Iniciació a les matemàtiques per a l'enginyeria

PID_00270079

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat
Oberta
de Catalunya

8. Funcions trigonomètriques

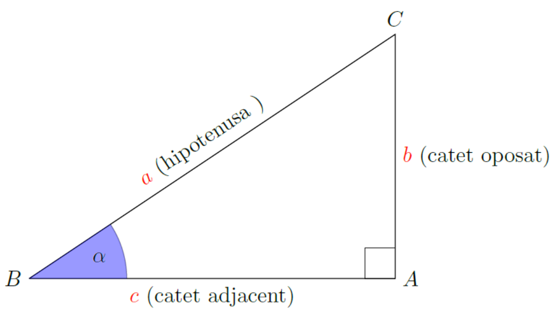
Índex

8.1. Raons trigonomètriques **212**
8.1.1. Raons principals d'un angle agut 212
8.1.2. Raons principals d'un angle qualsevol 214
8.2. Funcions sinus i cosinus **217**
8.2.1. Definició i exemples 218
8.2.2. Relació sinus i cosinus 219
8.2.3. Transformacions 220
8.3. Funcions tangent i cotangent **222**
8.3.1. Definició i exemples 222
8.4. Funcions secant i cosecant **224**
8.4.1. Definició i exemples 224
8.5. Funcions inverses **225**
8.5.1. Definició i exemples 225

8.1. Raons trigonomètriques

8.1.1. Raons principals d'un angle agut

En un triangle rectangle ABC com el següent,



La trigonometria és una part de les matemàtiques que estudia la relació entre la mesura dels angles i els costats del triangle. De fet, la mateixa paraula, trigonometria, té origen en aquest fet: *tri* significa "tres", *gono* significa "angle" i *metria* significa "mesura", és a dir, trigonometria significa "mesura de (figures) amb tres angles".

podem definir les raons trigonomètriques de l'angle agut α de la manera següent:

sinus de l'angle α és el quocient entre el catet oposat a l'angle i la hipotenusa. S'indica $\sin(\alpha)$ i es calcula així:

$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}}$$

S'ha de destacar que el sinus és un nombre positiu mai més gran que 1, i un catet no pot ser mai superior a la hipotenusa: $0 \leq \sin(\alpha) \leq 1$.

$\boxed{\textbf{cosinus}}$ d'aquest angle α és el quocient entre el catet adjacent a l'angle, i la hipotenusa s'indica $\cos(\alpha)$ i es calcula així:

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{\text{catet adjacent}}{\text{hipotenusa}}}$$

També cal destacar que el cosinus és un nombre positiu mai més gran que 1 (un catet no pot ser mai superior a la hipotenusa) $0 \leq \cos(\alpha) \leq 1$.

$\boxed{\textbf{tangent}}$ d'aquest angle α és el quocient entre el catet oposat i el catet adjacent a l'angle i s'indica $\tan(\alpha)$ o $\text{tg}(\alpha)$ (s'usen indistintament els símbols tg o tan, tot i que durant el curs acostumarem a fer servir tan), i es calcula així:

$$\boxed{\text{tg}(\alpha) = \tan(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}}}$$

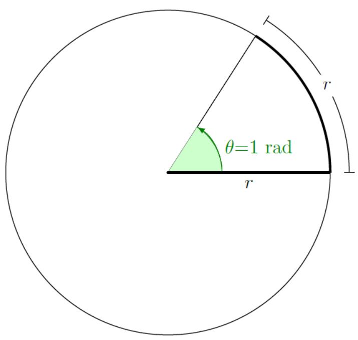
No és difícil constatar que la tangent també es pot calcular com el quocient del sinus entre el cosinus:

$$\text{tg}(\alpha) = \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c}$$

Les raons trigonomètriques d'un angle no depenen del triangle rectangle escollit per a definir-les.

Raons trigonomètriques dels angles més usats. Els angles es mesuren habitualment en el sentit antihorari i en graus (°) o bé en radians (rad).

$\boxed{\text{radian:}}$ Si en una circumferència agafem un arc de longitud igual a la del radi, l'angle corresponent té una mesura que anomenem **radian (rad)** (també es pot escriure radiant).



La seva amplitud no depèn del radi. De fet, com que la longitud de la circumferència és $2\pi r$ i l'angle d'una volta sencera és 360°, tenim

$$360^\circ = 2\pi\,\text{rad}$$

Vegem una taula amb les raons trigonomètriques dels angles més utilitzats.

α(en rad)	α(en graus)	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	∞

Per què el sinus i cosinus de $\frac{\pi}{4}$ rad (45°) coincideixen? Si un dels angles d'un triangle rectangle és igual a $\frac{\pi}{4}$ rad, és evident que l'altre angle (a part del recte) ha de ser també mesurar $\frac{\pi}{4}$ rad. Per la mateixa raó, ambdós catets han de ser iguals, és a dir, $b = c$. Per tant, el seu sinus i cosinus coincidiran.

Teorema fonamental de la trigonometria. Donat un triangle de catets b i c, i d'hipotenusa a es pot calcular

$$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

tenint en compte, segons el teorema de Pitàgores, $a^2 = b^2 + c^2$. En definitiva,

$$\boxed{(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1}$$

És a dir, per a qualsevol angle α, la suma dels quadrats del sinus i el cosinus és igual a 1. Aquesta igualtat també s'escriu sovint així:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Aquesta fórmula ens permet calcular el sinus a partir del cosinus (i a l'inrevés):

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) \Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$$

De la mateixa manera, $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$.

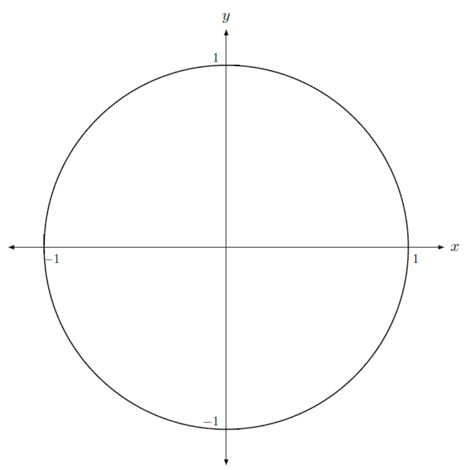
Exemple. Aplicació del teorema fonamental de la trigonometria.
Si el sinus d'un angle α fos 0.4, el seu cosinus hauria de ser

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1-0.4^2} = 0.9165$$

De la mateixa manera, si el cosinus d'un angle α fos 0.8, el seu sinus seria $\sin(\alpha) = \sqrt{1-0.8^2} = 0.6$

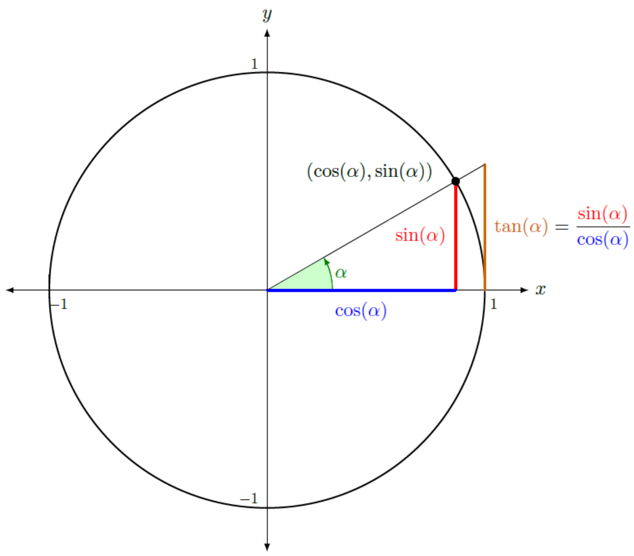
8.1.2. Raons principals d'un angle qualsevol

Les raons trigonomètriques d'un angle qualsevol es poden deduir a partir de les raons trigonomètriques d'un angle agut.
Per a calcular les raons trigonomètriques d'un angle qualsevol, sigui agut o no, treballarem amb la **circumferència unitat** (també anomenada circumferència goniomètrica). Per a això, hem de dibuixar en el pla cartesià una circumferència unitària de centre l'origen de coordenades i radi 1.

