Iniciació a les matemàtiques per a l'enginyeria

PID_00270076

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat
Oberta
de Catalunya

9. Funcions exponencial i logarítmica

Índex

9.1. La funció exponencial

9.1.1. Definició i exemple

La **funció exponencial** de base a es defineix a partir de les potències de nombres. En general, si a és un nombre positiu, la funció exponencial de base a es defineix com a a^x.

Què és una funció exponencial?
Una funció exponencial es defineix a partir de les potències dels nombres. La seva expressió és de la forma a^x , amb $a > 0$.
$\mathrm{Dom}(a^x) = \mathbb{R}$ i $\mathrm{Im}\ (a^x) = \mathbb{R}^+$. Són funcions sempre creixents per a $a > 1$, decreixents per a $a < 1$. No tenen ni màxims ni mínims.

Exemple. Funció exponencial de base 3.

$$g(x) = 3^x$$

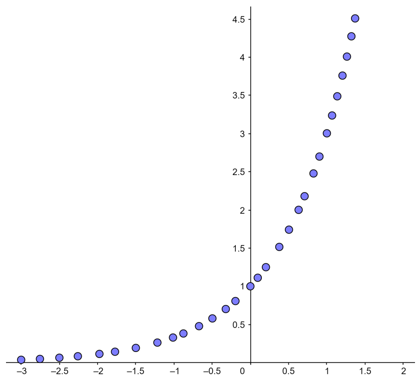
Aleshores,
$g(0) = 3^0 = 1,\ g(1) = 3^1 = 3,\ g(2) = 3^2 = 9,\ g(-1) = 3^{-1} = \dfrac{1}{3},\ g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\ldots$

Una de les funcions exponencials essencials és la que té com a base el nombre irracional e, els primers decimals del qual són 2.71828182845904523... En aquest cas, la funció s'anomena simplement exponencial, sense especificar-ne la base, i s'escriu $\exp(x)$ o simplement e^x.

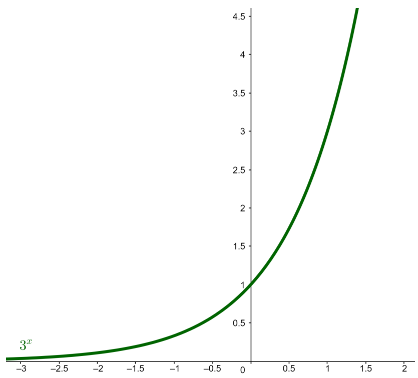
9.1.2. Gràfica

Podem deduir la forma general de la gràfica de qualsevol funció exponencial a partir d'un exemple concret.

En representar la gràfica d'una taula d'una funció exponencial, per exemple, $g(x) = 3^x$ en el domini $[-3, 2]$, s'obté una gràfica de punts amb aquest aspecte:



De la representació anterior, no és complicat deduir que la gràfica de la funció exponencial de base 3 en el domini $[-3, 2]$ esdevé la següent:



A partir de la gràfica s'observa com qualsevol valor de la funció és sempre positiu, és a dir, que la funció sempre és positiva. A més, s'observa que la gràfica passa pel punt $(0, 1)$. Aquestes són dues propietats de totes les funcions exponencials, perquè la potència d'un nombre qualsevol és sempre un nombre positiu i perquè qualsevol nombre elevat a 0 és sempre 1. En particular, doncs, es té que la gràfica d'una funció exponencial sempre queda per sobre de l'eix X.

9.1.3. Propietats

D'acord amb els fets observats anteriorment, es compleixen certes propietats per a totes les funcions exponencials. Si escrivim $y = a^x$, amb $a > 0$ aquestes propietats són:

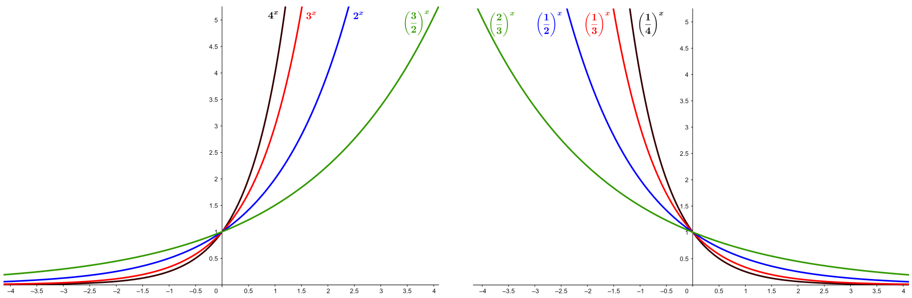
- El domini de qualsevol funció exponencial són tots els reals: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
- La imatge de qualsevol funció exponencial de base $a \neq 1$ és $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.
- La gràfica d'una funció exponencial sempre passa pel punt $(0, 1)$.
- Si la base a és més gran que 1 $(a > 1)$:

  - Si $x_1 < x_2$, $a^{x_1} < a^{x_2}$, és a dir, la funció creix en augmentar la variable. En definitiva, la funció és creixent. A més, el creixement és més gran com més gran és la base.
  - Com més petit és el valor de la variable x, més s'acosta a 0 el valor de la imatge y, tot i que no s'arriba a assolir mai aquest valor.

- Si la base a és menor que 1 $(a < 1)$:
  - Si $x_1 < x_2$, $a^{x_1} > a^{x_2}$, és a dir, la funció decreix en augmentar la variable. En definitiva, la funció és decreixent. A més, el decreixement és més gran com més petita és la base.
  - Com més gran és el valor de la variable x, més s'acosta a 0 el valor de la imatge y, tot i que no arriba a assolir a mai aquest valor.

- Si la base és 1 $(a = 1)$: la funció és constant, ja que $1^x = \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{x} = 1$.

