Iniciació a les matemàtiques per a l'enginyeria

PID_00270082

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat Oberta de Catalunya

7. Funcions polinòmiques

Índex

Una funció polinòmica és tota aquella funció que té per expressió algebraica un polinomi. L'estudi de les funcions polinòmiques es fa segons el grau del polinomi, i per tant té sentit començar per les funcions que tenen per expressió un polinomi de grau 1, és a dir, quan en l'expressió algebraica de la funció la variable apareix un sol cop multiplicada per ella mateixa. Comencem, doncs, per conèixer aquests casos particulars de funcions polinòmiques.

7.1. Funcions lineals

7.1.1. Definició i exemples

Una **funció lineal** o **de proporcionalitat directa** és aquella funció l' expressió de la qual és el producte d'un nombre per la variable. En altres paraules, es diu que f és una funció lineal (o de proporcionalitat directa) si

$$\boxed{f(x) = ax}$$

on a és un nombre real qualsevol. El nombre que multiplica la variable, a, es denomina **raó de proporcionalitat**.

Què caracteritza una funció lineal?
L'expressió algebraica d'una funció lineal o de proporcionalitat directa és producte d'un polinomi de grau 1 sense terme independent, és a dir, del tipus $f(x) = ax$. El nombre a rep el nom de pendent de la recta i informa de la seva inclinació. La gràfica corresponent és una recta que passa per l'origen de coordenades.

Exemple. Funcions lineals i raó de proporcionalitat.

$g(x) = 2x$, és una funció lineal amb raó de proporcionalitat 2.

$h(x) = 4x$, és una funció lineal amb raó de proporcionalitat 4.

$s(x) = -3x$, és una funció lineal amb raó de proporcionalitat -3.

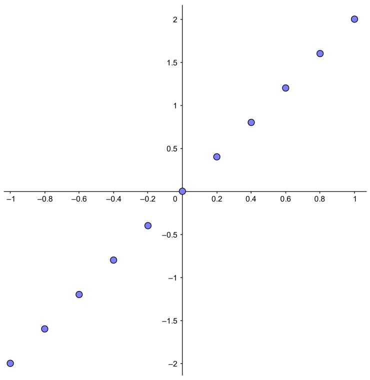
Per estudiar la forma de la gràfica d'una funció lineal, es pot crear, en primer lloc, una taula de la funció. D'aquesta manera, en representar els punts de la taula s'obté la gràfica associada. Ho exemplifiquem amb la funció $f(x) = 2x$.

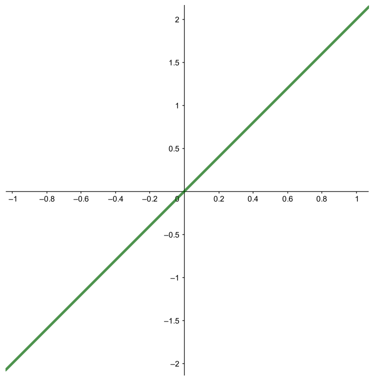
Exemple

x	$f(x)$
-1	-2
-0.8	-1.6
-0.4	-1.2
-0.2	-0.8
0.2	-0.4
0.4	0.8
0.6	1.2
0.8	1.6
1	2

Taula de la funció $f(x) = 2x$

Una taula de valors associada a la funció $f(x) = 2x$ és la que apareix en el marge. En representar els punts que conté aquesta taula en el pla cartesià s'obté la primera de les dues gràfiques que hi ha a continuació. En observar aquesta gràfica de punts, es pot deduir, de manera gairebé directa, on dibuixar tots els punts de la gràfica de la funció. El resultat d'aquest fet dona una recta que passa per l'origen de coordenades, tal com mostra la gràfica de la dreta. Aquesta segona gràfica correspon a la gràfica de $f(x) = 2x$.





7.1.2. Representació gràfica

La gràfica de qualsevol funció lineal és una recta que passa per l'origen de coordenades. Això es deu al fet que qualsevol funció lineal és de la forma $f(x) = ax$, on a és un nombre real no nul. En buscar la imatge del 0, s'obté $f(0) = a\cdot 0 = 0$. En conseqüència, la imatge del 0 sempre és 0 i, per tant, el punt $(0,0)$ pertany sempre a la gràfica de la funció.

Així, per a dibuixar una funció lineal qualsevol del tipus $f(x) = ax$, només cal seguir aquests passos:

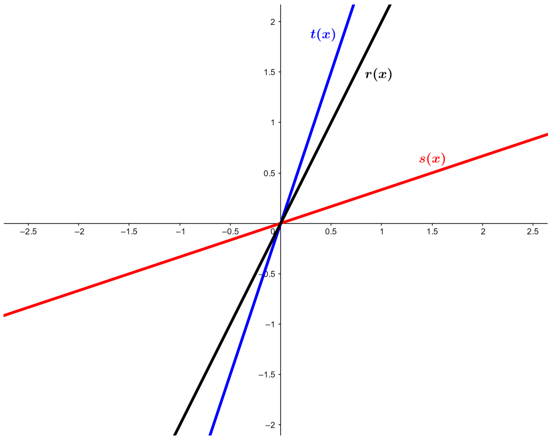
1) Es troba la imatge d'un valor qualsevol x_0 del domini de la funció que no sigui el 0, doncs ja sabem que la imatge del 0 és $f(0) = 0$.

2) Es marca el punt P que correspon a aquest parell ordenat en el pla cartesià: $(x_0, f(x_0))$.

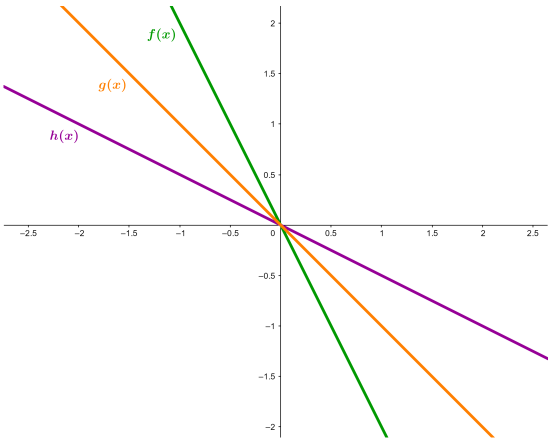
3) Es traça la recta que passa pel punt $(0,0)$ i pel punt P anterior. Aquesta recta es correspon amb la gràfica de la funció lineal.

La gràfica de qualsevol funció s'ha d'interpretar mirant-la d'esquerra a dreta. Dit això, en dibuixar diverses funcions lineals, com per exemple $f(x) = -2x$, $g(x) = -x$, $h(x) = -\frac{1}{2}x$, $t(x) = 3x$, $s(x) = \frac{1}{3}x$ i $r(x) = 2x$, es pot observar com varia el **pendent** (o inclinació) de les rectes. En particular, es té que:

- Si la raó de proporcionalitat és positiva, la recta creix amb més rapidesa com més gran és la raó. Aquest fet s'observa en comparar les gràfiques de les funcions $t(x) = 3x$, $s(x) = \frac{1}{3}x$ i $r(x) = 2x$, tal com mostra la imatge següent:



- Si la raó de proporcionalitat és negativa, la recta decreix amb més rapidesa com més petita (més negativa) és la raó. Aquest fet s'observa en comparar les gràfiques de les funcions $f(x) = -2x$, $g(x) = -x$ i $h(x) = -\frac{1}{2}x$, tal com mostra la imatge següent:



Atesa la relació que hi ha entre la raó de proporcionalitat i el pendent de la gràfica, la raó de proporcionalitat també se l'anomena **pendent de la recta**.

7.2. Funcions afins

7.2.1. Definició i exemples

Una **funció afí** és aquella funció l'expressió algebraica de la qual és producte d'un polinomi de primer grau, és a dir, de la forma

$$\boxed{f(x) = ax + b}$$

on a i b són dos nombres reals qualssevol. El coeficient de la variable, a, es denomina **pendent**, com en el cas de la funció lineal. L'altre nombre, b, es denomina **terme independent** o ordenada a l'origen. D'acord amb aquesta expressió, l'única diferència

Què caracteritza una funció afí?
L'expressió algebraica d'una funció afí és un polinomi de grau 1, és a dir, del tipus $f(x) = ax + b$. El nombre a rep el nom de pendent de la recta i informa de la seva inclinació. El nombre b s'anomena terme independent i informa del tall amb l'eix Y. La gràfica d'una funció afí és una recta.

que hi ha entre una funció afí i una funció lineal és que la funció afí afegeix el terme independent b.

Exemple. Funcions afins i els seus elements.

$g(x) = 3x - 2$ és una funció afí amb pendent 3 i terme independent -2.

$h(x) = 2x - 7$ és una funció afí amb pendent 2 i terme independent -7.

