Iniciació a les matemàtiques per a l'enginyeria

PID_00270072

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat
Oberta
de Catalunya

6. Funcions

Índex

6.1. Concepte de funció

El concepte de funció es va establir cap al segle XVIII, tot i que anteriorment alguns matemàtics ja hi treballaven de manera intuïtiva.
En l'obra *Introductio in analysin infinitorum*, Leonhard Euler va intentar proporcionar per primera vegada una definició formal del concepte de funció en afirmar:

> *Una funció de quantitat variable és una expressió analítica formada de qualsevol manera per aquesta quantitat variable i per nombres o quantitats constants.*

Tal com veurem, aquesta definició difereix de l'actual. De fet, set anys després d'aquesta afirmació, en el pròleg de les *Institutiones calculi differentialis* el mateix autor ja va afirmar:

> *Algunes quantitats depenen d'altres si en combinar aquestes aquelles també canvien. Les primeres es diuen funcions de les segones. Aquesta denominació és bastant natural i comprèn cada mètode mitjançant el qual una quantitat pot ser determinada per unes altres. Així, si x denota una quantitat variable, totes les quantitats que depenen de x en qualsevol forma estan determinades per x i s'anomenen funcions de x.*

Per a poder establir el concepte de funció, és necessari recórrer primerament a les relacions que es poden establir entre conjunts. Vegem en què consisteixen.

El matemàtic suís Leonhard Euler (1707-1783) és un científic essencial en el desenvolupament de les funcions perquè va precisar el concepte de funció. Va fer un estudi sistemàtic de totes les funcions elementals, incloent-hi les derivades i integrals. No obstant això, el concepte mateix de funció va néixer amb les primeres relacions observades entre dues variables, fet que segurament va sorgir, a l'inici de les matemàtiques, amb civilitzacions com la babilònica, l'egípcia i la xinesa.

Abans d'Euler, el matemàtic i filòsof francès René Descartes (1596-1650) va mostrar en els seus treballs de geometria que tenia una idea molt clara dels conceptes de variable i funció. Va fer una classificació de les corbes algebraiques segons els seus graus, reconeixent que els punts d'intersecció de dues corbes s'obtenen resolent de manera simultània les equacions que les representen.

6.1.1. Correspondència entre conjunts

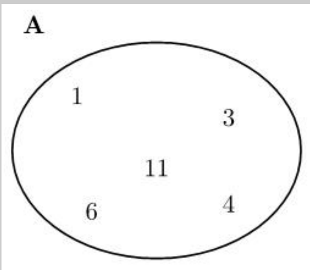
Els **conjunts** que es tracten en matemàtiques solen ser conjunts de nombres, com per exemple els naturals, els enters, els racionals o els reals. Els elements d'aquests conjunts no es poden llistar perquè n'hi ha una quantitat infinita. Ara bé, si es considera un conjunt finit d'aquests nombres, sí que es poden escriure. En aquest cas, els elements seleccionats s'expressen entre claus. És a dir, els elements d'un conjunt finit es poden indicar en una llista delimitada per claus i separats per comes.

Exemple. Representació d'un conjunt de nombres.
El conjunt format pels nombres naturals 1, 2, 3, 4, 6 i 11 es pot denominar A.
Aleshores, el conjunt es pot expressar així:

$$\text{A} = \{1, 2, 3, 4, 6, 11\}$$

Una altra manera d'expressar un conjunt de nombres és de manera gràfica. En aquest cas, es considera una forma el·líptica que conté els elements del conjunt i s'indica el nom del conjunt en la part exterior.

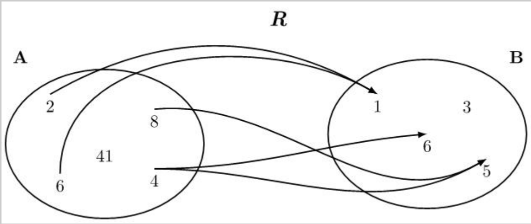
Exemple. Representació gràfica d'un conjunt.
Anomenem A el conjunt format pels nombres naturals 1, 2, 3, 4, 6 i 11.
Aquest conjunt es pot expressar gràficament d'aquesta manera:



Una **correspondència entre dos conjunts**, A i B, és una relació entre ambdós conjunts que fa correspondre elements del conjunt A amb elements del conjunt B. Gràficament, aquest fet es pot representar mitjançant fletxes que tenen l'origen en algun element del conjunt A i el final en algun element del conjunt B. Una fletxa entre un element del conjunt A i un element del conjunt B indica que l'element d'A està relacionat amb l'element de B.

Què és una correspondència entre conjunts?
És una relació entre ambdós conjunts que fa correspondre elements del segon a elements del primer. Una correspondència es pot representar gràficament mitjançant diagrames.

Exemple. Correspondència entre elements de dos conjunts.
Siguin els conjunts A= $\{2, 4, 6, 8, 41\}$ i B= $\{1, 3, 5, 6\}$. Podem definir i representar una correspondència entre A i B, que anomenem R, de la manera següent:



Així, la correspondència R relaciona: el 2 del conjunt A amb l'1 del conjunt B, el 8 del conjunt A amb el 5 del conjunt B, el 4 del conjunt A amb el 5, i el 6 del conjunt B i el 6 del conjunt A amb l'1 del conjunt B.
El nom de la correspondència, R, s'indica per evitar confusions amb altres possibles correspondències.

D'acord amb la notació general utilitzada:

- El conjunt A es denomina **conjunt de partida**, i el conjunt B **conjunt d'arribada**.
- El conjunt de tots els elements del conjunt de partida dels quals surt alguna fletxa rep el nom de **domini** de la correspondència R i s'escriu **Dom**R. En canvi, el conjunt de tots els elements del conjunt d'arribada als quals es dirigeix alguna fletxa s'anomena **imatge** o **recorregut** de la correspondència R i s'escriu **Im**R (o també **RecR**).
- Donat un element qualsevol del domini d'una correspondència, es denomina **imatge de l'element** el conjunt de tots els elements de la imatge de la correspondència que reben una fletxa d'aquest element. De manera similar, es defineix l'**antiimatge d'un element** de la imatge de la correspondència com el conjunt de tots els elements del domini de la correspondència tals que la seva imatge inclou aquest element, és a dir, tots els elements dels quals parteix una fletxa cap a aquest element de la imatge.

