Iniciació a les matemàtiques per a l'enginyeria

PID_00270074

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat
Oberta
de Catalunya

5. Matrius

Índex

5.1. Matrius: tipus i elements

Una matriu és un conjunt de nombres organitzats en m files i n columnes (m i n nombres naturals), i tancats entre dos parèntesis.

Exemple. Algunes matrius.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -7 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 23 \\ 6 & 11 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Si una matriu té m files i n columnes, es diu que té dimensió $m \times n$ o bé que és d'ordre (m, n).

Exemple. Dimensió d'una matriu.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 23 \\ 6 & 11 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Podem dir que A és una matriu d'ordre $(2, 4)$ o bé que té dimensió 2×4.

En forma general, una matriu $m \times n$ s'escriu de la manera següent:

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} & & \text{columna n} & \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} & \begin{array}{ccccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} & & \text{columna n} \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \text{fila 3} \\ \\ \text{fila m} \end{array} \end{array}$$

o bé de manera simplificada:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

on el primer subíndex i indica la fila i el segon j la columna. Moltes vegades s'ometen els possibles valors de i i j i s'escriu simplement $A = (a_{ij})$.

Així, a partir dels subíndexs podem identificar l'element de la fila i i columna j de la matriu A com a a_{ij}.

Exemple. Identifiquem elements de la matriu.
En la matriu següent B, es poden identificar alguns dels elements:

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} \end{array} \\ B = & \begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \boxed{-1} \\ 2 & \boxed{-3} & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \text{fila 3} \end{array} \end{array}$$

Veiem que els elements marcats en verd són: $b_{\underset{\text{fila}}{1}\,\underset{\text{columna}}{1}} = 3$, $b_{\underset{\text{fila}}{2}\,\underset{\text{columna}}{3}} = -1$ i $b_{\underset{\text{fila}}{3}\,\underset{\text{columna}}{2}} = -3$

Si comparem dues matrius $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ de la mateixa dimensió, direm que són iguals sempre que tots els seus elements siguin iguals i ocupin les mateixes posicions, és a dir si

$$(a_{ij}) = (b_{ij}) \qquad \text{si} \qquad a_{ij} = b_{ij} \qquad \text{per a qualssevol} \quad i, j.$$

Matrius importants Hi ha matrius que per les seves propietats, estructura, forma, ... són més utilitzades que la resta. N'identifiquem algunes:

- **Matriu quadrada.** És una matriu que té el mateix nombre de files que de columnes, és a dir, té dimensió $n \times n$. Habitualment, per matrius quadrades entenem matrius d'ordre n.

- **Matriu diagonal.** La *diagonal* d'una matriu és formada per aquells elements la fila i la columna dels quals tenen el mateix nombre, és a dir, a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... Quan una matriu quadrada té tots els elements 0 excepte els de la diagonal, diem que és una matriu diagonal.

Exemple. Matrius diagonals.

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{8} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

- **Matriu nul·la.** És una matriu en què tots els seus elements són 0. Normalment, es denota per 0_{mn}, on $m \times n$ és la dimensió de la matriu.

- **Matriu identitat.** És una matriu diagonal en la qual tots els elements de la diagonal són 1. La matriu identitat de dimensió d'ordre n s'indica amb I_n.

Exemple. Matrius identitat.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriu triangular.** És una matriu quadrada en què tots els elements situats per sota o per sobre de la diagonal són 0. En cas que els elements per sota la diagonal siguin 0, parlarem de *matriu triangular superior*. En canvi, si els elements situats a sobre la diagonal són zero parlarem de *matriu triangular inferior*.

Exemple. Matrius triangulars.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

En aquest cas la matriu A és una matriu triangular superior i la matriu B és triangular inferior.

- **Matriu transposada.** La matriu transposada d'una matriu A es denomina A^T i és la matriu que resulta de canviar files per columnes en la matriu A.

Exemple. Matriu transposada.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -7 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -7 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Es pot observar que, per exemple, la primera fila d'A $(-1\ 3\ 5)$ coincideix amb la primera columna de la transposada. Es pot comprovar que això passa en tots els parells files/columnes.

- **Matriu simètrica.** És aquella que coincideix amb la seva transposada.

Exemple. Matriu simètrica

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Veiem que si calculem A^T obtenim la mateixa matriu.

5.2. Operacions bàsiques

$\boxed{\text{Suma i resta}}$ Dues matrius es poden sumar o restar únicament si les seves dimensions són les mateixes. En aquest cas, la suma de les matrius és igual a la suma ordenada dels elements que ocupen la mateixa posició, i el resultat de la qual s'haurà de posar en la mateixa posició de la matriu suma; és a dir, si $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ són matrius de dimensió $m \times n$,

La suma és $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

La resta és $A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$

Exemple. Suma i resta de matrius.

Es consideren aquestes matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

En primer lloc, veiem que no es poden sumar ni restar A amb C, ni tampoc B amb C, perquè no tenen la mateixa dimensió. En canvi es pot fer la suma i la resta d'A i B, de la manera següent:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & \boxed{2+1} & -3-3 \\ 2+2 & 1+0 & -2-1 \\ -1+3 & 3+4 & 1+2 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{3} & -6 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Es pot comprovar que la suma de l'element de la fila 1 i columna 2 (en verd) de la matriu A se suma amb l'element que ocupa la mateixa posició en la matriu B, i el resultat ocupa la mateixa posició en la matriu suma $2 + 1 = 3$. Així, es fa la suma amb tots els parells d'elements de les matrius A i B.

De manera semblant, es fa la resta d'ambdues matrius:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En aquest cas, en lloc de sumar, es resten els elements de la segona matriu dels elements de la primera. Per exemple, de l'element de la fila 1 i columna 2 (en verd) de la matriu A, es resta l'element que ocupa la mateixa posició en la matriu B, i el resultat ocupa la mateixa posició en la matriu resta: $2 - 1 = 1$.

Propietats de la suma de matrius. Són molt semblants a les propietats de la suma de nombres tenint en compte que només podem sumar matrius de la **mateixa dimensió**:

- **Commutativa:** $A + B = B + A$

- **Associativa:** $A + B + C = A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Element neutre:** hi ha una matriu, denominada element neutre, que, sumada a qualsevol altra matriu A de la mateixa dimensió, té com a resultat sempre A. Aquesta matriu és la matriu nul·la.
- Tota matriu té un **element oposat**, que sumat amb l'original resulta l'element neutre. L'element oposat d'A és $-A$.