Aquestes propietats s'observen en les gràfiques de qualsevol funció exponencial. Identifiquem-les en les següents:



La imatge de l'esquerra mostra les gràfiques de 4^x, 3^x, 2^x i $\left(\frac{3}{2}\right)^x$. Observem que, per ser la base major que 1, són funcions creixents, amb un creixement més gran com més gran és la base. A més, notem que, com més a l'esquerra de $x = -1$, per exemple, el valor de les funcions s'aproxima molt ràpidament a 0, però sense assolir aquest valor.
La imatge de la dreta mostra les gràfiques de $\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $\left(\frac{2}{3}\right)^x$. Observem que, per ser la base menor que 1, són funcions decreixents, amb un decreixement més gran com més petita és la base. A més, notem que, com més a la dreta de $x = -1$, per exemple, el valor de les funcions s'aproxima molt ràpidament a 0, però sense assolir aquest valor.
Finalment, observem com les gràfiques de 4^x, 3^x, 2^x i $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ i les gràfiques de $\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ i $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ són simètriques respecte de l'eix Y. Aquest fet és degut a

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$$

La funció exponencial és una de les funcions més importants per les seves aplicacions, ja que és capaç de descriure una gran varietat de fenòmens, especialment els de creixement. Pe això és habitual que aquestes funcions també es denominin *funcions de creixement*. En particular, s'apliquen a fets tan importants com el creixement d'una població de bacteris en un laboratori, el creixement demogràfic del nombre d'animals, la manera com decreix la matèria radioactiva (creixement negatiu), la raó amb la qual un obrer aprèn un cert procés, o la velocitat amb què una malaltia contagiosa es dissemina amb el temps. Les funcions exponencials també són útils per a calcular l'interès obtingut en un compte bancari, ja que descriuen l'augment monetari a un interès compost.

9.2. El logaritme

9.2.1. Definició

El **logaritme de base** a, amb $a > 0$, d'un nombre real positiu x, es calcula de la manera següent:

$$\log_a x = \log_a(x) = y \text{ si } x = a^y$$

Per exemple, el logaritme de base 2 de 8 és igual a 3 perquè $2^3 = 8$. Aleshores, podem escriure

$$\log_2 8 = \log_2(8) = 3, \text{ perquè } 2^3 = 8$$

En general, doncs, s'escriu $\log_a$ per indicar precisament aquesta operació: el logaritme de base a.

L'origen del concepte de logaritme està en un problema de matemàtica aplicada: la necessitat de simplificar la tasca dels calculadors, excessivament complicada quan es tractava de fer multiplicacions, divisions i, fins i tot, potències o extraccions d'arrels en problemes relacionats inicialment amb l'agrimensura i l'astronomia, especialment quan s'havia d'aplicar a la navegació. Arquimedes ja tenia una idea fonamental que generaria els logaritmes. No va ser, però, fins a John Napier (s. XV) que s'aprofitaria la idea llançada per Arquimedes. Els logaritmes van ser de gran ajuda per al naixement de la física matemàtica al final del segle XV.

Exemple. Logaritmes de bases

- Logaritme de base 3 de 81: $\log_3(81) = 4$ perquè $3^4 = 81$.
- Logaritme de base 5 de 25: $\log_5(25) = 2$ perquè $5^2 = 25$.
- Logaritme de base 7 de 49: $\log_7(49) = 2$ perquè $7^2 = 49$.

9.2.2. Propietats

Les propietats del logaritme deriven de les propietats de les potències, atesa la relació que hi ha entre les dues operacions. Així, per a un logaritme de base a, $\log_a$, es compleixen les propietats següents sigui quin sigui el valor de $a > 0$:

1) $\log_a(a) = 1$ i $\log_a(1) = 0$

2) El logaritme del producte és igual a la suma de logaritmes:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

ja que

$$a^{\log_a(x \cdot y)} = x \cdot y = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}$$

3) El logaritme d'una potència és igual al producte de l'exponent pel logaritme de la base:

$$\log_a\left(x^y\right) = y \cdot \log_a(x)$$

ja que

$$a^{\log_a(x^y)} = x^y = \left(a^{\log_a(x)}\right)^y = a^{y \cdot \log_a(x)}$$

4) El logaritme d'un quocient és el logaritme del numerador menys el logaritme del denominador:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

ja que

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x \cdot y^{-1}\right) = \log_a(x) + \log_a\left(y^{-1}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

5) És possible relacionar dos logaritmes de bases diferents, a i b, amb aquesta fórmula:

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

ja que si denominem $y = \log_a(x)$ i $z = \log_b(x)$, aleshores $x = a^y = b^z$.
A més, com que $b = a^{\log_a(b)}$ podem escriure $a^x = \left(a^{\log_a(b)}\right)^y = a^{y\cdot\log_a(b)}$.
Per tant,

$$\log_a(x) = y = z \cdot \log_a(b) = \log_b(x) \cdot \log_a(b)$$

d'on es dedueix la propietat enunciada.

9.3. La funció logarítmica

9.3.1. Definició i exemples

La **funció logarítmica de base** a, amb $a > 0$ i $a \neq 1$, és la funció inversa de la funció exponencial de base a. És a dir,

$$y = \log_a(x) \text{ si } x = a^y$$

Com que la funció es defineix a partir de les propietats del logaritme, també se l'anomena directament **funció logaritme**.

Què és una funció logarítmica?
Una funció logarítmica de base a és la funció inversa d'una funció exponencial de base a. La seva expressió és de la forma $\log_a(x)$, on $a > 0$. Dom $(\log_a(x)) = \mathbb{R}^+$ i Im$(\log_a(x)) = \mathbb{R}$. Són funcions sempre creixents per a $a > 1$ i decreixents per a $a < 1$. No tenen ni màxims ni mínims.

Hi ha dos casos particulars en la notació d'aquesta funció:

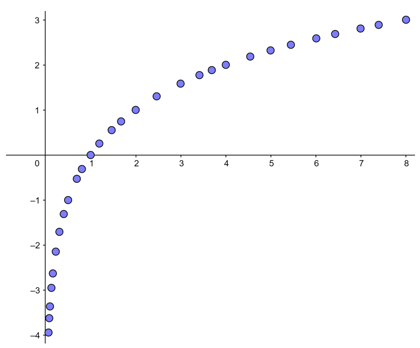
- Quan la base és el nombre irracional e, es parla de *logaritme neperià* i s'escriu ln. És a dir, s'entén $\ln = \log_e$.
- Quan la base és el nombre 10, es parla simplement de logaritme, sense especificar la base, i es sol escriure simplement log. És a dir, s'entén $\log = \log_{10}$.