7.2.2. Representació gràfica

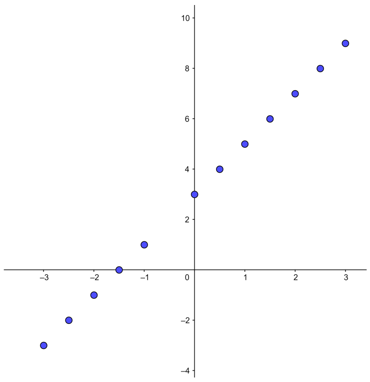
En representar diferents punts d'una funció afí, es pot arribar a deduir la forma de la seva gràfica.

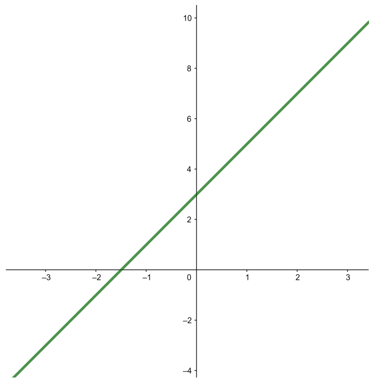
Per exemple, considerem la funció $f(x) = 2x + 3$ i calculem una taula de valors de la funció com la del marge. Aleshores, la representació gràfica resultant és la gràfica de punts que mostra la primera de les dues imatges que hi ha a continuació. A partir d'aquesta gràfica de punts es pot deduir la gràfica completa de la funció considerada, $f(x) = 2x + 3$. Es tracta d'una recta que no passa per l'origen de coordenades, tal com mostra la segona de les dues imatges de sota.

Exemple

x	$f(x)$
-3	-3
-2.5	-2
-2	-1
-1.5	0
-1	1
-0.5	2
0	3
0.5	4
1	5
1.5	6
2	7
2.5	8
3	9

Taula de la funció $f(x) = 2x + 3$





Així, conegut el fet que acabem d'observar, és possible representar una funció afí a partir de la seva expressió algebraica. Si $f(x) = ax + b$ és l'expressió general d'una funció afí, els passos a seguir per a representar-la gràficament es poden resumir així:

1) Es busquen dos parells ordenats P i Q: $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$ que pertanyin a la gràfica de la funció.

2) Es representen els punts P i Q en el pla cartesià.

3) S'uneixen els punts dibuixats mitjançant una recta.

Aquesta recta resultant correspon a la gràfica de la funció afí $f(x) = ax + b$.

En la gràfica de tota funció afí $f(x) = ax + b$ es distingeixen dos punts de manera destacada. Aquests són els punts de tall amb els eixos de coordenades. Més concretament:

- El punt intersecció entre la recta de la funció i l'eix Y. Aquest punt és $(0, f(0))$.

En particular, com que per definició de la funció afí $f(0)$ és el terme independent b de l'expressió de la funció, el punt intersecció és exactament $(0, b)$.

- El punt intersecció entre la recta de la funció i l'eix X. Aquest punt es pot trobar calculant l'antiimatge del 0, és a dir, x tal que $f(x) = 0$. Si $\overline{x}$ és la solució d'aquesta equació, el punt d'intersecció amb l'eix d'abscisses serà $(\overline{x}, 0)$. Més concretament, com que $f(x) = ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}, a \neq 0$, i per tant el punt és exactament $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Exemple. Punts de tall d'una funció.

Considerem la funció $f(x) = 3x - 2$. Aleshores:

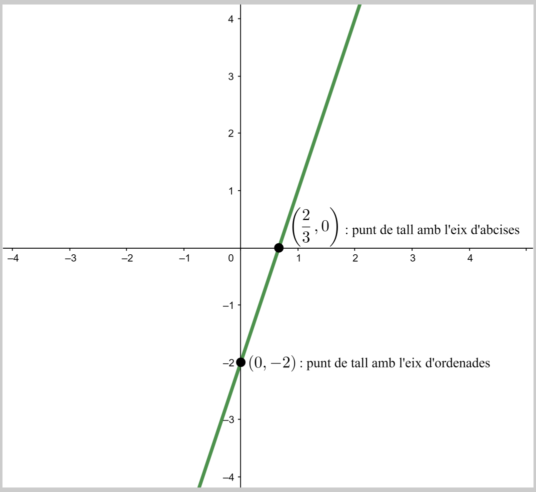
La intersecció de $f(x)$ amb l'eix Y és $(0, f(0)) = (0, -2)$.

La funció $f(x)$ talla l'eix X en un punt tal que la seva coordenada d'ordenades compleix

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Per tant, el punt intersecció de la funció amb l'eix X és $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

Vegem els punts de tall en la següent gràfica:



Expressió de la funció donats dos punts. A vegades és necessari determinar la funció afí que passa per dos punts determinats.

Donada l'expressió general d'una funció afí, $f(x) = ax + b$, sabem que a indica el pendent de la funció i b el seu terme independent. Si volem trobar l'expressió algebraica de $f(x)$, hem de trobar els dos valors, a i b. Per a aconseguir-ho, és necessari definir un sistema d'equacions que caldrà resoldre posteriorment. Vegem-ho amb un exemple.

Exemple. Com trobar una funció afí a partir de dos punts.
Volem trobar una funció afí de manera que la seva gràfica contingui els punts del pla $(1, -1)$ i $(-2, -7)$.
Com que el punt $(1, -1)$ és de la gràfica de la funció: $f(1) = -1$. Com que busquem $f(x) = ax + b$, $a \cdot 1 + b = -1$.
Com que el punt $(-2, -7)$ és de la gràfica de la funció, $f(-2) = -7$. Pel mateix raonament que abans, $a \cdot (-2) + b = -2a + b = -7$.
Cal resoldre el sistema d'equacions que sorgeix de les dues condicions anteriors

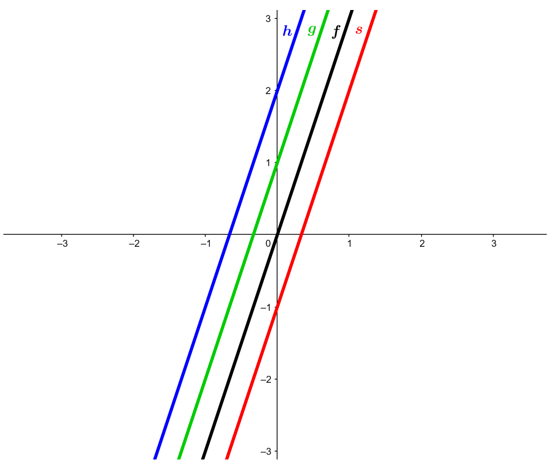
$$\begin{cases} a + b & = -1 \\ -2a + b & = -7 \end{cases}$$

En resoldre el sistema s'obté que les solucions del sistema són $a = 2$ i $b = -3$. Només cal substituir el valors de a i b trobats en l'expressió general $f(x) = ax + b$, d'on resulta

$$f(x) = 2x - 3$$

7.2.3. Propietats

En comparar la gràfica de diverses funcions afins que tenen el mateix pendent, s'observa que totes elles són rectes paral·leles. Així es visualitza en la figura següent, que presenta les gràfiques de les funcions $f(x) = 3x$, $g(x) = 3x + 1$, $h(x) = 3x + 2$ i $s(x) = 3x - 1$.



Que les rectes siguin paral·leles vol dir que l'única modificació gràfica que té lloc en modificar el terme independent d'una funció consisteix a desplaçar paral·lelament la recta. Alhora, es pot observar que una funció lineal no és més que una funció afí en què el terme independent és 0. Dit d'una altra manera, es tracta de la corresponent funció afí que passa per l'origen.

D'acord amb aquest últim fet, es distingeixen tres **tipus de funcions afins** atenent al valor del seu *pendent*. Aquestes són:

- Les funcions afins que creixen a mesura que es desplaça la vista cap a la dreta. S'identifiquen com a **funcions creixents** i es corresponen amb les que tenen el *pendent positiu*. És a dir, $f(x) = ax + b$ amb $a > 0$.

- De manera similar, però en sentit invers, les funcions afins que decreixen a mesura que desplacem la vista cap a la dreta. Aquestes funcions es denominen **funcions decreixents** i es corresponen amb les que tenen el *pendent negatiu*. És a dir, $f(x) = ax + b$ amb $a < 0$.

- Finalment, les funcions afins que són paral·leles a l'eix X. Són **funcions constants** i es corresponen amb les que tenen el *pendent nul*. És a dir, $f(x) = ax + b$ amb $a = 0$.