Exemple. Element oposat de la suma.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ +1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

ja que

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ +1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Producte per un escalar El producte d'una matriu per un escalar (un nombre real) sempre es pot calcular i consisteix a multiplicar tots els elements de la matriu per aquest nombre. És a dir, si r és un nombre real, i $A = (a_{ij})$ és una matriu, el producte de la matriu per l'escalar és

$$r \cdot A = r \cdot (a_{ij}) = (r \cdot a_{ij})$$

Propietats del producte per un escalar

- **Commutativa:** $r \cdot A = A \cdot r$
- **Associativa:** $(r_1 \cdot r_2) \cdot A = r_1 \cdot (r_2 \cdot A)$
- **Element neutre:** hi ha un escalar, denominat element neutre, que multiplicat a qualsevol matriu A té com a resultat sempre A. Aquest és el nombre 1.
- **Distributiva:** en aquest cas en tenim de dos tipus:
  - escalar $r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B$
  - de matriu $(r_1 + r_2) \cdot A = r_1 \cdot A + r_2 \cdot A$

Exemple. Producte per un escalar.
Si continuem amb la mateixa matriu A dels exemples anteriors i la multipliquem per l'escalar 3,

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 6 & 3 & -6 \\ -3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Per a dividir una matriu per un nombre, s'ha de multiplicar aquesta matriu per l'invers del nombre.

Producte de matrius Per a multiplicar dues matrius, A i B, i obtenir la matriu producte $A \cdot B$, s'ha de comprovar que el nombre de columnes de la matriu A coincideixi amb el nombre de files de la matriu B. És a dir, si A és una matriu de dimensió $m \times n$, només es pot multiplicar per la matriu B si aquesta té dimensió $n \times r$. En el cas que això sigui així, la matriu producte, $P = A \cdot B$, té dimensió $m \times r$, és a dir, el mateix nombre de files que la matriu A i el mateix nombre de columnes que la matriu B. En resum, les dimensions de les matrius el producte quedarien

$$(\boxed{m} \times \boxed{n}) \cdot (\boxed{n} \times \boxed{r}) = \boxed{m} \times \boxed{r}$$

Per a trobar l'element p_{ij}, s'han de multiplicar ordenadament els elements de la fila i de la matriu A pels elements de la columna j de la matriu B i s'obté p_{ij} com la suma de tots aquests productes.

Exemple. Producte de matrius.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En primer lloc, observem que $A \cdot B$ es pot calcular perquè A té 3 columnes i B té 3 files. La matriu resultant tindrà 4 files (igual que A) i 2 columnes (igual que B). En canvi, $B \cdot A$ no es pot calcular, perquè B té 2 columnes, mentre que A té 4 files.

Per a trobar l'element p_{11} (en vermell) de la matriu producte $P = A \cdot B$, s'han de multiplicar ordenadament els elements de la fila 1 de la matriu A (en verd) pels elements de la columna 1 de la matriu B (en blau):

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} & \boxed{3} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 \\ \boxed{1} & 2 \\ \boxed{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{p_{11}} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & p_{42} \end{pmatrix}$$

és a dir,

$$\boxed{p_{11}} = \boxed{2} \cdot \boxed{2} + \boxed{(-1)} \cdot \boxed{1} + \boxed{3} \cdot \boxed{0} = \boxed{3}$$

Ara, per a trobar p_{12}, s'ha de multiplicar la fila 1 (en verd) per la columna 2 (en blau):

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{-1} & \boxed{3} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \boxed{3} \\ 1 & \boxed{2} \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \boxed{p_{12}} \\ p_{21} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & p_{42} \end{pmatrix}$$

és a dir,

$$\boxed{p_{12}} = \boxed{2} \cdot \boxed{3} + \boxed{(-1)} \cdot \boxed{2} + \boxed{3} \cdot \boxed{1} = \boxed{7}$$

I així successivament fins a trobar el producte.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \\ 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Així, doncs, es pot dir en general que si $A = (a_{ij})$ és una matriu $m \times n$ i $B = (b_{ij})$ és una matriu $n \times r$, la matriu producte d'A per B, $P = (p_{ij}) = A \cdot B$, és una matriu

$m \times r$, i els seus elements es calculen de la manera següent:

$$p_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Propietats del producte de matrius

- **Associativa:** $A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- L'**element neutre del producte de matrius quadrades** és la matriu identitat, I_n. És a dir, si A és una matriu quadrada de dimensió $n \times n$, es compleix que $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.
- De vegades (encara que no sempre), hi ha matrius quadrades que tenen **element invers**. Aquesta matriu, quan existeix, es denomina **inversa**. També es diu que la matriu A és invertible. La matriu inversa d'una matriu quadrada de dimensió $n \times n$ A s'indica A^{-1} , i compleix
$$A \cdot A^{-1} = I_n \quad \text{i} \quad A^{-1} \cdot A = I_n$$
- En general, el **producte de matrius NO és commutatiu**. És a dir, si A i B són dues matrius, quan es poden fer els productes $A \cdot B$ i $B \cdot A$, generalment
$$A \cdot B \neq B \cdot A$$
encara que algunes vegades (molt poques) podria ser igual.

5.3. Determinant d'una matriu

Per a cada **matriu quadrada** es pot definir un nombre que és de gran ajuda, entre altres coses, per a determinar si aquesta matriu és invertible, i, en cas afirmatiu, també és imprescindible per a calcular la inversa d'aquesta matriu. Aquest nombre es denomina **determinant de la matriu**. S'escriu $det(A)$ o $|A|$, on A és el nom de la matriu.

Per a indicar el determinant d'una matriu, els seus elements s'han de posar entre dos segments verticals i no entre parèntesis.

Exemple. Notació pel determinant d'una matriu.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{El seu determinant s'indica}} det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

5.3.1. Mètode de càlcul

Es definirà el determinant de manera recursiva, és a dir, primer per a matrius de dimensió 1×1, a continuació per a matrius de dimensió 2×2, i així successivament.