John Napier (i d'aquí el qualificatiu neperià) va néixer el 1550. Al 1614 va publicar el *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, on relaciona una progressió geomètrica amb una progressió aritmètica. La primera és la progressió de les distàncies recorregudes amb velocitats proporcionals a elles mateixes, i la segona, la progressió de les distàncies recorregudes amb velocitat constant, on aquestes distàncies s'on els "logaritmes" de les primeres. L'obra comprèn una taula de logaritmes de sinus, amb els angles que varien de minut en minut. El 1619 va aparèixer una segona obra, *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, on l'autor explica com calcular els logaritmes.

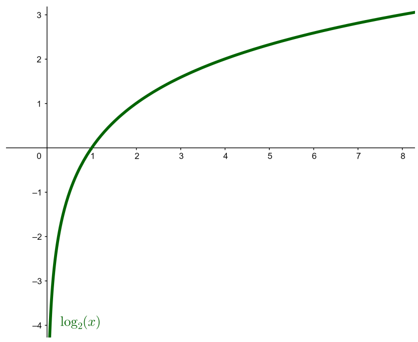
9.3.2. Gràfica

Podem deduir la forma general de la gràfica de qualsevol funció logarítmica a partir d'un exemple concret.

En representar gràficament una taula d'una funció logaritme, per exemple, la de base 2 en el domini $[0, 8]$, s'obté una gràfica de punts com aquesta:



A partir d'aquesta gràfica es pot deduir la gràfica de la funció. Així, en aquest cas, la gràfica de la funció logaritme de base 2 en el domini $[0, 8]$ resulta



En la gràfica s'observa que la funció es defineix únicament per a valors positius, però la seva imatge abraça tots els valors reals. A més, observem que la gràfica de la funció passa pel punt $(1, 0)$. Això passa en totes les funcions logarítmiques degut al fet que el logaritme es defineix a partir de les potències dels nombres. En particular, notem que la gràfica d'una funció logarítmica sempre queda a la dreta de l'eix Y.

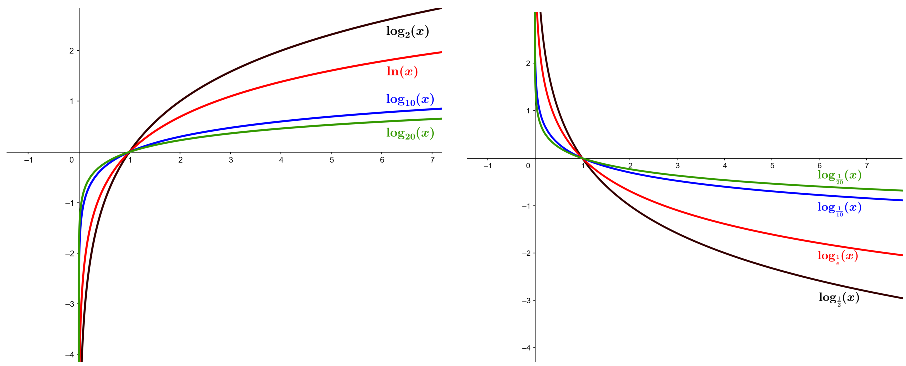
9.3.3. Propietats

D'acord amb els fets observats anteriorment, es compleixen certes propietats per a les funcions logarítmiques. Si escrivim $y = \log_a(x)$, amb $a > 0$ i $a \neq 1$, aquestes propietats són:

- El domini de qualsevol funció logarítmica de base a és igual a $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, ja que correspon a la imatge de la funció exponencial de base a.
- La imatge de qualsevol funció logarítmica de base a és igual a tots els nombres reals: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, ja que és el domini de la funció exponencial de base a.
- La gràfica de qualsevol funció logarítmica sempre passa pel punt $(1, 0)$.
- Si la base a és més gran que 1 $(a > 1)$:
  - Si $x_1 < x_2$, llavors $\log_a(x_1) < \log_a(x_2)$, és a dir, la funció creix en augmentar la variable. En definitiva, la funció és creixent. A més, no hi ha límit per al creixement de la funció: quan el valor de variable x augmenta, la imatge y també augmenta. Aquest creixement és més gran com més petita és la base.
  - Com més a prop de 0 és la variable x, el valor de la imatge y és menor; per això es diu que la funció $\log_a(x)$ tendeix a $-\infty$ quan la x tendeix a 0.
- Si la base a és menor que 1 $(a < 1)$:
  - Si $x_1 < x_2$, llavors $\log_a(x_1) > \log_a(x_2)$, és a dir, la funció decreix en augmentar la variable. En definitiva, la funció és decreixent. A més, no hi ha límit per al decreixement de la funció. Aquest decreixement és més gran com més gran és la base.
  - Com més gran és el valor de la variable x, més s'acosta el valor de la imatge y a 0, tot i que sense arribar a assolir-lo mai.

Aquestes propietats s'observen en les gràfiques de qualsevol funció logarítmica.

Identifiquem-les en les gràfiques següents:



La imatge de l'esquerra mostra les gràfiques de les funcions $\log_2(x)$, $\ln(x)$, $\log(x)$, $\log_{20}(x)$. Recordem que $\ln(x)$ és el logaritme neperià (de base e), i $\log(x)$ (sense indicar la base) fa referència al logaritme de base 10. Observem que, són funcions creixents perquè la base és major que 1, amb un creixement més gran com més petita és la base. A més, notem que com més a l'esquerra de, $x = 1$, per exemple, el valor de les funcions decreix molt ràpidament, sense límit concret.

