Iniciació a les matemàtiques per a l'enginyeria

PID_00270080

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat
Oberta
de Catalunya

10. Continuïtat de funcions

Índex

10.1. Límits de funcions 255
10.1.1. Noció intuïtiva de límit 255
10.1.2. Concepte i definició 257
10.1.3. Operacions amb límits 258
10.1.4. Límits laterals 259
10.1.5. Límits a l'infinit 261
10.1.6. Regles bàsiques de càlcul de límits 263
10.1.7. Indeterminacions 264
10.2. Continuïtats 269
10.2.1. Funció contínua en un punt 269
10.2.2. Discontinuïtats d'una funció 270
10.2.3. Asímptotes 272

10.1. Límits de funcions

10.1.1. Noció intuïtiva de límit

El límit funcional és un concepte relacionat amb la tendència dels valors d'una funció a mesura que varien els valors de la variable i tendeixen a un valor determinat. El límit d'una funció en un valor determinat de x és igual a un nombre al qual tendeix la funció quan la variable tendeix a aquest valor, aproximant-se cada cop més al nombre objectiu però no arribant mai a prendre aquest valor.

El **límit d'una funció** en un valor x és igual a un nombre al qual tendeix la funció quan la variable tendeix a aquest valor (sense arribar mai a ser-ho). Si el límit d'una funció $f(x)$ en un valor a és igual a b, s'escriu d'aquesta manera:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

També es diu que "*la funció $f(x)$ té límit b quan la x tendeix a a*". Per exemple, si $f(x)$ és una funció que compleix que, quan la x tendeix a 3, la funció tendeix a 1, aquest fet s'escriurà així:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 1$$

Amb la notació anterior, es pot entendre que $x \to 3$ és una forma de representar la frase "*x tendeix a 3*", que vol dir que el nombre x s'aproxima infinitament a 3 però sense arribar mai a prendre aquest valor.

Així, doncs, el límit d'una funció en un valor a dona una idea de la tendència de la funció quan el valor de la x tendeix a aquest valor. Per a estudiar el límit d'una funció en un valor, es pot crear una taula amb diferents valors de la funció el component de la qual x tendeix al valor a (però mai és a).

Exemple. Noció intuïtiva de límit.

Si la funció és $f(x) = 2x + 1$, i es vol calcular

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

podem avaluar uns quants punts que s'aproximin a 1 de la manera següent:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \longrightarrow & f(0) = 1 \\ 0.1 & \longrightarrow & f(0.1) = 1.2 \\ 0.5 & \longrightarrow & f(0.5) = 2 \\ 0.7 & \longrightarrow & f(0.7) = 2.4 \\ 0.9 & \longrightarrow & f(0.9) = 2.8 \\ 0.99 & \longrightarrow & f(0.99) = 2.98 \end{array}$$

Sembla evident que com més a prop d'1 és la x més a prop de 3 és $f(x)$. Així, doncs, podem deduir

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3.$$

Exemple. Noció intuïtiva de límit.

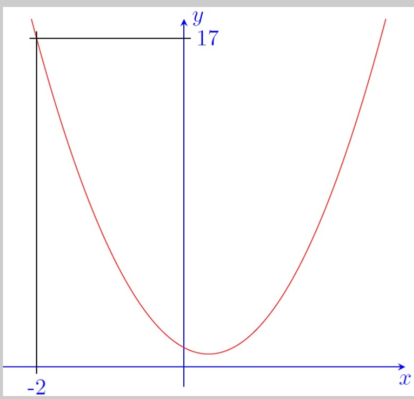
Si $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, podem intentar calcular el límit d'aquesta funció quan x tendeix a -2. Tornem a avaluar la funció en uns quants punts aproximant-se a -2 igual que abans:

$$\begin{array}{rcl} -3 & \longrightarrow & f(-3) = 34 \\ -2.9 & \longrightarrow & f(-2.9) = 32.03 \\ -2.5 & \longrightarrow & f(-2.5) = 24.75 \\ -2.3 & \longrightarrow & f(-2.3) = 21.47 \\ -2.1 & \longrightarrow & f(-2.1) = 18.43 \\ -2.01 & \longrightarrow & f(-2.01) = 17.1403 \\ -2.001 & \longrightarrow & f(-2.001) = 17.014003 \end{array}$$

Amb la informació anterior, és fàcil deduir la seqüència de valors de la funció que s'aproxima a 17. Per tant,

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 17$$

cosa que es pot observar a la gràfica



10.1.2. Concepte i definició

A partir de la noció intuïtiva que podem deduir dels exemples anteriors, donem la definició formal del concepte de límit d'una funció:

El **límit de la funció** $f(x)$ quan x tendeix a al valor a és b:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

si es compleix que, donat qualsevol nombre real $\varepsilon > 0$, hi ha un nombre real $\delta > 0$ de manera que si $0 < |x - a| < \delta$ es compleix $|f(x) - b| < \varepsilon$.