Determinant d'una matriu 1×1 És igual al nombre que compon la matriu.

Exemple. Determinant 1×1.

$$\text{si } A = (3) \qquad \det(A) = |3| = 3$$

Determinant d'una matriu 2×2 És igual al producte dels elements de la diagonal menys el producte dels altres dos elements.

Exemple. Determinant 2×2.

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 6$$

Determinant d'una matriu 3×3 Es calcula sumant aquests tres productes,

Els determinants van aparèixer a les matemàtiques molt abans (s. XV) que les matrius (s. XX). El terme matriu va ser creat per James Joseph Sylvester fent entendre que era la "mare" dels determinants.

i restant aquests tres productes,

és a dir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} \\ &\quad -a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{aligned}$$

Aquesta regla gràfica per facilitar el càlcul dels determinants d'ordre 3 s'anomena **regla de Sarrus**.

Exemple. Determinant 3×3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} = 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot(-2)\cdot(-1) + 2\cdot(-3)\cdot 3 - (-1)\cdot 1\cdot(-3) \\ -2\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot(-2)\cdot 3 = -14 \end{array}$$

$\boxed{\text{Determinant de matrius } 4 \times 4}$ En aquest cas s'ha de descompondre el determinant. Triem una fila o columna i desenvolupem per aquesta. Per exemple, si triem la primera columna,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

És a dir, es tracta de multiplicar cada element de la fila o columna triada pel determinant de la matriu 3×3 que resulta d'eliminar la fila i la columna corresponent a aquest element. A més, s'han d'**alternar els signes** sabent que l'element a_{11} té sempre el signe +. Per exemple, l'element a_{11} s'ha de multiplicar pel determinant de la matriu que resulta d'eliminar la fila 1 i la columna 1, és a dir,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{S'elimina la fila 1 i la columna 1}} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

L'element a_{21}, aquesta vegada **canviat de signe**, s'ha de multiplicar pel determinant de la matriu que resulta d'eliminar la fila 2 i la columna 1, és a dir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{S'elimina la fila 2 i la columna 1}} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

i se segueix d'aquesta manera amb tots els elements de la primera columna.

El determinant que resulta d'eliminar la fila i i la columna j se l'anomena **menor complementari de l'element** a_{ij}, i s'indica α_{ij} (α, alfa, és la primera lletra de l'alfabet grec).

Per exemple, en el cas de la matriu 4×4 anterior, el menor complementari d'a_{31} és

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Així, doncs, l'expressió que calcula el determinant 4×4 es pot simplificar encara més:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} - a_{41}\alpha_{41}$$

Aquest mètode es pot utilitzar també per calcular els determinants de matrius d'ordre 2 i d'ordre 3.

El càlcul del determinant es pot fer amb qualsevol columna (o fila) de la matriu (tenint en compte els signes). S'ha utilitzat tan sols la primera columna per a simplificar l'explicació.

Exemple. Determinant matriu 4×4.

Triem la primera columna.

$$\begin{vmatrix} \boxed{2} & -1 & 3 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & -2 & 6 \\ \boxed{0} & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{2}\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \boxed{1}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \boxed{2}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \boxed{0}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 9$$

També hauríem pogut calcular-lo desenvolupant per una altra fila o columna. Si triéssim la segona fila quedaria

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\boxed{1}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \boxed{0}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \boxed{2}\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \boxed{3}\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

$\boxed{\text{Determinant de qualsevol matriu quadrada}}$ Se segueix el mateix procediment que en matrius 4×4: es multiplica cada element de la fila o columna que escollim pel seu menor complementari. A més, s'han d'alternar els signes començant sempre per l'element a_{11} que té signe $+$. És a dir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} - \ldots + (-1)^{n+1} a_{\mathrm{n}1}\alpha_{\mathrm{n}1}$$

Recordem que el càlcul del determinant es pot fer amb qualsevol columna (o fila) de la matriu (tenint en compte els signes).

5.3.2. Propietats dels determinants

Tenim un conjunt de propietats que es compleixen per a determinants que qualsevol ordre. Aquestes propietats ens poden ajudar a simplificar els càlculs.

1) El determinant d'una matriu coincideix amb el de la seva transposada

$$det(A) = det(A^T)$$

2) Si intercanviem dues files o dues columnes, el determinant és el mateix però canvia de signe.

3) Si multipliquem tota una fila o una columna per un valor k, el determinant queda multiplicat per k. En particular, si tenim una matriu d'ordre n, $\det(k \cdot A) = k^n \cdot det(A)$.

4) Si la matriu té dues files o dues columnes iguals o proporcionals (és a dir, és la mateixa multiplicada per un nombre), el determinant val 0.

5) Si la matriu té una fila o columna de zeros, el determinant és 0.

6) Si a una fila o columna se suma una altra multiplicada per una constant, el determinant no varia.

7) El determinant d'una matriu triangular és el producte dels valors de la diagonal.

8) El producte de determinants és igual al determinant del producte.

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B).$$

Moltes vegades s'utilitza la propietat 7 per a aconseguir una fila o columna amb el màxim de 0 possibles i així reduir els càlculs a l'hora de calcular el determinant de la matriu desenvolupant per aquella fila o columna.

5.3.3. Matriu d'adjunts

Relacionat amb el concepte de menors complementaris, i també com a eina per a calcular la matriu inversa (en cas que n'hi hagi), podem definir l'**'adjunt d'un element**

de la matriu.

L'adjunt de l'element a_{ij} de la matriu A s'indica amb A_{ij} i es defineix de la manera següent:

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{\mathrm{i}+j}\alpha_{ij} \quad \text{on } \alpha_{ij} \text{ és el menor complementari de } a_{ij}$$

Es pot observar que si $i+j$ és un nombre parell, $A_{ij} = \alpha_{ij}$. En canvi, si $i+j$ és un nombre senar, $A_{ij} = -\alpha_{ij}$. És a dir, el signe que s'ha d'anteposar al menor complementari per a obtenir l'element corresponent adjunt es regeix per la matriu de signes següent:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots & \dots \\ - & + & - & \dots & \dots \\ + & - & + & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & - \\ \dots & \dots & \dots & - & + \end{pmatrix}$$

Per exemple, l'adjunt de l'element a_{34} és $A_{34} = (-1)^{3+4}\alpha_{34} = -\alpha_{34}$. La matriu formada per tots els adjunts dels elements de la matriu A s'anomena **matriu d'adjunts** d'A, i s'indica habitualment amb A', tot i que a vegades també podem trobar $\mathsf{Adj}(A)$.