La imatge de la dreta mostra les gràfiques de les funcions logarítmiques de bases inverses a les anteriors, és a dir, de bases $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{e}$, $\frac{1}{10}$ i $\frac{1}{20}$. Observem que són funcions decreixents perquè la base és menor que 1, amb un decreixement més gran com més gran és la base. A més, notem que, com més a l'esquerra de, $x = 1$, per exemple, el valor de les funcions creix ràpidament, sense límit concret.

Finalment, observem que les gràfiques $\log_a(x)$ i $\log_{\frac{1}{a}}(x)$ són simètriques respecte de l'eix X. Això és així perquè

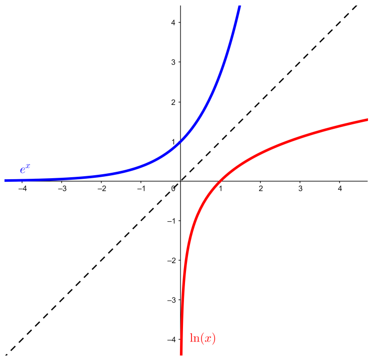
$$\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x)$$

Les funcions logarítmiques són importants per a estudiar fenòmens físics, per exemple, la descomposició radioactiva.

9.4. Relació entre les gràfiques exponencial i logarítmica

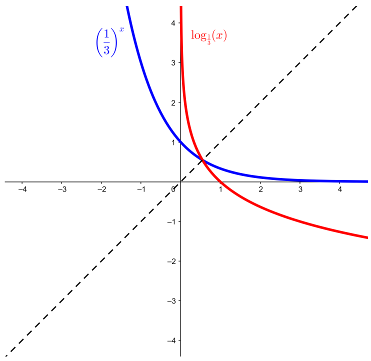
Hi ha una relació estreta entre les gràfiques d'una funció exponencial i d'una funció logarítmica de la mateixa base, atesa la definició del logaritme a partir de les potències de nombres. Les deduïm a partir d'algun exemple concret.

Considerem, per exemple, les gràfiques de la funció logaritme neperià, $\ln(x)$, i de la funció exponencial, e^x, i comparem-les. Recordem que la gràfica de qualsevol funció s'interpreta d'esquerra a dreta i s'ha d'analitzar amb precaució perquè sempre és aproximada i és possible no interpretar-la correctament.



En representar les dues gràfiques corresponents a $\ln(x)$ i e^x conjuntament, en el domini $[-4, 4]$, per exemple, observem que ambdues funcions són simètriques respecte de la recta $y = x$. És a dir, que si es doblega el paper amb les dues funcions per la recta $y = x$, ambdues corbes coincideixen després del plegat.

Aquest fet també passa si les funcions tenen la base menor que 1. Per exemple, les funcions exponencial i logarítmica de base $\frac{1}{3}$: $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ i $\log_{\frac{1}{3}}(x)$ en el domini $[-4, 4]$:



Tal com hem anticipat, es pot observar que les funcions són també simètriques respecte de la recta $y = x$.

Aquest fet no és solament aplicable a aquestes funcions. De manera general, es té que si dues funcions qualssevol són inverses una de l'altra, les seves gràfiques compleixen aquesta propietat: són simètriques respecte de la recta $y = x$. Això és fàcil d'explicar, ja que la inversa d'una funció intercanvia els papers de la x i la y. Per tant, la funció inversa ha de tenir la mateixa forma que la funció original, tret que els eixos X i Y s'han d'intercanviar.

9.5. Equacions exponencial i logarítmica

Equació exponencial. És una equació amb funcions exponencials.
Resoldre aquest tipus d'equacions no és fàcil en general, i no hi ha cap fórmula de resolució general. El que convé en aquests casos és agrupar al màxim i convenientment les potències que així ho permetin per a intentar substituir l'equació exponencial per una equació lineal o quadràtica. Per això és fonamental identificar i aplicar les propietats de les potències. A continuació hi ha alguns exemples d'això.

Què és una equació exponencial?
És una equació amb funcions exponencials. Per a resoldre una equació exponencial, convé agrupar al màxim les potències per a poder substituir l'equació exponencial per una equació lineal o quadràtica. De la mateixa manera, es poden resoldre sistemes d'equacions exponencials.

Un primer exemple d'equació exponencial de resolució senzilla a causa de la igualtat entre les bases podria ser aquest:

Exemple. Resolució d'equació exponencial (1).

$$2^{x+1} = 2^2$$

Com que les bases són iguals, els exponents han de ser iguals:

$$x + 1 = 2 \Rightarrow x = 2 - 1 = 1$$

Efectivament, $2^{1+1} = 2^2$.

Així mateix, la resolució d'equacions exponencials pot ser més complexa, com és per exemple la següent:

Exemple. Resolució d'equació exponencial (2).

$$7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$$

S'ha d'intentar treure 7^x com a factor comú aplicant les propietats de les potències:

$$7^x \cdot \left(1 + 7 + 7^2\right) = 2793$$

Operem els elements entre parèntesis:

$$7^x \cdot 57 = 2793$$

d'on resulta

$$7^x = \frac{2793}{57} = 49 = 7^2$$

i, per tant,

$$x = 2$$

Això es pot complicar més. És el cas d'una equació com aquesta:

Exemple. Resolució d'equació exponencial (3).

$$5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$$

S'ha d'intentar eliminar el denominador. Multipliquem tota l'expressió per 5^{x-2}:

$$5^{x-1} \cdot 5^{x-2} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3$$

Operem i passem tots els termes a l'esquerre:

$$5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$$

Reescrivim:

$$5 \cdot 5^{2x-4} - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$$

Agrupem termes de manera convenient:

$$5 \cdot \left(5^{(5x-2)}\right)^2 - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$$

Obtenim així una equació de segon grau amb incògnita 5^{x-2}. Anomenem $z = 5^{x-2}$ i intentem resoldre l'equació:

$$5z^2 - 2z - 3 = 0$$

Apliquem la fórmula per a les equacions de segon grau i obtenim

$$z = 1 \text{ i } z = -\frac{3}{5}$$

Comprovem si les solucions obtingudes compleixen l'equació original:

$z = -\frac{3}{5}$ no és possible perquè s'hauria de complir que $z = 5^{x-2} = -\frac{3}{5}$, que no possible perquè $5x - 2$ no pot ser negatiu.