Exemple. Elements d'una correspondència entre dos conjunts.
Considerem l'exemple de la correspondència anterior, R que relaciona els conjunts A= $\{2, 4, 6, 8, 41\}$ i B= $\{1, 3, 5, 6\}$. Aleshores:

- El domini de la correspondència és el conjunt Dom$R = \{2, 6, 4, 8\}$ i la imatge de la correspondència és Im$R = \{1, 5, 6\}$.
- La imatge del 2 és el conjunt $\{1\}$, la imatge del 8 és el conjunt $\{5\}$, la imatge del 4 és el conjunt $\{5, 6\}$ i la imatge del 6 és el conjunt $\{1\}$.
- L'antiimatge de l'1 és el conjunt $\{2, 6\}$, la del 5 és $\{4, 8\}$ i la del 6 és $\{4\}$.

Per a establir la definició de funció, és necessari estudiar un tipus molt concret de correspondències, aquelles en què tots els elements del domini tenen un únic element en la seva imatge. Això es tracta en l'apartat següent.

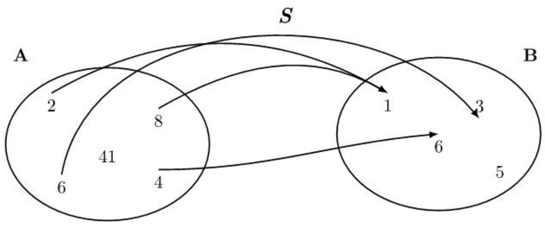
6.1.2. Aplicacions i funcions

Una **aplicació** és una correspondència que compleix la condició següent:

Tots els elements del seu domini tenen un únic element en la seva imatge.

Dit d'una altra manera, en la representació d'una aplicació, de qualsevol element del domini ha de sortir una única fletxa. Així, doncs, en l'exemple de l'aplicació anterior R, la correspondència no és una aplicació perquè de l'element 4 surten dues fletxes, la qual cosa indica que la imatge del 4 és formada per més d'un element. En canvi, la correspondència S següent entre els mateixos conjunts sí que ho és perquè en una aplicació no hi ha cap element d'A que tingui més d'una imatge.

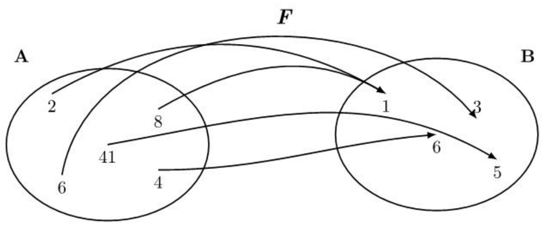
Què és una aplicació?
Per tal que una correspondència entre conjunts sigui una aplicació, s'ha de complir que tots els elements del seu domini tinguin un únic element en la seva imatge. És a dir, en la representació d'una aplicació, de qualsevol element del domini ha de sortir una única fletxa.



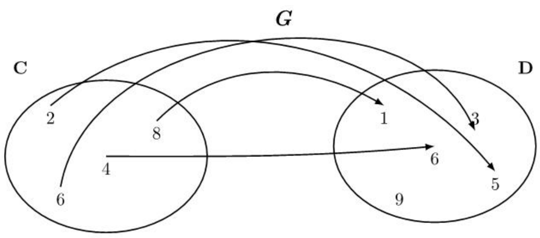
En aquest cas, el domini de S és $\text{Dom}S = \{2,4,6,8\}$, i la imatge de la correspondència és $\text{Im}S = \{1,3,6\}$. De qualsevol element del domini parteix una única fletxa, és a dir, la seva imatge consisteix en un sol element i, per tant, es tracta d'una aplicació.

Les aplicacions es poden classificar d'acord amb la seva imatge. Així, es diu que una aplicació és:

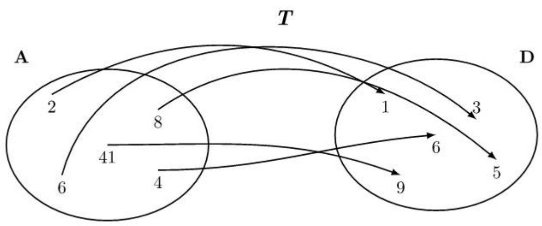
- **Exhaustiva**, quan la imatge de l'aplicació coincideix amb el conjunt d'arribada. Per exemple, l'aplicació F és exhaustiva.



- **Injectiva**, quan cada element de la imatge de l'aplicació només té una única antiimatge. Per exemple, l'aplicació G és injectiva.



- **Bijectiva**, quan l'aplicació és exhaustiva i injectiva a la vegada, és a dir, quan cada element del conjunt d'arribada té una única antiimatge. Per exemple, l'aplicació T és bijectiva.



Cal remarcar que aquesta classificació no abraça totes les aplicacions. N'hi ha prou d'estudiar l'aplicació S per a adonar-se'n. L'aplicació S no és injectiva, atès que l'element 1 té dues antiimatges, ni exhaustiva, ja que l'element 5 no pertany a la imatge. Per tant, tampoc no és bijectiva.

Quan una aplicació es defineix entre conjunts numèrics, es denomina funció. Moltes situacions reals es poden explicar com la relació entre dues magnituds en forma de funció. Per exemple, la temperatura en un lloc concret i l'hora del dia són dues magnituds relacionades entre elles, ja que a cada moment del dia correspon una temperatura concreta. Així, la temperatura és una funció del temps. D'aquesta manera, es podrien escriure les hores d'un dia en un conjunt, les temperatures en un altre, i una fletxa podria unir cada element del primer conjunt (les hores) amb un únic element del segon conjunt (la temperatura en aquesta hora).

6.2. Representació d'una funció

La relació que s'estableix mitjançant una funció es pot representar de diverses maneres. Vegem-les.

6.2.1. Taula d'una funció

Una manera senzilla d'expressar una funció consisteix a posar els elements dels conjunts que hi intervenen en una **taula de valors**. En la primera columna de la taula se solen escriure els valors del domini de la funció, i en la segona columna els valors de les imatges corresponents, tal com es veu a continuació.

