + 5x^2y^2 = x + 11a^2x$$

El *terme* $11a^2x$ té 3 incògnites que es multipliquen, una x i dues a. Per tant, el seu *grau* és 3.

El *grau de l'equació* és 4, ja que el terme amb més incògnites és $5x^2y^2$, i en té 4 (dues x i dues y).

Les incògnites de cada membre d'una equació es poden substituir per valors numèrics concrets. Per exemple, en l'equació $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$ es pot substituir la x per 1, i la y per 5 obtenint

$$2 \cdot \underbrace{1}_{x} + 4 \cdot \underbrace{5}_{y} - 5 = 4 \cdot \underbrace{1}_{x} - 5 \cdot \underbrace{5}_{y}$$

D'aquesta manera, l'equació es transforma en una igualtat entre expressions numèriques. En aquest cas, la igualtat numèrica resultant és falsa perquè el membre de l'esquerra resulta 17, mentre que el de la dreta resulta −21.

Aquest procés es denomina **substitució de les incògnites d'una equació per nombres** i, com s'ha vist, dona lloc a una igualtat numèrica. Aquesta igualtat numèrica resultant pot ser:

- Falsa, com en l'últim exemple.
- Certa. Per exemple, si substituïm en la mateixa equació 2 en el cas de la x, i 1 en el cas de la y, obtindrem $2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 5 = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1$, i ambdós membres resulten iguals a 3.

En casos com aquest últim, quan es tracta d'una igualtat numèrica certa i es troba el valor que fa certa la igualtat, es diu que s'ha trobat una **solució de l'equació**.

Una solució de l'equació $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$ es compon del canvi de la x per 2, i de la y per 1. Dit d'una altra manera, $x = 2$ i $y = 1$ és una solució de l'equació anterior perquè fa certa la igualtat. D'aquí diem que una solució d'una equació ha d'atorgar un valor a cadascuna de les seves incògnites.

2.2.2. Solucions

La **solució d'una equació** es defineix com cadascun dels valors de les variables per als quals la igualtat es compleix. Es diu "cadascun dels valors" perquè una equació pot tenir més d'una solució.

Exemple. Solucions d'una equació.
Donada l'equació

$$2x + 4y - 5 = 4x - 5y$$

$x = 2$ i $y = 1$ és una solució, ja que $\underbrace{2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 5}_{3} = \underbrace{4 \cdot 2 - 5 \cdot 1}_{3}$.

$x = 11$ i $y = 3$ és una solució, ja que $\underbrace{2 \cdot 11 + 4 \cdot 3 - 5}_{29} = \underbrace{4 \cdot 11 - 5 \cdot 3}_{29}$.

2.2.3. Equacions equivalents

Què són les equacions equivalents, i com es poden trobar? Dues (o més) equacions són equivalents si tenen les mateixes solucions. Tot i que no sempre és senzill determinar si dues equacions són equivalents, per a trobar una equació equivalent a una altra, només cal sumar, restar, multiplicar o dividir ambdós membres d'aquesta equació per un mateix nombre. Aquesta manipulació d'una equació permet trobar-ne les solucions.

Dues equacions que tenen exactament les mateixes solucions es denominen **equacions equivalents**. Així, les equacions

$$7x - 3 = 6x - 4 \quad \text{i} \quad 14x - 6 = 12x - 8$$

són equivalents, ja que l'única solució en ambdós casos és

$$x = -1$$

Vegem-ho:

- Per a la primera equació $7 \cdot (-1) - 3 = 6 \cdot (-1) - 4$, el resultat en ambdós membres és -10.
- Per a la segona equació $14 \cdot (-1) - 6 = 12 \cdot (-1) - 8$, el resultat en ambdós membres és -20.

Per tant, $x = -1$ resol ambdues equacions, cosa que confirma que són equacions equivalents.

No sempre resulta fàcil trobar un procediment per a determinar si dues equacions són equivalents. En tot cas, és interessant saber com es pot transformar una equació per a obtenir-ne una altra que sigui equivalent, perquè és una de les manipulacions que permeten trobar solucions d'una equació.

Aquests són els procediments usuals:

- *Sumant o restant el mateix nombre amb ambdós membres.* Per exemple, si de l'equació

  $$7x - 3 = 6x - 4$$

  es resta 2 a banda i banda, l'equació resultant és

  $$7x - 3 - 2 = 6x - 4 - 2$$

  I, operant, s'obté $7x - 5 = 6x - 6$. La solució en ambdós casos és $x = -1$. Vist això, es pot afirmar que $7x - 3 = 6x - 4$ i $7x - 5 = 6x - 6$ són equacions equivalents.

- *Multiplicant o dividint ambdós membres pel mateix nombre.* Per exemple, si els membres de l'equació

  $$7x - 3 = 6x - 4$$

  es multipliquen per 3, s'obté

  $$3 \cdot (7x - 3) = 3 \cdot (6x - 4)$$

  és a dir $21x - 9 = 18x - 12$. Ambdues equacions tenen per solució $x = -1$. Per tant, es conclou que $7x - 3 = 6x - 4$ i $21x - 9 = 18x - 12$ són equacions equivalents.

2.2.4. Procés de resolució

Abans de començar a resoldre una equació, s'ha de simplificar al màxim. Per **simplificar una equació** s'entén el fet de reduir cada membre a una expressió amb un únic terme numèric i agrupar els termes amb la mateixa variable.

Què convé fer abans de resoldre una equació? Abans de resoldre una equació, convé simplificar-la al màxim agrupant en cada membre de l'equació els termes amb la mateixa variable que hi intervenen. Si l'equació conté denominadors, és molt recomanable també buscar una equació equivalent que no en tingui.

Exemple. Simplificar una equació.

$$4x + 3 - 2x - 1 = 10 + 6x - 2 - x$$

Cal simplificar ambdós membres unint els elements dependents de x, d'una banda, i els termes numèrics, de l'altra. Així, es converteix en l'equació equivalent:

$$2x + 2 = 8 + 5x$$

En els casos en què l'equació conté nombres fraccionaris, convé (tot i que no és im- prescindible) transformar l'equació en una altra d'equivalent que no contingui denominadors.

Per exemple, per a eliminar els denominadors de l'equació

$$\frac{3x}{5} - \frac{2}{3} = 4x - \frac{1}{3}$$

es pot seguir aquest procediment:

1) Es busca l'MCM dels denominadors. En el cas de l'exemple, $\text{MCM}(5, 3) = 15$.

2) S'escriu el mateix denominador en tots els termes, es divideix l'MCM entre el denominador que tenen (si no en tenen, vol dir que és igual a 1) i es multiplica el resultat pel numerador.

   En l'exemple, l'equació anterior s'escriuria

   $$\frac{9x}{15} - \frac{10}{15} = \frac{60x}{15} - \frac{5}{15} \text{ i, de manera equivalent, } \frac{9x - 10}{15} = \frac{60x - 5}{15}.$$

3) S'elimina el denominador d'ambdós membres (multiplicant-los pel valor d'aquest mateix denominador). D'aquesta manera, queda una equació equivalent sense denominadors.

   En l'exemple, es multipliquen els dos membres per 15:

   $$15 \cdot \frac{9x - 10}{15} = 15 \cdot \frac{60x - 5}{15}$$

   d'on resulta

   $$9x - 10 = 60x - 5$$

   on aquesta última és una equació sense denominadors.

Exemple. Simplificar una equació amb nombres fraccionaris.

A l'hora de simplificar l'equació

$$\frac{3x}{5} - \frac{2}{3} = 4x - \frac{1}{3}$$

calculem l'MCM dels denominadors, trobem els numeradors associats i obtenim l'equació equivalent

$$\frac{9x - 10}{15} = \frac{60x - 5}{15}$$

d'on resulta l'equació equivalent sense denominadors

$$9x - 10 = 60x - 5$$

Per **resolució d'una equació** s'entén el procés de trobar les solucions d'una equació. Aquest procés consisteix a manipular l'equació per tal d'aconseguir les incògnites i els valors numèrics per separat. De manera equivalent, es pot parlar del procés d'**aïllar la incògnita de l'equació**.

En què consisteix resoldre una equació? Consisteix a cercar totes les seves solucions. La dificultat en la resolució depèn de molts factors, entre els quals hi ha el nombre d'incògnites i el grau de l'equació. A vegades, només és possible trobar una aproximació d'alguna de les solucions; en aquest cas es diu que s'ha trobat una solució numèrica de l'equació.

El procés d'aïllament, base de la resolució de qualsevol equació, consta de tres passos principals: agrupar els termes numèrics, agrupar els termes del mateix grau i eliminar dequadament els coeficients de les incògnites. La manera de procedir en aquest últim cas dependrà del grau d'aquests termes.

Què significa aïllar una incògnita d'una equació? El procés pel qual una incògnita d'una equació queda en solitari en un dels membres s'anomena aïllar la incògnita de l'equació. Aquest procés és a la base de la resolució de tota equació.