En altres paraules, diem que **una funció** $f(x)$ **té límit** b **quan** x **tendeix a** a si, i solament si, donat un interval qualsevol centrat en b, hi ha un interval de centre $a$de manera que tots els punts d'aquest interval, excepte el punt a, tenen la seva imatge en l'interval de centre b anterior.

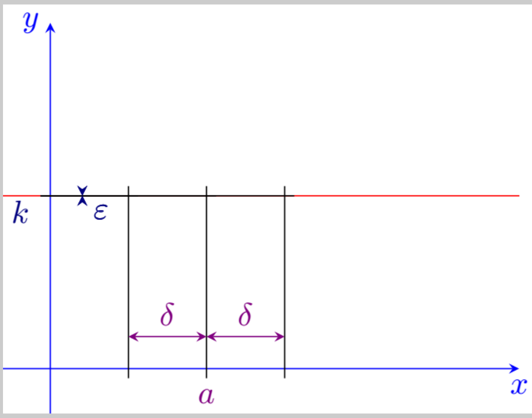
En general, no es recorre a la definició de límit per buscar el límit d'una funció en un punt, sinó que s'utilitzen límits ja coneguts, unes regles senzilles de càlcul amb límits i l'ús de taules de valors amb successions el límit de les quals sigui el valor en què es vol buscar el límit.

Abans de veure totes aquestes tècniques, vegem exemples senzills que expliquen aquesta definició i l'enllacen amb la noció intuïtiva de límit funcional que hem discutit abans.

Exemple. Límit d'una funció constant.
Donada la funció constant $f(x) = k$, per k un nombre qualsevol, es compleix

$$\lim_{x\to a} f(x) = k$$

per a qualsevol valor a.



Prenem un interval centrat en k tan petit com vulguem (en la imatge agafem $\varepsilon > 0$ tan petita que gairebé sembla 0). Considerem qualsevol interval centrat en a i anomenem-lo $(a - \delta, a + \delta)$ per $\delta > 0$ qualsevol. La imatge de cada punt d'aquest interval per la funció valdrà exactament k (ja que la funció és constant), i per tant cau dins l'interval $(k - \varepsilon, k + \varepsilon)$.

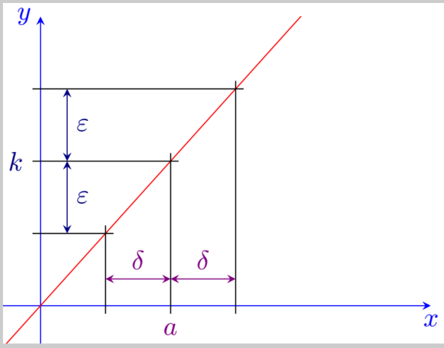
Exemple. Límit de la funció identitat.

Considerem ara la funció identitat $f(x) = x$. Per a qualsevol valor a es compleix

$$\lim_{x\to a} f(x) = a.$$

Agafem qualsevol valor $\varepsilon > 0$ i considerem l'interval $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, que no es més que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ perquè $f(a) = a$. Ara hem de trobar un valor $\delta > 0$ que depengui només de la ε (però no del valor a) tal que la imatge de l'interval $(a - \delta, a + \delta)$ estigui dins de l'interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Això és, considerant que avaluar un interval no és més que evaluar tots els punts que hi pertanyen,

$$f((a - \delta, a + \delta)) \subseteq (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$



En el nostre cas de la funció identitat $f(x) = x$, no és més que trobar un $\delta > 0$ tal que

$$(a - \delta, a + \delta) \subseteq (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Això es compleix prenent qualsevol $\delta \leq \varepsilon$.

10.1.3. Operacions amb límits

El càlcul de límits respecta habitualment les operacions bàsiques: si se sumen, resten, multipliquen, divideixen, i es calcula la potència del límit de dues funcions, dona el límit d'operar aquestes dues funcions. Això és:

Suma i resta El límit de la suma (o resta) de dues funcions en un punt és igual a la suma (o resta) de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir,

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

Producte El límit del producte de dues funcions en un punt és igual al producte de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir,

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Divisió El límit del quocient de dues funcions en un punt és igual al quocient de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió sempre que el denominador no sigui 0, és a dir,

Si observem les dues primeres propietats mencionades, podem veure que el càlcul del límit d'un polinomi en qualsevol número no és mes que el valor que pren el polinomi en aquest número particular. Això és degut al fet que un polinomi no conté més que sumes, restes i productes, el límit dels quals no és més que la suma, resta i producte de límits. Per tant, només cal calcular el límit de x, que coincideix, tal com hem vist en els exemples anteriors, amb el nombre al qual tendeix la x, i operar-lo amb les operacions del polinomi.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

