Iniciació a les matemàtiques per a l'enginyeria

PID_00270077

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat Oberta de Catalunya

4. Polinomis

Índex

4.1. Definició i aspectes generals

4.1.1. Definició

Un polinomi d'una sola variable o, per abreujar, un **polinomi**, és una expressió algebraica amb una única lletra, anomenada variable. Els *termes* d'aquesta expressió són el producte d'un nombre per una potència positiva de la variable, excepte en el cas d'un únic terme, que correspon a la potència 0 de la variable, i per això consta només d'un nombre. Aquest terme s'anomena *terme independent.*

Què és un polinomi? És una expressió algebraica amb una única lletra anomenada variable. Els elements bàsics d'un polinomi són els termes. Cada terme és producte d'un coeficient i un grau. Un polinomi amb un sol terme es denomina monomi. Si té dos termes s'anomena binomi.

Exemple. Polinomis.

Polinomi amb variable a
$3a - 42a^3 + 5a - 2a + 2$, els termes del qual són: $3a$, $42a^3$, $5a$, $-2a$, $+2$.

Polinomi amb variable b
$5b - 56b^2 + b - 17$, els termes del qual són: $5b$, $-56b^2$, $+b$, -17.

Els polinomis es poden designar per una lletra. D'aquesta manera s'evita escriure tots els termes d'un polinomi cada vegada que s'hi ha de fer referència. Aquesta lletra va seguida de la variable, entre parèntesis, del polinomi. Aquests parèntesis no s'han de confondre amb els parèntesis que contenen operacions.

Exemple. Nomenclatura.

Anomenar $p(x)$ el polinomi $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$, vol dir que

$$p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$$

on p representa el nom del polinomi, i x, entre parèntesis, indica la variable del polinomi.

Aquesta assignació permet referir-nos al polinomi $p(x)$ sense necessitat d'escriure tots els termes que el defineixen.

Val a dir que la variable més usada per a expressar polinomis és la x. Es tracta d'un costum, per la qual cosa no s'ha de considerar una obligació.

4.1.2. Elements i característiques d'un polinomi

Tal com ja s'ha dit, per **terme d'un polinomi** s'entenen els diferents elements d'un polinomi (com també de qualsevol expressió algebraica) que són producte d'un coeficient i una potència de la variable.

Els tipus de polinomis es distingeixen d'acord amb el nombre de termes que presenten. En particular:

- Un polinomi amb un sol terme s'anomena **monomi**.
- Un polinomi amb dos termes s'anomena **binomi**.
- Un polinomi amb tres termes s'anomena **trinomi**.

Exemple. Tipus de polinomis.

Monomis de variable b: $-13b^4$, $5b^{23}$, $-7b^2$

Binomi de variable c: $3c^3 - 5c$

Trinomi de variable d: $3d^4 + 2d^2 - 5$

Els polinomis i els seus termes presenten característiques que són importants de distingir. Aquestes característiques són:

- El **grau d'un terme** és l'exponent de la variable d'aquest terme.
- El **grau del polinomi** és el grau del terme de grau màxim. Així, hi ha polinomis de grau 0, de grau 1 o de primer grau, de grau 2 o de segon grau, etc. Generalment, s'escriuen d'esquerra a dreta els termes d'un polinomi de major a menor grau.
- El **terme independent** és el terme de grau 0 i, per tant, no hi apareix la variable.

- El **coeficient d'un terme** és el nombre que multiplica la variable en aquest terme. La resta del terme es denomina **part literal**.

Exemple. Característiques d'un polinomi.
Sigui el polinomi $p(x) = 9x^6 - 3x^4 + x - 6$.

- El terme de grau 6 és $9x^6$, el terme de grau 4 és $-3x^4$, el terme de grau 1 és x, i el terme independent és -6. Els termes corresponents als graus que no apareixen són iguals a 0.
- El grau del polinomi és, per tant, 6.
- El coeficient del terme de grau 6 és 9, i la seva part literal és x^6.
- El coeficient del terme de grau 4 (o, per a abreujar, coeficient de grau 4) és -3, i la seva part literal és x^4.
- El coeficient de grau 1 és 1, i la seva part literal és x.
- Els coeficients dels altres termes són 0.

4.1.3. Valor numèric d'un polinomi

El **valor numèric** d'un polinomi és el valor que s'obté en substituir-ne la variable per un nombre determinat. Així, donat el polinomi $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$, en substituir la x per 1, el seu valor numèric és

$$p(1) = 5 \cdot 13 - 4 \cdot 12 + 5 \cdot 1 - 1 = 5$$

Direm, doncs, que el valor numèric del polinomi $p(x)$, quan x és igual a 1, és 5. Matemàticament, i de manera abreujada, s'escriu $p(1) = 5$.
Donat un polinomi, podem calcular diferents valors numèrics.

Exemple. Valors numèrics d'un polinomi.
Sigui $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$:

- $p(0) = 5 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 1 = -1$. Per tant, -1 és el valor numèric de $p(x)$ quan x és 0.
- $p(-1) = 5 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 1 = -15$. Per tant, -15 és el valor numèric de $p(x)$ quan x és -1.

4.2. Operacions i propietats bàsiques

4.2.1. Operacions bàsiques entre monomis

És important conèixer com es fan les operacions entre monomis perquè serveixen de base per a entendre les operacions entre polinomis. Vegem doncs, com s'operen els monomis.

Suma i resta La suma (o resta) de dos monomis de grau diferent és un binomi en què els dos únics termes són exactament aquests dos monomis. Per exemple, la suma dels monomis $3x^4$ i $2x$, que es representa per $\left(3x^4\right)+(2x)$, és igual al binomi $3x^4+2x$. La suma (o resta) de dos monomis del mateix grau és un altre monomi amb idèntic grau, i amb coeficient igual a la suma (o resta) dels coeficients d'aquests monomis. Per exemple, la resta de $5x^3$ i $2x^3$, que es representa per $\left(5x^3\right)-\left(2x^3\right)$, és igual al monomi $3x^3$.

Producte El producte de dos monomis és un altre monomi. El seu coeficient és el producte dels coeficients dels monomis que es multipliquen, i el seu grau és la suma de graus dels monomis inicials. Per exemple, el producte dels monomis $4x^3$ i $-5x^2$, que es representa per $\left(4x^3\right)\cdot\left(-5x^2\right)$, és $-20x^5$, ja que $4\cdot(-5)=-20$ i $x^3\cdot x^2=x^{3+2}=x^5$.