Cal vigilar amb aquesta definició, ja que hi ha una definició alternativa (també usada) en la qual es considera la matriu d'adjunts com la matriu transposada a A'.

5.4. Matriu inversa

> Una matriu quadrada $n\times n$ **es pot invertir sempre que el seu determinant no sigui** 0**.**

Per a trobar la inversa d'una matriu A haurem de calcular primer la seva matriu d'adjunts. Una vegada trobada la matriu d'adjunts d'A, és molt senzill trobar la matriu inversa d'A a partir de la fórmula següent:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(A'\right)^T}$$

Dit d'una altra manera, la m matriu d'adjunts, transposada i dividida entre el valor del determinant d'A. És evident que, com ja s'ha dit, el determinant d'A ha de ser diferent de 0; en cas contrari, la fórmula no es pot aplicar. Alternativament, podem calcular primer la transposada de la matriu i després la matriu d'adjunts

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(A^T\right)'}$$

Exemple. Càlcul de la matriu inversa.

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ volem calcular A^{-1}.

Comencem calculant-ne el determinant: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -14.$

Seguidament, calculem la matriu d'adjunts i la seva transposada:

$$\mathrm{A}' = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 \\ -11 & -2 & -5 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{A}')^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 7 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Per tant, la inversa d'A és

$$A^{-1} = \frac{-1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{11}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{14} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

Comprovem que és efectivament la inversa veient que satisfà $A \cdot A^{-1} = I_3$ i també $A^{-1} \cdot A = I_3$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{-1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{14} \begin{pmatrix} -14 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3$$

$$A^{-1} \cdot A = \frac{-1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -11 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 7 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{14} \begin{pmatrix} -14 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3$$

Càlcul pel mètode de Gauss. Un altre mètode per a trobar la matriu inversa és el de Gauss. En aquest mètode partim d'una matriu dividida en dues parts: en la primera part (esquerra) col·loquem la matriu donada $A = (a_{ij})$ i en la segona part (dreta) la matriu identitat. Per a una matriu 3×3, ens quedaria

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Després apliquem transformacions lineals (veurem tot seguit quines són les transformacions permeses) a les files de la matriu fins a arribar a una matriu en què la matriu identitat estigui a la primera part (esquerra)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right)$$

Aleshores la matriu inversa és la que ens ha quedat en la segona part (b_{ij})

Les transformacions lineals que podem fer són:

- Canviar l'ordre de les files.
- Multiplicar una fila per un nombre que no sigui 0.
- Sumar a una fila una altra multiplicada per un nombre diferent de 0.

Aquestes transformacions s'han de fer simultàniament en les dues parts de la matriu.

Normalment s'indica quines són les transformacions que fem a cada pas escrivint com s'ha obtingut la nova fila. Denotem per Fi la fila i i Cj la columna j. Podem veure-ho en el següent exemple.

Exemple. Càlcul de la matriu inversa pel mètode de Gauss.

Busquem la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3=F3-2\cdot F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F3=F3+3\cdot F2]{F2=(-1)\cdot F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F1=F1-2\cdot F2]{F3=(-1)\cdot F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F1=F1-F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Per tant, la matriu inversa d'A és

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

5.5. Resolució de sistemes

Un sistema d'equacions lineals amb m equacions i n incògnites com el següent,

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 & +a_{12}\cdot x_2 & +\ldots & +a_{1n}\cdot x_n & = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 & +a_{22}\cdot x_2 & +\ldots & +a_{2n}\cdot x_n & = b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}\cdot x_1 & +a_{m2}\cdot x_2 & +\ldots & +a_{mn}\cdot x_n & = b_m \end{cases}$$

es pot expressar en forma matricial de la manera següent:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$

Aquesta manera d'escriure'l es denomina **equació matricial**. Ens fixem que és del tipus

$$A \cdot X = B,$$

on A s'anomena matriu associada al sistema, B el vector de termes independent, i on X és una matriu $n \times 1$ d'incògnites.

Conceptes previs. Per a conèixer el nombre de solucions d'un sistema matricial, s'han d'introduir alguns conceptes: menor d'ordre k, rang d'una matriu i matriu ampliada d'un sistema matricial.

$\boxed{\text{Menor d'ordre } k}$ Donada una matriu A, si se seleccionen k files i k columnes de la matriu, i es calcula el determinant d'aquestes $k$files i $k$columnes, a aquest determinant se l'anomena **menor d'ordre** k de la matriu A. En cas que s'escullin totes les files excepte una, i totes les columnes excepte una, ens trobem, com és sabut, davant un menor complementari.

Exemple. Menor d'ordre k.

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{eliminant files 1,2} \\ \text{i columnes 2,3}}]{\text{menor d'ordre 2}} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$\boxed{\text{Rang d'una matriu}}$ És l'ordre màxim dels menors de la matriu que no són 0. El rang d'una matriu A s'indica $rang(A)$. Per a trobar-lo, s'han de calcular tots els menors d'ordre màxim per si n'hi ha algun de diferent de 0. Si no és així, es calculen tots els menors d'ordre una unitat menor per si n'hi ha algun de diferent de 0. I així successivament. L'ordre del primer menor diferent de 0 serà el rang de la matriu.

Exemple. Rang d'una matriu.

En el cas de la matriu anterior s'observa que el determinant és 0 (és a dir, el menor d'ordre 4 és 0), així que s'ha de comprovar si hi ha algun menor d'ordre 3 que no sigui 0.

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{eliminant fila 1} \\ \text{i columna 1}}]{\text{menor d'ordre 3}} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

Per tant, aquesta matriu té rang 3 perquè un dels seus menors d'ordre 3 no és 0 i el d'ordre 4 és 0.

$\boxed{\text{Matriu ampliada}}$ Si considerem el sistema matricial $A \cdot X = B$, la matriu ampliada és la matriu formada per la matriu A més la columna B. Generalment, aquestes dues parts de la matriu ampliada se separen per una línia i s'indica la matriu ampliada per A^*.