Exponencial El límit de l'exponencial d'una funció per una altra en un punt és igual a l'exponencial de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió sempre que ambdues funcions no prenguin el valor 0 alhora, és a dir,

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}f(x)^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

10.1.4. Límits laterals

El **límit lateral esquerre** d'una funció $f(x)$en un punt a és el límit de la funció quan es considera que la variable només pot prendre valors més petits que el punt, això és, el valor que pren la funció quan ens aproximem al punt objectiu des de punts per l'esquerra d'aquest. Aquest límit es denota per

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=b$$

El **límit lateral dret** d'una funció $f(x)$ en un punt a és el límit de la funció quan es considera que la variable només pot prendre valors més grans que el punt, això és, el valor que pren la funció quan ens aproximem al punt objectiu des de punts per la dreta d'aquest. Aquest límit es denota per

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=b$$

En particular, podem veure que si el límit d'una funció en un cert punt existeix, coincidirà amb els límits laterals quan aquests tinguin sentit. El fet recíproc també és cert: si els dos límits laterals existeixen i coincideixen amb el mateix valor, el límit de la funció també existirà i prendrà el mateix valor. Tanmateix, si els dos límits laterals prenen valors diferents, el límit de la funció en aquell punt no existeix (encara que la funció sí que sigui definida en aquell punt).

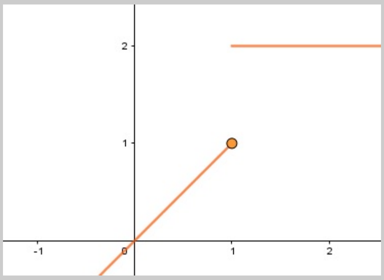
Matemàticament, això es pot escriure

$$\boxed{\lim_{x\to a}f(x)\text{ existeix i val }b\;\Leftrightarrow\;\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=b}$$

Exemple. Límits laterals.

Considerem la funció definida a trossos

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Observem que el límit per l'esquerra en 1 dona

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1,$$

mentre que el límit per la dreta val

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2.$$

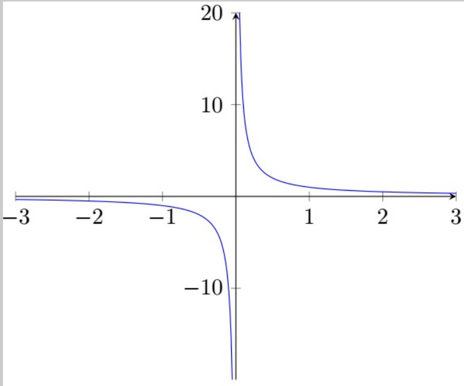
Com els dos límits no coincideixen, podem afirmar que el límit de la funció $f(x)$ quan $x \to 1$ no existeix, tot i que la funció en aquest punt és definida i pren valor $f(1) = 1$.

En canvi, si calculem els límits laterals quan $x \to 1.5$, podem veure que els dos existeixen i valen 2, per tant $\lim\limits_{x \to 1.5} f(x) = 2$ i coincideix amb el valor $f(1.5)$.

Exemple. Límits laterals divergents.
Considerem ara la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$ i estudiem-ne els seus límits laterals quan $x \to 0$.

Per a calcular el límit lateral per la dreta, hem de considerar valors positius de x que aproximin 0:

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longrightarrow & f(1) = 1 \\ 0.1 & \longrightarrow & f(0.1) = 10 \\ 0.01 & \longrightarrow & f(0.01) = 100 \\ 0.001 & \longrightarrow & f(0.001) = 1000 \\ 0.0001 & \longrightarrow & f(0.0001) = 10000 \end{array}$$



És fàcil adonar-se'n que, com més ens aproximem al valor 0 per la dreta, més gran és el valor que pren la funció, però aquesta no s'aproxima pas a cap nombre en concret, sinó que creix infinitament. Per aquest motiu, direm que el límit lateral a 0 per la dreta **divergeix**:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

De manera similar, es pot comprovar com el límit lateral a 0 per l'esquerra també divergeix:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

Només amb un d'aquests dos fets ja podem afirmar que el límit de la funció en 0 no existeix. A més, al contrari que en l'exemple anterior, la funció no existeix en aquest punt.