Què és una taula d'una funció?
És una taula amb dues columnes. La primera conté valors del domini de la funció i la segona els valors corresponents de la seva imatge. Quan el domini o la imatge són conjunts massa grans, una taula de la funció només conté alguns dels valors de la funció.

Exemple. Taula d'una funció.
La funció F definida anteriorment es pot expressar mitjançant aquesta taula:

Dom$F$	ImF
2	1
4	6
6	3
8	1
41	5

Evidentment, no sempre és possible construir una taula amb tots els elements del domini de la funció, ja que el domini i la imatge poden ser conjunts massa grans (fins i tot infinits). En aquest cas, es pot construir una taula amb alguns valors del domini i les seves imatges corresponents.

Per exemple, considerem la funció temperatura d'un lloc concret que a cada moment d'un dia associa la temperatura en aquest instant. Els valors possibles per als instants d'un dia van des de les 0 hores fins a les 24 hores, és a dir, tot l'interval de nombres reals $[0, 24)$. No és possible escriure tots els instants del dia, i per això només se'n trien alguns de representatius. En particular, es poden prendre mostres de la temperatura cada minut, o cada cert nombre de minuts. Per a no estendre'ns massa, la taula del marge presenta, per exemple, només les temperatures corresponents a cada 2 hores. Aquesta correspondència és una funció perquè a cada instant de temps només s'hi pot associar una única temperatura. En la taula tampoc no s'hi poden considerar tots els valors de la funció, sinó només alguns, perquè tant el domini com la imatge de la funció contenen massa valors per a llistar-los en una taula. En casos com aquests es trien normalment només alguns valors del domini, distribuïts de manera uniforme per tot el domini, tal com es mostra amb l'exemple.

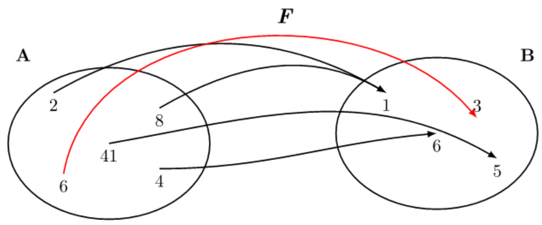
Exemple

Dom$F$	ImF
Instant (hora)	Temperatura (°C)
0:00	5
2:00	7
4:00	8
6:00	12
8:00	13
10:00	18
12:00	23
14:00	25
16:00	26
18:00	24
20:00	22
22:00	15

Taula d'una funció instant-temperatura

6.2.2. Expressió d'una funció

La funció següent F fa correspondre al valor 6 del domini de la funció el valor 3 de la imatge. També es pot dir que la imatge del 6 per la funció F és el 3, o fins i tot que la funció avaluada en el 6 dona com a resultat el 3.



Què és l'expressió d'una funció?
És una expressió algebraica amb una variable que permet trobar la imatge de qualsevol element del domini de la funció. Per a fer-ho, s'ha de substituir la variable de l'expressió pel valor del domini. El valor numèric resultant d'aquesta expressió és el valor de la imatge d'aquest element del domini.

Aquesta manera d'expressar-ho és llarga i incòmoda si volem donar la imatge d'altres valors del domini. Per a evitar aquest problema, s'usa una forma més breu de donar la imatge d'un element del domini: s'escriu el nom de la funció i a continuació, entre parèntesis, el valor del domini del qual es vol calcular la imatge. Seguidament, s'escriu el signe igual i, finalment, el valor de la imatge corresponent.

Exemple. Expressió d'una funció. Notació.
En el cas de la funció F, s'escriu

$$F(6) = 3$$

i es llegeix "F de 6 és igual a 3", que significa que la imatge del valor 6 del domini és el valor 3 en el cas de la funció F.
De la mateixa manera, si s'observa el diagrama anterior de la funció F,

- la imatge de 2 és 1; per tant, $F(2) = 1$
- la imatge de 4 és 6; per tant, $F(4) = 6$
- la imatge de 8 és 1; per tant, $F(8) = 1$
- la imatge de 41 és 5; per tant, $F(41) = 5$

En molts casos no es pot proporcionar una llista completa de les imatges de tots els valors del domini d'una funció. Per exemple, en el cas de la funció, diguem-li g, a cada nombre real hi fa correspondre el mateix nombre al quadrat. En aquest cas no es pot donar una llista completa perquè el domini és un conjunt infinit (tots els nombres reals). Alguns d'aquests valors tenen les imatges següents:

- la imatge de 0 és $0^2 = 0$; per tant, $g(0) = 0^2 \Rightarrow g(0) = 0$
- la imatge de 5 és $5^2 = 25$; per tant, $g(5) = 5^2 \Rightarrow g(5) = 25$
- la imatge de -1 és $(-1)^2 = 1$; per tant, $g(1) = 1^2 \Rightarrow g(-1) = 1$
- la imatge de -2 és $(-2)^2 = 4$; per tant, $g(-2) = (-2)^2 \Rightarrow g(-2) = 4$

Tal com veiem, aquesta llista no s'acaba mai perquè no és possible escriure tots els nombres reals. Hem de buscar una manera d'expressar la funció que pugui donar la imatge de qualsevol nombre del domini sense haver d'escriure'ls tots. Habitualment, es dona una regla algebraica que permeti calcular la imatge per a qualsevol element del domini. Per exemple, en el cas de la funció g és $g(x) = x^2$.

Aquesta expressió, denominada **expressió algebraica de la funció**, indica que per a qualsevol nombre del domini, representat per la lletra x, el valor de la funció és igual al quadrat d'aquest valor. En definitiva, això diu que, per a trobar el valor de la funció per a un element qualsevol del domini, en l'expressió algebraica de la funció s'ha de substituir el valor de la lletra x pel valor del nombre en qüestió i fer les operacions que indiqui l'expressió.

Exemple. Expressió algebraica d'una funció.
L'expressió algebraica d'una funció és

$$g(x) = x^2$$

Aleshores, el valor de la funció g per al valor del domini 4 és

$$g(4) = 4^2 = 16$$

la qual cosa indica que la imatge del 4 per la funció g és igual.

La lletra que s'usa per a l'expressió algebraica d'una funció rep el nom de **variable**

independent o, simplement, variable. Moltes vegades, els valors que pren la funció s'expressen amb una altra lletra, que sol ser la y, denominada **variable depenent**, justament perquè depèn del valor de la x, la variable independent.