Vegem un exemple amb una equació de primer grau. Volem resoldre l'equació de primer grau

$$2x - 4 = 14 - 4x$$

Procedirem així:

1) S'agrupen els termes numèrics:

$$2x - 4 - (-4) = 14 - 4x - (-4)$$

Se simplifica i s'obté

$$2x = 18 - 4x$$

2) S'agrupen els termes del mateix grau, en aquest cas només de grau 1:

$$2x - (-4x) = 18 - 4x - (-4x)$$

Se simplifica:

$$6x = 18$$

3) S'eliminen de manera adequada els coeficients de les incògnites, en aquest cas només una, la x:

$$\frac{6x}{6} = \frac{18}{6}$$

simplificant

$$\boxed{x = 3}$$

Així aconseguim aïllar la incògnita i, alhora, després d'aïllar la incògnita, concloem que la solució de l'equació és $x = 3$.

La recerca de les solucions d'una equació, o directament la resolució d'una equació, sol ser un problema matemàtic no sempre fàcil d'abordar. En tot cas, hi ha un cert tipus d'equacions, amb unes característiques molt concretes, que tenen una resolució relativament senzilla i metòdica. Les característiques que determinen la dificultat en la resolució d'una equació són:

- El *nombre d'incògnites de l'equació*. Com més petit és el nombre d'incògnites, més senzilla en resulta la resolució. Així, la més usual té 1, 2 o, com a màxim, 3 incògnites. De totes maneres, si no es diu explícitament el contrari, se sol reservar el terme *equació* per a les equacions amb un sola incògnita.
- El *grau de l'equació*, és a dir, el màxim grau dels termes que formen l'equació. De manera general, es pot dir que com més petit és el grau d'una equació, més senzill és resoldre-la.

La complexitat d'una equació pot impedir-ne la resolució exacta. En aquests casos es pot intentar una resolució numèrica, és a dir, una resolució amb valors aproximats.

Per exemple, l'equació $x^3 - 3x + 2 = x - 5$ no és una equació senzilla de resoldre de manera exacta. Una solució numèrica d'aquesta equació pot ser $x = -2.5891$, ja que, substituint en l'equació, s'obté

$$(-2.5891)^3 - 3 \cdot (-2.5891) + 2 = (-2.5891) - 5 \Longrightarrow -7.5886 \approx -7.5891$$

És a dir, els resultats són molt pròxims. Per això, es tracta d'una solució numèrica.

La recerca de solucions numèriques d'una equació és un dels problemes matemàtics que ha experimentat un progrés més gran gràcies a la incorporació cada vegada més generalitzada d'ordinadors potents que permeten fer una gran quantitat de càlculs en poc temps.

2.3. Equacions de primer grau

2.3.1. Definició

Es diu que una **equació és de primer grau, o lineal, amb una incògnita** quan es tracta d'una equació amb una única incògnita que apareix un cop per element com a màxim, és a dir, sempre amb exponent 1.

Exemple. Equació de primer grau amb una incògnita.

$$3x - 2 = 5x + 6$$

Què és una equació de primer grau amb una incògnita? És una equació amb una única incògnita que apareix amb exponent 1. Una equació de primer grau té en general una única solució, que és un nombre real. Tota equació de primer grau amb una incògnita es pot expressar en la seva forma normal $ax + b = 0$, amb $\text{MCD}(a, b) = 1$.

2.3.2. Solucions

Pel que fa al tipus de solució, si n'hi ha, pot ser un nombre natural, enter, racional o real.

Exemple. Solucions d'una equació de primer grau amb una incògnita.

$x = -1$ és la solució de l'equació $1 - x = 2x + 4$ perquè

$$\underbrace{1 - (-1)}_{2} = \underbrace{2 \cdot (-1) + 4}_{-2+4}$$

$x = \dfrac{3}{4}$ és la solució de l'equació $2 - 3x = x - 1$ perquè

$$\underbrace{2 - 3 \cdot \frac{3}{4}}_{2-\frac{9}{4}} = \underbrace{\frac{3}{4} - 1}_{-\frac{1}{4}}$$

Pel que fa al nombres de solucions, una equació lineal amb una incògnita pot:

- **No tenir cap solució.** Per exemple,

$$5x - 7 = 5x + 12$$

  no té solució, ja que en simplificar-la obtenim l'equació equivalent $0x = 19$ i no hi ha cap nombre real que, multiplicat per 0, doni 19. Aquests casos són *igualtats algebraiques falses.*

- **Tenir solució.** En aquest cas es poden donar dues possibilitats:

  ◦ **Qualsevol nombre és una solució de l'equació.** Per exemple, l'equació

$$5x - 3 = 5x - 3$$

  té com a solució qualsevol nombre (té infinites solucions), ja que en simplificar-la obtenim l'equació equivalent $0x = 0$, i tot nombre real multiplicat per zero és zero. En aquests casos es tracta d'*igualtats algebraiques certes.*

  ◦ **Hi ha una única solució.** Per exemple, l'equació

$$2x - 1 = 3x + 4$$

  només té una solució, que és $x = -5$, ja que l'equació donada és equivalent a l'equació $3x - 2x = 4 + 1$.

La major part d'equacions de primer grau i, és clar, les més interessants, són d'aquest últim tipus. La resolució d'una equació de primer grau s'haurà assolit quan es trobi aquesta única solució.

2.3.3. Procés de resolució

La resolució d'una equació de primer grau consta de diversos passos. Aquests passos es fan amb l'objectiu de convertir l'equació inicial en una equació equivalent però més

Quins són els passos de la resolució d'una equació de primer grau? Són fonamentalment tres: agrupar termes numèrics, agrupar termes de grau 1 i eliminar el coeficient de la incògnita.

senzilla de resoldre. Si aquest procés es repeteix, al final s'obtindrà una equació de resolució immediata. Com que totes les equacions són equivalents, la solució obtinguda en l'últim pas també ho serà de l'equació plantejada inicialment.

Els passos a seguir en aquest procés es poden resumir en tres, que exemplifiquem amb la resolució de l'equació

$$2x + 2 = 8 + 5x$$

$\boxed{\text{Pas 1}}$ *Agrupem tots els termes numèrics que hi apareixen.* Normalment, se solen agrupar en el membre de la dreta. D'aquesta manera, només quedarà un terme numèric en l'equació. El procediment és senzill.

S'ha de restar d'ambdós membres el terme o termes numèrics de l'esquerra, de manera que l'equació resultant sigui equivalent de la inicial.

D'acord amb l'exemple, el terme numèric de l'esquerra és 2. Així, doncs, es tracta de restar-lo en ambdós membres

$$2x + 2 - 2 = 8 + 5x - 2$$

Una vegada simplificada, es transforma en una equació més senzilla que la inicial, perquè el membre de l'esquerra no té terme numèric, sense deixar de ser (i això és fonamental) una equació equivalent a $2x + 2 = 8 + 5x$.

Pas 1
Aquest primer pas és conegut per l'expressió "passar el terme numèric a l'altre membre, canviat de signe". Això és així perquè sembla que aquesta és la transformació que es fa:

$$2x \; +2 \; = 8 + 5x - 2$$

Aquesta afirmació és falsa, però és una bona manera de recordar i accelerar aquest pas. És convenient, doncs, no oblidar l'autèntic procés que té lloc.

$\boxed{\text{Pas 2}}$ *Agrupem els termes amb incògnita.* Habitualment, s'agrupen els termes amb incògnita en el membre de l'esquerra. El procés és similar al que agrupa el terme numèric.

S'ha de restar a banda i banda el terme o termes de grau 1 del membre de la dreta. D'aquesta manera, s'obté una equació equivalent més senzilla.

En l'exemple, el terme de grau 1 del membre de la dreta és $5x$. Per tant, es tracta de restar-lo d'ambdós membres:

$$2x - 5x = 6 + 5x - 5x$$

que, simplificat, queda

$$-3x = 6$$

En aquest pas es pot esbrinar si l'equació té solució o no en té.

- Si el coeficient de la incògnita és el mateix en tots dos membres
  - *No hi ha solució si el terme numèric no és* 0.
    Per exemple, l'equació
    $$3x = 3x - 2$$
    quedaria, després de fer aquest pas, $0 = -2$, que és una igualtat falsa i, per tant, l'equació no té solució.
  - *Qualsevol nombre és solució de l'equació si el terme numèric és* 0.
    Per exemple, en l'equació
    $$8x = 8x$$

Pas 2
Aquest pas és conegut per l'expressió "passar el terme de grau 1 a l'altre membre, canviat de signe". Això és així perquè aquest és aparentment el procés que se segueix:

$$2x \; -5x \; = 6 + 5x$$

Aquesta afirmació és falsa, però és una bona manera de recordar i accelerar aquest pas. És convenient, doncs, no oblidar l'autèntic procés que té lloc.