Quocient El quocient de dos monomis és un altre monomi. El seu coeficient és el quocient dels coeficients dels monomis que es divideixen, i el seu grau és la diferència de graus d'aquests dos monomis. En aquest cas, el grau del numerador no pot ser inferior al grau del denominador. Per exemple, el quocient dels monomis $8x^4$ i $2x^3$, que es representa per $\frac{8x^4}{2x^3}$, és el monomi $4x$, ja que $\frac{8}{2}=4$ i $\frac{x^4}{x^3}=x^{4-3}=x^1$.

Operacions entre monomis

$$3x^4+(2x)=3x^4+2x$$
$$5x^3-\left(2x^3\right)=3x^3$$
$$4x^3\cdot\left(-5x^2\right)=-20x^5$$
$$\frac{8x^4}{2x^3}=4x$$

4.2.2. Operacions bàsiques entre polinomis

Vist com s'operen els monomis, estudiem les operacions bàsiques entre polinomis.

Suma i resta de polinomis La suma (o resta) de dos polinomis és igual al polinomi resultant de la suma (o resta) dels termes que tenen el mateix grau. Cada terme resultant correspon a la suma dels termes del mateix grau dels polinomis que se sumen (o resten). D'acord amb la suma (o resta) de monomis, es tracta, doncs, de sumar els coeficients dels termes del mateix grau i mantenir l'ordre d'aquests termes.

Com se sumen (o resten) dos polinomis?
La suma (o resta) de dos polinomis és igual al polinomi resultant de la suma (o resta) dels termes del mateix grau. Els termes del mateix grau es poden col·locar en columna, se sumen els coeficients de cada terme i es col·loca el resultat a sota dels dos polinomis, separat per una línia horitzontal.

Per exemple, per a sumar $2x^3-3x^2+4x-6$ i $5x^4-2x^3-5x^2-3x+16$, s'han de sumar els coeficients dels termes de grau 4 amb els de grau 4, els coeficients de grau 3 amb els de grau 3, i així per cada terme. El polinomi suma serà la suma de les sumes de cada un d'aquests elements de mateix grau. Ens ajudem d'una taula per a veure-ho més clar.

Termes	1r polinomi	2n polinomi	polinomi suma
grau 4	0	$5x^4$	$0 + 5x^4 = \boxed{5x^4}$
grau 3	$2x^3$	$-2x^3$	$2x^3 - 2x^3 = \boxed{0x^3}$
grau 2	$-3x^2$	$-5x^2$	$-3x^2 - 5x^2 = \boxed{-8x^2}$
grau 1	$4x$	$-3x$	$4x - 3x = \boxed{x}$
grau 0	-6	16	$-6 + 16 = \boxed{10}$

Per tant, el polinomi suma és

$$\left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 6\right) + \left(5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x + 16\right) = 5x^4 - 8x^2 + x + 10$$

Normalment, i especialment per comoditat, una suma entre polinomis s'expressa escrivint els polinomis un a sobre de l'altre, posant en columna els elements del mateix grau i el resultat a continuació d'una línia horitzontal a sota de la columna del grau corresponent.

Exemple. Suma de polinomis.

$$\left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 6\right) + \left(5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x + 16\right)$$

$$\begin{array}{cccccc} & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\ + & 5x^4 & -2x^3 & -5x^2 & -3x & +16 \\ \hline & 5x^4 & & -8x^2 & +x & +10 \end{array}$$

Per a restar dos polinomis, es procedeix com en el cas de la suma però restant terme a terme sempre del mateix grau.

$$\begin{array}{cccccc} & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\ - & (5x^4 & -2x^3 & -5x^2 & -3x & +16) \\ \hline & -5x^4 & +4x^3 & +2x^2 & +7x & -22 \end{array}$$

Per a evitar errors a l'hora de restar, és recomanable canviar, abans de restar, el signe de cadascun dels termes del segon polinomi pel seu oposat, i després sumar.

$$\begin{array}{cccccc} & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\ + & -5x^4 & +2x^3 & +5x^2 & +3x & -16 \\ \hline & -5x^4 & +4x^3 & +2x^2 & +7x & -22 \end{array}$$

En qualsevol cas, el resultat de la resta d'aquests dos polinomis és sempre la mateixa.

Exemple. Resta de dos polinomis.

$$\left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 6\right) - \left(5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x + 16\right) = -5x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 7x - 22$$

Producte de polinomis La multiplicació de dos polinomis és igual a la suma de tots els productes de cadascun dels termes del primer polinomi per cadascun dels termes del segon polinomi. Normalment, el nombre d'operacions que s'han de fer és molt gran. Per això, és convenient fer la multiplicació de manera ordenada.

Per a ser més precisos, els passos a seguir són:

1) Es posen els dos polinomis en columna, un sobre l'altre, i es multiplica cada terme del segon polinomi per cadascun dels termes del primer polinomi.

2) Els resultat del pas anterior es posa a la fila següent, a sota d'una línia horitzontal. Com en el cas de la suma, és recomanable que tots els termes del mateix grau quedin en una mateixa columna.

3) Finalment, se sumen els termes de cada columna.

Com es multipliquen dos polinomis? La multiplicació de dos polinomis és igual a la suma de tots els productes de cadascun dels termes del primer polinomi per cadascun dels termes del segon polinomi. En fer el producte és convenient que tots els termes del mateix grau quedin en una mateixa columna.

Per a entendre com es desenvolupa aquest procés, va bé analitzar primerament el cas de multiplicar un polinomi per un monomi. En aquest cas, es multiplica el monomi per cada terme del polinomi i se sumen els termes producte obtinguts. Ho podem veure en l'exemple següent:

Exemple. Producte de polinomi per monomi.

$$\left(7x^4 - 5x^2 + 3x - 8\right) \cdot \left(2x^3\right)$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 7x^4 & -5x^2 & +3x & -8 \\
\cdot & & & & 2x^3 \\
\hline
 & 14x^7 & -10x^5 & +6x^4 & -16x^3
\end{array}$$

Tal com s'observa en l'exemple, és convenient deixar un buit on faltin termes.

Per a fer el producte de dos polinomis qualssevol, s'ha de repetir el que s'ha fet en el cas anterior amb cadascun dels termes del polinomi que multiplica, sumant al final els resultats per cadascun dels graus del polinomi.

Estudiem els passos a seguir amb l'ajut d'un exemple, en aquest cas el producte del polinomi $2x^4 - 7x^3 + 5x - 8$ pel polinomi $x^2 - 7x + 2$.