6.2.3. Gràfica d'una funció

Si f és una funció qualsevol, les parelles de nombres x i $f(x)$ que estan en una taula de la funció es poden interpretar com a parells ordenats $(x, y) = (x, f(x))$, és a dir, punts del pla cartesià. Aquesta identificació fa possible representar qualsevol dels punts d'una funció.

Què és la gràfica d'una funció f? És el conjunt de tots els parells de punts (x, y) del pla cartesià que coincideixen amb els valors d'aquesta funció. La coordenada x és un valor del domini, i la coordenada $y = f(x)$, el valor corresponent de la imatge. Per a dibuixar la gràfica d'una funció, n'hi ha prou en dibuixar en el pla els punts que es descriuen en una taula de la funció de la manera $(x, f(x))$.

Recordem que per a representar el pla cartesià es prenen dues rectes perpendiculars, que s'anomenen **eix X** o **eix d'abscisses**, i **eix Y** o **eix d'ordenades**, i que es creuen en el punt $(0, 0)$. Aquest punt rep el nom d'**origen de coordenades** o, simplement, **origen**. D'aquesta manera, és possible determinar tot punt del pla amb dos nombres reals ordenats, x i y. El primer rep el nom de coordenada x o abscissa, i el segon el de coordenada y o ordenada del punt.

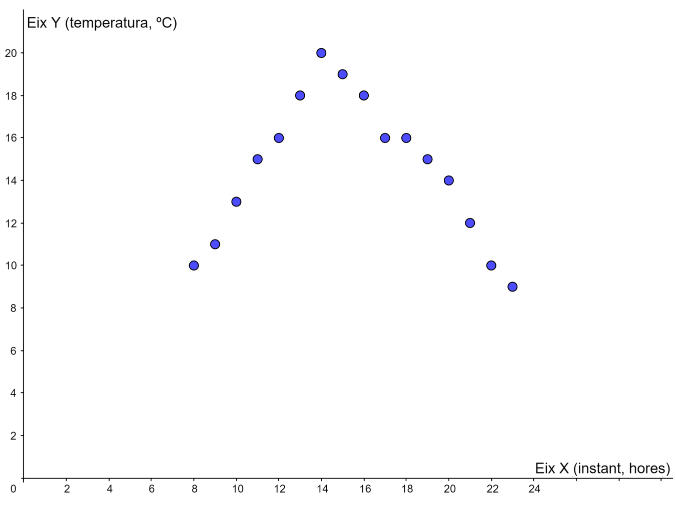
El sistema de coordenades cartesianes es fa servir per a poder determinar de manera inequívoca tot punt P del pla amb dos nombres reals ordenats, x i y. El primer rep el nom de coordenada x o abscisa, i el segon el de coordenada y o ordenada del punt. Així es pot identificar P(x, y). Els sistemes de coordenades cartesianes s'estenen de manera anàloga a l'espai de tres dimensions i a espais de dimensions superiors.

Vist com es determina un pla cartesià, vegem amb un exemple concret com es pot representar qualsevol dels punts $(x, f(x))$ de la gràfica d'una funció.

Suposem que t és una funció que dona la temperatura d'una ciutat cada hora, des de les vuit del matí fins a les onze de la nit. La taula de valors del marge proporciona dades relatives a aquesta funció. D'acord amb aquesta taula, els punts corresponents a la funció t, que són de la forma $(x, t(x))$, es poden expressar així:

$$(8,10),\ (9,11),\ (10,13),\ (11,15),\ (12,16),\ (13,18),\ (14,20),\ (15,19),$$
$$(16,18),\ (17,16),\ (18,16),\ (19,15),\ (20,14),\ (21,12),\ (22,10),\ (23,9).$$

Aleshores, la representació gràfica de tots aquests punts en el pla cartesià és la gràfica de punts següent:



Exemple

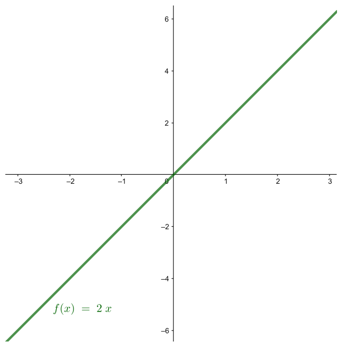
x (hora)	$t(x)$ (°C)
08:00	10
09:00	11
10:00	13
11:00	15
12:00	16
13:00	18
14:00	20
15:00	19
16:00	18
17:00	16
18:00	16
19:00	15
20:00	14
21:00	12
22:00	10
23:00	9

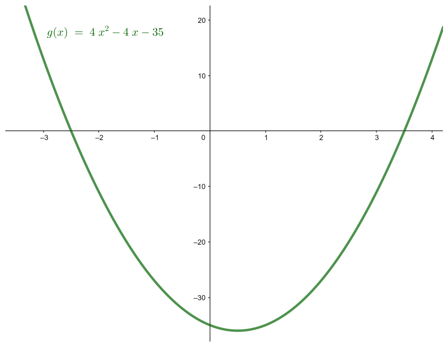
Taula instant-temperatura

Notem que en aquest cas no s'ha dibuixat la part negativa dels eixos per comoditat, ja que no hi ha punts amb coordenades negatives.

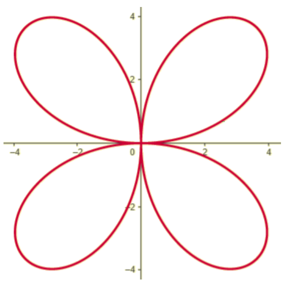
La representació de tots els punts de la forma $(x, f(x))$ es denomina **gràfica d'una funció**. Notem que, si una funció té per domini tot el conjunt de nombres reals, és impossible representar-ne tota la gràfica (perquè no hi cabria en un full de paper). En aquest cas, haurem de conformar-nos amb la representació d'una part d'aquesta gràfica solament, i és costum continuar denominant-la gràfica de la funció però indicant l'interval del domini que representem.