és senzill adonar-se que qualsevol nombre que substitueixi la x és solució de l'equació perquè es tracta d'una igualtat algebraica certa.

- *En cas contrari, l'equació té una única solució.* Ho veurem en el cas de l'exemple estudiat.

$\boxed{\text{Pas 3}}$ *Hem d'"eliminar" els coeficients de la incògnita perquè aquesta quedi sola, és a dir, aïllada en el membre de l'esquerra.* El procediment és també senzill.

Es tracta de dividir ambdós membres de l'equació entre el coeficient que multiplica el terme de grau 1 del membre de l'esquerra.

En l'exemple considerat, el coeficient de grau 1 del membre de l'esquerra és -3. Si dividim ambdós membres entre aquest nombre el resultat és

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{6}{-3}$$

d'on resulta $x = -2$.

És evident, doncs, que la solució de l'equació plantejada inicialment és -2, ja que les equacions intermèdies que s'han anat obtenint són totes equivalents.

Pas 3
Aquest últim pas és conegut per l'expressió "passar el coeficient de la incògnita a l'altre membre, amb l'operació contraria". Això és així perquè aquest és aparentment el procés que se segueix:

$$-3 \cdot x = \frac{6}{-3}$$

Aquesta afirmació és falsa, però és una bona manera de recordar i accelerar aquest pas. És convenient, doncs, no oblidar l'autèntic procés que té lloc.

Exemple. Resoldre una equació de 1r grau amb una incògnita.

$$2x + 2 = 8 + 5x$$

Treballem amb equacions,

$$\begin{aligned} 2x &= 6 + 5x \\ -3x &= 6 \end{aligned}$$

fins a tenir la incògnita aïllada, que, en principi, n'és la solució:

$$x = -2$$

La **comprovació de la solució** (acció recomanable de fer sempre) és ben senzilla. Només cal substituir la x de l'equació inicial pel valor trobat, que en principi n'és la solució.
En aquest cas, $x = -2$

$$4 \cdot (-2) + 3 - 2 \cdot (-2) - 1 = 10 + 6 \cdot (-2) - 2 - (-2)$$

En tots dos membres el resultat és el mateix.

D'acord amb el que hem dit, i tal com acabem de comprovar, el procés de resolució d'una equació de primer grau consisteix fonamentalment a aïllar la incògnita en un dels membres de l'equació per tal que en l'altre membre aparegui la solució de l'equació.

Fórmula de resolució La solució d'una equació de primer grau es pot obtenir a partir d'una fórmula, que es dedueix dels passos descrits en l'apartat anterior. Per a això, en primer lloc, l'equació a resoldre s'ha de convertir en una equació equivalent en què el membre de la dreta sigui 0.

Hi ha una fórmula per a trobar la solució d'una equació de primer grau? La manera més senzilla de trobar la solució d'una equació de primer grau és transformar-la en una equació del tipus $ax + b = 0$, amb $a \neq 0$. Aleshores, la fórmula de la solució d'aquesta equació és $x = \frac{-b}{a}$.

La generalització d'aquest procediment rep el nom de la **forma normal** de l'equació de primer grau amb una incògnita, i es pot escriure sempre d'aquesta manera:

$$a \cdot x + b = 0$$

on x és la incògnita i $a \neq 0$ i b són valors reals coneguts.

En particular, a és el coeficient de la incògnita (que no pot ser 0 perquè si no ja no seria una equació de primer grau) i b és el terme numèric independent. D'aquesta manera, la **solució general** d'una equació d'aquest tipus és

$$x = \frac{-b}{a}$$

Exemple. Deducció de la forma normal i la solució general d'una equació de primer grau.
L'equació

$$4x - 3 = 2x + 5$$

és equivalent a l'equació en forma normal

$$2x - 8 = 0$$

Aleshores, la solució és $x = \dfrac{8}{2} = 4$.

Exemple. Solucions generals d'una equació de primer grau.

La solució de l'equació $3x - 5 = 0$ és $x = \dfrac{5}{3}$

La solució de l'equació $2x + 5 = 0$ és $x = \dfrac{-5}{2}$

La solució de l'equació $-3x - \dfrac{1}{2} = 0$ és $x = \dfrac{-1}{6}$

2.4. Equacions de segon grau

2.4.1. Definició

Direm que una **equació** és **de segon grau amb una incògnita** quan tractem una equació amb una sola incògnita que contingui termes de segon grau, és a dir, quan la incògnita estigui elevada al quadrat.

Com s'expressa, de manera general, una equació de segon grau amb una incògnita? Es pot expressar de manera normal. La forma normal de qualsevol equació de segon grau es troba transformant l'equació original en una equació equivalent del tipus $ax^2 + bx + c = 0$, amb MCD$(a, b, c) = 1$.

Exemple. Equacions de segon grau amb una incògnita.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x - 4 &= 2x + 5 \\ 2x^2 - 4x + 5 &= 3x^2 - 5x + 4 \end{aligned}$$

Per a trobar la solució d'una equació de segon grau, s'ha d'expressar en **forma normal**, és a dir, s'ha de trobar la forma equivalent en què el membre de la dreta és igual a 0. De manera general, s'escriu

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on x és la incògnita i $a \neq 0$, b i c són valors reals coneguts.

En particular, a és el coeficient del terme de segon grau (que no pot ser 0 perquè si no ja no seria una equació de segon grau), b és el coeficient del terme de primer grau i c és el terme numèric (o independent).

Tot i que no és imprescindible, és convenient que el coeficient de grau 2 quedi positiu. Si s'arriba a una forma normal en què el terme de segon grau, és a dir, de x^2, és negatiu i es vol positiu, només s'han de multiplicar ambdós membres de l'equació per -1.

Per tal que forma normal estigui simplificada al màxim, cal dividir tots els coeficients per l'MCD de tots, és a dir, dividir tots els coeficients dels diferents termes entre l'MCD(a, b, c).

Exemple. Forma normal d'una equació de segon grau.
La forma normal de l'equació

$$x^2 + 4x - 5 = 3x^2 - 6x + 7$$

ve donada per

$$x^2 + 4x - 5 - 3x^2 + 6x - 7 = 0$$

En operar aquesta expressió, queda

$$-2x^2 + 10x - 12 = 0$$

Si es vol amb terme de segon grau positiu, esdevé

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

I, simplificant al màxim, dividint pel MCD$(2, -10, 12) = 2$ queda

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

2.4.2. Procés de resolució

Són fàcils de resoldre aquelles equacions de segon grau que, en la seva forma normal, $\left(ax^2 + bx + c = 0\right)$, el terme independent és 0 ($c = 0$), o bé les que tenen 0 el coeficient de grau 1 ($b = 0$). Aleshores, en general, les solucions venen donades per

Hi ha equacions de segon grau fàcils de resoldre? Sí. A partir de la seva forma normal, resulten fàcils de resoldre aquelles equacions de segon grau amb coeficient de grau 1 igual a 0, i també les que tenen terme independent igual a 0. Una equació de segon grau sense terme independent, $ax^2 + bx = 0$, té com a solució el 0 i $\frac{-b}{a}$. Una equació de segon grau amb coeficient de grau 1 igual a 0, $ax^2 + c = 0$, té com solució $\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ sempre que $\frac{-c}{a}$ sigui un nombre positiu.

$\boxed{\text{Cas } c = 0}$ Tota equació de segon grau sense terme independent, és a dir, del tipus

$$ax^2 + bx = 0$$

té com a solució el 0 i $\dfrac{-b}{a}$.

$\boxed{\text{Cas } b = 0}$ Les solucions d'una equació de segon grau del tipus

$$ax^2 + c = 0$$

són $x = \sqrt{\dfrac{-c}{a}}$ i $x = -\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$, sempre que $\dfrac{-c}{a}$ sigui un nombre positiu (ja que no hi ha cap nombre real el quadrat del qual sigui igual a un nombre negatiu).

Exemple. Resolucions fàcils d'equacions de segon grau. Cas $c = 0$

$$3x^2 - x = 0$$

és una equació de segon grau sense terme independent.

Per a resoldre-la tan sols és necessari observar que es pot extreure una x de factor comú:

$$3x^2 - x = x(3x - 1) = 0$$

Per tant, l'equació pot transformar-se en

$$x(3x - 1) = 0$$

Es tracta d'un producte de dos nombres, x i $3x - 1$, que ha de ser 0. Per tant, algun d'aquests nombres ha de ser 0. Això vol dir que $x = 0$ o $3x - 1 = 0$ (d'on resulta $x = \frac{1}{3}$).

Podem concloure, doncs, que l'equació de segon grau $3x^2 - x = 0$ té com a solucions el 0 i $\frac{1}{3}$.

Exemple. Resolucions fàcils d'equacions de segon grau. Cas $b = 0$

$$2x^2 - 18 = 0$$

és una equació de segon grau sense terme de grau 1.