1) En primer lloc, col·loquem un polinomi sobre un altre situant els termes de mateix grau en una mateixa columna.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 2x^4 & -7x^3 & & +5x & -8 \\
\cdot & & & x^2 & -7x & +2 \\
\hline
\end{array}$$

2) A continuació, comencem a multiplicar el primer polinomi per l'element de grau menor del segon polinomi (+2 en aquest cas) i col·loquem els resultats de cada terme a sota de la columna del termes del mateix grau:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 2x^4 & -7x^3 & & +5x & -8 \\
\cdot & & & x^2 & -7x & +2 \\
\hline
 & 4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16
\end{array}$$

3) Acabada i ordenada aquesta primera multiplicació, continuem multiplicant els termes del primer polinomi pel segon terme més petit del segon polinomi ($-7x$ en aquest cas) i, com abans, col·loquem els resultats en la línia següent de manera que els termes d'igual grau estiguin en columna.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 2x^4 & -7x^3 & & +5x & -8 \\
\cdot & & & x^2 & -7x & +2 \\
\hline
 & 4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16 \\
-14x^5 & +49x^4 & & -35x^2 & +56x &
\end{array}$$

4) Continuem de la mateixa manera amb la resta d'elements del primer polinomi.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & \cdot & 2x^4 & -7x^3 & & +5x & -8 \\
 & & & & x^2 & -7x & +2 \\
\hline
 & & 4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16 \\
 & -14x^5 & +49x^4 & & -35x^2 & +56x & \\
2x^6 & -7x^5 & & +5x^3 & -8x^2 & &
\end{array}$$

5) Finalment, sumem terme a terme els resultats obtinguts.

Exemple. Producte de dos polinomis.

$$\left(2x^4 - 7x^3 + 5x - 8\right) \cdot \left(x^2 - 7x + 2\right)$$

		$2x^4$	$-7x^3$		$+5x$	-8
	$\cdot$			x^2	$-7x$	$+2$
		$4x^4$	$-14x^3$		$+10x$	-16
	$-14x^5$	$+49x^4$		$-35x^2$	$+56x$	
$2x^6$	$-7x^5$		$+5x^3$	$-8x^2$		
$2x^6$	$-21x^5$	$+53x^4$	$-9x^3$	$-43x^2$	$+66x$	-16

Quocient de polinomis L'algoritme de la divisió entre polinomis és un procés molt semblat a la divisió entre nombres, amb el canvi de les xifres d'un nombre pels termes d'un polinomi. D'acord amb aquesta similitud, per a dividir dos polinomis s'ha de començar dividint el terme de major grau del polinomi dividend entre el terme de major grau del polinomi divisor. El resultat se situa en el lloc del quocient. A continuació, es multiplica aquest terme del quocient pel divisor i aquest producte es resta del dividend.

Com es divideixen dos polinomis?
De manera similar a la divisió entre nombres, per a dividir dos polinomis s'ha de començar dividint el terme de major grau del dividend entre el terme de major grau del divisor. El resultat se situa en el lloc del quocient, es multiplica aquest terme del quocient pel divisor i es resta aquest producte del dividend. I així successivament amb la resta de termes del dividend fins a arribar al seu terme independent.

Vegem-ho amb un exemple: dividim el polinomi $6x^4-27x^3+15x^2-48$ entre el polinomi $2x^2 - 3x + 4$

1) El primer pas consisteix a dividir el terme de major grau del dividend, $6x^4$ en aquest cas, entre el terme de major grau del divisor, $2x^2$, de manera que queda una divisió entre monomis.

$$\frac{6x^4}{2x^2} = 3x^{4-2} = 3x^2$$

2) A continuació, es multiplica el divisor pel monomi obtingut,

$$\left(2x^2 - 3x + 4\right) \cdot 3x^2 = 6x^4 - 9x^3 + 12x^2$$

i es resta del dividend. D'acord amb aquest procés, s'escriu

$6x^4$	$-27x^3$	$+15x^2$	-48	$2x^2 - 3x + 4$
$-6x^4$	$+9x^3$	$-12x^2$		$3x^2$
0	$-18x^3$	$+3x^2$		

3) Feta la resta, es baixa el terme següent del dividend, en aquest cas 0 (atès que no hi ha terme de primer grau), i es divideix, seguint el procediment anterior, entre el que ha quedat com a dividend i el divisor.

$6x^4$	$-27x^3$	$+15x^2$		-48	$2x^2-3x+4$
$-6x^4$	$+9x^3$	$-12x^2$			$3x^2-9x$
0	$-18x^3$	$+3x^2$			
	$+18x^3$	$-27x^2$	$+36x$		
	0	$-24x^2$	$+36x$	-48	

4) Se segueix aquest procediment successivament fins a baixar l'últim element del polinomi dividend. En el cas de l'exemple, la divisió completa s'escriuria de la manera següent:

Exemple. Quocient de polinomis amb residu 0:

$$\left(6x^4-27x^3+15x^2-48\right)\div\left(2x^2-3x+4\right)$$

$6x^4$	$-27x^3$	$+15x^2$		-48	$2x^2-3x+4$
$-6x^4$	$+9x^3$	$-12x^2$			$3x^2-9x-12$
0	$-18x^3$	$+3x^2$	$(0x)$		
	$+18x^3$	$-27x^2$	$+36x$		
	0	$-24x^2$	$+36x$	-48	
		$+24x^2$	$-36x$	$+48$	
		0	0	0	

En aquest cas, direm que la divisió és exacta perquè el residu és 0. Si el residu és 0, es compleix

$$\frac{6x^4-27x^3+15x^2-48}{2x^2-3x+4}=3x^2-9x-12$$

En casos com aquest, quan el residu de la divisió és 0, es diu que el polinomi dividend, en aquest cas $6x^4-27x^3+15x^2-48$, és divisible entre el polinomi divisor, $2x^2-3x+4$ en aquest cas, i, de manera equivalent, que el polinomi dividend, $2x^2-3x+4$, és múltiple del polinomi divisor, $6x^4-27x^3+15x^2-48$.

Una altra manera d'expressar-ho és dir que el polinomi dividend, $6x^4-27x^3+15x^2-48$, es descompon en els polinomis divisor, $2x^2-3x+4$, i quocient, $3x^2-9x-12$. Això significa que el polinomi dividend, $6x^4-27x^3+15x^2-48$, és producte dels polinomis divisor, $2x^2-3x+4$, i quocient, $3x^2-9x-12$, de la divisió. En definitiva,

$$6x^4-27x^3+15x^2-48=\left(2x^2-3x+4\right)\cdot\left(3x^2-9x-12\right)$$

Tal com passa també en les divisions entre expressions numèriques, és possible que el residu d'un quocient entre polinomis no sigui 0, com per exemple en dividir el polinomi $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 + 3x - 48$ entre el polinomi $2x^2 - 3x + 4$

Exemple. Quocient de polinomis amb residu diferent de 0.

$$(6x^4 - 27x^3 + 15x^2 + 3x - 48) \div (2x^2 - 3x + 4)$$

$$\begin{array}{cccccc|c}
6x^4 & -27x^3 & +15x^2 & +3x & -48 & & 2x^2 - 3x + 4 \\ \cline{7-7}
-6x^4 & +9x^3 & -12x^2 & & & & 3x^2 - 9x - 12 \\ \cline{1-3}
0 & -18x^3 & +3x^2 & +3x & & & \\
 & +18x^3 & -27x^2 & +36x & & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & -24x^2 & +39x & -48 & & \\
 & & +24x^2 & -36x & +48 & & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & +3x & 0 & &
\end{array}$$

En aquest segon exemple, el polinomi dividend no és múltiple del polinomi divisor.