$z = 1$ proporciona solució:

$$z = 5^{x-2} = 1 = 5^0 \Rightarrow 5^{x-2} = 5^0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

De la mateixa manera, també es poden resoldre sistemes d'equacions exponencials convertint-los en sistemes d'equacions lineals en manipular convenientment les potències. Aquest n'és un exemple:

Exemple. Resolució de sistema d'equacions exponencials.

$$\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases}$$

Reescrivim la primera equació de manera convenient:

$$5^x = 5^y \cdot 5^4 \Rightarrow 5^{x-y} = 5^4$$

Reescrivim també la segona equació de manera convenient:

$$2^x \cdot 2^y = 2^8 \Rightarrow 2^{x+y} = 2^8$$

El sistema original queda reduït a un sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

En resoldre aquest sistema, per exemple, per reducció, s'obtenim la solució

$$(x, y) = (6, 2)$$

Finalment, comprovem que la solució obtinguda satisfà el sistema original.

Equació logarítmica. És una equació on apareixen funcions logarítmiques.

Resoldre aquest tipus d'equacions no és en general fàcil, i no hi ha cap fórmula general de resolució. El que convé en aquests casos és agrupar al màxim i convenientment els logaritmes que ho permetin per a intentar substituir l'equació logarítmica per una equació lineal o quadràtica. Per a això, és fonamental identificar i aplicar les propietats dels logaritmes. Vegem-ho amb la resolució d'alguns exemples.

Un exemple a resoldre podria ser l'equació següent:

Què és una equació logarítmica?
És una equació amb funcions logarítmiques. Per a resoldre una equació logarítmica, convé agrupar al màxim els logaritmes per a poder substituir l'equació logarítmica per una equació lineal o quadràtica. De la mateixa manera, es poden resoldre sistemes d'equacions logarítmiques.

Exemple. Resolució d'equació logarítmica.

$$2\log(x) - \log(x-16) = 2$$

Reescrivim el terme de l'esquerre, atès $2\log(x) = \log\left(x^2\right)$:

$$\log\left(x^2\right) - \log(x-16) = 2$$

Apliquem la propietat del logaritme del quocient, $\log\left(x^2\right) - \log(x-16) = \log\left(\frac{x^2}{x-16}\right)$:

$$\log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) = 2$$

Reescrivim el terme de la dreta, atès $2 = \log(100)$:

$$\log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) = \log(100)$$

d'on resulta

$$\frac{x^2}{x-16} = 100$$

Ordenem els termes:

$$x^2 - 100x + 1600 = 0$$

i es tracta de resoldre una equació de segon grau.

Apliquem la fórmula de resolució per a les equacions de segon grau i obtenim

$$x = 20 \text{ i } x = 80$$

Per acabar, comprovem si aquestes també verifiquen l'equació logarítmica inicial. En aquest cas, en substituir els valors en l'equació original, comprovem que ambdues són solució.

També es poden resoldre sistemes d'equacions logarítmiques procedint de manera similar, és a dir, intentant sempre agrupar els logaritmes que ho permetin per a convertir les equacions inicials en equacions lineals o quadràtiques. Un exemple a resoldre de sistema d'equacions logarítmiques podria ser el següent:ple a resoldre de sistema d'equacions logarítmiques, podria ser el següent:

Exemple. Resolució de sistema d'quacions logarítmiques.

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ \log(x) + \log(y) = 3 \end{cases}$$

La primera equació ja és lineal, i per tant ens centrem a intentar transformar la segona en una equació lineal.

Reescrivim la segona equació tenint en compte el logaritme d'un producte: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ i que $\log(1000) = 3$:

$$\log(x \cdot y) = \log(1000)$$

Aquesta equació es redueix $x \cdot y = 1000$, i per tant, es tracta de resoldre el sistema

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ x \cdot y = 1000 \end{cases}$$

En resoldre aquest sistema d'equacions, obtenim dues alternatives:

$$(x, y) = (40, 25) \text{ o bé } (x, y) = (25, 40)$$

Finalment, comprovem les possibles solucions obtingudes en el sistema original.

Resum

Funcions exponencials i logarítmiques

Funcions exponencials

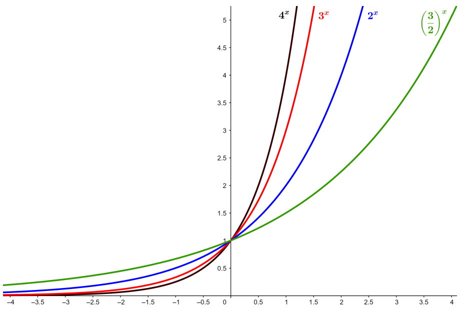
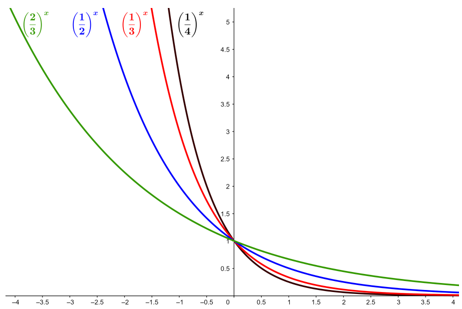
Definició. Una funció exponencial de base $a > 0$ és la que es defineix a partir de les potències dels nombres.

Expressió. $y = a^x$, amb $a > 0$.
Una de les funcions exponencials més importants és la de base $e \cong 2.718281828459045 23$.
La seva expressió és $y = e^x$.

Propietats.

- Domini: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Imatge: $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$
- No tenen ni màxims ni mínims.
- Passen pel punt $(0, 1)$.

Gràfiques.