10.1.5. Límits a l'infinit

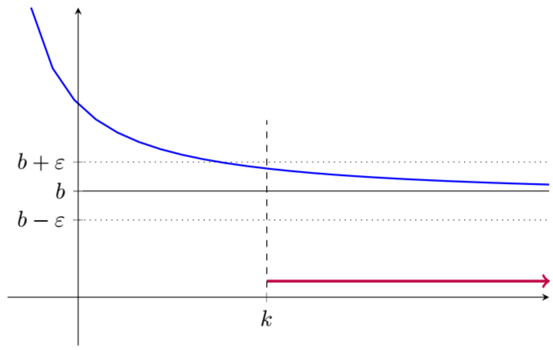
Es diu que el **límit d'una funció** $f(x)$ **quan** x **tendeix a** $+\infty$ val b si, per a qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix un cert nombre k tal que, per a $x > k$, $|f(x) - b| < \varepsilon$. De manera similar, es diu que el **límit d'una funció** $f(x)$ **quan** x **tendeix a** $-\infty$ val b si, per a qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix un cert nombre k tal que, per a $x < k$, $|f(x) - b| < \varepsilon$.

El concepte d'infinit no es comença a fer servir assíduament fins al segle xv per a designar allò que és més gran que qualsevol altra cosa imaginable. És llavors que es comença a usar com a símbol una corba denominada lemniscata ∞.

Aquests límits es denoten respectivament

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Intuïtivament, que el punt b sigui el límit de la funció en $\pm\infty$ vol dir que la funció s'apropa més a b com més gran sigui el punt x en què l'avaluem. En particular, tots els nombres més grans que un cert nombre k són molt a prop de b (en l'interval de radi ε), tal com es pot veure en la gràfica:



Per a poder fer-nos una idea de quin és el valor d'aquest límit, podem avaluar la funció en nombres cada cop més grans de manera similar a com havíem fet abans.

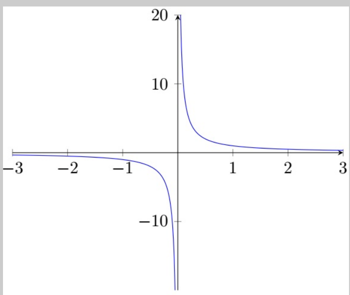
Exemple. Càlcul de límits a l'infinit.
Considerem de nou la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$ i estudiem els seus límits en l'infinit.
Per a calcular $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, avaluem

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longrightarrow & f(1) = 1 \\ 10 & \longrightarrow & f(10) = 0.1 \\ 100 & \longrightarrow & f(100) = 0.01 \\ 1000 & \longrightarrow & f(1000) = 0.001 \\ 10000 & \longrightarrow & f(10000) = 0.0001 \\ 100000 & \longrightarrow & f(100000) = 0.00001 \end{array}$$

d'on podem deduir

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Per a demostrar-ho, hem de buscar el valor k (en funció de ε) tal que, per a $x > k$, tenim $|f(x) - 0| < \varepsilon$. En particular, si agafem $k \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$, la condició se satisfà.



De manera similar podem comprovar com el límit en $-\infty$ també satisfà:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Exemple. Càlcul del límit en l'infinit d'un polinomi.

Calcular el límit d'un polinomi a l'infinit és un tasca senzilla si analitzem cadascun dels monomis que el conformen per separat.

A mesura que x pren valors més grans, el terme que creix a més velocitat serà sempre aquell que té l'exponent més gran, i per tant el límit del polinomi quan $x \to +\infty$ serà ∞ amb el mateix signe que el coeficient del monomi de grau superior al polinomi (**terme dominant**).

Per exemple, $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 - x - 7 = +\infty$, mentre que $\lim_{x\to+\infty} -x^5 + 2x^2 + 7 = -\infty$, ja que els termes de grau inferior creixen cap a ∞ a velocitat més lenta que el terme dominant, i per tant, quan x és prou gran, restar-los no fa variar pràcticament el valor del polinomi.

Per altra banda, el càlcul del límit d'un polinomi quan $x \to -\infty$ serà ∞, però per a saber el signe corresponent hem de separar dos casos:

- Si el grau del terme dominant és **parell**, el signe serà el mateix que en el del coeficient del del monomi de major grau.
- Si el grau del terme dominant és **senar**, el signe serà oposat al del coeficient del monomi de major grau, ja que estarem avaluant nombres negatius i per tant el signe haurà de canviar.

Amb els exemples anteriors, $\lim_{x\to-\infty} 3x^2 - x - 7 = -\infty$, i $\lim_{x\to-\infty} -x^5 + 2x^2 + 7 = +\infty$.

10.1.6. Regles bàsiques de càlcul de límits

A l'hora de trobar límits hi ha algunes regles senzilles que es poden deduir de la definició de límit i que és útil tenir presents per a agilitzar el càlcul:

$\boxed{k \cdot \infty = \infty, k \neq 0}$ En un producte, si un factor tendeix a infinit i l'altre tendeix a un e 0, el producte tendeix a infinit i té un signe que resulta del signe de l'infinit del primer factor multiplicat pel signe del nombre al qual tendeix el segon factor.

Exemple. Càlcul de límits de tipus $k \cdot \infty = \infty, k \neq 0$.