En casos en què el polinomi dividend no és múltiple del polinomi divisor, feta la divisió, també es pot expressar la descomposició del polinomi dividend com el producte dels polinomis divisor i quocient, més el polinomi residu, de la mateixa manera com es fa amb expressions numèriques. És a dir, que la fórmula apresa en la divisió de nombres, en què el dividend (D) és igual al divisor (d) pel quocient (q) més el residu (r), també s'aplica en la divisió de polinomis.

$$\boxed{D = d \cdot q + r}$$

Així, en l'exemple, vist que el dividend és $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 + 3x - 48$, el divisor és $2x^2 - 3x + 4$, el quocient és $3x^2 - 9x - 12$ i el residu és $3x$, resulta

$$6x^4 - 27x^3 + 15x^2 + 3x - 48 = \left(2x^2 - 3x + 4\right) \cdot \left(3x^2 - 9x - 12\right) + 3x$$

Fraccions algebraiques Una **fracció algebraica** és simplement una fracció entre polinomis.

Què és una fracció algebraica? És una fracció entre polinomis. Les fraccions algebraiques es poden simplificar i es poden operar (amb suma, resta, multiplicació i divisió). Es defineix el terme de fraccions algebraiques equivalents de manera similar a les fraccions numèriques.

De la mateixa manera que s'han definit fraccions numèriques equivalents, també es poden definir les **fraccions algebraiques equivalents**. Concretament,

si $a(x)$, $b(x)$, $p(x)$ i $q(x)$ són polinomis, direm que les fraccions algebraiques $\dfrac{a(x)}{b(x)}$ i $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ són equivalents si el producte creuat entre numeradors i denominadors és igual. És a dir,

$$\boxed{\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ si } a(x)\cdot q(x) = b(x)\cdot p(x)}$$

Exemple. Fraccions algebraiques equivalents.

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6} = \frac{2x^2 - 2}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$$

perquè

$$\left(2x^3 - 4x^2 - 2x + 4\right)\cdot\left(x^3 + 3x^2 + x + 3\right) = \left(x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6\right)\cdot\left(2x^2 - 2\right)$$
$$= 2x^6 + 2x^5 - 12x^4 - 2x^2 - 2x + 12$$

Com en el cas dels nombres fraccionaris, les fraccions algebraiques verifiquen aquestes propietats:

- En multiplicar numerador i denominador per un mateix polinomi, la fracció resultant és equivalent a la inicial.
- En dividir de manera exacta numerador i denominador per un mateix polinomi, la fracció resultant és equivalent a la inicial. Aquest procés es denomina simplificació.

Exemple. Simplificar fraccions algebraiques.
Donada la fracció algebraica

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^2 + x - 6}$$

notem que numerador i denominador es poden descompondre com a producte d'altres polinomis de menor grau.

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x-2)\cdot\left(x^2 + 4\right)$$
$$x^2 + x - 6 = (x-2)\cdot(x+3)$$

Com que numerador i denominador tenen factors comuns, $(x-2)$, resulta

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^2 + x - 6} = \frac{(x-2)\cdot\left(x^2+4\right)}{(x-2)\cdot(x+3)} = \frac{x^2+4}{x+3}$$

Les fraccions algebraiques també es poden sumar, restar, multiplicar i dividir. Els procediments són els mateixos que en el cas de les fraccions numèriques:

- **Producte i quocient de fraccions algebraiques.** Per a fer la multiplicació i divisió de fraccions algebraiques se segueixen les mateixes regles que per a multiplicar i dividir fraccions numèriques.
  La fracció producte és aquella que té com a numerador el producte de numeradors i com a denominador el producte de denominadors, és a dir, aquella en la qual es multipliquen linealment numeradors i denominadors.
  La fracció quocient és aquella que com a numerador té el producte del primer

nu- merador pel segon denominador, i com a denominador el producte del primer denominador pel segon numerador, és a dir, aquella en la qual es multipliquen numeradors i denominadors en creu.

Exemple. Producte i quocient de fraccions algebraiques.
Producte

$$\frac{3x-2}{2x^2+3}\cdot\frac{7x+1}{2x+2}=\frac{(3x-2)\cdot(7x+1)}{(2x^2+3)\cdot(2x+2)}=\frac{21x^2-11x-2}{4x^3+4x^2+6x+6}$$

Quocient

$$\frac{3x-2}{2x^2+3}:\frac{7x+1}{2x+2}=\frac{(3x-2)\cdot(2x+2)}{(2x^2+3)\cdot(7x+1)}=\frac{6x^2+2x-4}{14x^3+2x^2+21x+3}$$

- **Suma i resta de fraccions algebraiques.** Per a sumar (o restar) dues fraccions algebraiques, se segueix el mateix procediment que per a sumar (o restar) fraccions numèriques. Per això convé diferenciar si tenen el mateix denominador o no.
  - Si les fraccions algebraiques tenen el mateix denominador, se sumen (o resten) els numeradors i es deixa el mateix denominador.

Exemple. Resta (o suma) de fraccions algebraiques d'igual denominador.

$$\frac{3x-2}{4x^2-x+1}-\frac{2x+6}{4x^2-x+1}=\frac{(3x-2)-(2x+6)}{4x^2-x+1}=\frac{x-8}{4x^2-x+1}$$

  - Si les fraccions algebraiques tenen denominador diferent, cal abans de res transformar-les en fraccions equivalents amb el mateix denominador, com en el cas de les fraccions numèriques. Per a fer-ho, es calcula l'MCM (mínim comú múltiple) dels polinomis que són en el denominador. Trobades les fraccions equivalents amb el mateix denominador, se sumen de la manera anterior: se sumen (o resten) els numeradors i es deixa el mateix denominador.
Vegem-ho amb aquest exemple. Volem sumar

$$\frac{3x-4}{x^2+5x+6}+\frac{5x-2}{x^2+3x+2}$$

1) Busquem l'MCM dels denominadors.

$$x^2+5x+6=(x+2)\cdot(x+3)$$
$$x^2+3x+2=(x+1)\cdot(x+2)$$

Per tant,

$$\mathsf{mcm}\left(x^2+5x+6,x^2+3x+2\right)=(x+1)(x+2)(x+3)=x^3+6x^2+11x+6$$

2) Trobat l'MCM, reescrivim les fraccions algebraiques originals per les seves equivalents d'igual denominador.