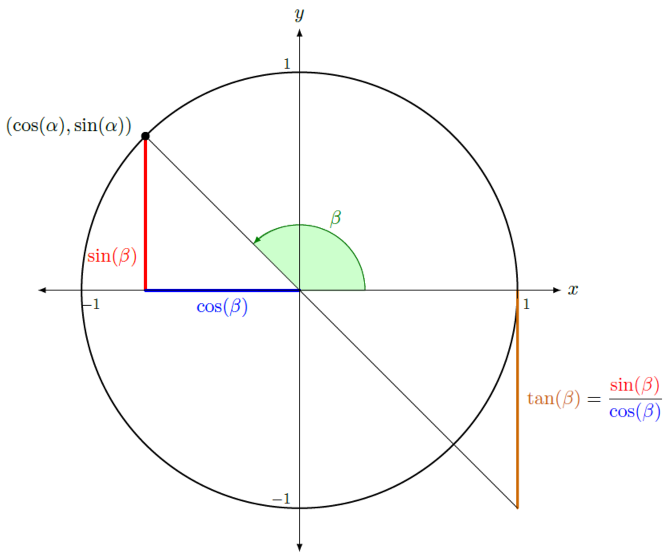


Es dibuixa l'angle α del qual volem calcular les raons trigonomètriques amb el

vèrtex al centre, el primer costat sobre l'eix X i el segon que talli la circumferència unitat. Com que la hipotenusa coincideix amb el radi, que és 1, tenim que el punt de tall amb la circumferència unitat té coordenades $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

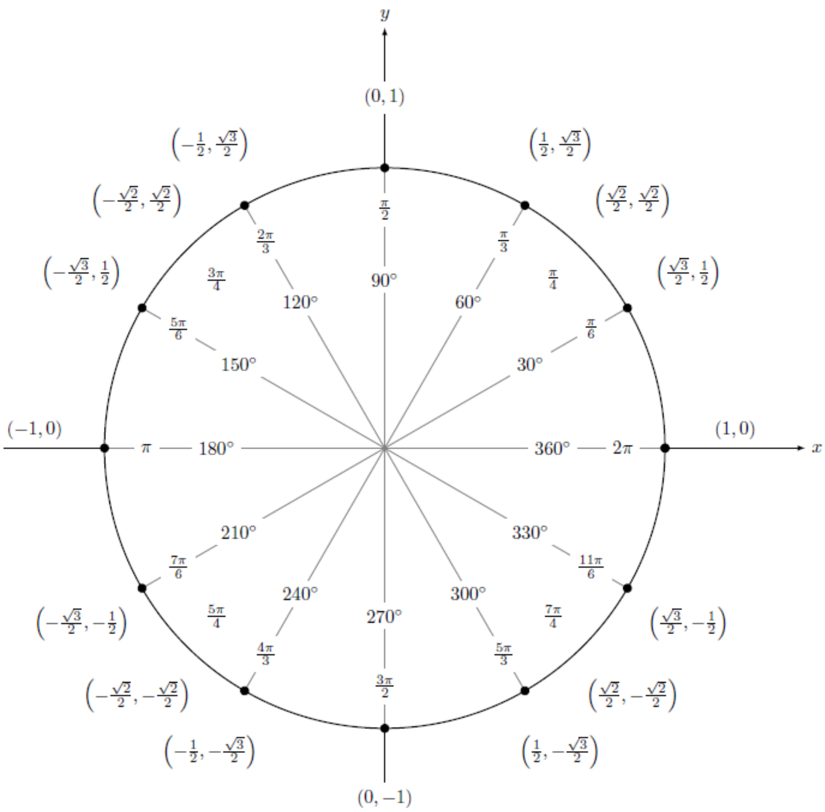


Ara dibuixem un segon angle, β, aquesta vegada obtús. Com en el cas anterior, les coordenades del punt de tall amb la circumferència són $(\cos(\beta), \sin(\beta))$.

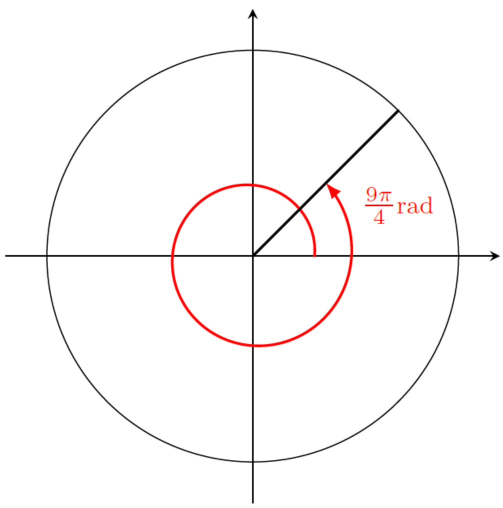


Veiem que aquí el cosinus de β serà negatiu, mentre que el sinus de βserà positiu. Ara bé, el seu valor absolut no pot ser, en cap cas, major que 1.

En general, es poden definir d'aquesta manera les raons trigonomètriques de qualsevol angle entre 0 i 2π rad (de manera equivalent, entre 0 i 360°), on el sinus i el cosinus de qualsevol angle són nombres compresos entre -1 i 1. Ho veiem en el gràfic següent, on recordem que cada punt de la circumferència té coordenades $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.



D'altra banda, qualsevol angle més gran que 2π rad (o en graus 360°) es correspon a un angle entre 0 i 2π rad (de manera equivalent, entre 0° i 360°), tal com es mostra en la imatge següent:



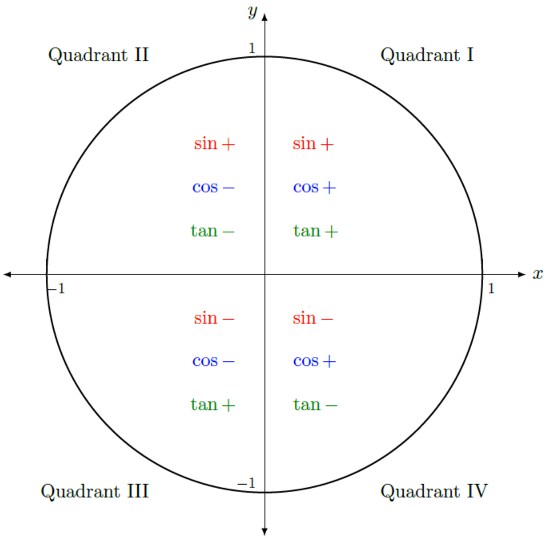
Veiem que els angles $\dfrac{9\pi}{4}$ rad i $\dfrac{9\pi}{4} - 2\pi = \dfrac{\pi}{4}$ tenen les mateixes raons trigonomètriques. En general, si α és un angle entre 0 i 2π rad (de manera equivalent, entre 0° i 360°),

$$\sin(\alpha) = \sin(2\pi + \alpha) = \sin(2 \cdot 2\pi + \alpha) = \ldots$$
$$\cos(\alpha) = \cos(2\pi + \alpha) = \cos(2 \cdot 2\pi + \alpha) = \ldots$$

és a dir, les raons trigonomètriques es repeteixen quan se suma 2π a un angle. Així, per exemple (en graus),

$$\sin(8342^\circ) = \sin(23 \cdot 360^\circ + 62^\circ) = \sin 62^\circ.$$

Quadrants. Cada quart del pla dividit per les dues rectes reals es denomina **quadrant**. Així, doncs, en la circumferència unitat hi ha quatre quadrants, que es numeren de l'1 al 4 en el sentit antihorari. En cada quadrant canvia el signe de les raons tri- gonomètriques, tal com es pot veure a partir de les coordenades $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ de cada punt. Ho resumim en la imatge següent:



En tot cas, les raons trigonomètriques de qualsevol angle es poden trobar coneixent únicament les raons trigonomètriques dels angles del primer quadrant. Podem observar les relacions següents si α és un angle del primer quadrant:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

Observem que l'angle $-\alpha$ és el mateix que l'angle $2\pi - \alpha$.
Veiem que en qualsevol cas la propietat fonamental de la trigonometria es compleix, és a dir, per a qualsevol angle α,

$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

Això és així perquè en últim t s d'un angle qualsevol sempre es calculen a partir del sinus i el cosinus d'un angle agut: l'única modificació és el signe, que no és important quan s'eleva el valor al quadrat.

8.2. Funcions sinus i cosinus

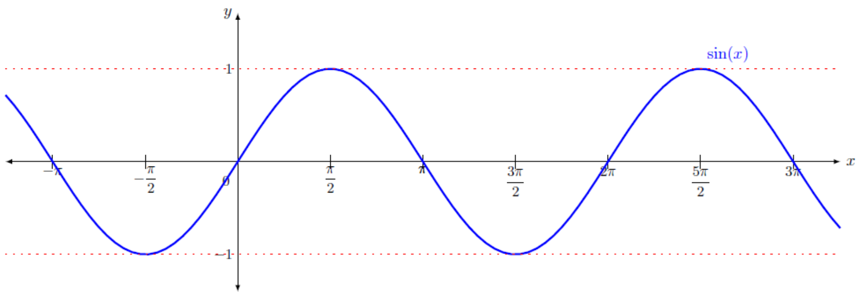
Les funcions circulars o trigonomètriques són les associades a les raons trigonomètriques. Les més importants són la sinus, la cosinus i la tangent. La variable d'aquestes funcions circulars s'expressa habitualment en radians i no en graus sexagesimals.