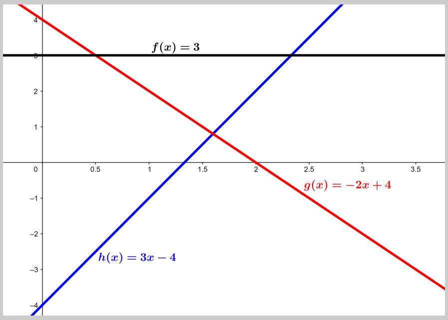
Exemple. Tipus de funcions afins.

Funció afí constant: $f(x) = 3$, té pendent 0.

Funció afí creixent: $h(x) = 3x - 4$, té pendent $3 > 0$.

Funció afí decreixent: $g(x) = -2x + 4$, té pendent $-2 < 0$.

Les gràfiques corresponents a aquestes funcions són



D'acord amb les definicions anteriors, una funció afí és **creixent** quan, a mesura que augmenta el valor de la variable, x, també augmenta el valor de la imatge de la funció, y.
Per contra, una funció és **decreixent** quan, a mesura que augmenta el valor de la x, disminueix el valor de la y.
Finalment, una funció és **constant** quan el valor de la imatge, y, no canvia en variar el valor de la variable, x. Una funció constant no és creixent ni decreixent.

7.3. Funcions quadràtiques

7.3.1. Definició i exemples

L'expressió d'una funció quadràtica correspon a un polinomi de segon grau amb una única variable. És a dir, és de la forma

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

amb $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ (si $a = 0$ aleshores tenim una funció afí i no quadràtica). a és el

Què caracteritza una funció quadràtica?
L'expressió algebraica d'una **funció quadràtica** és un polinomi de grau 2. La seva representació gràfica és una paràbola i els punts essencials d'ella són l'*eix de simetria*, el *vèrtex* i les *branques*.

coeficient de segon grau, b el coeficient de primer grau i c el terme independent.

Exemple. Funcions quadràtiques.

> $f(x) = 3x^2 + 2x - 2$ és una funció quadràtica amb terme de segon grau 3, terme de primer 2 i terme independent -2.
>
> $g(x) = x^2 + 5$ és una funció quadràtica amb terme de segon grau 5 i terme independent 5. No té terme de primer grau.

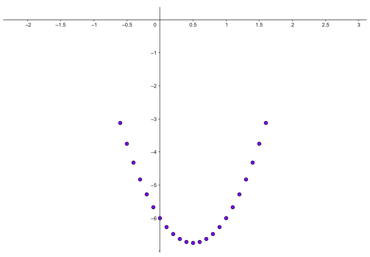
Per a representar una funció quadràtica, en primer lloc convé construir una taula de valors amb alguns dels valors de la funció. Vegem-ho amb un exemple.

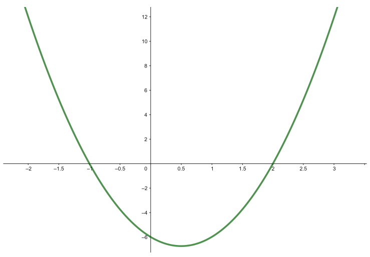
En el marge hi ha una taula que correspon a la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ (no s'han inclòs més valors a la taula perquè seria massa extensa). En representar els punts que conté aquesta taula, s'obté la gràfica de l'esquerra. A partir d'aquesta gràfica no és complicat deduir que la representació completa de la funció quadràtica $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ en l'interval $[-2, 3]$ és la que presenta la figura de la dreta.

Exemple

x	$f(x)$
−0.6	−3.12
−0.5	−3.75
−0.4	−4.32
−0.3	−4.83
−0.2	−5.28
−0.1	−5.67
0	−6
0.1	−6.27
0.2	-6.48
0.3	−6.63
0.4	−6.72
0.5	-6.75
0.6	-6.72
0.7	−6.63
0.8	−6.48
0.9	−6.27
1	−6
1.1	−5.67
1.2	−5.28
1.3	−4.83
1.4	−4.32
1.5	−3.75
1.6	−3.12

Taula de la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$





Com en els casos anteriors, observem que, una vegada representats els punts d'una taula de valors de la funció, no és complicat deduir la representació de tots els punts en què la funció és definida, i es dona lloc així a la gràfica de la funció. En el cas de les funcions quadràtiques, la gràfica resultant és una corba.

7.3.2. Representació gràfica

Tal com s'acaba de veure, la gràfica d'una funció quadràtica és una corba. Aquesta corba rep el nom de **paràbola**.

Elements principals d'una paràbola. Tota paràbola presenta uns elements destacats. Anirem definint quins són aquests elements i alhora veient-los amb un exemple concret a partir de la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$.

- L'**eix de simetria**. Tota paràbola és sempre simètrica respecte d'una recta, que rep el nom d'*eix de simetria*. De manera general, si $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ és l'expressió de la funció quadràtica, aleshores $x = -\frac{b}{2a}$ és l'equació de la recta que defineix l'eix de simetria de la funció.

D'acord amb la taula de valors de la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ anterior, el valor d'aquesta funció f quan $x = 0.5$ és -6.75. En estudiar les imatges dels valors de x de la funció f, observem que aquest és l'únic punt de la funció en què el valor de la imatge no s'assoleix per altres valors de x. En canvi, sí que es repeteixen per qualsevol altre valor de x.

x	$f(x)$
−0.5	−3.75
−0.4	−4.32
−0.3	−4.83
−0.2	−5.28
−0.1	−5.67
0	−6
0.1	−6.27
0.2	−6.48
0.3	−6.63
0.4	−6.72

x	$f(x)$
1.5	−3.75
1.4	−4.32
1.3	−4.83
1.2	−5.28
1.1	−5.67
1	−6
0.9	−6.27
0.8	-6.48
0.7	−6.63
0.6	−6.72

És clar, doncs, que a banda i banda de $x = 0.5$ els valors de la funció f es van repetint. Aquest fet es pot visualitzar dibuixant una recta perpendicular a l'eix X, que passi pel punt $x = 0.5$. En dibuixar aquesta recta es veu clarament que la part de la gràfica que queda a l'esquerra d'aquesta recta és la imatge reflectida de la part dreta, i es mostra així la *simetria* de la funció.

- El **vèrtex**. La intersecció entre la paràbola i l'eix de simetria és un punt que rep del nom de *vèrtex de la paràbola*. En particular, si $f(x) = ax^2 + bx + c$ és l'expressió general de tota funció quadràtica, el vèrtex de la paràbola té com a coordenada d'abscisses $x = -\dfrac{b}{2a}$. Aleshores, el punt serà producte del parell ordenat:
$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)$$

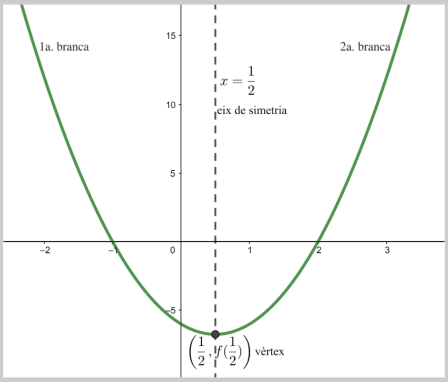
Seguim amb la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$. Hem vist que el vèrtex de la paràbola és en el punt de coordenades $(0.5, -6.75)$.
Fem la comprovació analítica: per ser $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$, tenim $a = 3$, $b = -3$ i $c = -6$. Per tant, la coordenada x del vèrtex és $x = -\dfrac{-3}{2 \cdot 3} = \dfrac{1}{2} = 0.5$, tal com havíem observat anteriorment.

- Les **branques**. A partir del vèrtex de la paràbola, aquesta es desenvolupa en dos traços simètrics a banda i banda, cadascun dels quals es denomina *branca.* Ambdues branques es poden dirigir cap amunt o bé cap avall.
En particular, si $f(x) = ax^2 + bx + c$ és l'expressió general d'una funció quadràtica, es té que:
  - Si $a > 0$, les dues branques de la paràbola es dirigeixen cap amunt, i la funció és decreixent en l'interval $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ i creixent en l'interval $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.
  - Si $a < 0$, les dues branques de la paràbola es dirigeixen cap avall, i la funció és creixent en l'interval $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$, i decreixent en l'interval $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

En el cas de l'exemple, on $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$:

- Les dues branques de la paràbola es dirigeixen cap amunt.
- La funció és decreixent en l'interval $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ i és creixent en l'interval $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right) = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Així, en la gràfica de la funció s'observa, juntament amb els altres elements descrits:



Juntament amb el vèrtex, altres punts importants d'una paràbola són les *interseccions* de la paràbola amb els eixos coordenats.