$$\frac{3x-4}{x^2+5x+6} = \frac{(3x-4)}{(x+2)\,(x+3)} = \frac{(3x-4)\,(x+1)}{(x+2)\,(x+3)\,(x+1)} = \frac{3x^2-x-4}{x^3+6x^2+11x+6}$$

$$\frac{5x-2}{x^2+3x+2} = \frac{(5x-2)}{(x+2)\,(x+1)} = \frac{(5x-2)\,(x+3)}{(x+2)\,(x+3)\,(x+1)} = \frac{5x^2+13x-6}{x^3+6x^2+11x+6}$$

3) Finalment, sumem els numeradors i mantenim el denominador comú

Exemple. Suma de fraccions algebraiques de diferent denominador.

$$\frac{3x-4}{x^2+5x+6}+\frac{5x-2}{x^2+3x+2} = \frac{3x^2-x-4}{x^3+6x^2+11x+6}+\frac{5x^2+13x-6}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{8x^2+12x-10}{x^3+6x^2+11x+6}$$

4.2.3. Regla de Ruffini

La **regla de Ruffini** és un procediment que permet fer de manera senzilla la divisió entre dos polinomis quan el divisor és un polinomi de grau 1 tal que el seu coeficient de grau 1 és també 1 i el terme independent és un nombre enter. Aquesta regla utilitza solament els coeficients dels polinomis implicats.

Què diu la regla de Ruffini? La regla de Ruffini és una manera senzilla i ràpida de fer la divisió entre dos polinomis quan el divisor és un polinomi de grau 1 amb coeficient de grau 1 igual a 1 i el terme independent un nombre enter. Aquesta regla permet fer la divisió utilitzant únicament els coeficients d'ambdós polinomis.

L'algoritme és el següent:

1) En primer lloc, se situen els coeficients del dividend, de major a menor (i posant 0 si és necessari en els termes que no existeixin), en la part superior. Es dibuixen dos segments perpendiculars formant una creu en la part inferior de la figura i se situa el terme independent del divisor, canviat de signe, entre els dos segments.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & -4 & 5 & -1 \\ +2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

2) Col·locats els coeficients del termes dels polinomis, es baixa el primer coeficient, es multiplica pel terme independent canviat de signe i se situa el resultat sota el coeficient següent:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & -4 & 5 & -1 \\ +2 & & \underbrace{10}_{+2\cdot 5} & & \\ \hline & 5 & & & \end{array}$$

3) Se sumen els dos nombres de la mateixa columna i es multiplica el resultat obtingut pel terme independent canviat de signe.

	5	−4	5	−1
+2		10	$\underbrace{12}_{+2\cdot 6}$	
	5	6		

4) Procedint de la mateixa manera, la divisió per Ruffini de $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ entre $x - 2$ s'expressa d'aquesta manera:

	5	−4	5	−1
+2		10	12	$\underbrace{34}_{+2\cdot 17}$
	5	6	17	33

5) Finalment, a partir de l'última fila de nombres, es pot extreure el quocient i el residu. El residu és l'últim nombre obtingut de les restes, 33 en aquest cas, mentre que el quocient de la divisió és un polinomi els coeficients del qual són la resta dels nombres d'aquesta fila, de major a menor grau. En aquest exemple, doncs, el quocient és $5x^2 + 6x + 17$. Tal com s'observa, ha baixat un grau respecte del polinomi inicial.

Amb això es conclou

$$5x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = \left(5x^2 + 6x + 17\right) \cdot (x - 2) + 33$$

4.2.4. Productes notables

En matemàtiques, s'utilitza el terme **identitat** per a fer referència a qualsevol igualtat entre dues expressions matemàtiques (i, per tant, siguin numèriques o algebraiques) que es compleix per a qualsevol valor de les seves variables.

Amb el terme **producte notable** es fa referència a certes multiplicacions entre expressions algebraiques. En particular, cada producte notable correspon a una fórmula de descomposició del producte que és producte de les propietats entre les operacions que hi intervenen.

Recordem aquí els productes notables principals que ja vam veure en el tema sobre nombres.

Productes de dues expressions algebraiques, amb variables a i b:

- **Quadrat d'una suma** $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$
- **Quadrat d'una diferència** $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
- **Suma per diferència** $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Productes notables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Producte de tres expressions algebraiques, amb variables a, b i c:

- **Cub d'una suma** $(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- **Cub d'una diferència** $(a-b)^3 = (a-b)\cdot(a-b)\cdot(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Exemple. Productes notables entre polinomis.

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3 + (3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$
$$\left(4x^2+5\right)\cdot\left(4x^2-5\right) = \left(4x^2\right)^2 - (5)^2 = 16x^4 - 25$$

4.3. Descomposició de polinomis

4.3.1. Teorema del residu

El valor numèric d'un polinomi és el resultat de substituir la variable del polinomi per un nombre. Si el valor numèric d'un polinomi és 0 per a un cert nombre, es diu que aquest nombre és una arrel (o zero) del polinomi. Un polinomi amb arrels es pot descompondre en polinomis de grau menor. Tot polinomi té un nombre d'arrels que no en supera el grau.

Per a trobar el residu d'una divisió de polinomis quan el divisor és un polinomi de grau 1 amb el coeficient de grau 1 igual a 1, es pot recórrer al valor numèric del dividend. El teorema del residu permet calcular aquest residu, ja que el residu d'una divisió d'aquest tipus és igual al valor numèric d'aquest polinomi quan la seva variable és igual al terme independent del divisor, canviat de signe. Aquesta propietat és la que es coneix com a teorema del residu, i s'expressa matemàticament de la manera següent:

Teorema del residu. Si $p(x)$ és un polinomi i a un nombre real,
el residu de la divisió de $p(x)$ entre $x-a$ és $p(a)$.

Això ens diu que, per exemple, el residu de la divisió de $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ entre $x-2$ és igual al valor numèric de $p(x)$ quan la x és igual a 2, és a dir, que el residu és $p(2)$.

Calculem $p(2) = 5\cdot 23 - 4\cdot 22 + 5\cdot 2 - 1 = 33$, i comprovem, mitjançant Ruffini (de l'apartat de la regla de Ruffini), que 33 és efectivament el residu de la divisió.

De la mateixa manera, el residu de la divisió de $q(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x - 1$ entre $x+1$ és igual al valor numèric de $q(x)$ quan la x és igual a -1, és a dir,

$$q(-1) = 3\cdot(-1)5 - 4\cdot(-1)3 + 2\cdot(-1)2 - (-1) - 1 = 3$$

D'aquesta manera, doncs, és fàcil trobar si un polinomi és divisible per un altre de grau 1 amb coeficient de grau 1 igual a 1: si el valor numèric del polinomi quan $x$és igual al terme independent del divisor, canviat de signe, és igual a 0, es pot assegurar que és divisible. En cas contrari no ho serà.