- $\lim_{x\to+\infty} (2x^2 + 1) \cdot \left(4 - \frac{1}{x}\right) = [+\infty \cdot 4] = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} 5x \cdot \left(4 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x}\right) = [-\infty \cdot 4] = -\infty$
- $\lim_{x\to0^+} (-3x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x} = [-3 \cdot (+\infty)] = -\infty$
- $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^5} \cdot \left(-3 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x}\right) = [-\infty \cdot (-3)] = +\infty$

$\boxed{+\infty + \infty = +\infty, k + \infty = +\infty,\ -\infty - \infty = -\infty, k - \infty = -\infty}$ En una suma, si un o més sumands tendeixen a infinit amb el mateix signe, la suma tendeix a infinit amb el signe corresponent.

Exemple. Càlcul de límits de tipus $k + \infty = \infty$, $+\infty + \infty = +\infty$.

- $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} + 2x^2 + 7 \right) = \left[-\infty + 7 \right] = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} + 7 + \frac{2}{x} \right) = \left[+\infty + 7 \right] = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} + x) = \left[+\infty + \infty \right] = +\infty$

$\boxed{\frac{k}{\infty} = 0}$ En un quocient, si el denominador tendeix a infinit i el numerador tendeix cap a una constant k, el quocient tendeix a 0.

Exemple. Càlcul de límits de tipus $\frac{k}{\infty} = 0$.

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{6}{x^4 - 3} = \left[\frac{6}{-} + \infty \right] = 0^+$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{5 + 2x}{4 - \frac{6}{x}} = \left[\frac{5}{+\infty} \right] = 0^+$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{4 - \frac{6}{x}}{2x + 4} = \left[\frac{4}{-\infty} \right] = 0^-$
- $\lim_{x \to 0} \frac{3x^4 + 2}{\frac{6}{x^2+8}} = \left[\frac{2}{+\infty} \right] = 0^+$

$\boxed{\frac{k}{0} = \infty, k \neq 0}$ En un quocient, si el numerador tendeix a una constant diferent de 0 i el denominador tendeix a 0, el quocient tendeix a infinit amb un signe que resulta del signe per a la direcció que s'aproxima el 0 del denominador multiplicat pel signe del nombre al qual tendeix el numerador.

Exemple. Càlcul de límits de tipus $\frac{k}{0} = \infty, k \neq 0$.

- $\lim_{x \to 4^+} \frac{x^2 + 2}{x - 4} = \left[\frac{18}{0^+} \right] = +\infty$
- $\lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2 + 1}{x - 2} = \left[\frac{13}{0^-} \right] = -\infty$
- $\lim_{x \to 2^-} \frac{3x^2 + 1}{(x - 2)^2} = \left[\frac{13}{0^+} \right] = +\infty$

10.1.7. Indeterminacions

Normalment, per a poder calcular el límit d'una funció en un punt ens basarem en les propietats de càlcul estudiades prèviament. Però què passa quan estem en un dels casos en què no podem aplicar-les perquè no hi funcionen (com per exemple quan el límit del denominador d'una fracció val 0, o quan tant la base com l'exponent d'una potència valen 0)?

Hi ha molts casos en què el límit de la funció en un punt no es pot calcular perquè el resultat no és cap nombre; ni tan sols és infinit. En aquests casos diem que som davant d'una **indeterminació**, i cadascuna s'ha de resoldre d'una manera particular per a poder trobar el valor del límit en aquell punt.

Vegem els diferents tipus d'indeterminacions:

$\boxed{\text{Indeterminació de tipus } \frac{0}{0}}$ Se sol donar quan la nostra funció és resultat d'un quocient de polinomis les dues funcions dels quals tendeixen a 0 en el punt per al qual volem calcular el límit, i quan no podem aplicar per tant la regla per al límit d'una divisió.

Quan ens trobem davant d'aquesta indeterminació causada per una fracció de polinomis, el problema és producte del fet que tant el polinomi del numerador com el del denominador comparteixen una arrel k. Només cal factoritzar els dos polinomis i dividir els factors comuns per a resoldre la inderminació.

Exemple. Indeterminació de tipus $\frac{0}{0}$.

Per a la funció $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ el límit en 2 és una indeterminació, ja que a la fracció

$$\frac{\lim_{x\to 2} x^2-4}{\lim_{x\to 2} x-2}$$

els límit del numerador i el denominador valen 0.

Les arrels del numerador són $x = \pm 2$, mentre que el numerador només s'anul·la en $x = 2$. Per tant, l'arrel $x = 2$ és una arrel comuna als dos polinomis, i

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{1} = 4.$$

$\boxed{\text{Indeterminació de tipus } \frac{\infty}{\infty}}$ Es tracta de límits en què la funció és una fracció el numerador i denominador de la qual tendeixen a ∞ (independentment del signe de l'infinit). El numerador i denominador de la fracció són sovint polinomis (és el cas que trobarem sovint en aquest curs).