Aquestes funcions tenen la propietat de ser **periòdiques**, o sigui que les mateixes imatges es repeteixen cada vegada que al valor x sumem una quantitat fixada, que s'anomena **període**.

8.2.1. Definició i exemples

Funció sinus. La funció sinus és aquella funció que associa a un angle en radians el seu sinus. O sigui que en cada valor del sinus de la circumferència unitat es trasllada a la seva posició corresponent en el valor de l'angle de l'eix d'abscisses. Així, per exemple, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ o $\sin(\pi) = -1$.
D'aquesta manera, s'obté la gràfica següent, que veiem que es repeteix en cada interval de longitud 2π.

El terme sinus té una història curiosa. Una antiga obra hindú sobre astronomia, Surya Siddhanta, presenta una taula de mitjanes-cordes (molt ú tils per a calcular els moviments de les estrelles) que coincideixen amb la idea del sinus d'un angle. Posteriorment, l'obra Aryabhatiya d'Aryabhata, també hindú i del 500 dC aproximadament, fa un estudi més profund de les mitjanes-cordes, que denomina jiva (en sànscrit). Els àrabs la van traduir, i el terme jiva va ser transformat en l'aràbic jiba, però escrit jb (ja que l'àrab clàssic no té vocals). Més endavant, els traductors d'aquesta obra al llatí van traduir jb per sinus, ja que van pensar que es referia a jaib (i no a jiba), i jaib significa "pit" o "sina" (tot i que en català utilitzem la paraula sinus). Així, del significat original, "mitjana-corda", es va passar, per una traducció errònia, a "sinus".

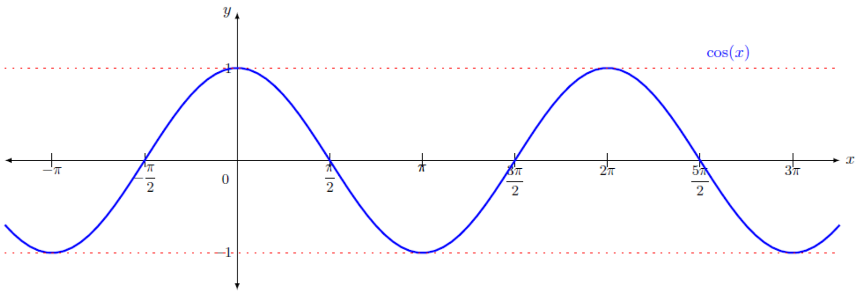


Algunes de les característiques fonamentals de la funció sinus són:

- La imatge de la funció és l'interval $[-1, 1]$.
- Té període 2π i, per tant, n'hi ha prou de conèixer els valors i característiques de la funció en qualsevol interval de longitud 2π, per exemple, en l'interval $[0, 2\pi)$.
- Els punts de tall són amb l'eix X són: $\ldots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$. Per tant, en general són els punts $(k\pi, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- És creixent en intervals de longitud π, per exemple, en els intervals $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ o $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$. De manera general és creixent en els intervals $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \frac{5\pi}{2} + 2\pi k\right)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- És decreixent en els intervals $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- Té màxims en els punts d'abscisses $\ldots -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$ i mínims en els punts d'abscisses $\ldots -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \ldots$ De manera general, té màxims en $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1\right)$ i mínims en $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, -1\right)$ per a qualsevol $k \in \mathbb{Z}$.
- És una funció senar o simètrica respecte de l'origen perquè compleix $\sin(-x) = -\sin(x)$.

El cosinus va sorgir de la necessitat de calcular el sinus de l'angle complementari. Així, originàriament, el 1620 Edmund Gunter va escriure "co.sinus" precisament per a indicar "sinus de l'angle complementari" (que, com sabem, és igual al cosinus de l'angle). Una mica més tard, John Newton (no Isaac Newton) va estandarditzar el terme cosinus, del qual prové el nostre cosinus.

Funció cosinus. La funció cosinus és aquella funció que associa a un angle en radians el seu cosinus. La gràfica d'aquesta funció es construeix de manera semblant a com es construeix la del sinus. Igual que amb el sinus, veiem que la gràfica es repeteix a cada interval de longitud 2π.

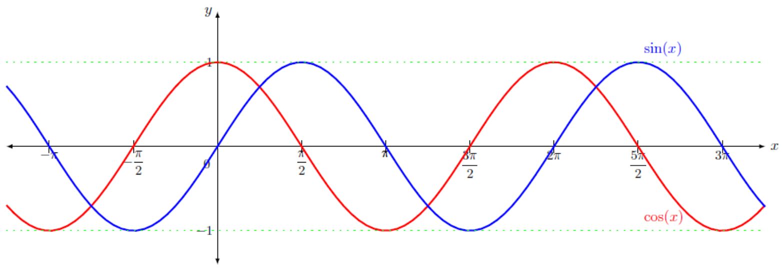


Algunes de les característiques de la funció cosinus són:

- La imatge de la funció és l'interval $[-1,1]$.
- Té període 2π i, per tant, n'hi ha prou de conèixer els valors i característiques de la funció en qualsevol interval de longitud 2π, per exemple, en l'interval $[0,2\pi)$.
- Els punts de tall són amb l'eix X són: $\ldots\ \frac{-3\pi}{2},\ \frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\ \ldots$. Per tant, en general, són els punts $\left((2k+1)\frac{\pi}{2},0\right)$ $k\in\mathbb{Z}$.
- És creixent en intervals de longitud π, per exemple, en els intervals $(\pi,0)$ o $(\pi,2\pi)$. De manera general, es diu que és creixent en els intervals $(\pi+2\pi k,2\pi+2\pi k)$ per a qualsevol $k\in\mathbb{Z}$.
- És decreixent en els intervals $(2\pi k,\pi+2\pi k)$ per a qualsevol $k\in\mathbb{Z}$.
- Té màxims en els punts d'abscisses $\ldots -2\pi, 0,\ 2\pi\ldots$ i mínims en els punts d'abscisses $\ldots-\pi,\pi\ \ldots$ En general, té màxims en $(2\pi k,1)$ i mínims en $(\pi+2\pi k,-1)$ per a qualsevol $k\in\mathbb{Z}$.
- És una funció parell o simètrica respecte l'eix X perquè compleix $\cos(x)=\cos(-x)$.

8.2.2. Relació sinus i cosinus

A primer cop d'ull, es pot comprovar que la funció sinus i la funció cosinus són molt semblants. Si representem ambdues funcions en un mateix gràfic, aquesta semblança es fa més palesa:



Observem que la seva forma és exactament la mateixa, però la funció sinus (en blau) està lleugerament "avançada" (en $\frac{\pi}{2}$ respecte de la funció cosinus (en vermell). Això és així perquè

$$\cos(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

En aquesta taula es mostra aquesta relació de manera més detallada, descrivint cadascuna de les funcions segons el quadrant:

x	0	Quadrant I	$\frac{\pi}{2}$	Quadrant II	π	Quadrant III	$\frac{3\pi}{2}$	Quadrant IV	2π
sin(**x**)	0	positiva creixent	1	positiva decreixent	0	negativa decreixent	-1	negativa creixent	0
cos(**x**)	1	positiva decreixent	0	negativa decreixent	-1	negativa creixent	0	positiva creixent	1

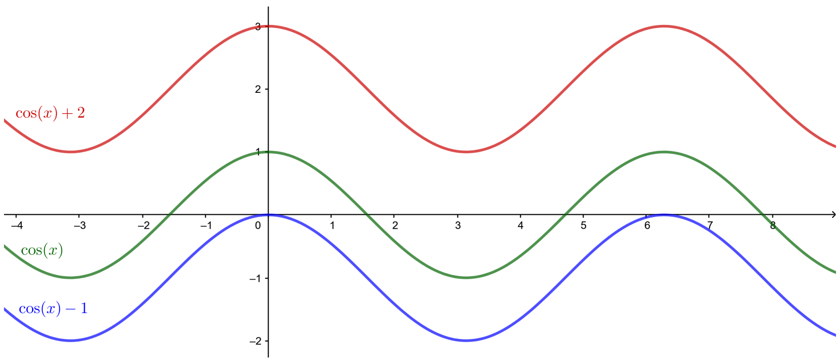
8.2.3. Transformacions

Tant la funció sinus com la funció cosinus poden veure's transformades si els sumem o multipliquem nombres reals. Aquestes transformacions són similars a les que podem trobar en els altres tipus de funcions.
Vegem en què consisteix cada una.