Per exemple, $p(x) = x^2 - 1$ és divisible entre $x+1$, ja que $p(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$. És fàcil comprovar-lo, ja que la divisió és exacta.

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1.$$

En aquest cas, doncs, es pot dir que $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

En definitiva, observem com el teorema del residu ajuda a descompondre un polinomi en termes de grau 1 quan això és possible.

4.3.2. Arrels i descomposició d'un polinomi

Es diu que un nombre a és una **arrel** o zero d'un polinomi $p(x)$ si es compleix que $p(a) = 0$, és a dir, si en substituir la variable pel valor a s'anul·la el valor numèric del polinomi.

Exemple. Arrels d'un polinomi.
1 i -1 són arrels (o zeros) del polinomi $p(x) = x^2 - 1$ perquè el valor del polinomi és 0 en substituir la variable x per aquests valors.

$$\begin{aligned} p(1) &= 1^2 - 1 = 0 \\ p(-1) &= (-1)^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

La **descomposició d'un polinomi**, de manera semblant a la descomposició d'un nombre, és la seva expressió com a producte de polinomis de menor grau, denominats factors. A l'hora de descompondre un polinomi, el més desitjable seria obtenir-ne la descomposició com un producte de polinomis de grau 1. En cas que això fos possible i que, per tant, es pogués descompondre completament tot polinomi de grau n, $p(x)$, en factors de grau 1, tindríem una expressió del tipus

$$p(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot ... \cdot (x - r_n)$$

on r_1, r_2, ..., r_n són les arrels del polinomi i a un nombre real. Però això no sempre és possible. Però d'aquesta descomposició màxima en factors reals es dedueix que un polinomi de grau n pot tenir n arrels reals com a màxim. Aquest fet, però, no es pot preveure *a priori*. Així mateix, quan els coeficients del polinomi són enters, no és complicat trobar la descomposició del polinomi, ja que les úniques arrels enteres que pot tenir han de ser valors divisors del terme independent del polinomi en qüestió.

Utilitzant el teorema del residu, és fàcil observar que si a és una arrel del polinomi $p(x)$, $p(x)$ pot descompondre's de la manera següent:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - a)$$

on $q(x)$ és un polinomi d'un grau menor que $p(x)$.
En l'exemple, $p(x) = x^2 - 1$, $p(x)$ es descompon en el producte de dos monomis $p(x) = (x-1)(x-(-1)) = (x-1)(x+1)$. Notem aquí com el polinomi té efectivament un nombre d'arrels igual al seu grau com a màxim.

La descomposició d'un polinomi permet calcular l'MCM (mínim comú múltiple) i l'MCD (màxim comú divisor) de dos o més polinomis de manera semblant al càlcul de l'MCM i l'MCD de diferents nombres.

Exemple. Càlcul de l'MCM i l'MCD de dos polinomis.

- $\boxed{\text{MCD}}\left(x^2-1,\, x^2-2x+1\right)=x-1$
- $\boxed{\text{MCM}}\left(x^2-1,\, x^2-2x+1\right)=(x-1)^2\,(x+1)=x^3-x^2-x+1$

ja que $x^2-1=(x-1)(x+1)$ i $x^2-2x+1=(x-1)^2$.

Per **factorització d'un polinomi**, $p(x)$, s'entén el procés d'expressar aquest polinomi com a producte de polinomis irreductibles. Es diu que un polinomi és irreductible (o primer) si els seus únics divisors són els trivials, és a dir, els polinomis constants i aquells que resulten de multiplicar $p(x)$ per una constant. Altrament, es parla de polinomi compost. Així, si considerem polinomis amb coeficients reals, els polinomis irreductibles o primers són tots els polinomis de grau i els polinomis de segon grau amb discriminant negatiu.

No hi ha una única manera de factoritzar un polinomi. D'acord amb la seva naturalesa, podem aplicar diferents propietats, entre les quals es poden destacar:

- Treure factors comuns: $6x^3-3x^2=3x^2\cdot(2x-1)$
- Aplicar productes notables: $x^2-16=(x+4)\cdot(x-4)$
- Resoldre l'equació associada al polinomi. Per exemple, donat el polinomi de segon grau, $p(x)=x^2-4x-12$, es tracta de trobar les solucions de l'equació de segon grau associada al polinomi: $x^2+4x-12=0$. En aplicar la fórmula de l'equació de segon grau, s'obtenen les solucions $x=2$ i $x=-6$ de manera que les arrels del polinomi són exactament 2 i -6. Per tant, $p(x)=(x-2)\cdot(x+6)$.
- Aplicar la regla de Ruffini. Si $p(x)=x^3+2x^2-9x-18$, les possibles arrels enteres són els divisors del terme independent, en aquest cas 18. Efectuem les divisions per Ruffini i obtenim els factors: $(x-3)$, $(x+3)$ i $(x+2)$. Per tant, $p(x)=(x-3)\cdot(x+3)\cdot(x+2)$.

Resum

Els polinomis

Definició Un polinomi és una expressió algebraica amb una única lletra, anomenada variable.

Per exemple, $9x^6 - 3x^4 + x - 6$ és un polinomi de variable x.

Elements

- **Terme:** cadascun dels sumands.
  Termes de l'exemple: $9x^6$, $-3x^4$, x, -6
- **Grau d'un terme:** exponent de la variable en aquest terme.
  En l'exemple, grau de $9x^6$*: 6, grau de* $-3x^4$*:* 4
- **Grau d'un polinomi:** grau major del polinomi.
  En l'exemple, grau del polinomi: 6
- **Terme independent:** el terme de grau 0 (el que no té variable).
  En l'exemple, terme independent: -6
- **Coeficient d'un terme:** nombre que multiplica la variable.
  En l'exemple, coeficient de $9x^6$*:* 9*, coeficient de* x*:* 1

Operacions bàsiques

- Suma

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\
+ & 5x^4 & -2x^3 & -5x^2 & -3x & +16 \\
\hline
 & 5x^4 & & -8x^2 & +x & +10
\end{array}$$

- Resta

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\
- & (5x^4 & -2x^3 & -5x^2 & -3x & +16) \\
\hline
 & -5x^4 & +4x^3 & +2x^2 & +7x & -22
\end{array}$$