En aquest cas, s'ha d'aïllar la x^2 com si es tractés d'una equació de primer grau. Així, quedaria

$$x^2 = \frac{18}{2} = 9$$

D'aquí, observem que les solucions són aquells nombres el quadrat dels quals és 9. Per tant, les solucions són 3 i -3, que es pot escriure $x = \pm 3$ utilitzant el símbol $\pm$.

Fórmula de resolució Com s'ha dit, una equació de segon grau es pot escriure generalment en forma normal així:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on x és la incògnita, a el coeficient de grau 2 (sempre diferent de 0), b el coeficient de grau 1, i c el terme numèric.

De manera general, i d'acord amb aquesta forma normal de les equacions de segon grau, les solucions x venen donades per aquestes fórmules:

Hi ha una fórmula general per a trobar la solució d'una equació de segon grau? Hi ha una fórmula per a trobar totes les solucions d'una equació de segon grau expressada en forma normal, $ax^2 + bx + c = 0$. Aquesta fórmula és

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

on el símbol $\pm$ indica que s'han de distingir dos casos: un en què es fa servir el + i l'altre, en què es considera el $-$.

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{i} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Per a simplificar la notació per a donar les solucions d'una equació de segon grau conjuntament, s'utilitza normalment aquesta fórmula general:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

en la qual el símbol ± significa que s'han de distingir dos casos: un en el qual s'utilitza el + i un altre en el qual s'utilitza el −.

Exemple. Solució general d'una equació de segon grau.

Sigui l'equació

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

Per la fórmula de resolució general:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{10 \pm 2}{4}$$

Per tant, les solucions a l'equació són

$$x_1 = \frac{10 + 2}{4} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{10 - 2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Per a comprovar si els valors obtinguts aplicant la fórmula de resolució són efectivament les solucions, només cal substituir en l'equació les x pels diferents valors trobats. Si satisfan la igualtat, en són solució. Altrament, no ho seran.

Exemple. Comprovació de les solucions d'una equació de segon grau.

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

S'ha obtingut com a solucions $x_1 = 3$ i $x_2 = 2$. Comprovem si efectivament en són solucions:

Si $x = 3 \rightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 2 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 12 = 18 - 30 + 12 = 30 - 30 = 0$, de manera que compleix la igualtat de l'equació.

Si $x = 2 \rightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 2 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 12 = 8 - 20 + 12 = 20 - 20 = 0$, complint de manera que compleix la igualtat de l'equació.

Podem comprovar que aquesta fórmula és correcta per a qualsevol equació de segon grau. Per a això, només cal substituir els valors en l'equació general. És a dir, substituir la x per $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ o $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ a $ax^2 + bx + c = 0$.

Veiem com queda per a $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$a\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + c$$

$$= a\left(\frac{b^2 + b^2 - 4ac - 2b\sqrt{b^2 - 4ac}}{4a^2}\right) + b\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) + c$$

$$= \frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b^2 + b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + c$$

$$= \frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b^2 + b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{2ac}{2a}$$

$$= \frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2 - 4ac} - b^2 + b\sqrt{b^2 - 4ac} + 2ac}{2a} = \frac{0}{2a} = 0$$

2.4.3. Solucions

L'estudi de l'arrel quadrada que hi ha en la fórmula de la solució d'una equació de segon grau proporciona el nombre de solucions de l'equació.

Quantes solucions té una equació de segon grau? Una equació de segon grau en forma normal, $ax^2 + bx + c = 0$, té dues solucions com a màxim. El nombre de solucions es pot determinar a partir del valor discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Si Δ és positiu, l'equació té dues solucions reals; si Δ és negatiu, l'equació no té cap solució real; i si Δ és 0, l'equació té una única solució, denominada solució doble.

L'expressió continguda en l'arrel quadrada de la solució s'anomena **discriminant**, i s'indica amb la lletra grega delta majúscula, Δ.

Així, donada la forma normal d'una equació de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$, el discriminant de la solució és

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Aquest element permetrà establir el nombre de solucions de qualsevol equació de segon grau.

- *Si el discriminant és positiu,* $\Delta > 0$ es pot assegurar que l'equació té dues solucions reals diferents, que es poden calcular.
  Per exemple, l'equació
  $$x^2 - 3x + 2 = 0$$
  té dues solucions perquè $\Delta = (-3) \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$.

  En particular, les seves solucions són, aplicant la fórmula:
  $$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$$
  d'on s'obté $x = 1$ i $x = 2$.

- *Si el discriminant és* 0, $\Delta = 0$ es pot assegurar que l'equació té una única solució real, que és una solució doble que es pot calcular.
  Per exemple, l'equació
  $$x^2 - 4x + 4 = 0$$
  té una única solució perquè $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$.
  En aquest cas, la solució única però doble a la vegada és

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^{-}4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

- *Si el discriminant és negatiu,* $\Delta < 0$ es pot assegurar que l'equació no té cap solució real.

  Per exemple, l'equació

  $$2x^2 - 3x + 5x = 0$$

  no té cap solució, ja que $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31 < 0$.

  En aquest cas és impossible aplicar la fórmula perquè no existeix l'arrel quadrada d'un nombre negatiu.

2.4.4. Equacions quadràtiques

Hi ha equacions de grau major que dos que es poden resoldre amb l'ajuda de la fórmula per a les equacions de segon grau. Es tracta d'equacions que tenen, en forma normal, tres termes com a màxim: el terme numèric, un terme de qualsevol grau i altre terme de grau doble de l'anterior. Aquesta equacions reben el nom d'**equacions de tipus quadràtic**.

Què és una equació de tipus quadràtic? És aquella que té, en forma normal, un terme independent, un terme de grau qualsevol i un altre terme amb grau el doble de l'anterior. Aquest tipus d'equacions es poden resoldre de manera semblant a les equacions de segon grau, ja que l'expressió de l'equació quadràtica és similar a les de segon grau.

Exemple. Equacions de tipus quadràtic.

Són equacions de tipus quadràtic,

$$4x^8 + 5x^4 + 10 = 0$$
$$3x^{10} + x^5 - 15 = 0$$

perquè tenen dos termes dependents d'una incògnita de manera que un grau és el doble que l'altre:

- En el primer exemple, el grau de $4x^8$ és el doble que el grau de $5x^4$
- En el segon cas, el grau del terme $3x^{10}$ és el doble del grau del terme x^5

Com que aquestes equacions tenen un terme de grau el doble que un altre, de manera que aquest és un terme numèric, podem interpretar l'equació original com una de segon grau. Atesa aquesta particularitat, aquests tipus d'equacions es poden resoldre adonant-se que els termes dobles dels altres es poden escriure com a potències de 2.

D'acord amb això, notem, retornant als exemples anteriors, que:

$4x^8 + 5x^4 + 10 = 0$ es pot escriure $4(x^4)^2 + 5x^4 + 10 = 0$

$3x^{10} + x^5 - 15 = 0$, que es pot escriure $3(x^5)^2 + x^5 - 15 = 0$.

Si s'observen aquestes expressions de les equacions originals, se'n pot comprovar la gran semblança amb una equació de segon grau. L'única diferència de resolució ha de ser que se substitueix la incògnita per una potència d'aquesta incògnita. En tot cas, la fórmula ha de ser molt semblant a la fórmula de l'equació de segon grau.

El cas més senzill d'equació de tipus quadràtic és la denominada **equació biquadrada**, una equació de quart grau que només té, en forma normal, els termes de grau 4, 2 i el terme independent, que equival a grau 0.
Vegem-ho amb un exemple:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

és una equació biquadrada. En reescriure aquesta equació de manera que s'assembli a una equació de segon grau, queda

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$$

Si considerem que la incògnita d'aquesta equació és x^2, aplicant la fórmula de resolució de l'equació de segon grau, la solució ve donada per

$$(x^2) = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2}$$

Per tant, $x^2 = 4$ o $x^2 = 9$. Amb això hauríem trobat els valors per a x^2.
Per acabar, es fa necessari descobrir els valors de la x.

Si $x^2 = 9$, $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Si $x^2 = 4$, $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

Per tant, les possibles solucions de l'equació biquadrada són 2, −2, 3 i −3.
Per a comprovar si són efectivament solucions de l'equació original, només cal substituir la x de l'equació original per cadascun dels valors trobats.

Exemple. Equació biquadrada i la seva resolució.
L'equació

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

es pot reescriure

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$$

En aplicar la fórmula de l'equació de segon grau,

$$x^2 = \{4, 9\}$$

Per tant, les possibles solucions són $x = \{2, -2, 3, -3\}$

De manera general, es pot concloure que una equació biquadrada pot tenir des de zero fins a quatre solucions.