$\boxed{\text{Translacions verticals}}$ En aquest cas, les funcions compleixen les mateixes propietats que les funcions originals exceptuant els **punts de tall amb l'eix X**.
Trobarem una translació vertical en expressions de la forma

$$f(x) = \sin(x) + k$$
$$g(x) = \cos(x) + k$$

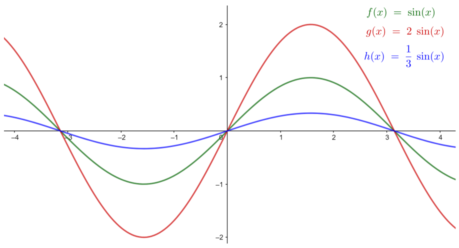
on k pot ser qualsevol valor real.
Si el valor k que sumem és positiu, la funció es traslladarà k unitats cap amunt i, en canvi, si és un valor negatiu, es mourà k unitats cap avall. Podem comprovar-ho amb els exemples de la gràfica següent:

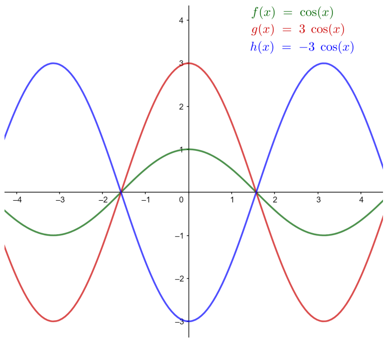


$\boxed{\text{Dilatacions/contraccions verticals}}$ En aquest tipus de transformacions veiem com canvia el **recorregut** de la funció ampliant-se o reduint-se. Es manté la resta de propietats. Trobarem una contracció o dilatació vertical en expressions de la forma

$$f(x) = C \cdot \sin(x)$$
$$g(x) = C \cdot \cos(x)$$

Si el valor $|C| < 1$, veurem que la funció es contreu i el recorregut serà menor que l'inicial. En cas contrari, veurem una dilatació i el recorregut serà més gran. Hem de tenir en compte també que en el cas de $C < 0$ tindrem una simetria respecte de l'eix X. Vegem-ne uns quants exemples en les gràfiques següents:

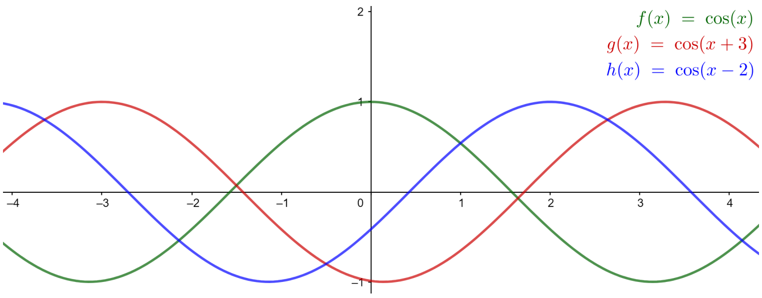




$\boxed{\text{Translacions horitzontals}}$ Podem pensar aquest tipus de transformació com una composició de funcions senzilla. Conservem les mateixes propietats, però els **punts de tall** amb l'eix X, els **màxims i mínims**, **intervals de creixement i decreixement** s'han traslladat. Les translacions horitzontals són de la forma

$$f(x) = \sin(x + b)$$
$$g(x) = \cos(x + b)$$

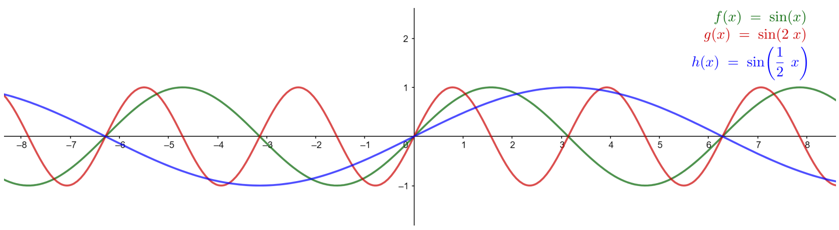
En $b > 0$ la translació és cap a l'esquerra (mou la funció cap a l'esquerra). En $b < 0$ la translació és cap a la dreta (mou la funció cap a la dreta). Vegem-ho en les gràfiques següents:



$\boxed{\text{Dilatacions/contraccions horitzontals}}$ Finalment, aquestes transformacions afecten el **període**, i amb ell els punts de tall en l'eix X i els **màxims i mínims**, **intervals de creixement i decreixement** que no es traslladen com en el cas anterior, però els punts de tall i altres característiques seran més propers o més distants segons la transformació. Les dilatacions o contraccions horitzontals són de la forma

$$f(x) = \sin(a \cdot x)$$
$$g(x) = \cos(a \cdot x)$$

Veiem que en $0 < a < 1$ tindrem una dilatació de la funció i el període serà més gran. En canvi, en $a > 1$ tenim una contracció i el període serà menor. De fet, el nou període serà $\frac{2\pi}{a}$. Vegem-ho gràficament:



En resum, les transformacions que podem tenir són:

$$f(x) = C \cdot \sin(ax + b) + k$$
$$g(x) = C \cdot \cos(ax + b) + k$$

k **Translacions verticals**. La gràfica es desplaça k unitats verticalment. Puja en $k > 0$ i baixa en $k < 0$.

C **Dilatacions/contraccions verticals**. En $|C| < 1$ la gràfica s'abaixa, i en $|C| > 1$ la gràfica s'estira. En $C < 0$ hi ha una simetria respecte de l'eix X.

b **Translacions horitzontals**. La gràfica es desplaça b unitats horitzontalment. Cap a l'esquerra en $b > 0$ i cap a la dreta en $b < 0$.

a **Dilatacions/contraccions horitzontals**. Hi ha un canvi de període que afecta totes les característiques de la funció. En $0 < a < 1$ el període serà més gran i en $a > 1$ el període serà més petit.

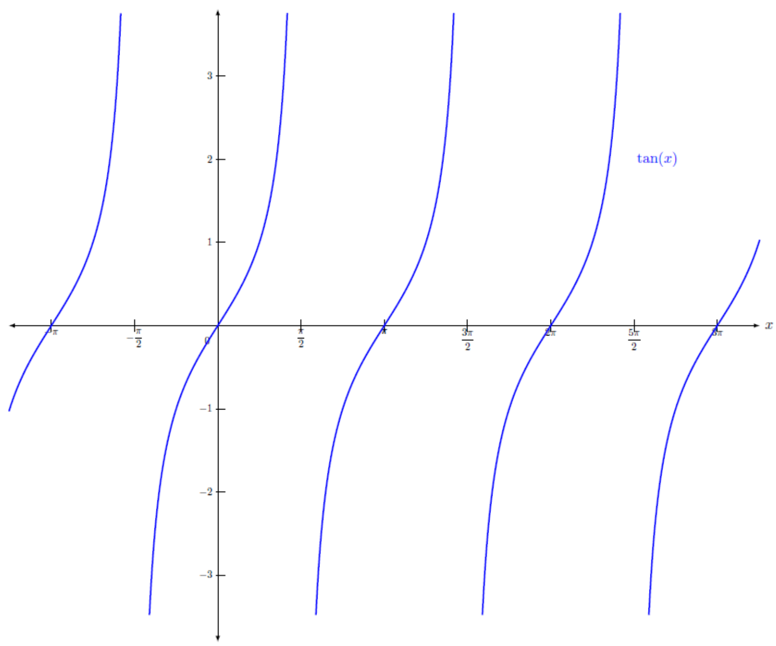
8.3. Funcions tangent i cotangent

8.3.1. Definició i exemples

Funció tangent. La funció tangent és aquella funció trigonomètrica que associa a un angle en radians la seva tangent. Per a construir-la, s'ha de tenir en compte

$$\tan(x) = \text{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Las representació gràfica d'aquesta funció és



Algunes de les característiques fonamentals de la funció tangent són:

- A diferència de la majoria de les funcions estudiades fins al moment, el domini d'aquesta funció no inclou tots els nombres: per als valors en els quals el cosinus és