En aquest cas escrivim $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ i busquem el terme dominant de cada polinomi (el terme de grau superior), i dividim cadascun dels dos polinomis entre el terme dominant, de manera que gairebé tots els termes de cada polinomi quedaran convertits en límits del tipus $\frac{k}{\infty}$, que ja sabem que s'anul·len. Els únics termes que no s'anul·laran són els del mateix grau que el terme dominant, en els quals es cancel·len les variables i queden només els seus coeficients.

Suposem de moment que el numerador s'escriu $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, amb $a_i \in \mathbb{R}$ els coeficients del polinomi, i el denominador $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, també amb $b_i \in \mathbb{R}$.

Suposem, a més, que $p(x)$ és de grau superior a $q(x)$ $\boxed{n > m}$, i el terme dominant és x^n. Aleshores, si dividim $p(x)$ i $q(x)$ entre el terme dominant x^n queda

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{x^n} &= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{x^n} \\ &= \frac{a_n x^n}{x^n} + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{x^n} + \ldots + \frac{a_1 x}{x^n} + \frac{a_0}{x^n} \\ &= a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^n}\end{aligned}$$

i, similarment,

$$\frac{q(x)}{x^n} = \frac{b_m}{x^{n-m}} + \ldots \frac{b_1}{x^n}.$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{x^n} &= a_n \\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{q(x)}{x^n} &= 0\end{aligned}$$

Finalment, el límit queda

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{p(x)}{x^n}}{\frac{q(x)}{x^n}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{0} = \boxed{\infty}$$

El límit serà ∞ i, per a saber el signe, haurem de separar el cas $+\infty$ del cas $-\infty$, fixar-nos en el signe dels coeficients dels termes dominants i si els termes dominants són de grau parell o imparell.

Similarment, si el grau de $q(x)$ fos superior al de $p(x)$ $\boxed{m > n}$, dividiríem el numerador i el denominador per x^m, obtenint

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{x^m} &= 0 \\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{q(x)}{x^m} &= b_m\end{aligned}$$

I, per tant,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{p(x)}{x^m}}{\frac{q(x)}{x^m}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{0}{b_m} = \boxed{0}$$

Finalment, si el grau de $q(x)$ fos igual al grau de $p(x)$ $\boxed{n = m}$, el límit anterior quedaria

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{p(x)}{x^n}}{\frac{q(x)}{x^n}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} = \boxed{\frac{a_n}{b_m}}$$

i aquest cas el resultat del límit seria el quocient entre els coeficients dels termes dominants.

Exemple. Indeterminació de tipus $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2}{2x^2+7x-5}.$$

Si intentem calcular directament el límit, obtenim una indeterminació $\frac{\infty}{\infty}$.

Observem com tant el numerador com el denominador tenen grau 2, de manera que haurem de dividir els dos polinomis per x^2:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2}{2x^2+7x-5} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2-2}{x^2}}{\frac{2x^2+7x-5}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}} \\
&= \frac{\lim_{x\to+\infty} 3-\frac{2}{x^2}}{\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}} \\
&= \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

I això no és més que la fracció entre els coeficients dels termes dominants dels dos polinomis.

$\boxed{\text{Indeterminació de tipus } 0\cdot\infty}$ Aquesta situació sempre es dona en límits del tipus

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x),$$

on un dels límits de les funcions val 0 i l'altre ∞ (independentment del seu signe).

Veiem que el producte el podem reescriure

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

de manera que la nostra indeterminació s'ha convertit en una del tipus $\dfrac{\infty}{\infty}$, que ja sabem resoldre.

$\boxed{\text{Indeterminació de tipus } \infty-\infty}$ Aquesta indeterminació és habitual en diferències de funcions que contenen arrels. En aquests casos s'ha de multiplicar i dividir la funció per la seva conjugada (la mateixa expressió canviant la resta per una suma) i fer servir la igualtat notable $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$.

Exemple. Indeterminació de tipus $\infty - \infty$.

Calculem el límit per a $x \to +\infty$ de la funció $f(x) = \sqrt{x^2+x} - (x+1)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - (x+1) &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - (x+1) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x} + (x+1)}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - (x+1)\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+x} + (x+1)\right)}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x - \left(x^2+2x+1\right)}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x-1}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)}
\end{aligned}$$

Aquest límit és una indeterminació del tipus $\dfrac{\infty}{\infty}$, on el numerador és un polinomi de grau 1 i el denominador també té com a terme dominant de grau 1 (ja que l'exponent de x^2 s'anul·la en certa manera amb l'arrel quadrada). Així, per a resoldre aquesta nova indeterminació haurem de dividir numerador i denominador per x:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - (x+1) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-x-1}{x}}{\frac{(\sqrt{x^2+x}+(x+1))}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 + \frac{1}{x}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} -1-\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 + \frac{1}{x}} \\
&= \frac{-1-0}{\sqrt{1+0}+1+0} = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Indeterminació de tipus } 1^\infty}$ És una indeterminació que es dona quan tenim una funció exponencial en què la base tendeix a 1 i l'exponent a ∞.