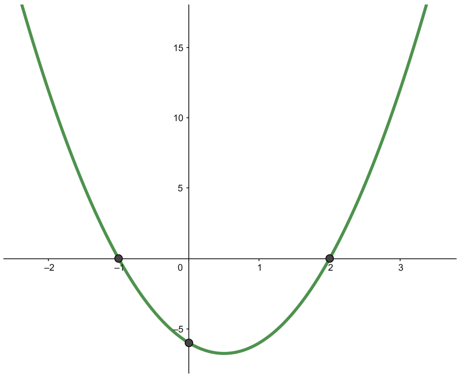
- Tota paràbola té una única intersecció amb l'eix Y. Per a trobar-la, n'hi ha prou de calcular la imatge de $x = 0$. Aleshores, el punt intersecció és $(0, f(0))$. Si tenim en compte que $f(x) = ax^2 + bx + c$, veiem que serà el punt $(0, c)$.

La imatge de 0 per la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ és $f(0) = -6$. Per tant, la intersecció de la paràbola amb l'eix Y és el punt $(0, -6)$.

- Per a trobar la intersecció de la paràbola amb l'eix X, s'ha d'igualar la funció a 0. És a dir, s'ha de resoldre l'equació de segon grau $f(x) = 0$, denominada *equació associada a la funció quadràtica*. De manera general, aquests punts es poden escriure $(\overline{x}, 0)$, on $\overline{x} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ són les solucions de l'equació associada a la funció (si en té).

La intersecció de la paràbola amb l'eix d'abscisses, es troba resolent $f(x) = 0$. En el cas de la funció de l'exemple, $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$, vol dir resoldre $3x^2 - 3x - 6 = 0$. Les solucions d'aquesta equació són $x = -1$ i $x = 2$. Per tant, la paràbola talla l'eix X en els punts $(-1, 0)$ i $(2, 0)$.

La imatge següent mostra tots els punts de tall de la funció $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ amb els eixos.

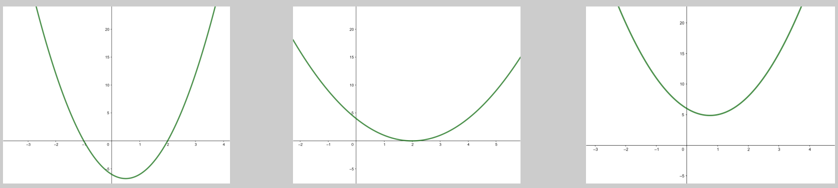


Tal com acabem de veure, les interseccions d'una funció quadràtica amb l'eix X es corresponen amb les solucions de l'equació associada $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$. Com que una equació de segon grau pot tenir dues, una o cap solució en funció del seu discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, una paràbola podrà tenir dues, una o cap interseccions amb l'eix X depenent de si l'equació associada té dos, una o zero solucions. En particular, doncs, es conclou que una funció quadràtica $f(x) = ax^2 + bx + c$ té:

- dos punts de tall amb l'eix X si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$
- un punt de tall, que resulta doble, amb l'eix X si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
- cap punt de tall amb l'eix X si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Exemple. Punts de tall d'una funció quadràtica amb l'eix X.
Vegem un exemple d'una funció quadràtica que talla l'eix X en dos punts, una altra en un punt i una tercera que no talla mai l'eix X.

- A l'esquerra, $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$. Aquesta funció talla l'eix X en dos punts perquè l'equació $3x^2 - 3x - 6 = 0$ té dues solucions: $x = -1$ i $x = 2$.
- En el centre, $g(x) = x^2 - 4x + 4$. Aquesta funció talla l'eix X en un sol punt perquè l'equació $x^2 - 4x + 4 = 0$ té una única solució: $x = 2$.
- A la dreta, $h(x) = 2x^2 - 3x + 6$. Aquesta funció no talla l'eix X perquè l'equació $2x^2 - 3x + 6 = 0$ no té cap solució.



$f(x) = 3x^2 - 3x - 6$ $g(x) = x^2 - 4x + 4$ $h(x) = 2x^2 - 3x + 6$

També concloem que si una paràbola talla en dos punts l'eix X, l'equació de segon grau associada a la funció quadràtica té dues solucions; si talla en un únic punt, l'equació té una única solució, i si no talla en cap punt, l'equació no té cap solució.

Representació d'una paràbola. Donada l'expressió d'una funció quadràtica, se'n pot obtenir la representació gràfica en el pla cartesià seguint uns passos concrets.

Vegem quins són a través d'un exemple concret.

Suposem que volem representar gràficament la funció quadràtica $f(x) = 4x^2 - 4x - 35$.

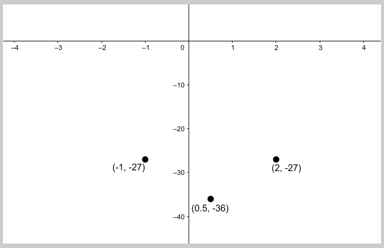
Aleshores:

1) Es troba el vèrtex de la paràbola, que té com a coordenada $x = -\dfrac{b}{2a}$.

> Donada la funció $f(x) = 4x^2 - 4x - 35$, el seu vèrtex té coordenada:
>
> $$x = \frac{4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$
>
> La imatge corresponent serà producte de:
>
> $$f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} - 35 = 1 - 2 - 35 = -36$$
>
> Per tant, el vèrtex és en el punt de coordenades:
>
> $$\left(\frac{1}{2}, -36\right)$$

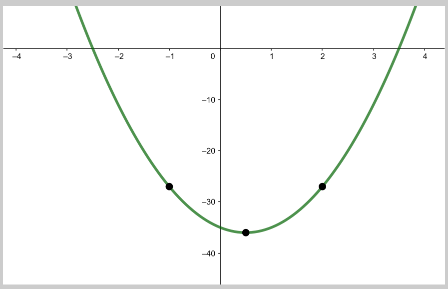
2) Es troben diferents parells de punts de la funció que tinguin la coordenada x equidistant respecte de la coordenada x del vèrtex, i es representen aquests punts juntament amb el vèrtex. N'hi ha prou de representar dos punts equidistants del vèrtex per a fer-nos una idea de la forma de la paràbola.

> Dos nombres equidistants de $\frac{1}{2}$ poden ser el -1 i el 2. Les seves imatges són $f(-1) = f(2) = -27$, que coincideixen per ser les imatges de dos valors equidistants a la coordenada x del vèrtex.



3) S'uneixen aquests punts amb una corba parabòlica; el vèrtex no ha de ser de forma punxeguda, sinó arrodonida. A més, les branques de la paràbola s'han d'elevar o dirigir cap avall segons si el terme de segon grau és positiu o negatiu, respectivament, de manera que sempre es vagin obrint.

> La gràfica de la paràbola de la funció de l'exemple $f(x) = 4x^2 - 4x - 35$ és



Modificacions en l'expressió algebraica i efectes en l'expressió gràfica. Modificar els coeficients d'una funció quadràtica comporta canvis en la paràbola resultant. Si $ax^2 + bx + c$ és l'expressió general d'una equació de segon grau, aquests passos es poden resumir en els aspectes següents:

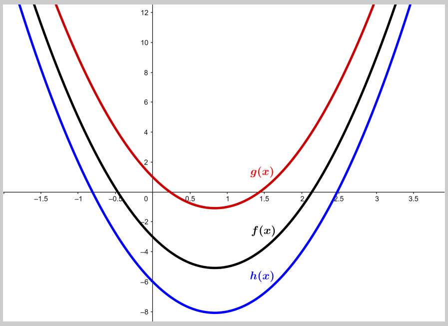
Els canvis més evidents en modificar els coeficients de l'expressió d'una funció quadràtica són: en augmentar el terme independent de la funció, la paràbola es desplaça cap amunt; en canviar de signe el coeficient de grau 2, s'inverteixen les branques de la paràbola; en augmentar, en valor absolut, el coeficient de grau 2, les branques de la paràbola tendeixen a tancar-se.

- La modificació del terme independent, c, d'una funció quadràtica provoca el desplaçament vertical de tota la paràbola associada: si el terme augmenta, la paràbola puja, i, si el terme disminueix, la paràbola baixa.

Exemple. Modificació del terme independent.
Representem les funcions

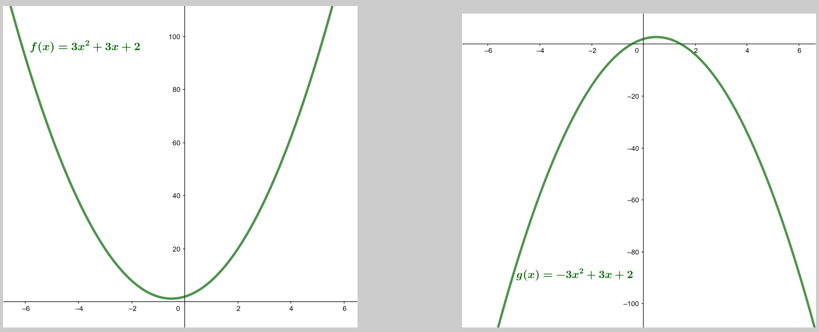
$$f(x) = 3x^2 - 5x - 3$$
$$g(x) = 3x^2 - 5x + 1$$
$$h(x) = 3x^2 - 5x - 6$$

En comparar-les observem com en augmentar el terme independent la paràbola puja, i en cas contrari baixa.