La resta d'equacions de tipus quadràtic es poden resoldre de manera semblant.
Per exemple:

$$3x^8 - 6x^4 - 9 = 0$$

es pot transformar en

$$3(x^4)^2 - 6x^4 - 9 = 0$$

i, per tant, aplicant la fórmula de la resolució de les equacions de segon grau, les solucions vindrien donades per

$$x^4 = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9)}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm 12}{6}$$

d'on sóbté que $x^4 = 3$ o $x^4 = -1$. Per tant:

Si $x^4 = 3$, s'obté que $x = \pm\sqrt[4]{3}$,

Si $x^4 = -1$, no hi ha solució, ja que no hi ha cap nombre que, elevat a 4, resulti -1.

Per tant, les solucions de l'equació anterior són $x = +\sqrt[4]{3}$ i $x = -\sqrt[4]{3}$.

De manera general, concloem que les equacions de tipus quadràtic tindran, com a màxim, un nombre de solucions igual al grau de l'equació.

2.5. Inequacions

2.5.1. Definició

Una **inequació** és una desigualtat entre expressions algebraiques. Els signes utilitzats per a marcar aquestes desigualtats són $<$ (*més petit que*), $>$ (*més gran que*), $\leq$ (*més petit o igual que*) i $\geq$ (*més gran o igual que*).

Què és una inequació? És una desigualtat entre expressions algebraiques. Com en les equacions, les solucions són valors numèrics que, en substituir les variables en la inequació, fan que la desigualtat numèrica resultant sigui certa.

Exemple. Inequació.
Són exemples d'inequacions,

$$\begin{aligned} 3x - a &< 2x - 1 \\ 2x + 4y - 5 &\geq 4x - 5y \end{aligned}$$

2.5.2. Solucions

Com en el cas de les equacions, les incògnites de cada membre d'una inequació es poden substituir també per valors numèrics.
Per exemple, en la inequació

$$2x + 4y - 5 \geq 4x - 5y$$

es poden substituir la x per 1 i la y per 5. Aleshores,

$$2 \cdot \underbrace{1}_{x} + 4 \cdot \underbrace{5}_{y} - 5 \geq 4 \cdot \underbrace{1}_{x} - 5 \cdot \underbrace{5}_{y}$$

D'aquesta manera, la inequació es transforma en una desigualtat entre expressions numèriques. En cas que sigui certa, es diu que s'ha trobat una **solució de la inequació**.
Així, una solució de la inequació plantejada consisteix a substituir la x per 2 i la y per 1. Dit d'una altra manera, $x = 2$ i $y = 1$ és una solució de la inequació anterior.

S'ha de tenir en compte que:

- Una solució d'una inequació ha d'atorgar un valor a cadascuna de les seves incògnites.

- Una inequació pot tenir més d'una solució.
  Per exemple, en el cas de la inequació plantejada, una altra solució podria ser $x = 1$ i $y = 3$, ja que
  $$2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 5 \geq 4 \cdot 1 - 5 \cdot 3$$

- Dues inequacions que tenen les mateixes solucions es denominen **inequacions equivalents**. Es pot trobar una inequació equivalent a una altra utilitzant procediments similars als coneguts per a les equacions i que podem resumir així:

  ◦ *Sumar o restar el mateix nombre amb tots dos membres.*

  ◦ *Multiplicar o dividir ambdós membres amb el mateix nombre (diferent de* 0*).* En aquest cas, cal destacar que si el factor pel qual es multipliquen (o es divideixen) ambdós membres és negatiu, el signe de la desigualtat canvia d'orientació (és a dir, es transforma en , i es transforma en <).

  Per exemple, donada la inequació
  $$3x + 4 < 2 - x$$
  una inequació equivalent es pot obtenir multiplicant ambdós membres per -2, de manera que esdevé
  $$-2 \cdot (3x + 4) > -2 \cdot (2 - x)$$
  i, simplificats els signes, queda
  $$-6x - 8 > -4 + 2x$$
  Això és així perquè, com sabem, en multiplicar (o dividir) ambdós membres d'una desigualtat per un nombre negatiu, la desigualtat canvia l'orientació.

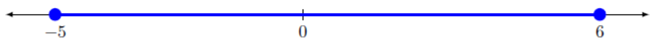
2.5.3. Procés de resolució

Interval de la recta real. Per a **resoldre inequacions**, és necessari treballar amb intervals. Recordem alguns dels conceptes descrits en el tema sobre els nombres.

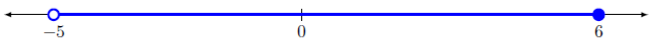
Vam veure que els extrems d'un interval poden pertànyer o no a l'interval. En funció de si els extrems pertanyen o no a l'interval, es distingeixen diferents tipus d'interval:

- $\boxed{\text{Interval obert}}$ Cap dels dos extrems no pertanyen a l'interval. En el cas de l'interval d'extrems -5 i 6, s'escriu $(-5, 6)$ i a sobre de la recta real es representa per

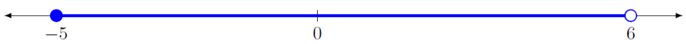
- Interval tancat Els dos extrems pertanyen a l'interval. En el cas de l'interval d'extrems -5 i 6, s'escriu $[-5, 6]$ i a sobre de la recta real es representa per



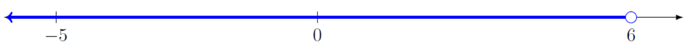
- Interval obert per l'esquerra i tancat per la dreta En el cas de l'interval d'extrems -5 i 6, s'escriu $(-5, 6]$ i a sobre de la recta real es representa per



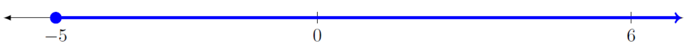
- Interval tancat per l'esquerra i obert per la dreta En el cas de l'interval d'extrems -5 i 6, s'escriu $[-5, 6)$ i a sobre de la recta real es representa per



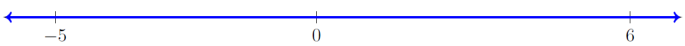
- Interval infinit per l'esquerra (o sense extrem per l'esquerra) En el cas de l'interval d'extrem superior 6, s'escriu $[-\infty, 6)$ (si l'extrem superior no s'inclou) i a sobre de la recta real es representa per



- Interval infinit per la dreta (o sense extrem per la dreta) En el cas de l'interval d'extrem inferior -5, s'escriu $[-5, +\infty]$ (si l'extrem inferior s'inclou) i a sobre de la recta real es representa per



- Interval infinit És l'interval sense extrems que inclou tots els nombres reals. Per tant, és equivalent a la recta real. Escrivim $(-\infty, +\infty)$ i es marca tota la recta



Resolució d'inequacions de primer grau. Per a **resoldre una inequació de primer grau**, és convenient seguir uns determinats passos. Vegem-los amb un exemple concret.

Volem resoldre la inequació de primer grau

$$2x + 5 \geq 2 - x$$

1) *Es resol l'equació associada a la inequació lineal.* L'equació associada a una inequació és aquella que s'obté canviant el signe de desigualtat pel signe d'igual.

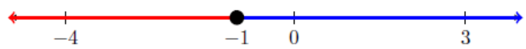
En el cas de l'exemple, es tracta de resoldre l'equació de primer grau $2x+5=2-x$.

Resolem l'equació de primer grau associada:

$$\begin{aligned} 2x+5 &= 2-x \\ 2x+x &= 2-5 \\ 3x &= -3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

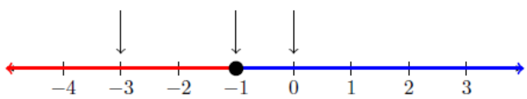
Per tant, la solució és $x=-1$.

La solució de l'equació divideix la recta real en tres zones diferents: $(-\infty,-1)$, -1 i $(-1,+\infty)$.



Determinades les tres zones, cal estudiar què passa en cada una. Per cada una de les franges, seguirem els passos que es descriuen a continuació. Són els passos necessaris per a conèixer quines d'aquestes tres zones pertanyen o no a la solució de la inequació.

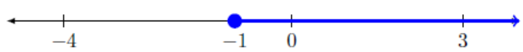
2) *Es tria un nombre que sigui dintre d'aquestes zones.*
En l'exemple, a part del -1, que és un punt únic, es pot triar qualsevol nombre de cada interval, per exemple -3 i 0, ja que $-3 \in (-\infty,-1)$ i $0 \in (-1,+\infty)$.



3) *Se substitueixen els valors anteriors (el de la solució de l'equació associada i els del segon pas) en la inequació i es comprova quin verifica la desigualtat inicial.*
D'acord amb l'exemple:

- Per $x=-1$, la desigualtat resultant és certa, perquè $\underbrace{2\cdot(-1)+5}_{3} \geq \underbrace{2-(-1)}_{3}$ és cert.
- Per $x=-3$, la desigualtat resultant és falsa, perquè $\underbrace{2\cdot(-3)+5}_{-1} \geq \underbrace{2-(-3)}_{5}$ és fals.
- Per $x=0$, la desigualtat resultant és certa, perquè $\underbrace{2\cdot 0+5}_{5} \geq \underbrace{2-0}_{2}$ és cert.