Això és, si tenim la nostra funció escrita com a $f(x)^{g(x)}$ on $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, aleshores $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ dona lloc a aquest tipus d'indeterminació.

Se soluciona mitjançant el canvi

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}.$$

Exemple. Indeterminació de tipus 1^{∞}.

Calculem $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+2}\right)^x$, i dona lloc a una indeterminació del tipus 1^{∞}. Per tant, operem

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+2}-1\right)\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x+2}=\frac{3}{2},$$

ja que és una indeterminació de tipus $\frac{\infty}{\infty}$ amb els polinomis del numerador i denominador del mateix grau.

Per tant,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+2}\right)^x=e^{\frac{3}{2}}.$$

10.2. Continuïtats

10.2.1. Funció contínua en un punt

Es diu que una funció $f(x)$ és **contínua en un punt** x_0 si es pot avaluar en aquest punt i el seu valor coincideix amb el límit de la funció quan x tendeix a x_0, és a dir,

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Intuïtivament, això vol dir que el valor que pren la funció en el punt x_0 és exactament aquell al qual ens aproximem a mesura que avaluem punts cada cop més propers a x_0. Dit amb altres paraules, quan dibuixem la gràfica de la funció, no fa cap salt i podem resseguir-la tota sense aixecar el bolígraf del paper.

Exemple. Considerem l'exemple que ja hem estudiat prèviament,

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\le 1\\ 2 & \text{si } x>1\end{cases}$$

i estudiem-ne la continuitat en $x=1$.

En aquest cas, com hem vist, els límits laterals de la funció no coincideixen, i per tant el límit de la funció en $x=1$ no existeix. Com que no existeix, no pot ser igual al valor de la funció en el punt $f(1)=1$, i la funció és discontínua en aquest punt.

Es diu que una funció és **contínua** quan ho és en tots els punts del seu domini.

10.2.2. Discontinuïtats d'una funció

Una funció que no és contínua en un punt particular pot ser-ho per diferents causes. Pot ser que la funció no estigui definida en aquell punt particular, però els límits laterals sí que existeixin; pot ser que els límits laterals no coincideixin (i per tant el límit en aquell punt no és definit); pot ser que el límit de la funció en el punt no existeixi (sia perquè els límits laterals no coincideixen o perquè divergeixin) i que la funció tampoc no estigui definida, etc.

Seguidament estudiarem tres casos de discontinuïtat de funcions, que són els que trobarem més habitualment.

Discontinuïtat evitable Aquest tipus de discontinuïtat es dona quan la funció no és definida en el punt x_0 però els límits laterals existeixen i coincideixen. És a dir,

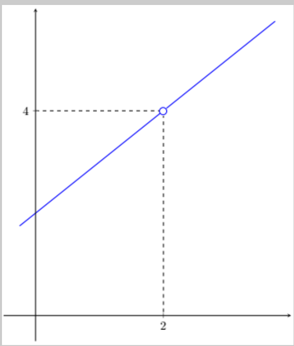
$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x), \text{ però } \nexists f(x_0).}$$

Es fa servir el terme de *discontinuïtat evitable* perquè es una discontinuïtat que es pot evitar si redefinim la funció perquè sigui contínua, com quan el valor en el punt problemàtic és igual al límit de la funció en aquell punt, és a dir, considerant la funció $\widetilde{f}$ definida per

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Exemple. Discontinuïtat evitable.

Considerem $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Tal com hem estudiat prèviament, aquesta funció no és definida en el punt $x = 2$, però el límit quan x tendeix a 2 sí que existeix, i val 4. Per tant, som davant una discontinuïtat evitable en $x = 2$.



Aleshores, considerem la funció

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

La funció $\widetilde{f}(x)$ és idèntica en gairebé tots els punts a la funció $f(x)$, llevat del punt $x = 2$, on $f(x)$ no és definida però $\widetilde{f}(x)$ sí ho és. El límit de $\widetilde{f}(x)$ en $x \to 2$ coincideix amb el seu valor en el punt, i per tant la funció és contínua en aquest punt.