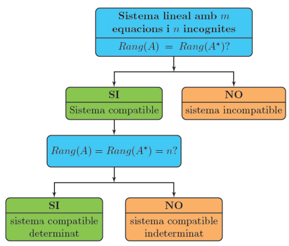
En el sistema matricial inicial, la matriu ampliada és:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

Discussió de sistemes. Donat un sistema matricial $A \cdot X = B$, on A és una matriu $m \times n$ (m és el nombre d'equacions i n el nombre d'incògnites) ens podem trobar amb tres tipus diferents de sistemes segons el nombre de solucions que tenen. No cal que intentem calcular les solucions per a saber de quin tipus de sistema es tracta; n'hi ha prou de calcular el rang de la matriu associada al sistema A i el rang de la matriu ampliada A^*. Vegem-ne els diferents casos:

- El sistema **no té solució** si el rang de la matriu A i el de la matriu ampliada A^* són diferents, és a dir, si
$$rang(A) \neq rang(A^*).$$
- El sistema **té solució** en els casos què el rang de la matriu A i el de la matriu ampliada són iguals.
$$rang(A) = rang(A^*)$$
Aleshores hem de comprovar si coincideix amb el nombre d'incògnites (n); es poden donar els casos següents:
  - Si $\boxed{rang(A) = n,}$ la solució és única, és a dir, hi ha una única matriu X que

Podem resumir el teorema de Rouché-Frobenius amb amb l'esquema següent



compleix que $A \cdot X = B$.

- Si $\boxed{rang(A) < n,}$ la solució no és única; de fet, en aquestes condicions, el sistema té infinites solucions.

Aquest resultat es coneix com el **teorema de Rouché-Frobenius**.

Exemple. Discussió d'un sistema. Donat el sistema d'equacions lineals

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & +z & -w & = 1 \\ & +y & -z & +w & = -1 \\ 3x & & +6z & -6w & = 6 \\ & -y & +z & -w & = 1 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{equival a}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si calculem els rangs de les matrius A i A^* obtenim

$$rang(A) = rang(A^*) = 2 < n = 4$$

Per tant, aquest sistema té infinites solucions (com es pot comprovar en el tema dedicat a sistemes d'equacions).

5.5.1. Amb la matriu inversa

Per a resoldre el sistema, ens trobem amb dos casos: que el sistema té una única solució o que en té infinites.

Si el sistema matricial $A \cdot X = B$ té **solució única** (si es compleix que $\boxed{rang(A) = rang(A^*) = n}$), es tria un menor d'ordre n de la matriu A que no sigui 0 (la submatriu d'aquest menor s'anomena $\overline{A}$) i es trien les files de B que coincideixin amb les files de la submatriu del menor d'ordre n escollit (aquestes files s'anomenen $\overline{B}$). Fixeu-vos que si $n = m$ $\overline{A}$ coincideix amb A i $\overline{B}$ coincideix amb B.

Per a resoldre el sistema $A \cdot X = B$, n'hi ha prou de resoldre $\overline{A} \cdot X = \overline{B}$. Ara bé, com que $\overline{A}$ és una matriu quadrada el determinant de la qual no és 0, existeix la seva inversa. Per tant, podem multiplicar a banda i banda per $\overline{A}^{-1}$

$$\overline{A}^{-1} \cdot \overline{A} \cdot X = \overline{A}^{-1} \cdot \overline{B}$$

Sabem que $\overline{A}^{-1} \cdot \overline{A} = I_n$; per tant, la solució del sistema és

$$X = \overline{A}^{-1} \cdot \overline{B}$$

Sistemes homogenis
Un sistema homogeni és aquell en què el vector de termes independents B és zero.
Fixem-nos que en aquest cas sempre tindrem
$$Rang(A) = Rang(A^*)$$
Per tant, sempre tindrem un compatible.
En cas que $rang(A)$ coincideixi amb el nombre d'incògnites (n), tindrem un sistema compatible determinat en què l'única solució és $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Exemple. Resolució d'un sistema amb una única solució.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-5y-2z=-2 \\ 3x+4y+z=8 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases} \text{equivalent a} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Té una única solució perquè $rang(A) = rang(A^*) = 3$. Per a resoldre'l, s'ha d'escollir un menor d'ordre 3 que no sigui 0 (per exemple, el menor format per les tres primeres files). Així tenim que, per a resoldre el sistema plantejat, n'hi ha prou de resoldre el sistema equivalent $\overline{A} \cdot X = \overline{B}$ on

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

i la solució del sistema és

$$\text{si } \overline{A}^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -8 & -2 & 4 \\ 23 & -1 & -7 \end{pmatrix} \to X = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -8 & -2 & 4 \\ 23 & -1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Així, doncs, la solució és $x = 1, y = 2, z = -3$ (o bé $(x, y, z) = (1, 2, -3)$).

En el cas que $\boxed{rang(A) = rang(A^*) = r < n}$ el sistema té **infinites solucions**; tot i així, s'ha de fer el mateix.

Només cal tenir en compte que, una vegada escollit el menor d'ordre r, s'ha de transformar el sistema d'equacions inicial, de manera que les incògnites que no corresponguin amb una columna del menor anterior s'han de situar a l'altre costat del signe igual, en el vector de termes independents B. Així s'obtindrà un sistema amb r incògnites, que es podrà expressar en forma matricial. També la B contindrà alguna de les incògnites.

Ara ja es podrà resoldre el nou sistema de la mateixa forma (perquè es tracta d'un sistema amb r incògnites, la matriu de la qual té rang r). S'ha d'assenyalar que la solució, en aquest cas, vindrà donada en termes d'algunes de les incògnites, per la qual cosa no serà una solució única.