- Producte

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & 2x^4 & -7x^3 & & +5x & -8 \\
 & \cdot & & & x^2 & -7x & +2 \\
\hline
 & 4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16 & \\
-14x^5 & +49x^4 & & +35x^2 & +56x & -16 & \\
2x^6 & -7x^5 & & +5x^3 & -8x^2 & & \\
\hline
2x^6 & -21x^5 & +53x^4 & -9x^3 & -43x^2 & +66x & -16
\end{array}
$$

- Quocient

$$
\begin{array}{ccccc|c}
6x^4 & -27x^3 & +15x^2 & & -48 & 2x^2-3x+4 \\
\cline{6-6}
-6x^4 & +9x^3 & -12x^2 & & & 3x^2-9x-12 \\
\cline{1-3}
0 & -18x^3 & +3x^2 & & & \\
 & +18x^3 & -27x^2 & +36x & & \\
\cline{2-4}
 & 0 & -24x^2 & +36x & -48 & \\
 & & +24x^2 & -36x & +48 & \\
\cline{3-5}
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Fraccions algebraiques

- Una fracció algebraica és una fracció entre polinomis.
- Equivalència de fraccions algebraiques:

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{si} \qquad a(x)\cdot q(x) = b(x)\cdot p(x)$$

- Per a sumar i restar, primerament s'han de reduir al mateix denominador utilitzant l'MCM de la descomposició dels denominadors. Si el denominador és el mateix, es poden sumar els numeradors directament.
- Per a multiplicar i dividir, se segueixen les mateixes regles que en la multiplicació i divisió de nombres fraccionaris: es multiplica en línia per al producte, i es multiplica en creu per al quocient.

Arrels i descomposició Sigui $p(x)$ un polinomi qualsevol, i a un nombre real. Aleshores, es defineix:

- **Valor numèric d'un polinomi.** $p(a)$ és el valor numèric del polinomi $p(x)$ quan $x = a$
  Exemple: si $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$, $p(1) = 5\cdot 13 - 4\cdot 12 + 5\cdot 1 - 1 = 5$. *Per tant,* 5 *és el valor numèric de* $p(x)$ *en* $x = 1$ *i escrivim* $p(1) = 5$.

- **Arrel d'un polinomi.** a és una arrel del polinomi $p(x)$ si $p(a) = 0$. En aquest cas, es verifica que $p(x) = q(x) \cdot (x - a)$, on $q(x)$ és un polinomi de grau menor que $p(x)$.
  Exemple: si $p(x) = x^2 - 1$, 1 *és una arrel de* $p(x)$ *perquè* $p(1) = 0$. *En aquest cas* $p(x) = (x + 1)(x - 1)$.

- **Teorema del residu.** El residu del quocient entre el polinomi $p(x)$ i $x - a$ és $p(a)$.
  Exemple: si $p(x) = x^2 - 1$, *el residu del quocient de* $p(x)$ *entre* $x - 3$ *és* $p(3) = 8$.

- **Descomposició d'un polinomi.** Procés que consisteix a expressar el polinomi en forma de producte d'altres polinomis de menor grau.
  Exemple:
  $$6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48 = \left(2x^2 - 3x + 4\right)\left(3x^2 - 9x - 12\right)$$
  Això vol dir que el polinomi $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48$ *es descompon en el producte dels polinomis* $2x^2 - 3x + 4$ *i* $3x^2 - 9x - 12$.

- **Regla de Ruffini.** Algoritme que permet dividir un polinomi entre un altre de grau 1 amb coeficient de grau 1 igual a 1. És útil per a descompondre polinomis.
  E*xemple, dividir* $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ *entre* $x - 2$*:*

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 5 & -4 & 5 & -1 \\ +2 & & 10 & 12 & 34 \\ \hline & 5 & 6 & 17 & 33 \end{array}$$

Resultat: $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = \left(5x^2 + 6x + 17\right)(x - 2) + 33$.

Exercicis resolts

1. **Quin valor numèric pren el polinomi** $p(x) = x^3 - 3x^2 + 8x - 24$ **quan** $x = -2$**? I quin valor numèric pren quan** $x = 3$**? És aquest polinomi divisible per** $x+2$**? I per** $x-3$**? Raona la resposta.**

Solució:

Per a trobar el valor numèric d'un polinomi, cal substituir la variable del polinomi pel valor que volem que prengui aquesta. Així:

- Si $x = -2$ $\quad p(-2) = (-2)^3 - 3\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) - 24 = -8 - 12 - 16 - 24 = -60$
- Si $x = 3$ $\quad p(3) = (3)^3 - 3\cdot(3)^2 + 8\cdot(3) - 24 = 27 - 27 + 24 - 24 = 0$

Pel teorema del residu, sabem que si és un polinomi i un nombre real, el residu de la divisió de $p(x)$ entre $x - a$ és $p(a)$. Per tant, pels càlculs anteriors, sabem que

- $p(-2) = -60$ és el residu de la divisió $p(x)$ entre $x + 2$
- $p(3) = 0$ és el residu de la divisió $p(x)$ entre $x - 3$

Per altra banda, es diu que un polinomi és divisible per un segon polinomi quan, en dividir aquest primer polinomi entre el segon el residu és 0. Per tant, vist quin és el residu en cada cas, podem afirmar que el polinomi $x^3 - 3x^2 + 8x - 24$ és divisible per $x - 3$ però que no és divisible per $x + 2$.

2. **Calcula el valor de** m **perquè els quocients tinguin residu** 0**:**

(a) $(x^3 - 4x^2 - 19x + m) \div (x - 7)$

(b) $(mx^4 - 6x^3 - 5x^2 + 19x - 12) \div (x - 3)$

Solució:

Per a estudiar els residus d'aquests quocients, podem aplicar l'algoritme de la divisió entre polinomis. Tenint en compte, però, que els polinomis quocients són polinomis de grau 1, amb coeficient de grau 1 igual a 1, podem estudiar els residus obtinguts aplicant també el mètode de Ruffini. Estudiem, doncs, el primer cas aplicant el mètode de Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & +1 & -4 & -19 & m \\ +7 & & +7 & +21 & +14 \\ \hline & +1 & +3 & +2 & 14+m \end{array}$$

i com que volem que $14 + m = 0 \Leftrightarrow m = -14$
Per tant, el residu de $(x^3 - 4x^2 - 19x + m) \div (x - 7)$ serà 0 quan $m = -14$.

Pel teorema del residu, sabem que si $p(x)$ és un polinomi i a un nombre real, el residu de la divisió de $p(x)$ entre $x - a$ és $p(a)$. Apliquem, doncs, aquest teorema per estudiar el residu del segon quocient, on $p(x) = mx^4 - 6x^3 - 5x^2 + 19x - 12$ i $x - a = x - 3$, és a dir, amb $a = 3$

$$p(3) = m\cdot(3)^4 - 6\cdot(3)^3 - 5\cdot(3)^2 + 19\cdot(3) - 12 = 81m - 162 - 45 + 57 - 12 = 81m - 162$$

i com que volem que $81m - 162 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{162}{81} = 2$
Per tant, el residu de $p(x)$ entre $x - 3$ serà 0 quan $m = 2$.