4) *La solució de la inequació és formada pels nombres que són en la mateixa zona que els valors que fan certes les desigualtats del pas anterior.*
En l'exemple, les zones de solució són -1 i $(-1,+\infty)$. Per tant, la solució de la inequació és $[-1,+\infty)$, que representada en la recta real, queda



Exemple. Solució d'una inequació de primer grau.

La solució de la inequació de primer grau

$$2x + 5 \geq 2 - x$$

és

$$[-1, +\infty).$$

Resolució d'inequacions de segon grau. De manera similar, també es poden **resoldre inequacions de segon grau**.

Vegem com procedir en aquests casos amb un exemple. Resolguem la inequació de segon grau

$$2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$$

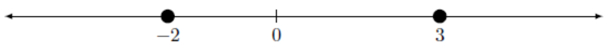
1) *En primer lloc, resolem l'equació associada a la inequació de segon grau.* En aquest cas, l'equació associada és

$$2x^2 - 2x - 2 = x^2 - x + 4$$

Simplifiquem l'equació en la forma normal i solucionem l'equació de segon grau aplicant la fórmula de resolució coneguda. Obtenim

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$$
$$x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

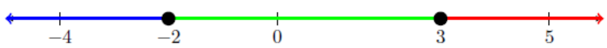
Per tant, l'equació associada té dues solucions, que són $x = 3$ i $x = -2$. Marquem les dues solucions en la recta real.



Ara cal estudiar què passa en cadascuna de les zones en què ha quedat dividida la recta real, de manera similar a l'exemple anterior.

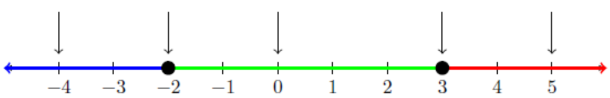
2) *Es divideix la recta real en diverses zones d'acord amb les solucions obtingudes en el pas anterior.*

En l'exemple, els punts -2 i 3 i les franges són els valors que queden abans del -2, en mig del -2 i 3 i més enllà del 3. Per tant, s'han de considerar els intervals i valors $(-\infty, -2)$, -2, $(-2, 3)$, 3, $(3, +\infty)$.



3) *Se selecciona un nombre qualsevol de cadascuna de les zones.*

Per exemple, a més del -2 i 3, considerem $-4 \in (-\infty, -2)$, $0 \in (-2, 3)$ i $6 \in (3, +\infty)$:



4) *Es comprova quin nombre és una solució de la inequació*, és a dir quins verifiquen les desigualtats inicials:

-4 no és solució de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ perquè $\underbrace{2 \cdot (-4)^2 - 2 \cdot (-4) - 2}_{38} \leq \underbrace{(-4)^2 - (-4) + 4}_{0}$ és fals.

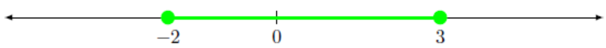
-2 és solució de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ perquè $\underbrace{2 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 2}_{10} \leq \underbrace{(-2)^2 - (-2) - 2}_{10}$ és cert.

0 és solució de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ perquè $\underbrace{2 \cdot (0)^2 - 2 \cdot (0) - 2}_{-2} \leq \underbrace{(0)^2 - (0) + 4}_{4}$ és cert.

3 és solució de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ perquè $\underbrace{2 \cdot (3)^2 - 2 \cdot (3) - 2}_{-10} \leq \underbrace{(3)^2 - (3) + 4}_{-1}$ és cert.

5 no és solució de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4x + 4$ perquè $\underbrace{2 \cdot (5)^2 - 2 \cdot (5) - 2}_{0} \leq \underbrace{(5)^2 - (5) + 4}_{24}$ és fals.

5) La solució de la inequació ve donada per la reunió de totes les zones (intervals o valors) del pas anterior, en les quals el nombre escollit és solució perqè compleix la desigultat. Així, en l'exemple, la solució de la inequació és l'interval tancat $[-2, 3]$.



Podem afegir com a curiositat que si la inequació fos

$$2x^2 - 2x - 2 > x^2 - x + 4$$

la seva solució estaria formada per tots els nombres de $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

El símbol $\cup$ és el símbol de la unió de conjunts i indica que cal reunir tots els nombres d'un interval amb els de l'altre.

Exemple. Solució inequació de segon grau.
La solució de l'inequació de segon grau

$$2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$$

és

$$(-\infty, 2) \cup (3, +\infty).$$

Resum

Les expressions algebraiques

Aspectes generals de les expressions algebraiques

Components. Tota expressió algebraica és producte de:

- Nombres de qualsevol tipus, per a representar valors coneguts.
- Lletres, per a representar valors desconeguts.
- Signes d'operacions: sumes, restes, multiplicacions i divisions.

Valor numèric. El valor numèric d'una expressió algebraica es troba substituint-ne les lletres per nombres concrets i calculant-ne el resultat. Aquest valor depèn dels valors concrets que rebin les lletres.

Per exemple, el valor numèric de l'expressió algebraica $4x - 2y + 6$ quan $x = 5$ i $y = 2$ és $4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 6 = 22$.

Utilitat. Les expressions algebraiques són útils per a simplificar una situació real en què s'han de fer operacions entre quantitats conegudes i quantitats desconegudes.

Propietats de les operacions en les expressions algebraiques

Propietats de la suma i la resta

- *Propietat commutativa.* El resultat de sumar dos elements, nombres o lletres, en qualsevol ordre és sempre el mateix: $a + b = b + a$.
- *Propietat associativa.* En sumar tres elements, nombres o lletres, qualssevol, es poden agrupar en qualsevol ordre perquè el resultat no varia: $a+b+c = (a+b)+c = a + (b + c)$
- *Element neutre de la suma.* És el 0, ja que si se suma aquest nombre a qualsevol altre nombre, el resultat és el mateix nombre: $a + 0 = a$.
- *Element oposat.* L'element oposat de qualsevol element a és $-a$, ja que el resultat de sumar-los és l'element neutre de la suma: $a + (-a) = 0$.

Recordem que la resta és la suma amb l'oposat: $a-b = a+(-b)$. Per tant, les propietats són les mateixes que les de la suma.

Propietats del producte i de la divisió

- *Propietat commutativa.* Dos elements, nombres o lletres, es poden multiplicar en qualsevol ordre, i el resultat és sempre el mateix: $a \cdot b = b \cdot a$.

- *Propietat associativa.* En multiplicar tres elements, nombres o lletres, qualssevol, es poden agrupar en qualsevol ordre perquè el resultat no varia: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

- *Element neutre del producte.* És l'1, perquè en multiplicar qualsevol element per 1, el resultat sempre és el mateix nombre inicial: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

- *Element invers.* L'element invers d'un element qualsevol que no sigui 0 és aquell element que, multiplicat amb aquest dona 1, és a dir, l'element neutre de la multiplicació: l'element invers de a és $\frac{1}{a}$, ja que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, sempre que $a \neq 0$.

- P*ropietat distributiva de la suma respecte del producte.*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Recordem que la divisió és un producte de l'invers sempre que aquest no sigui 0: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ sempre que $b \neq 0$. Per tant, les propietats de la divisió són les mateixes que les del producte.

Igualtat entre expressions algebraiques

Components. Tota igualtat algebraica és producte d'aquests elements:

- Dues expressions algebraiques, denominades membres.

- Un signe igual (=) interposat entre ambdós membres.

Tipus

- *Certa,* si l'expressió algebraica del membre de l'esquerre pot convertir-se en l'expressió algebraica del de la dreta aplicant les propietats de les operacions involucrades descrites anteriorment.
  Per exemple, $a - 4b - 2a + 5a - b = 4a - 5b$

- *Falsa,* si l'expressió algebraica del membre de l'esquerre no es pot convertir en l'expressió algebraica del de la dreta tot i aplicar les propietats de les operacions involucrades descrites anteriorment.
  Per exemple, $4a - 5b + 2 = 4a - 5b + 7$.

Les equacions

Definició. S'entén per equació tota igualtat entre dues expressions algebraiques, especialment quan no se'n pot establir *a priori* la seva certesa o falsedat. En aquest cas, les lletres es denominen **incògnites**. Cada un dels sumands es denomina **terme** i el nombre que multiplica cada incògnita es denomina **coeficient**.

Exemples

- Equacions amb una incògnita: $a + 3 = 5$, $2c + 6 = c + 10$

- Equacions amb dues incògnites: $2x + 2y + 8 = 2x + 7$

Solucions d'una equació. Tots aquells valors numèrics que converteixen l'equació en una igualtat entre expressions numèriques vertaderes són solució d'una equació, per exemple, si en substituir les lletres de l'expressió $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$ per $x = 2$ i $y = 1$, i en aplicar les propietats de les operacions s'obté $2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 5 = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1$ i el valor numèric d'ambdós membres resulta 3.