Exemple. Resolució d'un sistema amb infinites solucions.
En aquest cas es pot comprovar que $rang(A) = rang(A^*) = 2 < 4$. Per tant, primer s'ha de modificar el sistema original:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & -w & = 1 \\ & +y & -z & +w & = -1 \\ 3x & & +6z & -6w & = 6 \\ & -y & +z & -w & = 1 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{el reescrivim}} \left\{\begin{array}{c} x + y = 1 - z + w \\ y = -1 + z - w \\ 3x = 6 - 6z + w \\ -y = 1 - z + w \end{array}\right.$$

En forma matricial s'expressa així:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z + w \\ -1 + z - w \\ 6 - 6z + w \\ 1 - z + w \end{pmatrix}$$

si escollim una submatriu de rang 2 obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z + w \\ -1 + z - w \end{pmatrix}$$

per tant,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 - z + w \\ -1 + z - w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2z + 2w \\ -1 + z - w \end{pmatrix}$$

podem donar el valor que vulguem a z i w, i per cadascun d'aquests tindrem una solució del sistema.

5.5.2. Mètode de Gauss

Vam veure en el tema de sistemes d'equacions que un dels mètodes per resoldre un sistema és utilitzar el mètode de Gauss. Aquest mètode consisteix en transformar el sistema en un d'equivalent que sigui triangular. D'aquesta manera és fàcil trobar la solució per substitució cap enrere.
Es pot utilitzar el mètode de Gauss per a la resolució d'equacions transformant només la matriu ampliada, sense necessitat d'escriure repetidament les incògnites.

Exemple. Resolució d'un sistema per Gauss matricialment.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow[\text{associada al sistema}]{\text{matriu ampliada}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Ara fem les transformacions necessàries per obtenir una matriu triangular

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F2=F2-2*F1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F2\leftrightarrow F3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F4=F4-2*F3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

ara que ja tenim una matriu diagonal utilitzem la substitució cap a enrere. I obtenim que la solució del sistema és:

$$(x, y, z, w) = (-1, -1, 2, 1)$$

5.5.3. Regla de Cramer

Un altre mètode per resoldre un sistema amb el mateix nombre de solucions que d'incògnites i determinant de la matriu associada al sistema diferent de 0 és conegut com la **regla de Cramer**.

La regla de Cramer ens diu que davant un sistema de n equacions i n incògnites tal que $det(A) \neq 0$ (on A matriu assoaciada al sistema) podem calcular les matrius $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que resulten de substituir les columnes $1, 2, \ldots, n$ d'A respectivament per la columna dels termes independents. Aleshores, la solució del sistema és

$$\boxed{(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{|A_1|}{|A|}, \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, \frac{|A_n|}{|A|}\right)}$$

on recordem $|X|$ indica el determinant de la matriu X.

Exemple. Resolució d'un sistema utilitzant la regla de Cramer. Volem resoldre el sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases} \xrightarrow[\text{vector de termes independents}]{\text{matriu associada al sistema}} A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Veiem que $|A|=2$ i per tant podem aplicar la regla de Cramer. Calculem $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8 \qquad |A_2|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=4 \qquad |A_3|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-10$$

Ara ja podem calcular les solucions al sistema

$$x=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{8}{2}=4, \quad y=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{4}{2}=2, \quad z=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{-10}{2}=-5$$

Observem que si el sistema és compatible indeterminat també podem utilitzar aquest mètode afegint en el terme independent les incògnites que siguin necessàries per tal que la matriu del sistema sigui quadrada. D'aquesta manera amb el *nou* terme independent també podrem aplicar aquest mètode.

Resum

Una **matriu** és un grup de nombres organitzats en files i en columnes limitats per parèntesis:

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} & & \text{columna n} \end{array} & \\
A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \text{fila 3} \\ \\ \text{fila m} \end{array}
\end{array}$$

A és una matriu de dimensió $m \times n$ que també es pot escriure de forma simplificada

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

on i indica la fila i j la columna.

$\boxed{\text{Matrius importants}}$

- **Matriu quadrada.** És una matriu que té el mateix nombre de files que de columnes, és a dir, té dimensió $n \times n$.
- **Matriu diagonal.** La *diagonal* d'una matriu està formada per aquells elements la fila i la columna dels quals tenen el mateix nombre, és a dir, a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... Quan una matriu quadrada té tots els elements 0 excepte els de la diagonal, direm que és una matriu diagonal.
- **Matriu nul·la.** És una matriu en què tots els seus elements són 0. Normalment es denota per 0_{mn}, on $m \times n$ és la dimensió de la matriu.
- **Matriu identitat.** És una matriu diagonal quadrada en la qual tots els elements de la diagonal són 1. La matriu identitat de dimensió $n \times n$ s'indica amb I_n.
- **Matriu triangular.** És una matriu quadrada en què tots els elements situats per sota o per sobre de la diagonal són 0. En el cas que siguin 0 els elements de sota la diagonal, parlarem de matriu triangular superior. En canvi, si són zero els elements situats a sobre la diagonal, parlarem de matriu triangular inferior.
- **Matriu transposada.** La matriu transposada d'una matriu A es denomina A^T; és la matriu que resulta de canviar files per columnes en la matriu A.
- **Matriu simètrica.** És aquella que coincideix amb la seva transposada.

$\boxed{\text{Operacions bàsiques}}$

- **Suma i Resta.** Dues matrius es poden sumar o restar únicament si les seves dimensions són les mateixes. En aquest cas, la suma de les matrius és igual a la suma ordenada dels elements que ocupen la mateixa posició, i el resultat s'haurà de posar en la mateixa posició de la matriu suma. És a dir, si $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ són matrius de dimensió $m \times n$,

  la suma és $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

  la resta és $A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$

- **Producte per un escalar.** El producte d'una matriu per un nombre sempre es pot fer, i consisteix a multiplicar tots els elements de la matriu per aquest nombre. És a dir, si r és un nombre real, i $A = (a_{ij})$ és una matriu, el producte de la matriu per l'escalar és

$$r \cdot A = r \cdot (a_{ij}) = (r \cdot a_{ij})$$

- **Producte de matrius.** Per a multiplicar dues matrius, A i B, i obtenir $A \cdot B$, s'ha de comprovar que el nombre de columnes de la matriu A coincideixi amb el nombre de files de la matriu B. És a dir, si A és una matriu de dimensió $m \times n$, només es pot multiplicar per la matriu B si aquesta té dimensió $n \times r$. En el cas que això sigui així, la matriu producte, $P = A \cdot B$, té dimensió $m \times r$, és a dir, el mateix nombre de files que la matriu A i el mateix nombre de columnes que la matriu B.