- El coeficient del terme de grau 2, a, pot tenir signe positiu o negatiu. Si el coeficient és positiu, les branques de la paràbola es dirigeixen cap amunt, i, si és negatiu, es dirigeixen cap avall.

Exemple. Signe terme de segon grau.
Representem les funcions $f(x) = 3x^2+3x+2$, a l'esquerra, i $g(x) = -3x^2+3x+2$, a la dreta. En el primer cas, les branques de paràbola s'obren cap amunt, i en el segon cas s'obren cap a baix.



- La modificació en valor absolut del coeficient del terme de grau 2, a, també produeix un canvi regular en la paràbola: si en valor absolut aquest coeficient disminueix, les branques de la paràbola se separen, i, en canvi, si en valor absolut el coeficient augmenta, les branques de la paràbola s'acosten. Cal recordar que el punt on es troba el vèrtex també canvia en modificar-se a.

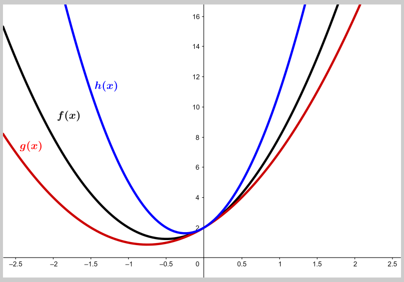
Exemple. Valor absolut del terme de segon grau. Representem les funcions

$$f(x) = 3x^2 + 3x + 2$$

$$g(x) = 2x^2 + 3x + 2$$

$$h(x) = 6x^2 + 3x + 2$$

En comparar-les, observem com la paràbola de la funció $h(x)$, que és la funció amb coeficient de grau dos més gran, $|6| > |3| > |2|$, és la paràbola menys oberta, i per tant amb les branques més juntes. En canvi, la paràbola de la funció $g(x)$, amb el valor absolut de coeficient de segon grau més petit, és la paràbola més oberta, és a dir, amb les branques més separades.



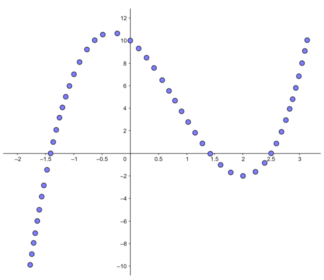
7.4. Funcions polinòmiques

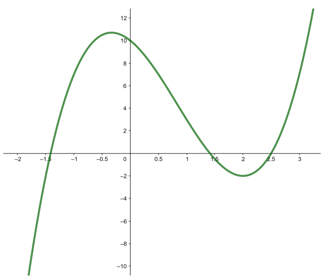
7.4.1. Definició i exemples

Una **funció polinòmica** de grau n és qualsevol funció que té per expressió algebraica un polinomi de grau n. Sovint es denomina simplement polinomi. Les funcions afins i les funcions quadràtiques són exemples de funcions polinòmiques de grau 1 i grau 2 respectivament. Ara bé, també hi ha funcions polinòmiques de major grau: un exemple de funció polinòmica de grau 3 és $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 10$.

Què caracteritza una funció polinòmica?
L'expressió algebraica d'una funció polinòmica de grau n és un polinomi. Per això, es pot parlar simplement de polinomi. En la gràfica d'una funció polinòmica es poden diferenciar dos elements: les branques i la part central. En la part central la funció polinòmica es plega diverses vegades, com a màxim, tantes com el grau del polinomi.

Per a fer la gràfica d'una funció polinòmica, podem crear una taula de valors amb un bon nombre finit de punts i, posteriorment, representar-los en el pla cartesià, tal com s'ha fet anteriorment en l'estudi de les funcions lineals, afins i quadràtiques. Dibuixada la gràfica de punts associada a la taula de valors, es pot deduir la forma que pren la corba associada a la funció. D'acord amb aquest procediment, la representació d'una taula de valors associada a la funció (que no afegim perquè és massa extensa) de la funció $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 10$ i la gràfica dibuixada d'un sol traç en l'interval $[-2, 3]$ són:





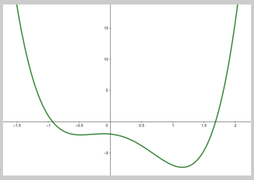
Exemple. Funcions polinòmiques.

$f(x) = 4x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x - 2$ és una funció polinòmica de grau 4.

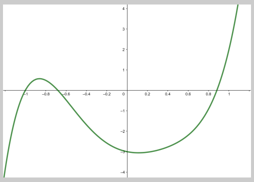
$g(x) = 5x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 3$ és una funció polinòmica de grau 5.

$h(x) = -3x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 8x^2 - x - 10$ és una funció polinòmica de grau 6.

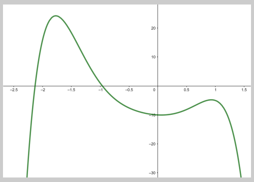
Les gràfiques d'aquestes tres funcions són, respectivament:



$f(x)$



$g(x)$



$h(x)$

En la gràfica d'una funció polinòmica es poden diferenciar normalment dues parts: les branques i la part central.

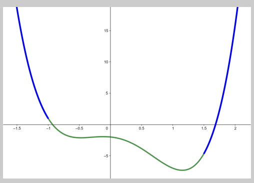
- Les **branques** són els dos braços laterals en què es desenvolupa la funció. Mai no arriben a ser completament rectes, tot i que poden semblar-ho quan el domini representat és molt gran. Poden dirigir-se ambdues cap amunt, ambdues cap avall, o bé una branca cap amunt i l'altra cap avall. Si es representa la gràfica d'un polinomi en un interval major, la forma de les branques pràcticament no varia, és a dir, les branques d'una gràfica ens donen una idea de com continua la gràfica d'una funció polinòmica més enllà de la part representada.

Recuperem les gràfiques de les tres funcions polinòmiques de l'exemple anterior,

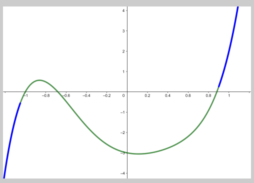
$$
\begin{aligned}
f(x) &= 4x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x - 2\\
g(x) &= 5x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 3\\
h(x) &= -3x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 8x^2 - x - 10
\end{aligned}
$$

i hi marquem les branques. Observem que:

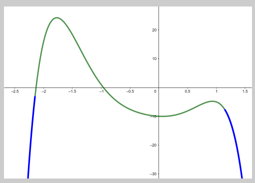
- Les branques de la funció $f(x)$ es dirigeixen ambdues cap amunt, i la funció definirà posteriorment, 3 plecs en la part central.
- Les branques de la funció $g(x)$ es dirigeixen una cap avall i l'altra cap amunt, i la funció presenta 2 plecs tal com es definirà posteriorment.
- Les branques de la funció $h(x)$ es dirigeixen ambdues cap avall, i la funció presenta 3 plecs tal com es definirà posteriorment.



$f(x)$



$g(x)$



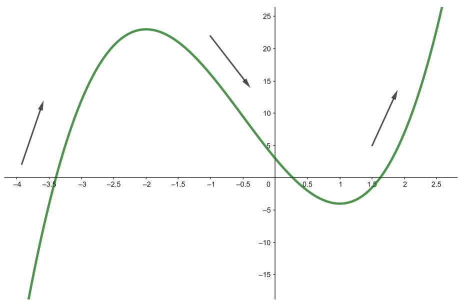
$h(x)$

Certes característiques permeten conèixer cap a on s'han de dirigir les branques d'una funció polinòmica. Són:

- La branca de la dreta es dirigeix cap amunt quan el coeficient de grau màxim és positiu, i cap avall quan és negatiu.
- La branca de l'esquerra es dirigeix cap avall quan el polinomi és de grau parell i el coeficient de grau màxim és negatiu, o bé quan el polinomi és de grau senar i el coeficient de grau màxim és positiu. En cas contrari, l'extrem de l'esquerra es dirigeix cap amunt.

• La **part central** és la part en què la gràfica es plega diverses vegades. El nombre de plecs depèn del grau del polinomi: com més gran és el grau més *plecs* pot presentar la gràfica corresponent. El màxim de plecs d'una funció polinòmica és el seu grau menys un. Així, un polinomi de grau 1 no pot tenir cap plec. En canvi, un polinomi de grau 2 té exactament un plec, un polinomi de grau 3 pot tenir dos plecs, i un de grau 4, tres plecs com a màxim...