3. **Troba l'MCM i l'MCD dels polinomis** $p(x) = x^4+5x^3-3x^2-13x+10$ **i** $q(x) = x^2+6x+5$**.**

Solució:

Per a poder determinar l'MCM i l'MCD de dos polinomis cal, en primer lloc, trobar-ne la factorització.
Factoritzem el primer polinomi, $p(x)$ mitjançant la regla de Ruffini. Per a això, estudiem primerament quins són els divisors del seu terme independent, ja que seran els candidats a ser-ne les arrels. Els divisors de 10 són $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$. Trobats els divisors, apliquem Ruffini fins a arribar a un polinomi irreductible.

	+1	+5	−3	−13	+10
+1		+1	+6	+36	-10
	+1	+6	+3	−10	0
+1		+1	+7	+10	
	+1	+7	+10	0	
-2		−2	−10		
	+1	+5	0		
-5		−5			
	+1	0			

A partir de Ruffini concloem que el polinomi $p(x)$ té quatre arrels reals, de les quals una és doble. Aquestes són la doble arrel +1, i les arrels simples −2 i −5. Per tant, la factorització del polinomi és

$$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 13x + 10 = 1 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x+5)$$

Per a factoritzar el segon polinomi, $q(x)$ considerarem l'equació de segon grau associada a ell, $x^2 + 6x + 5 = 0$ i la resoldrem aplicant la fórmula de l'equació de segon grau.

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 4}{2} = -3 \pm 2 = \{-5, -1\}$$

Trobades les solucions de l'equació associada, podem afirmar que les arrels del polinomi $q(x)$ són −5 i −1 i que factoritza, per tant, $q(x)$ en

$$x^2 + 6x + 5 = (x+1) \cdot (x+5)$$

Trobada la factorització dels dos polinomis, podem calcular ràpidament el seu MCM i el seu MCD d'acord amb la definició de MCM i MCD.

- $\text{MCD}\big(x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 13x + 10,\ x^2 + 6x + 5\big) = x + 5$
- $\text{MCM}\big(x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 13x + 10,\ x^2 + 6x + 5\big) = (x+5)(x-1)^2(x+2)(x+1)$

4. **Determina per a quin o quins valors de m es pot simplificar la fracció algebraica següent:**

$$\frac{x^3 - 5x^2 + mx - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

Solució: Per a poder simplificar una expressió algebraica, cal que el numerador i el denominador de la fracció tinguin factors comuns. Per tant, convé estudiar la factorització dels dos polinomis. En aquest cas, com que el polinomi denominador no depèn de m, ens interessa començar per la seva factorització. Com que es tracta d'un polinomi de segon grau, trobarem la seva factorització resolent l'equació de segon grau associada a ell:

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Resolem l'equació de segon grau aplicant la fórmula coneguda.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 = \{-1, 3\}$$

Resolta l'equació, hem trobat que el polinomi denominador té dues arrels reals diferents −1 i 3 i que, per tant, factoriza en $(x+1) \cdot (x-3)$.
Per a poder simplificar la fracció algebraica, caldrà que el numerador també factoritzi en algun d'aquests factors, el que implica que $x = -1$ o $x = 3$ són arrels del polinomi numerador.

Pel teorema del residu, sabem que si $p(x)$ és un polinomi i a un nombre real, el residu de la divisió de $p(x)$ entre $x - a$ és $p(a)$. Per altra banda, també sabem que si el valor numèric d'un polinomi és 0 per a un cert nombre, es diu que aquest nombre és una arrel (o zero) del polinomi.

Per tant, es tracta de veure per quins valors de m les arrels del polinomi denominador són també arrels del polinomi numerador. Per això, calcularem el valor numèric del polinomi numerador en les arrels del polinomi denominador per intentar trobar per quines m s'anullla el valor numèric trobat:

- si $x = -1$ $\quad (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) - 3 = -1 - 5 - m - 3 = -m - 9$ i $-9 - m = 0 \Leftrightarrow m = -9$
- si $x = +3$ $\quad (+3)^3 - 5 \cdot (+3)^2 + m \cdot (+3) - 3 = 27 - 45 + 3m - 3 = 3m - 21$ i $3m - 21 = \Leftrightarrow m = +7$

Per tant, la fracció algebraica donada es podrà simplificar quan $m = -9$ o $m = 7$.

Exercicis per a practicar amb les solucions

5. **Troba el quocient i el residu de les divisions següents:**

(a) $(x^3 + 5x^2 - 8) \div (x^2 + 4)$

(b) $(x^5 - x^3 - x) \div (x^3 + 2x)$

(c) $(x^7 + 5x^6 - 3x^4 + 15x^3 + 7x^2 - 10x) \div (x^4 + 3x)$

(d) $(2x^5 - 12x^4 - 3x^3 + 34x^2 - 19) \div (2x^2 - 3)$

6. **Utilitza la regla de Ruffini per a trobar el quocient i el residu de les divisions següents:**

(a) $(x^5 + 3x - 4) \div (x + 2)$

(b) $(x^4 - 6x) \div (x - 3)$

(c) $(x^7 - 2x^5 + x^3) \div (x - 2)$

(d) $(x^4 + 6x^3 - 2x - 5) \div (x - 1)$

7. **Dedueix (sense fer-les i sense aplicar la regla de Ruffini) el residu de les divisions següents:**

(a) $(x^4 - x^3 - x^2 + 3) \div (x - 2)$

(b) $(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1) \div (x - 1)$

(c) $(x^3 - 6x^2 + 3x + 2) \div (x - 5)$

(d) $(x^3 - 2x + 4) \div (x + 3)$

(e) Què has fet servir per a trobar aquests residus?

Solucions:

5. (a) $q(x) = x + 5$ i $r(x) = -4x - 28$

(b) $q(x) = x^2 - 3$ i $r(x) = 5x$

(c) $q(x) = x^3 + 5x^2 - 6$ i $r(x) = 7x^2 + 8x$

(d) $q(x) = x^3 - 6x^2 + 8$ i $r(x) = 5$

6. (a) $q(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 19$ i $r(x) = -42$

(b) $q(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 21$ i $r(x) = 63$

(c) $q(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 18x + 36$ i $r(x) = 72$

(d) $q(x) = x^3 + 7x^2 + 7x + 5$ i $r(x) = 0$

7. (a) $r = 7$

(b) $r = 6$

(c) $r = -8$

(d) $r = -17$

(e) El teorema del residu.