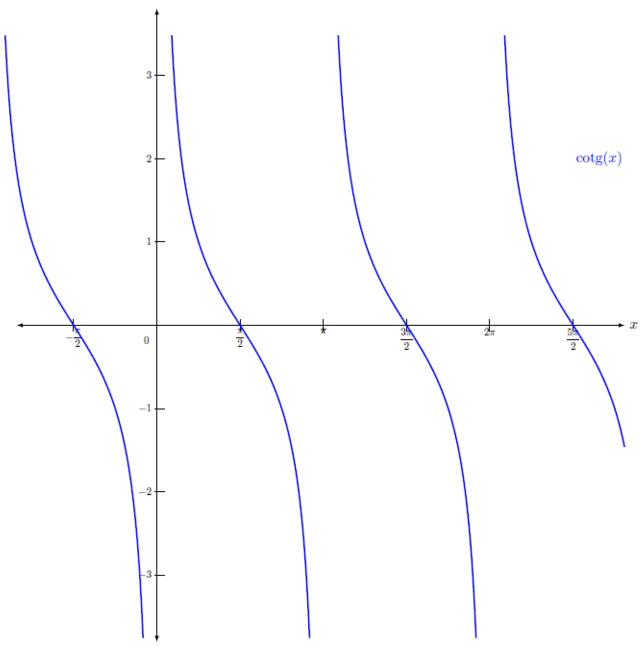
0, la funció no existeix (perquè s'hauria de dividir entre 0, cosa que és impossible). Això passa quan x és igual a $\frac{\pi}{2} + k\pi$, on k és un nombre enter qualsevol. És a dir, per a $\ldots \frac{-7\pi}{2}, \frac{-5\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \ldots$

- La imatge de la funció són tots els nombres reals.
- Té període π, i per tant n'hi ha prou de conèixer els valors i característiques de la funció en qualsevol interval de longitud π, per exemple, en l'interval $[-\pi, \pi)$.
- Els punts de tall amb l'eix X són $\ldots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi \ldots$. Per tant, en general són els punts $(k\pi, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- És una funció creixent en tot el seu domini.
- No té màxims ni mínims.

Funció cotagent. La funció cotangent és aquella funció trigonomètrica que associa a un angle en radians la seva cotangent. Per a construir-la, s'ha de tenir en compte

$$\text{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

La representació gràfica d'aquesta funció és



Algunes de les característiques fonamentals de la funció cotangent són:

- El domini no inclou tots els nombres, com en el cas de la tangent: per als valors en els quals el sinus és 0, la funció no existeix (perquè s'hauria de dividir entre 0, cosa que és impossible). Això passa quan x és igual a $k\pi$ (on k és un nombre enter qualsevol). És a dir, per a $\ldots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi \ldots$.
- La imatge d'aquesta funció es compon de tots els nombres reals, positius o negatius.

- Té període π, i per tant n'hi ha prou de conèixer els valors i característiques de la funció en qualsevol interval de longitud π, per exemple, en l'interval $[-\pi, \pi)$.
- Els punts de tall amb l'eix X són $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)$, on k és un nombre enter.
- És una funció decreixent en tot el seu domini.
- No té màxims ni mínims.

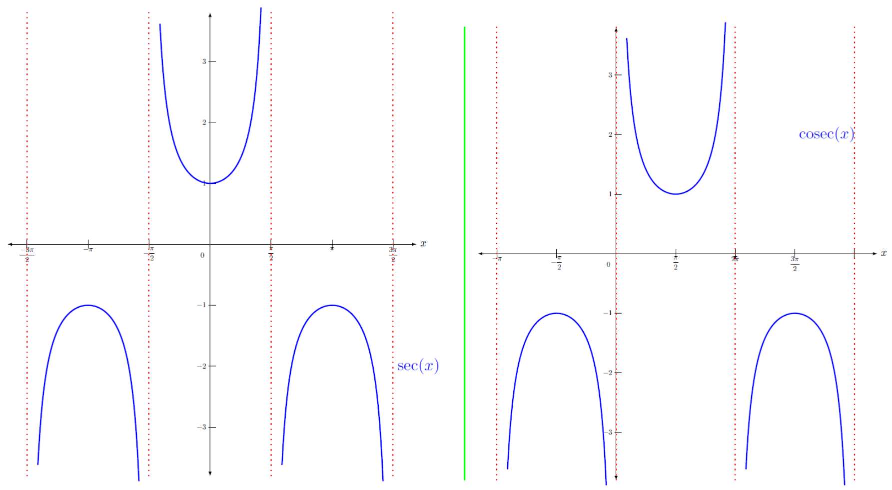
8.4. Funcions secant i cosecant

8.4.1. Definició i exemples

Les funcions secant i cosecant es defineixen de la manera següent:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \mathrm{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

Es poden representar de la manera següent:



Es tracta, doncs, de dues funcions periòdiques de període 2π, les característiques essencials de les quals són:

- Els dominis són:
  - La funció secant: tots els nombres excepte $\frac{\pi}{2} + k\pi$, on k és un nombre enter.
  - La funció cosecant: tots els nombres excepte $k\pi$, on k és un nombre enter.
- La imatge es compon de tots els nombres reals, excepte l'interval $(-1, 1)$.
- Els intervals de creixement són (sense comptar els punts que no són del domini):
  - La funció secant: és creixent en $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ i decreixent en $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, on k és qualsevol nombre enter.
  - La funció cosecant: és creixent en $\left((4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+3)\frac{\pi}{2}\right)$ i decreixent en $\left((4k+3)\frac{\pi}{2}, (4k+5)\frac{\pi}{2}\right)$, on k és qualsevol nombre enter.
- Màxims i mínims:

- La funció secant: té mínims en $(2k\pi, 1)$, i màxims en $((2k+1)\pi, -1)$, on k és un nombre enter.
- La funció cosecant: té mínims en $\left((4k+1)\frac{\pi}{2}, 1\right)$ i màxims en $\left((4k+3)\frac{\pi}{2}, -1\right)$, on k és un nombre enter.

- La secant té un únic punt de tall amb l'eix Y en el punt $(0,1)$ mentre que la cosecant no en té cap.

8.5. Funcions inverses

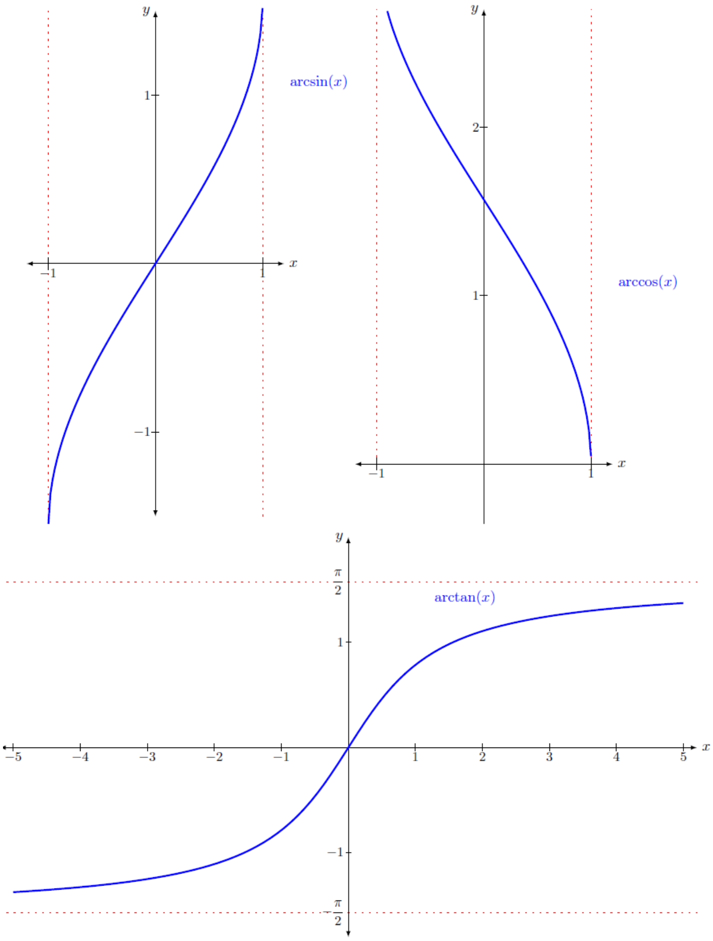
8.5.1. Definició i exemples

Totes les funcions trigonomètriques tenen inversa en l'interval de periodicitat propi de la funció. En qualsevol cas, les més importants són les funcions inverses del sinus, cosinus i tangent. Per a denominar-les, totes precedeixen el nom de la funció original del terme **arc**.