Atenent al fet que la gràfica de qualsevol funció s'ha de llegir d'esquerra a dreta, en analitzar la gràfica de la funció $f(x) = 2x^3+3x^2-12x+3$ que presenta la imatge de sota, comprovem que al principi la funció es dirigeix cap amunt, després cap avall i, finalment, una altra vegada cap amunt.



Aquest fet porta a parlar de la **monotonia** d'una funció, és a dir, del creixement i decreixement d'una funció. De manera rigorosa, es diu:

- Una funció $f(x)$és **creixent** quan, a mesura que augmenta la variable x, el valor de la imatge de funció, $y = f(x)$, també augmenta.
- Una funció $f(x)$ és decreixent quan, a mesura que augmenta la variable x, el valor de la imatge de la funció, $y = f(x)$, disminueix.

Exemple. Monotonia d'una funció polinòmica.
Considerem la funció polinòmica anterior

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$$

D'acord amb la seva representació gràfica, la funció és creixent quan x és menor que -2, és decreixent entre -2 i 1, i torna a ser creixent a partir de $x = 1$.

• La gràfica d'una funció polinòmica també presenta *punts destacats*. Aquests són:

- Els **extrems**. Aquest terme fa referència als màxims i mínims de la funció. S'anomena **màxim relatiu** (o local) d'una funció el punt en què la funció

Observem que el vèrtex d'una funció quadràtica coincideix amb el seu màxim o mínim.

passa de ser creixent a ser decreixent. El valor de la funció en aquest punt és més gran que el de qualsevol altre punt de la gràfica que sigui proper. S'anomena **mínim relatiu** (o local) d'una funció aquell punt en què la funció passa de ser decreixent a ser creixent. El valor de la funció en aquest punt és menor que el de qualsevol altre punt de la gràfica que sigui proper.

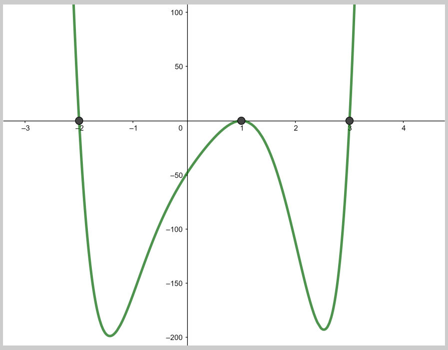
En la gràfica de la funció anterior, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$, podem observar que un màxim relatiu es troba en el punt $(-2, f(-2)) = (-2, 23)$ mentre que un mínim es troba en el punt $(1, f(1)) = (1, -4)$.

- La **intersecció amb l'eix Y**. Hi ha només un punt intersecció entre la gràfica de qualsevol polinomi i l'eix Y. Aquest punt és el que té coordenada $x = 0$ i, per tant, es tracta del punt del pla $(0, f(0))$.

Donada la funció $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 10$, el punt d'intersecció d'aquesta funció amb l'eix Y és $(0, f(0)) = (0, 10)$.

- La **intersecció amb l'eix X**. Hi pot haver un nombre d'interseccions amb l'eix X igual al grau del polinomi com a màxim. Així mateix, no sempre s'arriba a aquest nombre. Per a trobar els punts d'intersecció amb l'eix X, s'ha de resoldre l'equació associada a la funció $f(x) = 0$, operació que pot ser complicada. Els valors de x que compleixen $f(x) = 0$ es denominen **arrels del polinomi**. Un polinomi que té arrels es descompon com a producte de polinomis, alguns dels quals són de grau 1.

El polinomi $f(x) = 4x^6 - 10x^5 - 10x^4 + 14x^3 - 26x^2 + 76x - 4$ té com a arrels $x = 1$, $x = 3$ i $x = -2$.
Aleshores, la seva descomposició és
$f(x) = 4x^6-10x^5-10x^4+14x^3-26x^2+76x-4 = 2(x-1)^2(x-3)(x+2)(2x^2+x+4)$
La gràfica de la funció ho mostra així: la funció talla l'eix X en els punts $x = 1$, $x = 3$ i $x = -2$, i en el punt $x = 1$ no creua l'eix X ja que és una arrel doble.



Resum

Funcions polinòmiques

Una funció polinòmica és la que té per expressió un polinomi. En general, se solen estudiar segons el grau del polinomi. Es distingeixen:

Funcions afins

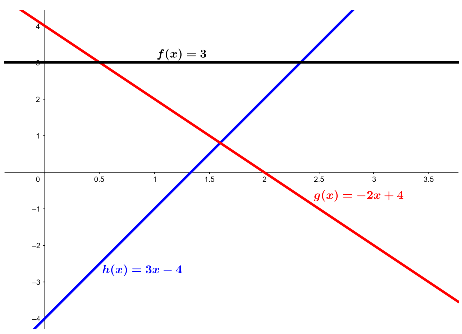
Definició. Una **funció afí** és una funció polinòmica l'expressió de la qual és un polinomi de grau 1 i, per tant, del tipus $f(x) = ax + b$, on a s'anomena **pendent de la recta** i b **terme independent**.

Representació gràfica. La gràfica d'una funció lineal és una recta.

Elements. Donada l'expressió general de qualsevol funció afí, $f(x) = ax + b$, es defineixen:

- El *pendent de la recta*: a, informa de la seva inclinació.
- Els *punts de tall amb els eixos*:
  - Tall amb l'eix Y: $(0, b)$.
  - Tall amb l'eix X: $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.
- La *monotonia* (creixement i decreixement):
  - La funció és creixent si $a > 0$.
  - La funció és constant si $a = 0$.
  - La funció és decreixent si $a < 0$.

Exemple

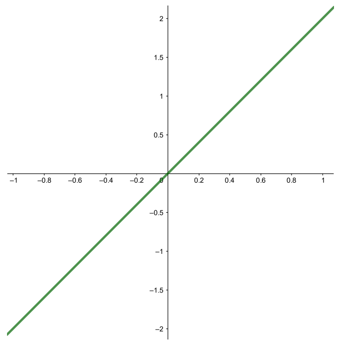


Particularitats. Un tipus especial de funcions afins són les funcions lineals.

Una funció lineal és una funció afí en què el terme independent és 0. Per tant, és de la forma

$$f(x) = ax$$

La seva representació és una recta que passa per l'origen. Un exemple n'és la recta corresponent a la funció $f(x) = 2x$, tal com es visualitza en l'exemple de la dreta.



Funcions quadràtiques

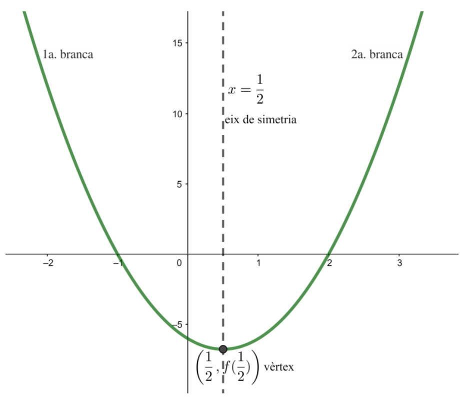
Definició. na funció quadràtica és una funció l'expressió de la qual és un polinomi de grau 2. És a dir, és de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ amb $a \neq 0$.

Representació gràfica. La seva representació és una corba que rep el nom de *paràbola*.

Elements. Donada l'expressió general de qualsevol funció quadràtica $f(x) = ax^2 + bx + c$, es defineixen:

- L'*eix de simetria* de la paràbola: recta $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- El *vèrtex* de la paràbola: punt $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{2a} + c\right)$.
- Les *branques* de la paràbola: es dirigeixen cap amunt si $a > 0$ i cap avall si $a < 0$.
- Els *punts de tall* de la funció amb els eixos:
  - Tall amb l'eix Y: el punt $(0, f(0))$.
  - Tall amb l'eix X: els punts $(\overline{x}, 0)$, en què $\overline{x}$ és solució de l'equació de segon grau associada $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$. N'hi pot haver:
    - Dos: si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.
    - Un: si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.
    - Cap: si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.
- La *monotonia* (creixement i decreixement):
  - Si $a > 0$: és decreixent en l'interval $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ i creixent en l'interval $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.
  - Si $a < 0$: és creixent en l'interval $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ i decreixent en l'interval $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

Exemple



Funcions polinòmiques

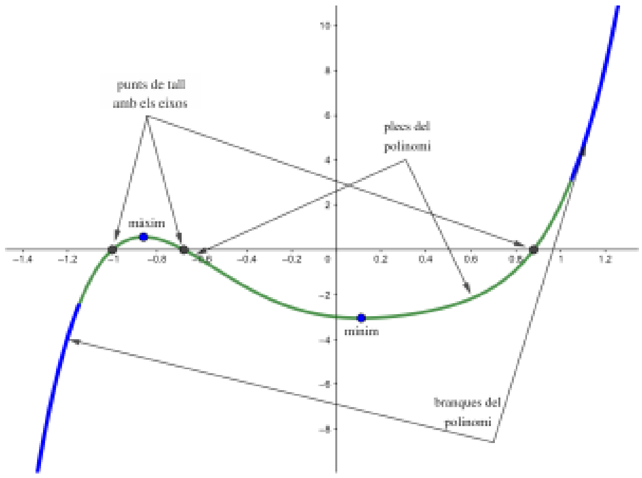
Definició. Una funció polinòmica és una funció l'expressió de la qual és un polinomi. Sovint, es denomina simplement polinomi.