  Per a trobar l'element p_{ij}, s'han de multiplicar ordenadament els elements de la fila i de la matriu A pels elements de la columna j de la matriu B i obtenim p_{ij} com la suma de tots aquests productes.

$$p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

  El **producte de matrius NO és commutatiu**.

$\boxed{\text{Determinants}}$ El determinant d'una matriu quadrada és un nombre que, entre altres aplicacions, és molt útil per a saber si una matriu té inversa i per a calcular-la. Per a indicar que es calcula el determinant d'una matriu, els elements d'aquesta s'han de posar entre dos segments verticals.

- Matriu 1×1: és igual al nombre que compon la matriu.
- Matriu 2×2: és igual al producte dels elements de la diagonal menys el producte dels altres dos elements.
- Matriu 3×3: regla de Sarrus.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} \\ \quad -a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{array}$$

- Matriu 4×4 (o d'ordre superior): càlcul de manera recursiva a partir de matrius

3×3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} - a_{41}\alpha_{41}$$

on α_{ij} és el **menor complementari** d'a_{ij}, és a dir, el determinant que resulta d'eliminar la fila i i la columna j del determinant.

$\boxed{\text{Matriu inversa}}$ Si el producte de dues matrius quadrades A i B de dimensió $n \times n$ és igual a I_n

$$A \cdot B = I_n \text{ i } B \cdot A = I_n$$

B és la matriu inversa d'A i es denota $B = A^{-1}$.

Una matriu quadrada $n \times n$ **es pot invertir sempre que el seu determinant no sigui** 0.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(A'\right)^T}$$

on A' és la **matriu d'adjunts** dels elements de la matriu A. Un adjunt d'un element a_{ij} de la matriu A es denota A_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$$

on α_{ij} és el menor complementari d'a_{ij}.

$\boxed{\text{Rang d'una matriu}}$ Si se seleccionen k files i k columnes de la matriu, i es calcula el determinant d'aquestes k files i k columnes, aquest determinant s'anomena **menor d'ordre** k de la matriu A.
L'ordre màxim dels menors de la matriu que no són 0 és el **rang d'una matriu** A i s'indica $rang(A)$.

$\boxed{\text{Discussió i resolució de sistemes amb matrius}}$ Un sistema d'equacions lineals amb m equacions i n incògnites com el següent

$$\left\{ \begin{array}{lllll} a_{11} \cdot x_1 & +a_{12} \cdot x_2 & + \ldots & +a_{1n} \cdot x_n & = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & +a_{22} \cdot x_2 & + \ldots & +a_{2n} \cdot x_n & = b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & +a_{m2} \cdot x_2 & + \ldots & +a_{mn} \cdot x_n & = b_m \end{array} \right.$$

es pot expressar en forma matricial de la manera següent:

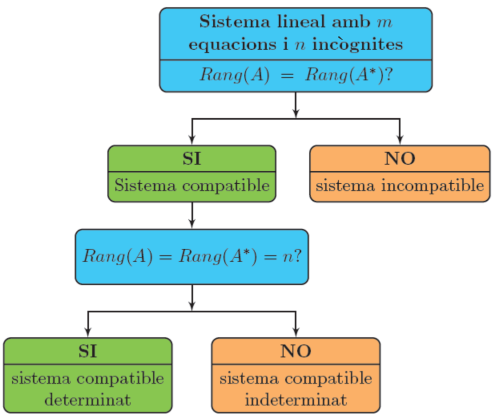
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Aquesta manera d'escriure'l es denomina **equació matricial**. Fixem-nos que és del tipus $A \cdot X = B$, on A s'anomena **matriu associada al sistema**, B el **vector de termes independents** i X és una matriu $n \times 1$ d'incògnites. La **matriu ampliada** (A^*) és la matriu formada per la matriu A més la columna B.

- El sistema **no té solució** si el rang de la matriu A i el de la matriu ampliada A^* són diferents, és a dir, si
$$rang(A) \neq rang(A^*).$$
- El sistema **té solució** en els casos què el rang de la matriu A i el de la matriu ampliada són iguals:
$$rang(A) = rang(A^*)$$
Aleshores hem de comprovar si coincideix amb el nombre d'incògnites (n), i es poden donar els casos següents:
  - Si $rang(A) = n$, la solució és única, és a dir, hi ha una única matriu X que compleix que $A \cdot X = B$.
  - Si $rang(A) < n$, la solució no és única; de fet, en aquestes condicions, el sistema té infinites solucions.

Aquest resultat es coneix com el **teorema de Rouché-Frobenius**.

Esquema de la discussió d'un sistema d'equacions



Exercicis resolts

1. **Si** I_3 **és la matriu identitat d'ordre** 3 **i** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **resol les equacions matricials següents:**

(a) $X \cdot A = A + I_3$

(b) $2 \cdot Y - A \cdot Y = A^t$

Solució:

(a) En primer lloc observem que $det(A) = 1 \neq 0$; per tant, podem calcular la matriu inversa d'A.

$$X \cdot A = A + I_3 \Leftrightarrow X = (A + I_3) \cdot A^{-1} = I_3 + A^{-1}$$

Només ens cal calcular la inversa de la matriu A

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si sumem la matriu identitat a aquesta matriu, obtenim $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Igual que en l'apartat anterior, veiem que

$$2 \cdot Y - A \cdot Y = A^t \Leftrightarrow (2 \cdot I_3 - A) \cdot Y = A^T \Leftrightarrow Y = (2 \cdot I_3 - A)^{-1} \cdot A^T$$

Per tant, utilitzant la fórmula de la matriu inversa, tenim

$$(2 \cdot I_3 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ara multipliquem aquesta matriu per la matriu A^T, obtenim $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

2. **Resol les equacions següents per la incògnita** x**:**

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} + 5 = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

Solució:

(a) Calculem, per una banda, el primer determinant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} = x + x^2$ i, per altra

banda, el segon $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 7$; per tant, ens queda l'equació $x^2 + x + 5 = 7 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$.
Si resolem aquesta equació aplicant la fòrmula de l'equació de segon grau, obtenim dues solucions: $x = 1$ i $x = -2$.

(b) Igual que en l'apartat anterior, calculem el determinant de l'equació:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^3 + 2 - 3(x+1) = x^2(x+3)$$

Si igualem aquest resultat a 0, obtenim una equació amb dues solucions: $x = 0$ i $x = -3$.