Moltes calculadores utilitzen $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ i $\tan^{-1}$ per referir-se a arcsin, arccos i arctan respectivament. Però aquesta notació no vol dir que siguin les funcions $\frac{1}{\sin(x)}$, $\frac{1}{\cos(x)}$ ni $\frac{1}{\tan(x)}$, sinò que són les funcions inverses.

- La funció inversa de la funció sinus es denomina **arc sinus** i és una funció que assigna a cada valor de l'interval $[-1, 1]$ l'angle el sinus del qual correspon a aquest valor. Com que hi ha molts valors en què passa això, solament s'utilitzen els valors dels angles entre $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Aquesta funció es designa amb el símbol arcsin. Per exemple, $\arcsin(0) = 0$, ja que l'angle que correspon al valor del sinus 0 és l'angle 0 radians.
- La funció inversa de la funció cosinus es denomina **arc cosinus** i és una funció que assigna a cada valor de l'interval $[-1, 1]$ l'angle el cosinus del qual correspon a aquest valor. Com que hi ha molts valors en els quals passa això, solament s'utilitzen els valors dels angles entre $[0, \pi]$. Aquesta funció es designa amb el símbol *arccos*. Per exemple, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, ja que l'angle que correspon al valor del cosinus 0 és l'angle $\frac{\pi}{2}$ radians.
- La funció inversa de la funció tangent es denomina **arc tangent** i és una funció que assigna a cada valor real l'angle la tangent del qual correspon a aquest valor. Com que hi ha molts valors en els quals passa això, solament s'utilitzen els valors dels angles entre $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Aquesta funció es designa amb el símbol arctan. Per exemple, $\arctan(0) = 0$, ja que l'angle que correspon al valor de la tangent 0 és l'angle 0 radians.

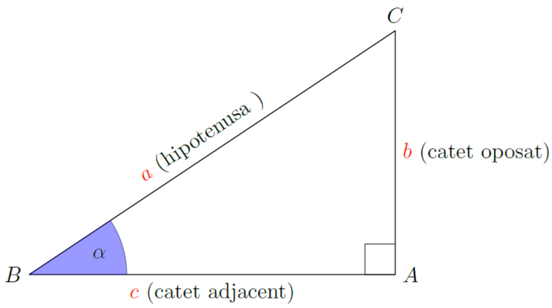
Aquestes són les representacions d'aquestes funcions que són funcions simètriques de la funció original respecte de la recta $y = x$ per ser funcions inverses:


arcsin(x)
arccos(x)
arctan(x)

Resum

Funcions Trigonomètriques

En un triangle rectangle ABC com el següent,



podem definir les raons trigonomètriques de l'angle agut α de la manera següent:

sinus de l'angle α

$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}}$$

cosinus de l'angle α

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{\text{catet adjacent}}{\text{hipotenusa}}}$$

tangent de l'angle α

$$\boxed{\mathrm{tg}(\alpha) = \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{c} = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}}}$$

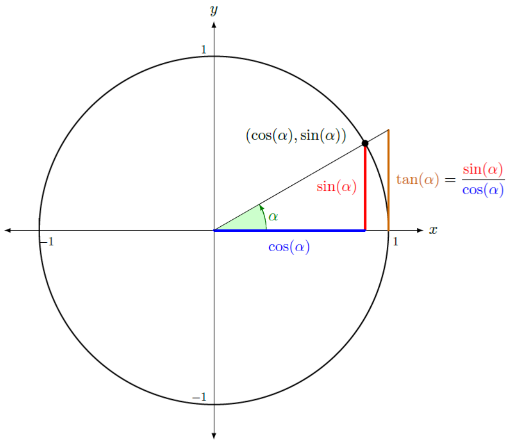
Els angles es poden mesurar en graus ($^\circ$) o bé en radians (rad).
Radian Si en un circumferència agafem un arc de longitud igual a la del radi, l'angle corresponent té una mesura que anomenem **radian (rad)**.
La seva amplitud no depèn del radi i, de fet, com que la longitud de la circumferència és $2\pi r$ i l'angle d'una volta sencera és 360°, tenim

$$360^\circ = 2\pi\,\text{rad}.$$

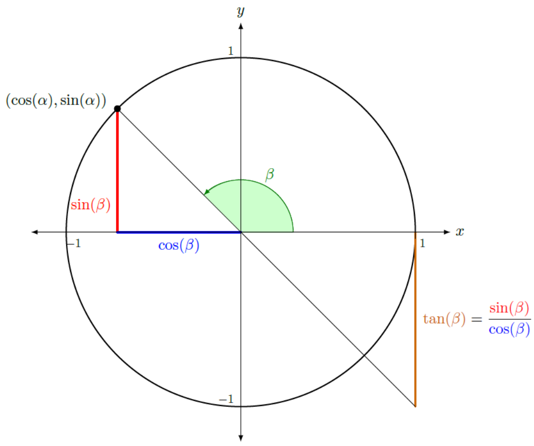
Teorema fonamental de la trigonometria

$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

Raons principals d'un angle qualsevol. Treballarem amb la circumferència unitat. Per això, es dibuixa l'angle α del qual volem calcular les raons trigonomètriques, amb el seu vèrtex al centre, el seu primer costat sobre l'eix X i el segon tallant la circumferència unitat. Com que la hipotenusa coincideix amb el radi, que és 1, tenim que el punt de tall amb la circumferència unitat té coordenades $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.



En el cas d'un angle obtús β, quedaria així:

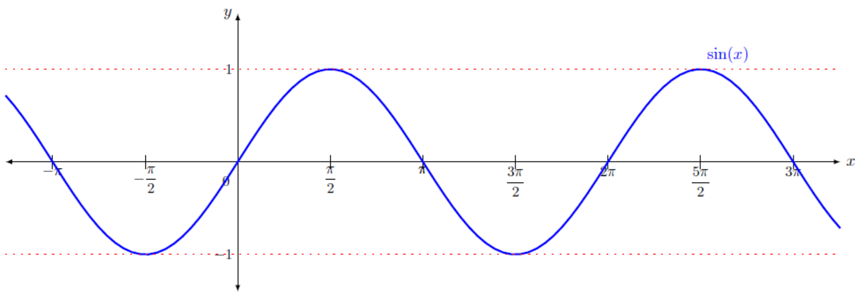


Podem trobar les raons trigonomètriques d'un angle qualsevol a partir de les relacions següents, prenent $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

Observem que l'angle $-\alpha$ és el mateix que l'angle $2\pi - \alpha$.

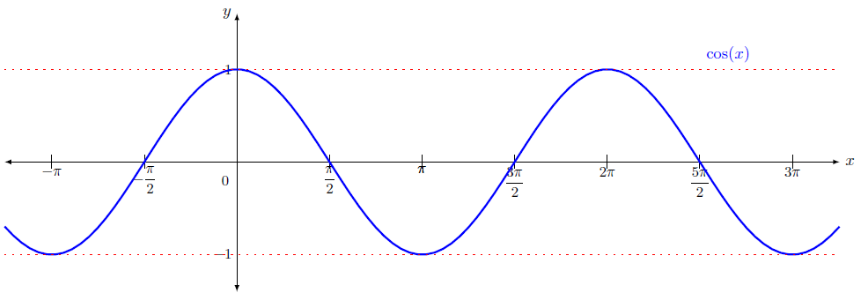
Funció sinus



Algunes de les característiques fonamentals de la funció sinus són:

- Imatge: $[-1,1]$.
- Període: 2π.
- Punts de tall amb l'eix X: $(k\pi,0)$ $k\in\mathbb{Z}$.
- Creixent en els intervals: $\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k, \frac{5\pi}{2}+2\pi k\right)$ per a qualsevol $k\in\mathbb{Z}$.
- Decreixent en els intervals: $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ per a qualsevol $k\in\mathbb{Z}$.
- Màxims en $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, 1\right)$ i mínims en $\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k, -1\right)$ per a qualsevol $k\in\mathbb{Z}$.
- Funció senar o simètrica respecte l'origen. Compleix $\sin(-x)=-\sin(x)$.