<table>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$a < 1$</td></tr>
<tr><td>Funció creixent
Quan x tendeix a $-\infty$, la funció tendeix a 0.
Quan x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a $+\infty$.
</td><td>Funció decreixent
Quan x tendeix a $-\infty$, la funció tendeix a $+\infty$.
Quan x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a 0.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Les gràfiques de a^x i $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$, per a $a > 0$ qualsevol, són simètriques respecte de l'eix Y.</td></tr>
</table>

Logaritme

Definició. El logaritme de base a, amb $a > 0$, d'un nombre real x és

$$\log_a(x) = y \text{ si } x = a^y$$

Propietats.

1) $\log_a(a) = 1$ i $\log_a(1) = 0$.

2) El logaritme del producte és igual a la suma de logaritmes:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

3) El logaritme d'una potència és igual al producte de l'exponent pel logaritme de la base:

$$\log_a\left(x^y\right) = y \cdot \log_a(x)$$

4) El logaritme d'un quocient és el logaritme del numerador menys el logaritme del denominador:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

5) És possible relacionar dos logaritmes de diferents bases, a i b, amb aquesta fórmula:

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Funcions logarítmiques

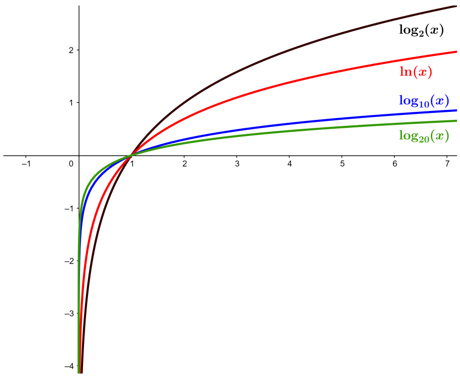
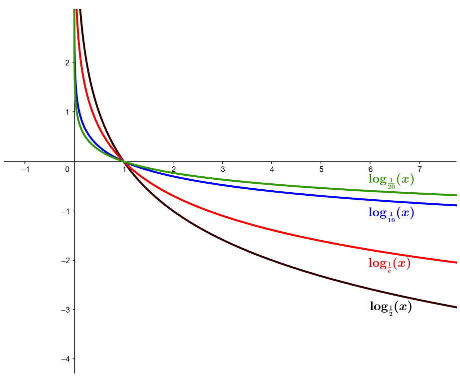
Definició. La funció logarítmica de base a, amb $a > 0$ i $a \neq 1$, és la funció inversa de la funció exponencial de base a.

Expressió. $y = \log_a(x)$ si $x = a^y$.
Una de les funcions logarítmiques més importants és la de base $e \cong 2.71828182845904523$.
La seva expressió és $y = \ln(x)$.
Quan la base de la funció logaritme és el nombre 10, s'expressa simplement $y = \log(x)$.

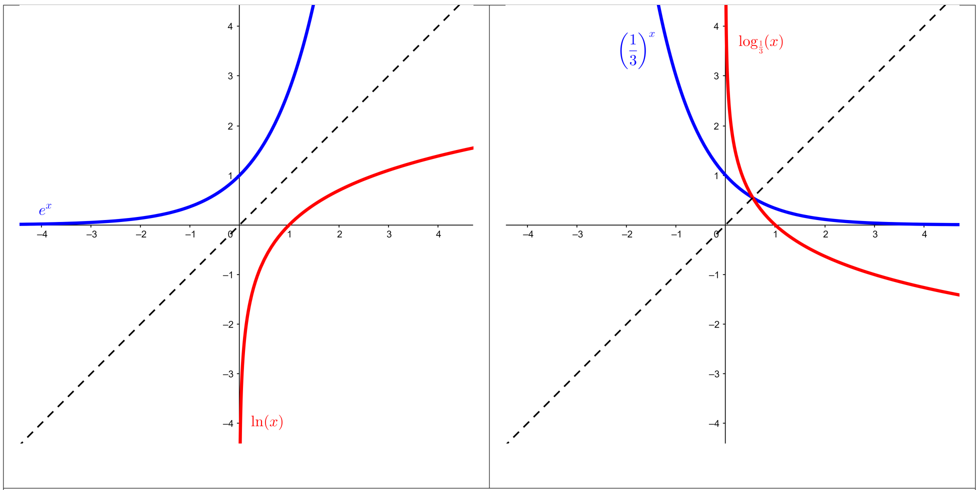
Propietats

- Domini: $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$
- Imatge: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- No tenen ni màxims ni mínims.
- Passen pel punt $(1, 0)$.

Gràfiques

<table>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$a < 1$</td></tr>
<tr><td>Funció creixent
Quan x tendeix a 0, la funció tendeix a $-\infty$.
Quan x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a $+\infty$.

</td><td>Funció decreixent
Quan x tendeix a 0, la funció tendeix a $+\infty$.
Quan x tendeix a $+\infty$, la funció tendeix a $-\infty$.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Les gràfiques de $\log_a$ i $\log_{\frac{1}{a}}$, per a $a > 0$ qualsevol, són simètriques respecte de l'eix X.</td></tr>
</table>

Gràfiques de les funcions exponencials i logarítmiques



Les gràfiques de les funcions exponencials i logarítmiques de la mateixa base són simètriques respecte de la recta $y = x$.

Equacions exponencials i logarítmiques

Equació exponencial. És una equació que inclou funcions exponencials. Per a resoldre una equació exponencial, s'han d'agrupar al màxim i de manera convenient les potències per tal de substituir l'equació exponencial per una equació lineal o quadràtica.

De la mateixa manera, es poden resoldre sistemes d'equacions exponencials convertint-los en sistemes d'equacions lineals. Això es fa manipulant convenientment les potències.