3. **Donades les matrius següents**

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Indica quantes files i columnes tenen i decideix quines parelles es poden sumar entre elles i quines es poden multiplicar. En el segon cas indica l'ordre en què es poden multiplicar. Efectua totes les sumes possibles i només els productes possibles en què aparegui la matriu E.

(b) Decideix si les operacions següents són possibles, i en cas afirmatiu efectua les operacions:

$$A \cdot D^t + E + F \cdot C, \qquad (A + D) \cdot E, \qquad B \cdot E \cdot C \cdot F, \qquad (B + E) \cdot C.$$

Solució:

(a) Comencem per donar les dimensions de les diferents matrius:

Matriu	A	B	C	D	E	F
Dimensions	3×1	1×3	3×2	3×1	3×3	2×3

Pel que fa la suma, només podem sumar $A + D = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Pel que fa als productes, podem calcular

$$A \cdot B \quad B \cdot A \quad E \cdot A \quad F \cdot A \quad B \cdot C \quad B \cdot D \quad D \cdot B$$

$$B \cdot E \quad E \cdot C \quad F \cdot C \quad C \cdot F \quad E \cdot D \quad F \cdot D \quad F \cdot E$$

Calculem tots els productes que contenen la matriu E.

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad B \cdot E = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad E \cdot C = \begin{pmatrix} -12 & -15 \\ 18 & 27 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad E \cdot D = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F \cdot E = \begin{pmatrix} 19 & -19 & 18 \\ 16 & -16 & 15 \end{pmatrix}$$

(b)Observem que només podem calcular $B \cdot E \cdot C \cdot F = (12 \; -240 \; 30)$

4. **Calcula el rang de la matriu segons el valor de k.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & k \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució: Com que A és una matriu de dimensions 3×4, el rang màxim que pot tenir és 3. Per tal que aquesta matriu tingui rang 3, algun dels 4 possibles menors d'ordre 3 ha de ser diferent de 0.
Els calculem:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 9k \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 + 9k \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7 + 9k$$

Veiem que si $-7 + 9k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq \frac{7}{9}$ la matriu A té rang 3, en canvi si $k = \frac{7}{9}$ llavors tots els menors d'ordre 3 valen 0 i per tant el rang de la matriu no pot ser 3.

En aquest últim cas, veiem però que tenim com a mínim un menor d'ordre 2 que no és 0; per exemple, si agafem les dues primeres files i les dues primeres columnes, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$.

O sigui que podem concloure que quan $k = \frac{7}{9}$ el rang de la matriu A és 2 i quan $k \neq \frac{7}{9}$ el rang de la matriu A és 3.

5. **Comprova que $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ amb les matrius**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Solució: Per una banda, calculem les inverses de les dues matrius i obtenim

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ara les sumem, tenim

$$A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

I per altra banda calculem la suma $A + B$ i la inversa d'aquesta matriu

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad (A + B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -2 & 0 \\ \frac{11}{2} & -3 & -1 \\ -\frac{13}{2} & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Veiem, doncs, que aquestes dues matrius que hem calculat no coincideixen

6. **Discuteix el sistema següent segons els valors de m i calcula'n la solució pels valors que siguin compatibles:**

$$\begin{cases} x - my = 1 \\ mx - y = 2m + 2 \end{cases}$$

Solució: Comencem escrivint la matriu ampliada associada al sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 1 \\ m & -1 & 2m + 2 \end{array}\right)$$

Restem a la segona fila la primera multiplicada per m i obtenim una matriu triangular

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 1 \\ 0 & m^2-1 & m+2 \end{array}\right)$$

Ara estudiem el $rang(A)$ i en primer lloc veiem $det(A) = m^2 - 1$.

- Si $m^2 - 1 \neq 0$ (és a dir, si $m \neq -1, 1$), el $rang(A) = 2$ i $rang(A^*) = 2$, i com que tenim 2 incògnites el sistema és compatible determinat.
- Si $m = 1$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$
$rang(A) = 1 \neq rang(A^*) = 2$; per tant, tenim un sistema incompatible.
- Si $m = -1$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$rang(A) = 1 \neq rang(A^*) = 2$; per tant, tenim un sistema incompatible.

Les solucions en els casos en què $m \neq 1, -1$ són per substitució cap enrere

$$(x, y) = \left(\frac{m+2}{m^2-1}, \frac{2m^2+2m-1}{m^2-1}\right).$$

Exercicis per a practicar amb les solucions

7. **Resol les equacions següents per a la incògnita x:**

(a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & -b & x \\ x & b & c \end{vmatrix} = 0$

(b) **El determinant de $2 \cdot B$ és 160, on** $B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$

8. **Determina els valors de a, b, c, d, e tals que es compleixi $A + C = 2B$ per les matrius**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & 2 \\ -1 & 2 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & b \\ d & e & 4 \end{pmatrix}$$

Per a aquests valors, calcula (si es pot) $A \cdot B^T$, $C^T \cdot B$ i $A \cdot B$.

9. **Calcula el rang de les matrius següents:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

10. **Calcula les inverses de les matrius següents:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

11. **Resol els sistemes següents (si es pot):**

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + az = 1 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

Solucions:

7. (a) $x = a, -c$ en el cas $b \neq 0$. En el cas $b = 0$ qualsevol nombre real és solució.
   (b) $x = 3$

8. Els valors són $a = -4$, $b = 4$, $c = -2$, $d = 11$, $e = -6$. El producte $A \cdot B$ no es pot calcular; els productes que sí que es poden calcular són

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 22 & 25 \\ -12 & -11 \end{pmatrix} \qquad C^T \cdot B = \begin{pmatrix} 75 & -27 & 26 \\ -22 & 10 & 0 \\ -4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

9. $Rang(A) = 2$ i $Rang(B) = 3$.

10.

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

11. El primer sistema és incompatible; per tant, no té solució. El segon sistema és compatible determinat per $a \neq 0, 3$ i incompatible per $a = 0, 3$. Les solucions per als casos en què és compatible són

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3-a}, \frac{1-a}{3a-a^2}, \frac{1+a^2}{a^2-3a} \right)$$