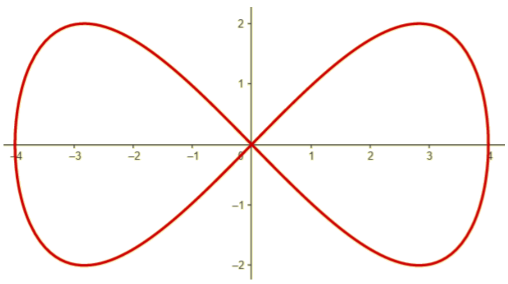
A continuació es poden observar les representacions gràfiques de dues funcions concretes en intervals concrets, que s'estudiaran detingudament en temes posteriors. A l'esquerra es presenta la funció $f(x) = 2x$ en els punts de domini en l'interval $[-3, 3]$. A la dreta s'observa la funció $g(x) = 4x^2 - 4x - 35$ en l'interval $[-3, 4]$.



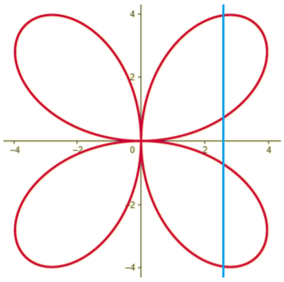
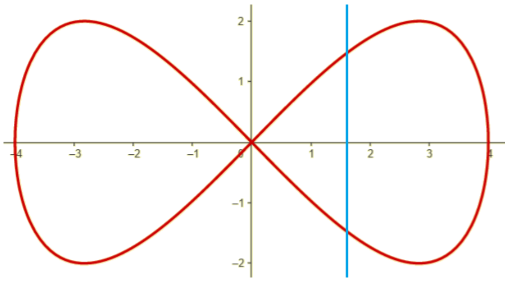


En aquests casos observem com, en representar-se tots els punts d'un interval determinat, els punts de la gràfica estan tan pròxims que formen una línia contínua, que en el cas particular de l'esquerra és recta i en el cas de la dreta corbada.
De fet, en general, totes les funcions el domini de les quals són els nombres reals tenen aquesta característica: la seva gràfica apareix com una línia contínua o com diverses línies contínues.
Cal destacar que la gràfica d'una funció no pot tenir una forma com les que es presenten a continuació, ja que en ambdós casos hi ha valors en l'eix X tals que la seva imatge no és un únic valor.





Aquest fet es pot comprovar traçant qualsevol recta vertical en les gràfiques, tal com mostra la imatge següent. Si una recta vertical talla diversos punts de la gràfica que s'estudia, es pot assegurar que la gràfica no és d'una funció perquè el valor de $x$determinat per aquesta recta té com a mínim més d'una imatge, fet impossible en una funció.

6.3. Operacions entre funcions

6.3.1. Operacions bàsiques

Entre funcions diferents qualssevol, es poden realitzar certes operacions. Aquestes operacions són les que s'exposen a continuació:

Suma (o resta) de funcions La suma (o resta) de dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, es designa per $f \pm g$ i es calcula de la manera següent:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

Aquesta suma es pot calcular sempre que x estigui en el domini de les dues funcions que se sumen.

Per exemple, la suma de les funcions $f(x) = 3x$ i $g(x) = 4x^2 - 1$ és

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 4x^2 - 1 = 4x^2 + 3x - 1$$

La suma (o resta) de funcions té les propietats següents:

- **Commutativa**: $f \pm g = g \pm f$
- **Associativa**: $f \pm (g \pm h) = f \pm (g \pm h)$
- Hi ha un element, denominat **funció zero**, que és l'element neutre de la suma de funcions, de manera que qualsevol funció sumada amb aquest element no varia. Aquesta funció és $z(x) = 0$.
- Per a cada funció $f(x)$, hi ha la **funció oposada** $-f(x)$ que, sumada a la funció original, resulta la funció zero.

Operar amb funcions.
Les operacions essencials amb funcions són la suma, la resta, la multiplicació, la divisió i la potenciació. En tots els casos, el domini de la funció resultant és la intersecció dels dominis de les funcions amb les quals s'opera. En el cas de la divisió, a més, no pertanyen al domini aquells punts que anul·len el denominador. Una altra operació important entre funcions és la potenciació. En el cas de la potenciació, no pertanyen al domini tots aquells punts que anul·len alhora la base i l'exponent.

Producte de funcions El producte de dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, es designa per $f \cdot g$ i es calcula de la manera següent:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Aquest producte es pot calcular sempre que la variable x estigui en el domini de les funcions que es multipliquen.

Per exemple, el producte de les funcions $f(x) = 3x$ i $g(x) = 4x^2 - 1$ és

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 3x \cdot (4x^2 - 1) = 12x^3 - 3x$$

El producte de funcions té les propietats següents:

- **Commutativa**: $f \cdot g = g \cdot f$
- **Associativa**: $f \cdot (g \cdot h) = f \cdot (g \cdot h)$
- Hi ha un element, denominat **funció unitat**, que és el neutre del producte de funcions, de manera que qualsevol funció multiplicada per aquest element no varia. Aquesta funció és $u(x) = 1$.

Quocient de funcions El quocient de dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, es designa per $\dfrac{f}{g}$ i es calcula de la manera següent:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Aquest quocient es pot calcular sempre que la variable x estigui en el domini de les funcions que es considerin i, a més, la funció del denominador $g(x)$ no sigui la funció 0.

Per exemple, el quocient de les funcions $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = x + 1$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$$

Potència de funcions La potència d'una funció $f(x)$ per una altra funció $g(x)$ es designa per f^g i es calcula de la manera següent:

$$\left(f^g\right)(x) = f(x)^{g(x)}$$

Aquesta potència es pot calcular sempre que la variable, x, estigui en el domini d'ambdues funcions, f i g, i que cap de les dues funcions s'anul·lin.

Per exemple, la potència de la funció $f(x) = 4x^2 - 1$ per $g(x) = 3x$ és

$$\left(f^g\right)(x) = f(x)^{g(x)} = \left(4x^2 - 1\right)^{3x}$$

6.3.2. Composició de funcions i funció inversa

Donades dues funcions, f i g, es pot definir la **composició de la funció f amb la funció g**. Aquesta composició es designa per $g \circ f$ i es calcula de la manera següent:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Per tal de poder calcular la composició de la funció f amb la funció g en un punt a, és necessari que $f(a)$ pertanyi al domini de g.