Exemple d'equació	*Exemple de sistema*
$7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$ $7^x + 7 \cdot 7^x + 7^2 \cdot 7^x = 2793$ $7^x \cdot \left(1 + 7 + 7^2\right) = 2793$ $7^x \cdot 57 = 2793$ $7^x = \frac{2793}{57} = 49$ $7^x = 7^2$ d'on resulta $x = 2$ que també verifica l'equació original.	$\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases}$ $5^x = 5^y \cdot 625 \Rightarrow 5^x = 5^y \cdot 5^4 \Rightarrow 5^{x-y} = 5^4$ $2^x \cdot 2^y = 256 \Rightarrow 2^x \cdot 2^y = 2^8 \Rightarrow 2^{x+y} = 2^8$ per tant, es tracta de resoldre $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$ d'on resulten $x = 6$ i $y = 2$ que també verifiquen el sistema original.

Equació logarítmica. És una equació amb funcions logarítmiques. Per a resoldre una equació logarítmica, s'han d'agrupar al màxim i de manera convenient els logaritmes per tal de substituir l'equació logarítmica per una equació lineal o quadràtica.

De la mateixa manera, es poden resoldre sistemes d'equacions logarítmiques convertint-los en sistemes d'equacions lineals. Això es fa manipulant convenientment els logaritmes.

Exemple d'equació	*Exemple de sistema*
$$2\log(x) - \log(x-16) = 2$$ $$\log\left(x^2\right) - \log(x-16) = 2$$ $$\log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) = \log(100)$$ $$\frac{x^2}{x-16} = 100$$ $$x^2 - 100x + 1600 = 0$$ d'on resulten $$x = 20 \text{ i } x = 80$$ que també verifiquen l'equació original.	$$\begin{cases} x + y = 65 \\ \log(x) + \log(y) = 3 \end{cases}$$ $\log(x) + \log(y) = 3 \Rightarrow \log(x \cdot y) = 3 = \log(1000)$ per tant, es tracta de resoldre $$\begin{cases} x + y = 65 \\ x \cdot y = 1000 \end{cases}$$ d'on resulten $$x = 40 \text{ i } y = 25 \text{ o bé } x = 25 \text{ i } y = 40$$ que també verifiquen el sistema original.

Exercicis resolts

1. **Trobeu una funció exponencial del tipus $f(x) = a^x$ que compleixi $f(6) = 64$.**

Solució:
S'ha de complir $f(6) = a^6 = 64$. Sabem $2^6 = 64$. Aleshores, una possibilitat és considerar $a = 2$. Per tant, una funció exponencial que compleix la condició demanada és $f(x) = 2^x$.

2. **Determineu quines d'aquestes funcions són creixents i quines decreixents, i ordeneu-les de major creixement a major decreixement. Justifiqueu la resposta.**

$$f(x) = 11^x, g(x) = 13^x, h(x) = 0.1^x, t(x) = 0.3^x$$

Solució:

$f(x) = 11^x$ i $g(x) = 13^x$ són creixents, perquè són funcions exponencials i la seva base és major que 1.

$h(x) = 0.1^x$ i $t(x) = 0.3^x$ són decreixents, perquè són funcions exponencials i la seva base és menor que 1.

Per a ordenar aquestes funcions exponencials de major creixement a major decreixement, cal tenir en compte que si la base és més gran que 1, el creixement de la funció és més gran com més gran és la base. En canvi, si la base és menor que 1, el decreixement de la funció és més gran com més petita és la base. Per tant, l'ordre ha de ser aquest:

$$g(x) = 13^x, f(x) = 11^x, t(x) = 0.3^x \text{ i } h(x) = 0.1^x$$

3. **Calculeu aquests logaritmes sense usar la calculadora:**

(a) $\log_2(32)$

(b) $\log_9(81)$

(c) $\log_5\left(5^3\right)$

(d) $\log_3\left(\sqrt{243}\right)$

Solució:
Per a trobar el valor d'aquests logaritmes, cal fer tres coses.
En primer lloc, conèixer el valor d'algunes potències bàsiques, per exemple:

$$32 = 2^5, 81 = 9^2 \text{ i } 243 = 3^5$$

En segon lloc, aplicar la suma de logaritmes per al logaritme d'un producte, en particular

$$\log_a(x^n) = \log_a(\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{n } vegades}) = \underbrace{\log_a(x) + \ldots \log_a(x)}_{\text{n } vegades} = n \cdot \log_a(x)$$

Finalment, recordar que $\log_a(a) = 1$.
D'acord amb això, es té:

(a) $\log_2(32) = \log_2(2^5) = 5 \cdot \log_2(2) = 5 \cdot 1 = 5$

(b) $\log_9(81) = \log_9(9^2) = 2 \cdot \log_9(9) = 2 \cdot 1 = 2$

(c) $\log_5(5^3) = 3 \cdot \log_5(5) = 3 \cdot 1 = 3$

(d) $\log_3\left(\sqrt{243}\right) = \log_3\left(243^{\frac{1}{2}}\right) = \log_3\left(3^5\right)^{\frac{1}{2}} = \log_3\left(3^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{5}{2} \cdot \log_3(3) = \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$

4. **Trobeu una funció logarítmica del tipus $f(x) = \log_a(x)$ $\log_a(x)$ que compleixi $f(125) = 3$.**

Solució:
S'ha de complir $f(125) = \log_a(125) = \log_a\left(5^3\right) = 3$. Per la definició i propietats de la funció logaritme, resulta

$$3 = \log_a\left(5^3\right) = 3 \cdot \log_a(5) \Rightarrow 1 = \log_a(5)$$

que només és possible si $a = 5$. Per tant, la funció logarítmica a considerar és $f(x) = \log_5(x)$.

5. **Determineu quines d'aquestes funcions són creixents i quines decreixents, i ordeneu-les de major creixement a major decreixement. Justifiqueu la resposta.**

$$f(x) = \log_3(x), g(x) = \log_{0.2}(x), h(x) = \log_{13}(x), t(x) = \log_{0.1}(x)$$

Solució:

$f(x) = \log_3(x)$ i $h(x) = \log_{13}(x)$ són creixents, perquè són funcions logarítmiques i la seva la seva base és major que 1.

$g(x) = \log_{0.2}(x)$ i $t(x) = \log_{0.1}(x)$ són decreixents, perquè són funcions logarítmiques i la seva base és menor que 1.