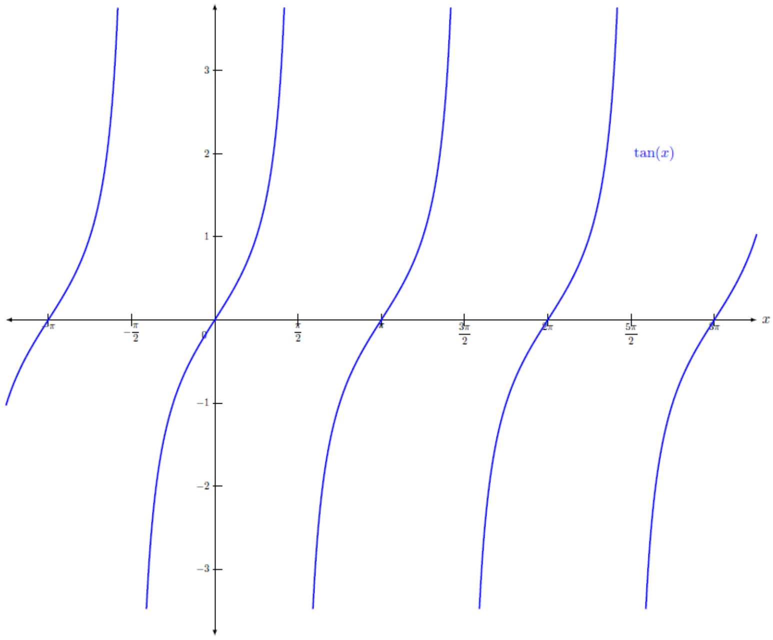
Funció cosinus



Algunes de les característiques de la funció cosinus són:

- Imatge: $[-1,1]$.
- Període: 2π.
- Punts de tall amb l'eix X: $\left((2k+1)\frac{\pi}{2},0\right)$ $k\in\mathbb{Z}$.
- Creixent en els intervals $(\pi+2\pi k, 2\pi+2\pi k)$ per a qualsevol $k\in\mathbb{Z}$.
- Decreixent en els intervals: $(2\pi k, \pi+2\pi k)$ per a qualsevol $k\in\mathbb{Z}$.
- Màxims en $(2\pi k, 1)$ i mínims en $(\pi+2\pi k, -1)$ per a qualsevol $k\in\mathbb{Z}$.
- Funció parell o simètrica respecte l'eix X. Compleix $\cos(x)=\cos(-x)$.

Funció tangent



Algunes de les característiques fonamentals de la funció tangent són:

- Domini: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, on k és un nombre enter qualsevol.
- Imatge: tots els nombres reals.
- Període: π.
- punts de tall amb l'eix X: $(k\pi, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- Funció creixent en tot el domini.
- No té màxims ni mínims.

Les transformacions del sinus i cosinus que podem tenir són:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= C \cdot \sin(ax + b) + k \\ g(x) &= C \cdot \cos(ax + b) + k \end{aligned}}$$

k **Translacions verticals**. La gràfica es desplaça k unitats verticalment. Puja en $k > 0$ o baixa en $k < 0$.

C **Dilatacions/contraccions verticals**. En $|C| < 1$ la gràfica s'aixafa, en $|C| > 1$ la gràfica s'estira. En $C < 0$ hi ha una simetria respecte de l'eix X.

b **Translacions horitzontals**. La gràfica es desplaça b unitats horitzontalment, cap a l'esquerra en $b > 0$ o cap a la dreta en $b < 0$.

a **Dilatacions/contraccions horitzontals**. Hi ha un canvi de període que afecta totes les característiques de la funció. En $0 < a < 1$ el període serà més gran i en $a > 1$ el període serà més petit.

Exercicis resolts

1. **Considera la funció $f(x) = \sin(x)\cos(x-a)$.**

(a) Per $a = 0$ dona tots els punts de tall amb l'eix X.

(b) Per $a = \frac{\pi}{2}$, calcula la seva amplitud.

Solució:

(a) Per a trobar tots els punts de tall amb l'eix X, imposem $\sin(x)\cos(x) = 0$, i per tant seran els punts tals que $\sin(x) = 0$ o $\cos(x) = 0$, i els punts $x = \pi k$ per una banda i els punts $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ per l'altra amb $k \in \mathbb{Z}$. Si unim tots els punts podem dir que la funció s'anul·larà en el punts $x = \frac{\pi}{2}k$ amb $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Ens fixem que $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ és igual a $\sin(x)$, i per tant la funció que considerem és $f(x) = \sin^2(x)$. Aquesta funció només pren valors positius menors que 1, i per tant la seva amplitud és 1.

2. **Resol les equacions trigonomètriques següents:**

(a) $\sin^2(x) + 3\sin(x) + 2 = 0$

(b) $2\sin^2(x) + 3\cos(x) = 3$

Solució:

(a) Per a resoldre l'equació $\sin^2(x)+3\sin(x)+2 = 0$, anomenarem $y = \sin(x)$, de manera que l'equació queda de la forma $y^2 + 3y + 2 = 0$.
Si resolem aquesta equació de segon grau, obtenim dues solucions $y = -2$ i $y = -1$.
Com que $y = \sin(x)$, podem descartar la primera de les dues solucions, ja que el $\sin(x)$ només pren valors entre -1 i 1. Les solucions de l'equació inicial seran les solucions de l'equació $\sin(x) = -1$, i aquestes són $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ amb $k \in \mathbb{Z}$.

(b) En primer lloc, veiem que l'equació té termes en $\sin(x)$ i $\cos(x)$. Utilitzarem el teorema fonamental de la trigonometria per tal de reescriure l'equació només en termes de $\cos(x)$. Com que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, obtenim $2(1 - \cos^2(x)) + 3\cos(x) = 3$, que simplifiquem per obtenir

$$-2\cos^2(x) + 3\cos(x) - 1 = 0$$

Com en el cas anterior, anomenarem

$$y = \cos(x)$$

, de manera que l'equació queda $-2y^2 + 3y - 1 = 0$.
Resolem aquesta equació de segon grau i obtenim dues solucions: $y = 1$ i $y = \frac{1}{2}$. Per tant, les solucions seran els valors tals que $\cos(x) = 1$ o $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
Busquem aquests valors i obtenim les solucions de l'equació inicial $x = 2\pi k$ per a la primera i $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ i $x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$ amb $k \in \mathbb{Z}$. Per tant, tots aquests valors són solució de l'equació inicial.

3. **A partir del teorema fonamental de la trigonometria demostra que**

(a) $\mathbf{sec}^2(x) = 1 + \tan^2(x)$

(b) $\mathbf{cosec}^2(x) = 1 + \mathbf{cotan}^2(x)$

Solució:

(a) Per una banda a partir de la definició obtenim que $\sec^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ i per altra banda

$$1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

per tant obtenim la igualtat que volíem.

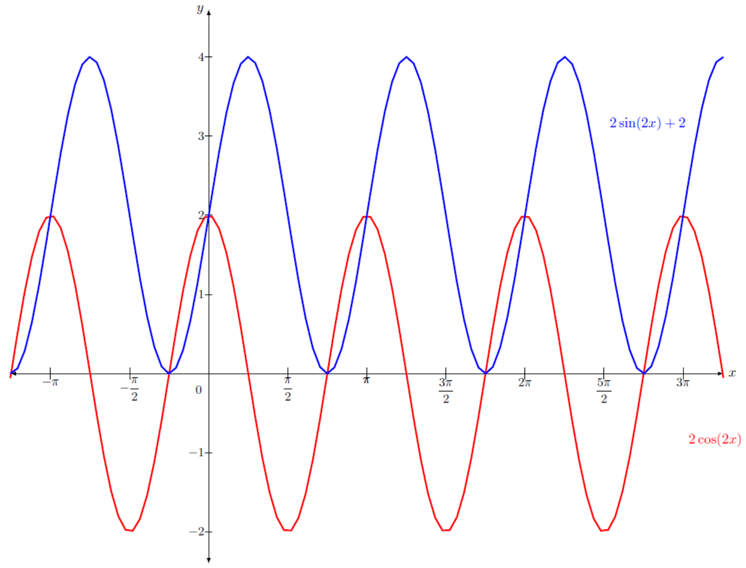
(b) Igual que abans veiem per una banda a partir de la definició que $\operatorname{cosec}^2(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)}$ i per l'altra banda

$$1 + \operatorname{cotan}^2(x) = 1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

4. **Troba una funció amb sinus o cosinus que tingui amplitud 2, període π i tal que $f(0) = 2$.**

Solució:

Proposem un parell de solucions, una amb sinus i una amb cosinus (no són úniques). En ambdós casos hem multiplicat la x per 2 per tal que el període sigui la meitat del període del sinus i cosinus. També hem multiplicat per 2 la funció per tal d'aconseguir l'amplitud desitjada. Finalment podem jugar amb les translacions (horitzontals i verticals) per tal que la funció passi pel punt $(0, 2)$.
Veiem la gràfica de dues funcions amb aquestes característiques: $f(x) = 2\sin(2x) + 2$ i $g(x) = 2\cos(2x)$.