Què són la composició de funcions i la inversa d'una funció?
La composició d'una funció f amb una funció g és una altra funció, $g \circ f$, tal que a cada element del domini hi fa correspondre $g(f(x))$. Es diu que f i g són inverses una de l'altra si $(g \circ f)(x) = x$ i $(f \circ g)(x) = x$. La funció inversa de f es denota per f^{-1}.

Exemple. Composició de dues funcions.
Donades les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = 2x$, es poden definir les composicions de funcions:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2 \cdot \left(x^2\right) = 2x^2$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = (2x)^2 = 4x^2$$

Amb aquest exemple es pot observar com la composició de funcions *no és commutativa*. És a dir, $g \circ f$ no sol ser igual a $f \circ g$. En altres paraules, no és el mateix la composició de f amb g que la composició de g amb f.

A partir del concepte de composició de funcions, es pot definir el concepte de **funció inversa** d'una altra funció. Si f és una funció, es diu que g és la funció inversa de f si es compleixen alhora les dues condicions següents:

- $(g \circ f)(x) = x$ per a tot x que pertany al domini de f
- $(f \circ g)(x) = x$ per a tot x que pertany al domini de g

Per tant, aquestes condicions impliquen que el domini de la funció f és igual a la imatge de la funció g, és a dir, que $\text{Dom}f = \text{Im}g$. Això significa que si f és una funció tal que $f(3) = 5$, s'ha de complir $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(5) = 3$. És a dir, que si la imatge del 3 per la funció f és 5, la imatge del 5 per la funció g és 3. I això s'ha de complir per a qualsevol valor de f.

De manera general, es diu que una funció g és la inversa de f si es compleix que si $f(x) = y$ llavors $g(y) = x$. En cas de ser així, la funció inversa de f es denota per f^{-1} i, en particular, si $y = f(x)$, s'escriu $x = f^{-1}(y)$.
Aquest fet mostra com una propietat important, que es pot demostrar, és que si una funció té inversa aleshores ambdues funcions, la funció original i la seva inversa, són bijectives.

Exemple. Funcions inverses.
Són parells de funcions inverses

$f(x) = x + a$ i $f^{-1}(y) = y - a$, amb $a \in \mathbb{R}$ un paràmetre qualsevol

$f(x) = a - x$ i $f^{-1}(y) = a - y$, amb $a \in \mathbb{R}$ un paràmetre qualsevol

$f(x) = a \cdot x$ i $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{a}$, amb $a \in \mathbb{R}$ un paràmetre qualsevol i $a \neq 0$

6.4. Característiques d'una funció

Les funcions es classifiquen en tipus diferents depenent de com s'utilitza la variable independent. En particular, cada un d'aquests tipus de funcions presenta un domini, una imatge i una forma gràfica específica. En aquest sentit, es pot parlar de famílies de funcions: polinòmiques, trigonomètriques, exponencials, logarítmiques...

Exemple. Tipus de funcions.

$f(x) = 5x^2 - x - 2$ és una funció polinòmica.

$g(x) = \sin(x)$ és una funció trigonomètrica.

$h(x) = 3^x$ és una funció exponencial.

Quan les funcions són tan específiques, és possible determinar certes característiques de la seva forma en particular. A banda del seu domini i recorregut, aquests trets principals són les interseccions de la funció amb els eixos coordenats, la determinació de possibles simetries, els intervals de creixement i decreixement, l'existència de punts extrems, els intervals de concavitat o convexitat, l'existència de punts d'inflexió i el seu comportament asimptòtic.

Els temes que segueixen presenten les principals famílies de funcions, que cal no solament conèixer, sinó també saber identificar i representar gràficament. Amb l'estudi d'aquestes famílies de funcions, s'introdueixen els termes que fan referència als trets característics de qualsevol funció. Es presenten aquests trets i s'explicita com poden determinar per a cada una de la família de funcions que s'estudia.

Resum

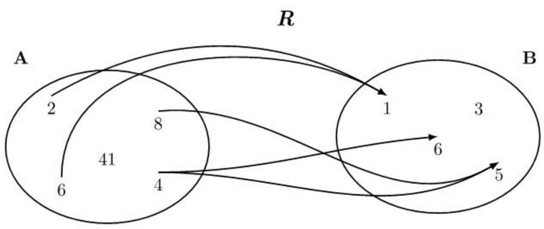
Concepte de funció

Correspondències entre conjunts

Definició. Una **correspondència** entre dos conjunts és una relació entre ambdós conjunts que fa correspondre a elements del primer conjunt elements del segon conjunt.

Representació. Gràficament, les correspondències entre conjunts es representen amb diagrames. Els conjunts es representen amb formes ovalades i les correspondències que s'estableixen entre ells amb fletxes que relacionen els elements que contenen aquestes formes.

Exemple i elements. En una correspondència com la que mostra la imatge, s'identifiquen:



- El **nom** de la correspondència: R.
- El **conjunt de partida**: $A = \{2, 4, 6, 8, 41\}$.
- El **conjunt d'arribada**: $B = \{1, 3, 5, 6\}$.
- El **domini** de R: $\text{Dom}R = \{2, 4, 6, 8\}$.
- La **imatge** de R: $\text{Im}R = \{1, 5, 6\}$.
- La **imatge** d'elements concrets:
  - La imatge de l'element 2 és l'element 1.
  - La imatge de l'element 4 són els elements 5 i 6.
- L'**antiimatge** d'elements concrets:
  - L'antiimatge de l'element 6 és l'element 4.
  - L'antiimatge de l'element 1 són els elements 2 i 6.

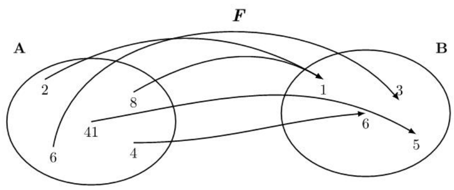
Aplicacions i funcions

Exemples i definició.

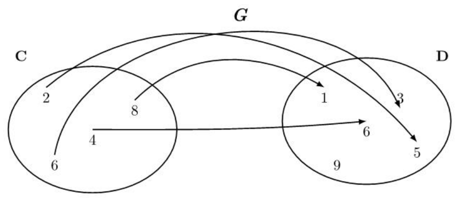
S'anomena **aplicació** tota correspondència en què cada element té una única imatge. Quan una aplicació és definida entre conjunts numèrics, s'anomena **funció**.