Equacions equivalents. Equacions que tenen exactament les mateixes solucions. Per exemple, $x + 1 = 3$ i $2x + 2 = 6$, ja que en ambdós casos la solució és $x = 2$.

Les equacions de primer grau amb una incògnita

Concepte

Exemple i definició. $3x - 5 = x + 5$ és una equació de primer grau amb una incògnita perquè verifica:

- És una equació perquè és una igualtat entre expressions algebraiques.
- Té una incògnita, que és la lletra x.
- És de primer grau perquè la incògnita x no es multiplica mai per cap altra incògnita, inclosa ella mateixa.

Components. Tota equació de primer grau conté:

- *Terme*: cadascun dels sumands de l'equació.
- *Termes numèrics*: termes que no contenen la incògnita.
- *Coeficient de la incògnita*: nombre que multiplica la incògnita en cada terme.

Forma normal. S'anomena forma normal d'una equació de primer grau amb una incògnita l'equació equivalent a la donada en què el membre de la dreta és zero i el membre de l'esquerra és simplificat completament. De manera general, s'expressa

$$a \cdot x + b = 0$$

En aquest cas, el terme numèric, que és únic, s'anomena terme independent.
Per exemple, la forma normal de $3x - 5 = 2x + 4$ és $x - 9 = 0$.

Resolució

Fórmula de resolució. Per a resoldre una equació de primer grau amb un incògnita, és recomanable seguir el procediment que es detalla a continuació.
Vegem-lo mitjançant un exemple concret: la resolució de $3x - 5 = x + 5$

1) Agrupar termes numèrics: $3x = x + 5 + 5$

2) Agrupar termes amb incògnita: $3x - x = 10$

3) Eliminar el coeficient de la incògnita: $x = \frac{10}{2} = 5$

Solucions. La solució d'una equació de primer grau en forma normal $ax + b = 0$ és $x = \frac{-b}{a}$.

Aquesta solució pot existir o no en els nombres reals.

- *No existeix* quan el coeficient de la incògnita és igual a 0 i el terme independent no és 0 ($a = 0$ i $b \neq 0$). En aquest cas no hi ha cap nombre real que, multiplicat per 0, doni un nombre real.
- *Existeix* si:
  - El coeficient de la incògnita és diferent de 0 ($a \neq 0$). Aleshores hi ha una única solució $x = \frac{-b}{a}$.
  - Tant el coeficient de la incògnita com el terme independent són 0 ($a = 0$ i $b = 0$). Aleshores hi ha infinites solucions, ja que qualsevol nombre és solució de l'equació, atès que qualsevol nombre per 0 és 0.

Les equacions de segon grau amb una incògnita

Concepte

Exemple i definició. $3x^2 + 3x - 5 = 2x^2 - 7$ és una equació de segon grau amb una incògnita perquè verifica:

- És una equació perquè és una igualtat entre expressions algebraiques.
- Té una única incògnita, que és la lletra x.
- És de segon grau perquè té almenys un terme de grau 2 i la resta són de grau dos o de grau menor.

Forma normal. S'anomena forma normal d'una equació de segon grau amb una incògnita l'equació equivalent a la donada en què el membre de la dreta és zero i el membre de l'esquerra és simplificat completament.
De manera general, si a, b i c són nombres reals, amb $a \neq 0$ s'expressa

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Per exemple, la forma normal de $3x^2 + 3x - 5 = 2x^2 - 7$ és $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Components. Donada la forma normal d'una equació de segon grau, com per exemple

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

es parla de

- *Terme.* Cadascun dels sumands. En l'exemple, termes x^2, 3 i 2.
- *Coeficient.* El nombre que en cada terme multiplica la incògnita. Així, es parla de:

- ∘ *coeficient de grau* 2: nombre que multiplica el terme de grau 2. En l'exemple, 1.
- ∘ *Coeficient de grau* 1: nombre que multiplica el terme de grau 1. En l'exemple, 3.
- ∘ *Coeficient de grau* 0: nombre que multiplica el terme de grau 1. En l'exemple, 2.

- *Terme independent*: nombre que apareix sense multiplicar la incògnita, que correspon al coeficient de grau 0. En l'exemple, 2.

Resolució

Fórmula de resolució. Per a resoldre una equació de segon grau amb un incògnita en forma normal $ax^2 + bx + c = 0$, es pot aplicar la fórmula següent:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

on:

- a és el coeficient del terme de grau 2.
- b és el coeficient del terme de grau 1.
- c és el terme independent.
- el signe ± (més-menys) permet abreujar l'expressió de les dues solucions possibles
- $\Delta = b^2 - 4ac$ rep el nom de **discriminant**.

Exemple. Per a resoldre $x^2 + 3x + 2 = 0$, identifiquem

$$a = 1,\ b = 3,\ c = 2,\ \Delta = 32 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

Aleshores

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \{-1, -2\}$$

Per tant, −1 i −2 són les solucions a l'equació donada.

Solucions: Una equació de segon grau amb una incògnita pot tenir fins a dues solucions.

- Si el discriminant és positiu, $\Delta > 0$ l'equació té dues solucions reals.
  L'equació $2x^2 + 3x - 4 = 0$ té dues solucions, ja que $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 41 > 0$.
- Si el discriminant és zero, $\Delta = 0$, l'equació té una única solució real, denominada solució doble.
  L'equació $x^2 - 4x + 4 = 0$ té una única solució, ja que $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$.
- Si el discriminant és negatiu, $\Delta < 0$, l'equació no té cap solució real.
  L'equació $3x^2 - 4x + 5 = 0$ no té cap solució, ja que $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -46 < 0$.

Les equacions quadràtiques

Definició i exemple. Una equació de tipus quadràtic és aquella que té, en forma normal, un terme independent, un terme de grau qualsevol i un altre terme amb grau el doble de l'anterior. Aquesta característica fa que es pugui interpretar com a equació de segon grau. Per exemple, $4x^8 + 5x^4 + 10 = 0$
El cas més senzill és la denominada **equació biquadrada**, una equació de quart grau que només té, en forma normal, els termes de grau 4, 2 i 0.
Exemple. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Resolució. Es poden resoldre de manera semblant a les equacions de segon grau, ja que l'expressió de l'equació quadràtica és similar a les de segon grau.
Exemple.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

és una equació biquadrada que es pot reescriure com una equació de segon grau:

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$$

En considerar x^2 com la incògnita, es pot aplicar la fórmula de resolució de l'equació de segon grau per a x^2. Aleshores, la solució és producte de

$$(x^2) = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

Per tant, $x^2 = 4$, d'on resulta $x = \pm 2$ i $x^2 = 9$, i d'on resulta $x = \pm 3$.
Finalment, és convenient comprovar les solucions obtingudes a l'equació inicial.

Les inequacions

Concepte

Definició. Una inequació és una desigualtat entre expressions algebraiques que pot tenir solucions. Com en les equacions, les solucions són valors numèrics que en substituir les variables en la inequació fan que la desigualtat numèrica resultant sigui certa.

Exemples.

- $2x + 5 \geq 2 - x$ és una inequació de primer grau.
- $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ és una inequació de segon grau.

Resolució

Procediment. Les inequacions de primer i segon grau es poden resoldre de manera similar. Els passos principals del procediment que se sol seguir són:

Procediment	Exemple: $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$
1) *Es resol l'equació associada a la inequació*, que s'obté canviant el signe de desigualtat pel signe d'igualtat.	$2x^2-2x-2 = x^2-x+4 \Rightarrow x = \{-2, 3\}$
2) *Es consideren les solucions de l'equació associada, que divideixen la recta real en diverses zones.*	Zones a considerar: els punts -2 i 3, i les franges $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$, $(3, +\infty)$
3) *Se selecciona un nombre qualsevol de cadascuna de les zones i s'avalua en la inequació.*	Punts on avaluar: -2 i 3, i, per exemple, $-4 \in (-\infty;\ -2)$, $0 \in (-2, 3)$ i $6 \in (3, +\infty)$
4) *Es comprova quin dels nombres seleccionats verifica la desigualtat de la inequació.*	La desigualtat es verifica per a $x = -2$, $x = 0$ i $x = 3$, però no per a $x = -4$ ni $x = 6$
5) *La solució de la inequació és producte de la reunió de totes les zones del pas anterior en les quals el nombre escollit compleix la desigualtat.*	Per tant, la solució és $[-2, 3]$

Exercicis resolts

1. **Determina per a quins valors de t l'equació $x^2 + tx + 16 = 0$...**

  (a) té dues solucions reals.

  (b) té una única solució real, doble.

  (c) no té solució real.

Solució:

Per a poder respondre la pregunta, cal estudiar els valors que pot prendre el discriminant de l'equació, Δ, en funció dels valors de t.