5. **Pots trobar valors de x tals que $\sin(x) = \tan(x)$?**

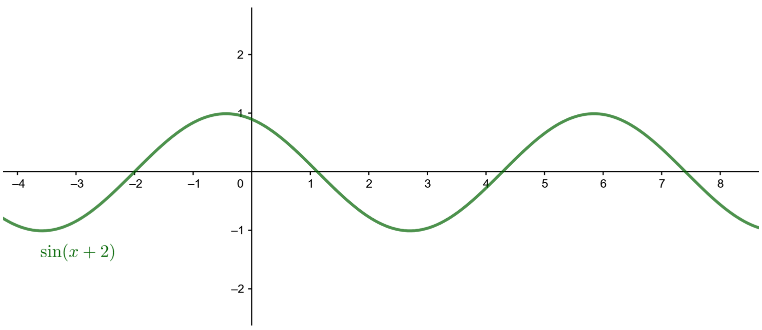
Solució:

A paritr de la definicío de $\tan(x)$ podem escriure l'equació de la forma

$$\sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Leftrightarrow \sin(x)\cos(x) = \sin(x) \Leftrightarrow \sin(x)(\cos(x) - 1) = 0$$

Per tant, veiem que aquesta igualtat es complirà en els casos en què $\sin(x) = 0$ o $\cos(x) = 1$, però ens fixem que si es compleix la primera igualtat segur que es compleix la segona ja que en els punts a on $\sin(x) = 0$ tenim que $\cos(x) = \pm 1$ (no és cert el recíproc). Per tant, els punts on coincideixen la funció sinus i la tangent són els punts on totes dues s'anul·len, $x = \pi k$ per $k \in \mathbb{Z}$.

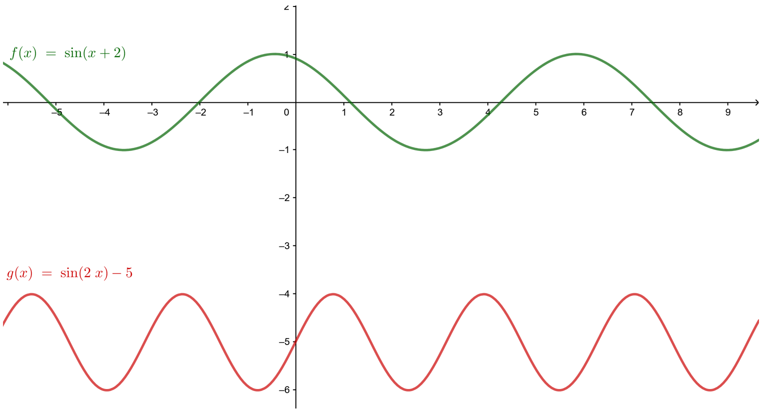
6. **A partir de la gràfica de $\sin(x+2)$ justifica i construeix la gràfica de $\sin(2x) - 5$ i $3\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.**



Solució:
Comencem escrivint $g(x) = \sin(2x) - 5$ a partir de transformacions de la funció $\sin(x+2)$

$$g(x) = \sin(2(x+2) - 4) - 5$$

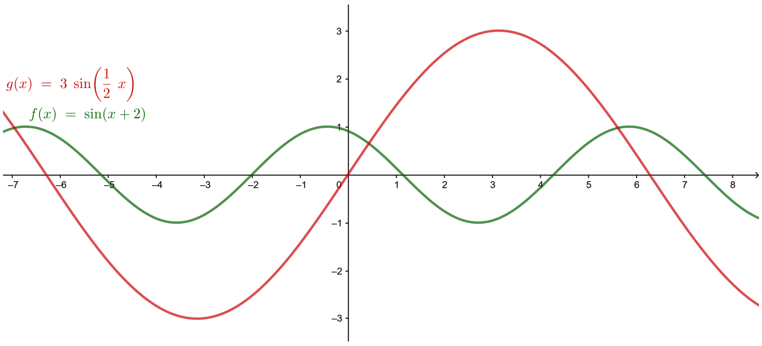
Això vol dir que desplacem la funció $\sin(x+2)$, 5 unitats cap avall, 4 unitats a la dreta i la contraiem horitzontalment dividint el període inicial per 2.



Fem el mateix per $g(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ i obtenim

$$g(x) = 3\sin\left(\frac{1}{2}(x+2) - 1\right)$$

Per tant en aquest cas, hem desplaçat la funció 1 unitat a la dreta, hem dilatat hortitzontalment la funció obtenint un període el doble de l'inicial i hem dilatat la funció verticalment 3 unitats.



Exercicis per a practicar amb les solucions

7. **Determina el període de les funcions següents:**

(a) $\sin(2x)$

(b) $\cos(3x)$

(c) $\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

(d) $\tan(4x)$

8. **Resol les següents equacions trigonomètriques**

(a) $\tan^2(x) - \tan(x) = 0$

(b) $1 - \cos^2(x) = \cos^2(x)$

9. **Utilitza les relacions trigonomètriques conegudes per a simplificar les següents expressions**

(a) $\dfrac{\sin(\pi + x) - \sin(\pi - x)}{\cos(\pi + x) + \cos(\pi - x)}$

(b) $\dfrac{\cos(x) - \sin(x)}{1 - \tan(x)}$

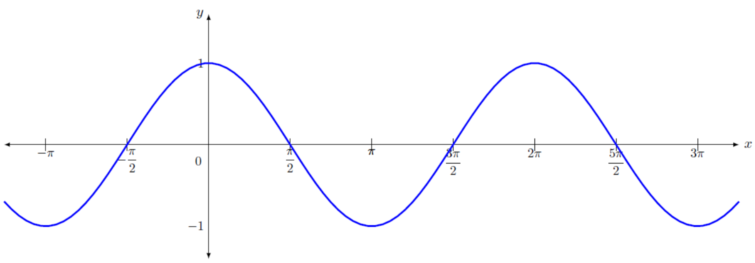
10. **Troba tots els valors tals que**

(a) $\sin\left(\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

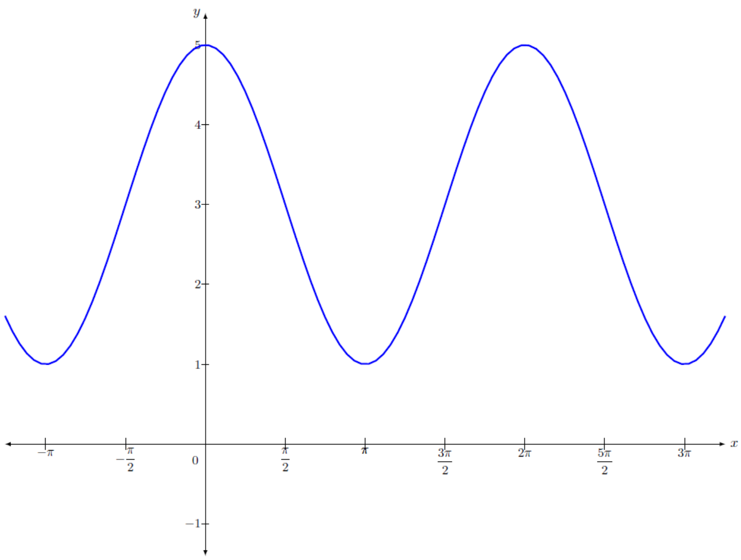
(b) $\tan\left(\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

11. **És parell la funció $f(x) = \sin(x^2) + \cos(x) + 3$? (Recorda que una funció és parell si $f(-x) = f(x)$ per qualsevol valor de x).**

12. **Troba l'expressió algebraica d'aquesta funció utilitzant només el sinus**



13. **Troba l'expressió algebraica d'aquesta funció utilitzant només el cosinus**



Solucions:

7. (a) π
   (b) $\frac{2\pi}{3}$
   (c) 4π
   (d) $\frac{\pi}{2}$
8. (a) $x = \pi k$ i $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ amb $k \in \mathbb{Z}$
   (b) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $x = \frac{5\pi}{4} + \pi k$ i $x = \frac{7\pi}{4} + \pi k$ amb $k \in \mathbb{Z}$
9. (a) $\tan(x)$
   (b) $\cos(x)$
10. (a) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
    (b) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$
11. Sí, la funció $f(x)$ és parell.
12. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
13. $2\cos(2x) + 3$