Tipus d'aplicacions. Es distingeixen tres tipus d'aplicacions segons com és la seva imatge:

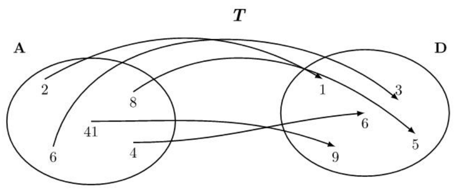
- **Exhaustives**: aplicacions tals que la seva imatge coincideix amb el conjunt d'arribada.



- **Injectives**: aplicacions tals que cada element de la imatge només té una única antiimatge.



- **Bijectives**: aplicacions exhaustives i injectives al mateix temps.



Representació de funcions

Hi ha diferents maneres de representar una fumció.

Taula d'una funció. És una taula de valors amb dues columnes. La columna de l'esquerra conté valors del domini de la funció i la columna de la dreta conté els valors corresponents de la seva imatge.
Exemple: taula de la funció F anterior.

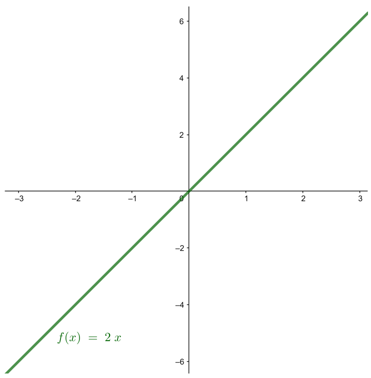
Dom$F$	ImF
2	1
4	6
6	3
8	1
41	5

Expressió d'una funció. És una expressió algebraica amb una variable que permet trobar la imatge de qualsevol element del domini de la funció. Per a determinar la imatge, s'ha de substituir la variable de l'expressió pel valor del domini que aquest pren, i operar d'acord amb l'expressió donada.

Exemple: Si la funció g és aquella que fa correspondre a un nombre el mateix nombre al quadrat, la seva expressió ha de ser $g(x) = x^2$. Aleshores, la imatge de 4 per la funció g és 16, perquè $g(4) = 4^2 = 16$.

Gràfica d'una funció. És el conjunt de tots els punts (x, y) del pla cartesià tals que les seves coordenades coincideixen amb els valors del domini i les imatges corresponents d'aquesta funció. En aquest cas, la primera coordenada, x, correspon a un valor del domini, i la segona coordenada, $y = f(x)$, denota el valor corresponent de la imatge. Per a dibuixar la gràfica d'una funció, s'han de dibuixar tots els punts continguts en la taula de la funció.

Exemple: la gràfica de la funció $f(x) = 2x$ quan el domini és l'interval $[-3, 3]$:



Operacions amb funcions

Si f i g són dues funcions, es poden definir les operacions següents:

- **Suma (o resta)** de les funcions $f(x)$ i $g(x)$. Es designa per $f \pm g$ i es calcula $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$. Aquesta suma es pot calcular sempre que $x$estigui en el domini d'ambdues funcions, f i g.

- **Producte** de les funcions $f(x)$ i $g(x)$. Es designa per $f \cdot g$ i es calcula $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Aquest producte es pot calcular sempre que x estigui en el domini d'ambdues funcions, f i g.

- **Quocient** de les funcions $f(x)$ i $g(x)$. Es designa per $\dfrac{f}{g}$ i es calcula $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Aquest quocient es pot calcular sempre que x es trobi en el domini d'ambdues funcions, f i g i, a més, $g(x)$ no sigui 0.

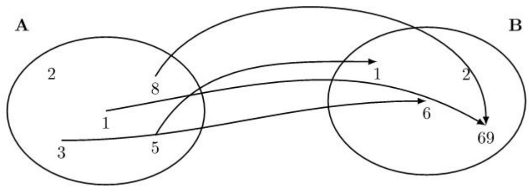
- **Potència** de les funcions $f(x)$ i $g(x)$: es designa per f^g i es calcula com $\left(f^g\right)(x) = f(x)^{g(x)}$. Aquesta potència es pot calcular sempre que x estigui en el domini d'ambdues funcions, f i g, i, a més, que $f(x)$ i $g(x)$ no siguin 0.

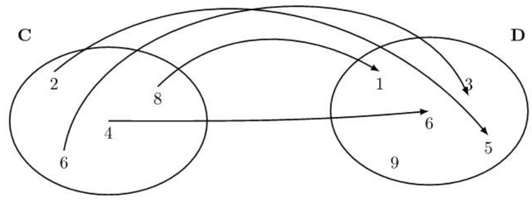
- **Composició** de la funció f amb la funció g. És una altra funció, que es designa per $g \circ f$, que compleix $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Aquesta nova funció es pot calcular sempre que $f(x)$ estigui en el domini de la funció que s'aplica en segon lloc, g.

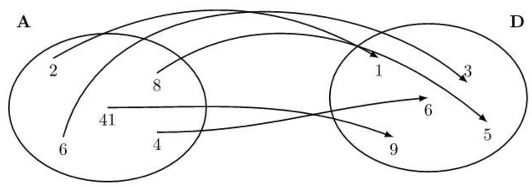
- **Inversa** d'una funció. Les funcions f i g són inverses una de l'altra si $(g \circ f)(x) = x$ i $(f \circ g)(x) = x$ alhora. Si hi ha inversa, ambdues funcions són bijectives. La funció inversa de f es denota per f^{-1}.

Exercicis resolts

1. **Digueu si aquestes correspondències són funcions. En cas afirmatiu, feu la taula de valors de cada una i digueu si són bijectives, exhaustives o injectives.**







Solució:
Totes les correspondències són funcions perquè cada element del conjunt de sortida només té una imatge. Les seves taules de valors són:

x	$F(x)$
1	69
3	6
5	1
8	69

x	$G(x)$
2	5
4	6
6	3
8	1

x	$H(x)$
2	1
4	6
6	3
8	5
41	9

Aleshores, podem dir:

- F no és ni injectiva ni exhaustiva.
- G és injectiva perquè cada element de la imatge té només una única antiimatge.
- H és bijectiva perquè és injectiva (cada element de la imatge té només una única antiimatge) i també és exhaustiva (la imatge coincideix amb el conjunt d'arribada).