Representació gràfica. La gràfica d'una funció polinòmica és una corba. En aquesta corba s'hi distingeixen dues zones principals: les *branques* i la *part central*.

Elements. Donada una funció polinòmica qualsevol $f(x)$, es defineixen:

- Les **branques**. Són els dos braços laterals en què es desenvolupa la funció.
  - La branca de la dreta es dirigeix cap amunt quan el coeficient de grau màxim és positiu, i cap avall quan és negatiu.
  - La branca de l'esquerra es dirigeix cap avall quan el polinomi és de grau parell i el coeficient de grau màxim és negatiu, o bé quan el polinomi és de grau senar i el coeficient de grau màxim és positiu. En cas contrari, l'extrem de l'esquerra es dirigeix cap amunt.
- La **part central** és la part en què la gràfica es plega diverses vegades. El màxim de plecs d'una funció polinòmica és el seu grau menys 1.
- Els **punts de tall**:
  - Tall amb l'eix Y: el punt $(0, f(0))$.
  - Tall amb l'eix X: els punts $(\overline{x}, 0)$, on $\overline{x}$ és solució de l'equació associada a la funció $f(x) = 0$.
- Els *extrems*: són els punts màxims i mínims relatius (o locals) de la funció.

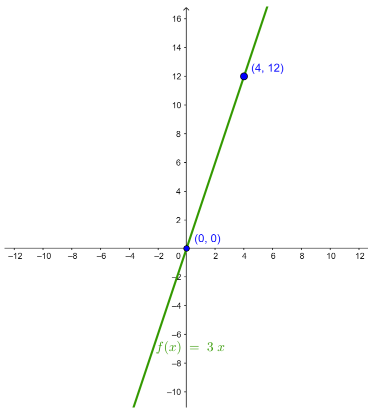
Exemple



Exercicis resolts

1. **Una funció lineal compleix que $f(4) = 12$. Quina és l'expressió algebraica d'aquesta funció? Representa-la gràficament.**

Solució:
Per ser una funció lineal, ha de ser de la forma $f(x) = ax$. Per tant, $f(4) = 12$. Si $x = 4$ resulta $a \cdot x = 12$, d'on obtenim $a = \frac{12}{4} = 3$.
Per tant, l'expressió de la funció lineal buscada és $f(x) = 3x$.
La seva representació gràfica és una recta que passa pel centre de coordenades i el punt $(4, 12)$, tal com mostra la imatge:

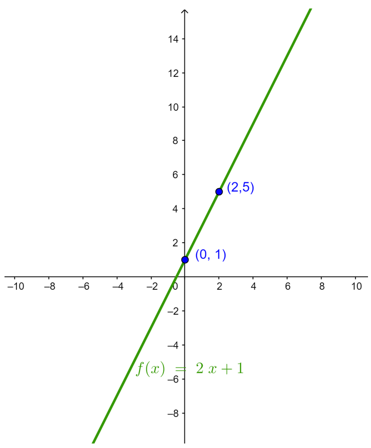


2. **Una funció afí compleix $f(2) = 5$ i $f(0) = 1$. Quina és l'expressió algebraica d'aquesta funció? Representa-la gràficament.**

Solució:
Per ser una funció afí, ha de ser de la forma $f(x) = ax + b$. Per tant:

- $f(2) = 5$, això vol dir $a \cdot 2 + b = 5 \Rightarrow 2a + b = 5$
- $f(0) = 1$, això vol dir $a \cdot 0 + b = 1 \Rightarrow b = 1$

De la segona condició tenim $b = 1$. Substituint aquest valor b en la primera condició, resulta $2a + b = 2a + 1 = 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$.
Per tant, l'expressió algebraica de la funció lineal afí és $f(x) = 2x + 1$.
La gràfica d'aquestsa funció és, doncs, una recta que passa pels punts $(2, 5)$ i $(0, 1)$, tal com mostra la imatge.



3. **Hi ha alguna funció afí que compleixi alhora que $f(2) = -4$ i $f(-5) = -10$?**

Solució:
Per ser una funció afí, aquesta ha de ser de la forma $f(x) = ax + b$ que, d'acord amb les condicions de l'enunciat, ha de complir alhora:

- $f(2) = -4$, això vol dir $a \cdot 2 + b = -4 \Rightarrow b = -4 - 2a$

- $f(-5) = -10$, això vol dir $a \cdot (-5) + b = -10 \Rightarrow b = -10 + 5a$

Igualant les dues expressions de b, tenim

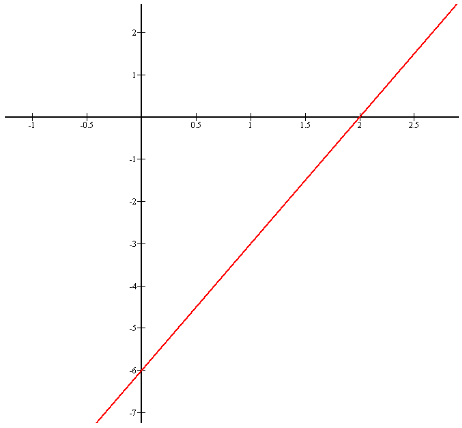
$$-4 - 2a = -10 + 5a \Rightarrow -2a - 5a = -10 + 4 \Rightarrow -7a = -6 \Rightarrow a = \frac{6}{7}$$

Substituint aquest valor de a en una de les dues condicions inicials, per exemple la primera, obtenim

$$b = -4 - 2a = -4 - 2 \cdot \frac{6}{7} = \frac{-28 - 12}{7} = -\frac{40}{7}$$

Per tant, sí existeix una funció afí que compleix les condicions, i és $f(x) = \frac{6}{7}x - \frac{40}{7}$.

4. **Determina l'expressió de la funció afí que descriu aquesta gràfica:**



Solució:
Observem que la gràfica de la funció és una recta que passa pels punts $(0, -6)$ i $(2, 0)$. Això vol dir $f(0) = -6$ i $f(2) = 0$. Atenent al fet que es tracta d'una funció afí, ha de ser de la forma $f(x) = ax + b$. Per tant, s'ha de complir alhora:

- $f(0) = -6 \Rightarrow a \cdot 0 + b = -6 \Rightarrow b = -6$
- $f(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow 2a = -b$

De la primera condició, trobem que $b = -6$. En substituir aquest valor de b en la segona condició, resulta

$$2a = -b \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

Per tant, l'expressió de la funció afí que determina la gràfica és $f(x) = 3x - 6$.

5. **Troba el vèrtex de la paràbola** $f(x) = 3x^2 - x + 1$**.**

Solució:
Sabem que una paràbola és la forma de la gràfica corresponent a qualsevol funció quadràtica, que es pot escriure de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. En aquest cas, sabem que el vèrtex de la paràbola té com a coordenada d'abscisses $x = -\frac{b}{2a}$.
Aleshores, en aquest cas identifiquem $a = 3$, $b = -1$ i $c = 1$ i, usant la fórmula del vèrtex per a qualsevol paràbola, resulta

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

i la seva imatge és

$$f(x) = f\left(\frac{1}{6}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} + 1 = \frac{3}{36} - \frac{1}{6} + 1 = \frac{3 - 6 + 36}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

Per tant, el punt del pla on és el vèrtex és

$$(x, f(x)) = \left(\frac{1}{6}, f\left(\frac{1}{6}\right)\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{11}{12}\right)$$

6. **Troba l'expressió d'una paràbola que compleixi alhora aquestes condicions:** $f(1) = 2$**,** $f(-2) = 11$ **i** $f(0) = 1$**.**

Solució:
Per ser una paràbola, aquesta ha de ser de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Aleshores, es té, per les condicions de l'enunciat:

- $f(1) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2$
- $f(-2) = 11 \Rightarrow 4a - 2b + c = 11$
- $f(0) = 1 \Rightarrow 0 + 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$

De la tercera condició, es pot assegurar $c = 1$. Substituint aquest valor de c en les dues primeres condicions, podem trobar a i b resolent un sistema de dues equacions i dues incògnites:

$$\begin{cases} a + b + 1 = 2 \\ 4a - 2b + 1 = 11 \end{cases}$$

Resolem el sistema per igualació:

De la primera equació resulta $b = 1 - a$ i de la segona $b = \dfrac{11 - 1 - 4a}{-2} = 2a - 5$. Igualant les expressions per a b, resulta

$$1 - a = 2a - 5 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

Trobat el valor de a, el substituim en la primera equació per trobar el valor de b:

$$b = 1 - a = 1 - 2 = -1$$

Per tant, l'expressió de la funció buscada és $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

7. **Troba l'expressió d'una paràbola, $f(x)$, que tingui una arrel en $x = 2$, el seu vèrtex estigui en $x = -1$ i la seva imatge valgui -27.**

Solució:

Tota paràbola és producte d'una expressió quadràtica que podem escriure de manera general

$$f(x) = ax^2 + bx + c = C(x - x_1)(x - x_2)$$

on a, b, c i C són valors reals concrets i x_1 i x_2 són les arrels del polinomi de segon grau associat a la funció quadràtica.