Atès que l'equació de segon grau $x^2 + tx + 16 = 0$ ja està en la seva forma normal, identifiquem els coeficients $a = 1$, $b = t$ i $c = 16$, i, per tant, el seu discriminant és

$$\Delta = b^2 - 4ac = t^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = t^2 - 64$$

Aleshores, atenent al fet que una equació de segon grau té

- dues solucions reals quan el discriminant és positiu (en el nostre cas quan $\Delta = t^2 - 64 > 0$
- una única solució, doble, real quan el discriminant s'anul·la (per tant, quan $\Delta = t^2 - 64 > 0$
- cap solució real quan el discriminant és negatiu (per tant, quan $\Delta = t^2 - 64 < 0$

es fa necessari estudiar les inequacions resultants.

Per això, resoldrem primer l'equació de segon grau $\Delta = 0$ i, trobada la solució, estudiarem què passa en cada una de les franges obtingudes.

$$\Delta = t^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 64 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{64} = \pm 8$$

D'aquesta resolució obtenim que, quan $t = 8$ o $t = -8$, $\Delta = 0$ i, per tant, podem dir que quan $t = 8$ o $t = -8$ l'equació té una única solució real, que és doble.

Per a determinar les altres dues situacions, cal mirar què passa per a valors menors que -8, compresos entre -8 i 8 i majors que 8. En altres paraules, cal estudiar els valors de Δ quan $t < -8$, $-8 < t < 8$ i $8 < t$. Per això, avaluarem Δ per a un valor qualsevol comprès en $(-\infty, -8)$, un altre valor entre $(-8, 8)$ i un altre entre $(8, +\infty)$. Vegem-ho:

Considerem $t = -10 \in (-\infty, -8) : t^2 - 64 = 100 - 64 = 36 > 0$

Considerem $t = 0 \in (-8, 8) : t^2 - 64 = 0 - 64 = -64 < 0$

Considerem $t = 10 \in (8, +\infty) : t^2 - 64 = 100 - 64 = 36 > 0$

Per tant, concloem:

- Si $t < -8$ o $t > 8$, l'equació té dues solucions reals diferents.
- Si $t = 8$ o $t = -8$, l'equació té una única solució real, doble.
- Si $-8 < t < 8$, l'equació no té solució real.

2. **La suma de dos nombres és 13 i el seu producte és 36. Amb quina equació de segon grau es poden obtenir aquets dos nombres? Quins nombres són?**

Solució:

L'enunciat demana trobar dos nombres que han de complir dues condicions alhora. Fixem-nos en la primera de les condicions: que els nombres sumin 13. D'acord amb aquesta premissa, si diem x a un d'aquests dos nombres, l'altre serà el producte de la diferència entre aquest nombre i el total de la suma, que en aquest cas és 13. Per tant, el segon nombre serà $13 - x$.

Fixada l'expressió dels dos nombres, imposem la segona condició, és a dir, que el seu producte sigui 36. Per tant, que

$$x \cdot (13 - x) = 36$$

Si operem aquesta igualtat, obtenim l'equació

$$-x^2 + 13 \cdot x = 36$$

que, podem reescriure de manera equivalent

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

Trobada l'equació de segon grau en la seva forma normal, podem resoldre-la i trobar així els nombres desconeguts.

Apliquem la fórmula de resolució de les equacions de segon grau:

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

D'on resulta $x_1 = \dfrac{18}{2} = 9$ i $x_2 = \dfrac{8}{2} = 4$.

Per tant, si considerem $x = 9$, l'altre nombre és $13 - 9 = 4$

I, a l'inrevés, si considerem $x = 4$, l'altre nombre és: $13 - 4 = 9$

Concloem, doncs que el parell de dos nombres buscats és 9 i 4.

Per tant, la resposta a l'exercici és:

- L'equació que representa la situació és $x^2 - 13x + 36 = 0$.
- Els dos nombres que satisfan la doble condició són 9 i 4.

3. **Resol les equacions irracionals següents:**

(a) $\sqrt{x+3} + 2x = 30$

(b) $x + 3 + \sqrt{x+5} = 10$

Solució:

Per a resoldre aquestes equacions, serà convenient trobar equacions equivalents que no continguin cap arrel quadrada.

(a) Resolem la primera de les equacions: $\sqrt{x+3} + 2x = 30$.

Aïllem l'arrel quadrada per poder aplicar el quadrat a tota l'expressió:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &= 30 - 2x \\ \left(\sqrt{x+3}\right)^2 &= (30-2x)^2 \end{aligned}$$

Calculem els quadrats de cadascun dels termes de l'equació. Fixem-nos que serà necessari aplicar identitats notables. En aquest cas particular, en el terme de la dreta cal aplicar el quadrat d'una diferència:

$$x + 3 = 30^2 + (2x)^2 - 2 \cdot 30 \cdot (2x)$$

Operem i obtenim una equació de segon grau:

$$x + 3 = 900 + 4x^2 - 120x$$

Associem termes i els ordenem per obtenir l'equació equivalent en forma normal:

$$4x^2 - 121x + 897 = 0$$

Obtinguda la forma normal de l'equació de segon grau associada, apliquem la fórmula de resolució de les equacions de segon grau:

$$x = \frac{121 \pm \sqrt{(-121)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 897}}{2 \cdot 4} = \frac{121 \pm \sqrt{289}}{8} = \frac{121 \pm 17}{8}$$

d'on obtenim dues solucions de l'equació de segon grau associada.

$$x_1 = \frac{121-17}{8} = \frac{104}{8} = 13$$
$$x_2 = \frac{121+17}{8} = \frac{138}{8} = \frac{69}{4}$$

Trobades les solucions de l'equació de segon grau, cal comprovar si són efectivament també solució de l'equació inicial:

- Si $x = 13$

$$\sqrt{x+3} + 2x = \sqrt{13+3} + 2 \cdot 13 = \sqrt{16} + 26 = 4 + 26 = 30$$

Per tant, $x = 13$ és solució.

- Si $x = \frac{69}{4}$

$$\sqrt{x+3} + 2x = \sqrt{\frac{69}{4} + 3} + 2 \cdot \frac{69}{4} = \sqrt{\frac{81}{4}} + \frac{69}{2} = \frac{9}{2} + \frac{69}{2} = \frac{78}{2} = 39 \neq 30$$

Per tant, $x = \frac{69}{4}$ no és solució.

(b) Resolem de manera similar la segona equació:

$$\begin{aligned} & x + 3 + \sqrt{x+5} = 10 \\ & \sqrt{x+5} = 10 - x - 3 \\ & \sqrt{x+5} = 7 - x \\ & \left(\sqrt{x+5}\right)^2 = (7-x)^2 \\ & x + 5 = 7^2 + x^2 - 2 \cdot 7 \cdot x \\ & x + 5 = 49 + x^2 - 14x \\ & x^2 - 15x + 44 = 0 \end{aligned}$$

Calculem les solucions de l'equació de segon grau aplicant la fórmula sabuda:

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 44}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{15 \pm 7}{2}$$

d'on obtenim dues solucions de l'equació de segon grau associada.

$x_1 = \dfrac{15-7}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$x_2 = \dfrac{15+7}{2} = \frac{22}{2} = 11$

Trobades les solucions de l'equació de segon grau, cal comprovar si són efectivament també solució de l'equació inicial:

- Si $x = 4$

$$x+3+\sqrt{x+5} = 4+3+\sqrt{4+5} = 7+\sqrt{9} = 7+3 = 10$$

  Per tant, $x = 4$ és solució.

- Si $x = 11$

$$x+3+\sqrt{x+5} = 11+3+\sqrt{11+5} = 14+\sqrt{16} = 14+4 = 18 \neq 10$$

  Per tant, $x = 11$ no és solució.

Exercicis per a practicar amb les solucions

4. **Resoleu les equacions següents:**

(a) $\dfrac{x+5}{4} + \dfrac{3x-2}{3} - \dfrac{2x+5}{2} = 4 - \dfrac{5x-1}{6}$

(b) $x + 1 + \dfrac{x+2}{2} + \dfrac{x+3}{3} = -\dfrac{x+4}{4} + 5$

5. **Resoleu les equacions següents:**

(a) $x^2 + x = 12$

(b) $-x^2 + 10x + 11 = 0$

(c) $(2+x)(5-x) = 9 + 3x$

(d) $3x^2 - 2(x-5)^2 = 22x - 26$

6. **Resoleu les equacions biquadrades següents:**

(a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

(b) $x^4 - 73x^2 + 576 = 0$

(c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Solucions:

4) (a) $x = \dfrac{73}{13}$

(b) $x = \dfrac{12}{25}$

5) (a) $x = \{-4, 3\}$

(b) $x = \{-1, 11\}$

(c) $x = \{-1, 1\}$

(d) $x = \{-4, 6\}$

6) (a) $x = \{1, -1, 2, -2\}$

(b) $x = \{3, -3, 8, -8\}$

(c) $x = \{-2, 2, 3, -3\}$