Per a ordenar aquestes funcions logarítmiques de major creixement a major decreixement, cal tenir en compte que si la base és més gran que 1, el creixement de la funció és més gran com més petita és la base. En canvi, si la base és menor que 1, el decreixement de la funció és més gran com més gran és la base. Per tant, l'ordre ha de ser aquest:

$$f(x) = \log_3(x), h(x) = \log_{13}(x), t(x) = \log_{0.1}(x) \text{ i } g(x) = \log_{0.2}(x)$$

6. **Trobeu el valor de x que compleix aquestes igualtats:**

(a) $\log_4(x) = 4$

(b) $\log_x(27) = x$

(c) $\log_{\frac{1}{2}}(4) = x$

(d) $\log_3\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{3}{2}$

Solució:
Per a resoldre aquestes igualtats, cal aplicar la definició del logaritme, és a dir,

$$y = \log_a(x) \text{ si } x = a^y$$

D'acord amb aquesta definició, tenim:

(a) $4 = \log_4(x)$ si $x = 4^4 = 256 \Rightarrow x = 256$

(b) $\log_x(27) = x$ si $27 = x^x \Rightarrow x = 3$

(c) $\log_{\frac{1}{2}}(4) = x$ si $4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2^x} \Rightarrow x = -2$, ja que $4 = 2^2$

(d) $\log_3\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{3}{2}$ si$\sqrt{x} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} \Rightarrow x = 3^3 = 27$

7. **Resoleu aquestes equacions:**

- $3^{2x} - 5 \cdot 3^x = 36$
- $2\log(10x) - \log(12 - 4x) = 2$

Solució:

$3^{2x} - 5 \cdot 3^x = 36$	$\log\left(100x^2\right) - \log\left(12 - 4x\right) = \log\left(10^2\right)$
Per la propietat d'una potència d'una potència, reescrivim $(3^x)^2 - 5 \cdot 3^x = 36$ Agrupem de manera convenient: $(3^x)^2 - 5 \cdot 3^x - 36 = 0$ Prenem $t = 3^x$ i substituim en l'equació: $t^2 - 5t - 36 = 0$ Es tracta d'una equació de segon grau. Podem resoldre-la aplicant la fórmula, i obtenim les solucions $t = -4,\ t = 9$ Desfem el canvi per a trobar els valors de x: $3^x = t = -4 = -2^2$ no és possible per ser -2^2 un valor negatiu. $3^x = t = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2$. Substituïm $x = 2$ en l'equació original i comprovem que sí n'és solució: $3^{2 \cdot 2} - 5 \cdot 3^2 = 81 - 45 = 36$	Per la propietat del quocient de logaritmes, $\log\left(\dfrac{100x^2}{12 - 4x}\right) = \log(10^2)$ Per tant, $\dfrac{100x^2}{12 - 4x} = 100$ Simplifiquem: $\dfrac{x^2}{12 - 4x} = 1$ Operem: $x^2 = 12 - 4x$ I ordenem termes: $x^2 + 4x - 12 = 0$ Resolem aplicant la fórmula per equacions de segon grau i obtenim les solucions $x = -6$ i $x = 2$ Finalment, substituïm els valors trobats en l'equació original i comprovem que ambdós en són solució.

8. **Resoleu aquestes equacions:**

- $\ln(x) + \ln(x - 1) = 0$
- $\log(x) - \log\left(x^2\right) = \log(7)$

Solució:

$\ln(x) + \ln(x-1) = 0$	$\log(x) - \log\left(x^2\right) = \log(7)$
Apliquem la propietat del producte de logaritmes: $$\ln\left(x \cdot (x-1)\right) = 0$$ Apliquem l'exponencial i tenim en compte que $e^0 = 1$: $$x \cdot (x-1) = 1$$ Operem: $$x^2 - x - 1 = 0$$ Resolem l'equació de segon gau i obtenim $$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$ Finalment, comprovem si les solucions obtingudes satisfan l'equació original.	Apliquem la propietat del quocient de potències: $$\log\left(\frac{x}{x^2}\right) = \log(7)$$ Per tant, es tracta de resoldre $$\frac{x}{x^2} = 7$$ Ordenem termes: $$7x^2 - x = 0$$ I operem: $$x \cdot (7x - 1) = 0$$ d'on resulta $$x = 0, x = \frac{1}{7}$$ Finalment, comprovem les possibles solucions en l'equació original: $x = 0$ no és possible; en canvi, si que n'és solució el valor $x = \frac{1}{7}$

Exercicis per a practicar amb les solucions

9. **Trobeu les funcions inverses de** $f(x) = e^{3x}$ **i** $g(x) = \ln(4x+3)$**.**

10. **Resoleu les equacions següents:**

(a) $2^{x-1} = 2^6$

(b) $5^{x+3} = \dfrac{1}{5}$

(c) $3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} = -27$

(d) $\log_5(4x) = 2$ $x = \frac{25}{4}$

(e) $\log_9(x+1) + \log_9(9 \cdot (x+1)) = 2$

(f) $3\log_2(x) - 2\log_4(x) = 2$

11. **Una substància es desintegra seguint la funció**

$$D(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{5}}$$

on D **és la quantitat (en grams) de substància que hi ha al cap de** t **anys. Quina quantitat de substància hi haurà d'aquí a 15 anys?**

12. **Per a predir el creixement de la població d'una ciutat, s'utilitza la funció**

$$P(t) = P_0 \cdot e^{0.03t}$$

on P_0 **representa la població inicial i** t **representa el temps (en anys). Si la població actual de la ciutat és de 50.000 habitants, quant de temps (en anys) haurà de passar per tal que la població es dupliqui?**

Solucions:

9. $f^{-1}(x) = \ln\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$

$g^{-1}(x) = \dfrac{e^x - 3}{4}$

10. (a) $x = 5$
   (b) $x = -4$
   (c) $x = 1, x = 2$
   (d) $x = 2$
   (e) $x = 2$

11. 12.5 grams.

12. Prop de 23.1 anys.