De manera general, també sabem que les arrels del polinomi associat a la funció són les abscisses de punts equidistants al vèrtex de la paràbola que la funció representa.

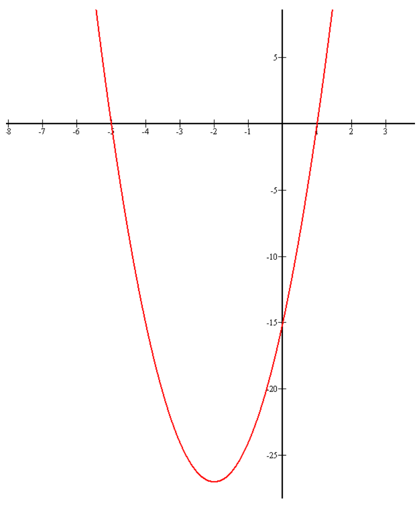
Atenent al que sabem, i donades les condicions de l'enunciat, treballarem amb la segona expressió de tota funció quadràtica: $f(x) = C(x - x_1)(x - x_2)$ on x_1 i x_2 són les arrels, i Cun valor real a determinar.

Per l'enunciat, sabem que el vèrtex és en $x = -1$ i que una de les arrels és en $x = 2$. Això vol dir en particular que les arrels equidisten 3 unitats del vèrtex $x = 2 = -1 + 3$. Per tant, l'altra arrel, que també estarà en la mateixa distància del vèrtex, ha d'estar en . Per tant, deduïm que la funció és producte d'una expressió del tipus $x = -1 - 3 = -4$. Per a determinar el valor C, utilitzem el valor que pren la funció en el vèrtex:

$$f(-1) = -27 \Rightarrow C(-1 - 2)(-1 + 4) = -27 \Rightarrow -9C = -27 \Rightarrow C = 3$$

Per tant, concloem que: $f(x) = 3(x - 2)(x + 4)$.

8. **Troba l'expressió d'aquesta paràbola.**



Solució:

Observem que la funció passa pels punts $(-5, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, -15)$. Això vol dir que $f(-5) = 0$, $f(1) = 0$ i $f(0) = -15$. Atenent al fet que es tracta de la representació d'una funció quadràtica, ha de ser de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Per tant, s'ha de complir alhora:

- $f(-5) = 0 \Rightarrow 25a - 5b + c = 0$
- $f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$
- $f(0) = -15 \Rightarrow c = -15$

Per la tercera condició, $c = -15$. En substituir aquest valor de c en les dues primeres equacions, es tracta de resoldre el sistema de dues equacions i dues incògnites, i resulta

$$\begin{cases} 25a - 5b = 15 \\ a + b = 15 \end{cases}$$

De la primera equació es té $b = \dfrac{15 - 25a}{-5} = 5a - 3$, i de la segona $b = 15 - a$. Igualant les dues expressions de b, resulta

$$5a - 3 = 15 - a \Rightarrow 6a = 18 \Rightarrow a = 3$$

Substituint aquest valor en la segona condició, resulta $b = 15 - a = 15 - 3 = 12$. Per tant, l'expressió de la funció és $f(x) = 3x^2 + 12x - 15$.
De manera alternativa, l'expressió quadràtica de la funció es pot escriure

$$f(x) = C(x - x_1)(x - x_2)$$

on x_1 i x_2 són les arrels del polinomi. Del fet que $f(-5) = 0$ i $f(1) = 0$, tenim que -5 i 1 són les arrels del polinomi associat a la funció. Per tant $f(x) = C(x + 5)(x - 1)$.
Per altra banda, com que $f(0) = -15$, vol dir que $-15 = -5C$, d'on resulta $C = 3$.
Per tant, $f(x) = 3(x - 1)(x + 5)$.

Exercicis per a practicar amb les solucions

9. **Un quilogram de patates costa 56 cèntims. Determina la funció que defineix el cost de les patates en funció dels quilograms comprats, representa la funció en el pla cartesià i contesta les preguntes següents:**

 (a) **Quin és el Dom(f)?**
 (b) **Quin preu tindran 3.5 kg de patates?**
 (c) **Si es té un únic bitllet de 5€, quina és la quantitat màxima de patates que es pot comprar (sense deixar a deure)?**

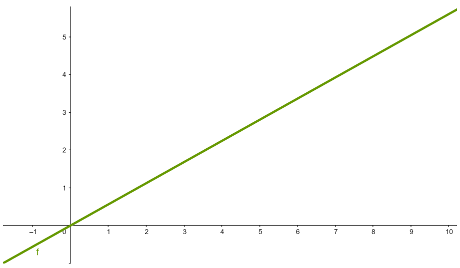
10. **La tarifa d'una empresa de missatgeria amb entrega a domicili és de 12€per taxa fixa més 5€per cada quilogram que s'envia. Es demana:**

 (a) **Troba l'expressió algebraica de la funció *Preu de l'enviament* segons el seu pes en quilograms.**
 (b) **Quins són el domini i el recorregut de la funció?**
 (c) **Representa la funció gràficament.**
 (d) **Quant costarà enviar un paquet de 750 grams?**
 (e) **Quin és el pes màxim que es pot enviar si només es té un bitllet de 50€?**

11. **La longitud de la circumferència i l'àrea del cercle s'expressen en funció del radi. Escriu les dues expressions algebraiques i dibuixa les gràfiques corresponents. Quin tipus de funcions són? Per a quin valor del radi coincideixen numèricament la longitud i l'àrea? Quin és el valor de la longitud i l'àrea, en aquest cas?**

Solucions:

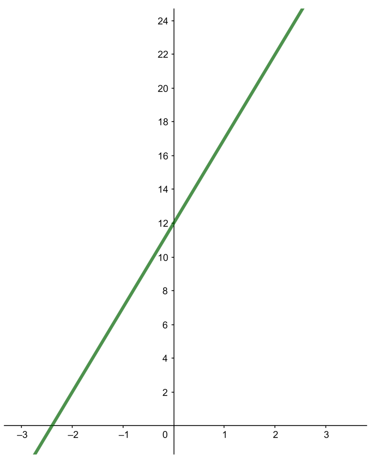
9. L'expressió de la funció és $f(x) = 0.56x$, on x representa la quantitat de quilograms. La gràfica és



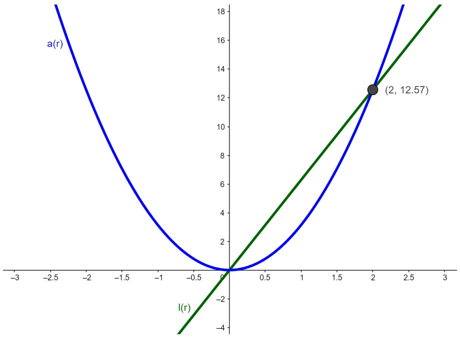
 (a) $Dom(f) = \mathbb{R}$
 (b) 1.96 €
 (c) 8.93 quilograms

10. (a) L'expressió de la funció és $y = 5x + 12$, on x són els quilograms que s'envien.
 (b) $Dom(f) = \mathbb{R}$ i $Im(f) = \mathbb{R}$
 (c) 15 €
 (d) 7.6 quilograms

 La gràfica és



11. Les expressions algebraiques, són $l(r) = 2\pi r$, que és una funció lineal, i $a(r) = \pi r^2$, que és una funció quadràtica. La longitud i el radi coincidiran numèricament quan $l(r) = a(r)$, per tant quan $r = 0$, que no té sentit físic, i $r = 2$. En aquest segon cas, $l(2) = a(2) = 4\pi \cong 12.57$. Les gràfiques són:


a(r)
l(r)
(2, 12.57)