2. **Determina el domini i, si n'hi ha, els punts de tall amb els eixos d'aquestes funcions:**

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$

(c) $h(x) = 3$

(d) $a(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

(e) $b(x) = \sqrt{x + 1}$

(f) $c(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(g) $d(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$

Solució:

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Domini: Tota la recta real, perquè es tracta d'un polinomi.
Punts de tall:

- Eix Y: Si $x = 0$, $f(x) = f(0) = 1$. Per tant, el punt $(0,1)$.
- Eix X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Per tant, el punt $(1,0)$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Domini: Tota la recta real excepte els valors que anul·len el denominador, és a dir, tots menys el 0 ($x \neq 0$). Per tant, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$
Punts de tall:

- Eix Y: Si $x = 0$, $g(0)$ no existeix perquè $x = 0$ no és del domini de la funció. Per tant, no existeixen punts de tall amb l'eix Y.
- Eix X: No existeix cap x qe compleixi $g(x) = 0$. Per tant, no hi ha punts de tall amb l'eix X.

(c) $h(x) = 3$

El domini és tota la recta real, perquè qualsevol nombre té la imatge igual a 3.
Punts de tall:

- Eix Y: Si $x = 0 \Rightarrow h(x) = 3$. Per tant, el punt $(0,3)$.
- Eix X: Com que $h(x)$ ha de ser sempre 3, no pot ser mai 0. Per tant, no hi ha punts de tall amb l'eix X.

(d) $a(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

Domini: Tota la recta real, excepte aquells valors que anul·len el denominador. Els valors que anul·len el denominador són: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$. Per tant, el domini és $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
Punts de tall:

- Eix Y: Si $x = 0 \Rightarrow a(0) = -\frac{1}{2}$. Per tant, el punt $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.
- Eix X: Si $a(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \{1, -1\}$. Per tant, els punts $(1,0)$ i $(-1,0)$.

(e) $b(x) = \sqrt{x + 1}$

Domini: L'interior de l'arrel no pot ser negatiu. Això vol dir que, necessàriament, $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$. Per tant, el domini és l'interval $[-1, +\infty)$.
Punts de tall:

- Eix Y: Si $x = 0 \Rightarrow b(0) = 1$. Per tant, el punt $(0,1)$.
- Eix X: Si $b(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Per tant, el punt $(-1,0)$.

(f) $c(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Domini: L'interior de l'arrel no pot ser negatiu. Això vol dir que, necessàriament, $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1$. Per tant, el domini és producte de la unió dels intervals $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
Punts de tall són:

- Eix Y: Si $x = 0$, $c(0)$ no existeix perquè $x = 0$ no és del domini de la funció. Per tant, no hi ha punts de tall amb l'eix Y.
- Eix X: Si $h(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \{-1, 1\}$. Per tant, els punts $(-1,0)$ i $(1,0)$.

(g) $d(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$.

Domini: En aquest cas s'han de complir dues condicions:

- L'interior de l'arrel no pot ser negatiu. Això vol dir que $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow |x| \geq 2$.
- El denominador no es pot anul·lar. Això vol dir que $x + 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5$

Per tant, el domini és producte de la unió de les tres condicions: $((-\infty, -2] \cup [2, \infty)) \backslash \{-5\} = (-\infty, -5) \cup (-5, -2] \cup [2, \infty)$
Punts de tall:

- Eix Y: Si $x = 0$, d(0) no existeix perquè $x = 0$ no és del domini de la funció. Per tant, no hi ha punts de tall amb l'eix Y.
- Eix X: Si $d(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \{-2, 2\}$. Per tant, els punts $(2,0)$ i $(-2,0)$.

Exercicis per a practicar amb les solucions

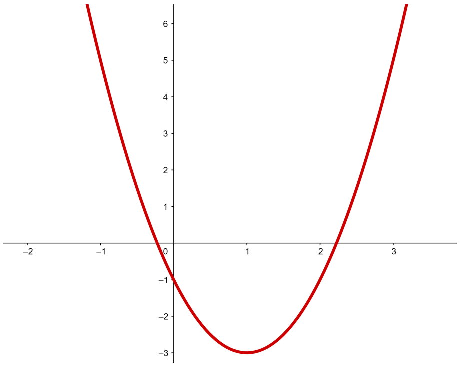
3. **Doneu l'expressió d'una funció que tingui aquesta taula:**

x	$f(x)$
-2	5
0	1
2	5
4	17
5	26
6	37

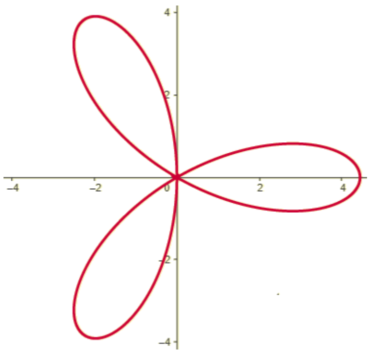
4. **Trobeu les imatges de la funció** $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ **pels valors** 0**,** 1 **i** -3**.**

5. **Digueu si aquestes gràfiques corresponen a una funció:**

Gràfica 1**:**



Gràfica 2**:**



6. **Siguin les funcions:** $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$**,** $g(x) = 3x + 1$ **i** $h(x) = e^x$**. Determineu les composicions de funcions següents:**

(a) $(f \circ g)(x)$
(b) $(g \circ f)(x)$
(c) $(f \circ h)(x)$
(d) $(h \circ g \circ f)(x)$

Solucions:

3. $f(x) = x^2 + 1$
4. Per a trobar les imatges dels valors demanats, s'ha de substituir la variable de l'expressió pel valor donat i, posteriorment, operar d'acord amb l'expressió numèrica resultant:
   (a) $f(0) = 1$
   (b) $f(1) = 2$
   (c) $f(-3) = 34$
5. La primera gràfica sí que correspon a una funció, però la segona no perquè hi ha valors que tenen més d'una antiimatge, per exemple, $x = 0$ on $f(0) = \{-1, 1\}$.
6. Les funcions composició resultants són:
   (a) $(f \circ g)(x) = 18x^2 + 3x$
   (b) $(g \circ f)(x) = 6x^2 - 9x + 4$
   (c) $(f \circ h)(x) = 2\,(e^x)^2 - 3e^x + 1$
   (d) $(h \circ g \circ f)(x) = e^{6x^2-9x+4}$