Discontinuïtat de salt Aquest és el cas quan els dos límits laterals de la funció existeixen però no prenen el mateix valor, independentment de si la funció és definida en aquell punt o no. És a dir,

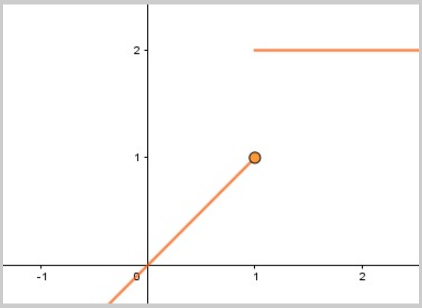
$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)}$$

Exemple. Discontinuïtat de salt.

Sigui $f(x)$ la funció definida a trossos:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Abans hem comprovat que el límit per l'esquerra de la funció en $x \to 1$ val 1 i per la dreta val 2, i per tant la funció té una discontinuïtat de salt en $x = 1$.



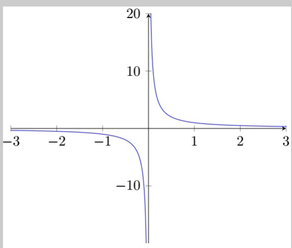
Discontinuïtat asimptòtica Aquesta discontinuïtat és una versió extrema del cas anterior, en el qual almenys un dels dos límits laterals divergeix. Això és,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty.}$$

Es podria visualitzar en certa manera com una discontinuïtat de salt infinit.

Exemple. Discontinuïtat asimptòtica.

Considerem la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



Si calculem els límits laterals en 0 d'aquesta funció, tenim

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

Els dos límits divergeixen, i per tant tenim una discontinuïtat asimptòtica.

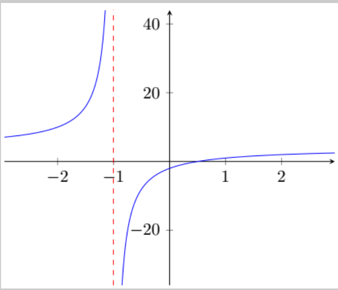
10.2.3. Asímptotes

Una **asímptota** és una recta a la qual la funció s'aproxima sense arribar mai a tocar-la perquè x tendeix a un cert nombre a (o als infinits).

Segons la seva inclinació, les asímptotes poden ser verticals, horitzontals o obliqües.

Asímptotes verticals Es donen en un punt k de l'eix X quan almenys un dels límits laterals en aquest punt tendeix a $\pm\infty$, és a dir, quan en la funció té una discontinuïtat asimptòtica en k. En aquest cas, la recta d'equació $\boxed{x = k}$ és l'asímptota vertical.

Exemple. Asímptota vertical.
La funció $f(x) = 3 + \dfrac{x-5}{x+1}$ té una discontinuitat asimptòtica en $x = -1$, i, per tant, la recta que té per equació $x = -1$ és l'asímptota vertical (en vermell en la imatge).

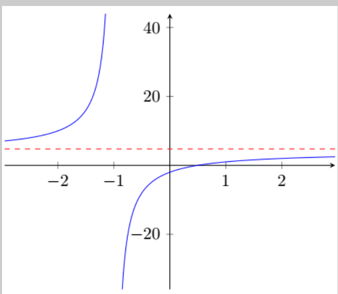


Asímptotes horitzontals Es donen quan existeix el límit en algun dels infinits. Per a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$, la recta d'equació $\boxed{y = k}$ és l'asímptota horitzontal (ídem amb el límit amb $-\infty$). Una funció pot tenir fins a dues asímptotes horitzontals si els dos límits a $\pm\infty$ existeixen i prenen valors diferents.

Exemple. Asímptota horitzontal.
Prenem de nou la funció $f(x) = 3 + \dfrac{x-5}{x+1}$ i calculem-ne els límits:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= 3 \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= 3 \end{aligned}$$

En aquest cas particular els dos límits existeixen i tendeixen al mateix valor, 3. Per tant, la recta d'equació $y = 3$ serà l'única asímptota horitzontal de la funció (en vermell en la imatge).



$\boxed{\textbf{Asímptotes obliqües}}$ Una asímptota obliqua és una recta d'equació $y = ax + b$ a la qual la funció s'aproxima a mesura que x tendeix a $\pm\infty$. Per a trobar l'equació de la recta, hem de trobar-ne els coeficients a, b tals que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - (ax+b)\right] = 0.$$

Igual que les asímptotes horitzontals, una funció pot tenir fins a dues asímptotes obliqües: una per al límit en $+\infty$ i una per al límit en $-\infty$.

Les asímptotes obliqües se solen donar sovint en funcions quocients de polinomis $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ en què el grau del numerador $p(x)$ supera en 1 el grau del denominador $q(x)$. En aquest cas particular, l'equació de l'asímptota és producte del quocient de la divisió de polinomis que defineix la funció $f(x)$:

$$\frac{\text{dividend}}{\text{divisor}} = \text{quocient} + \frac{\text{resta}}{\text{divisor}}$$

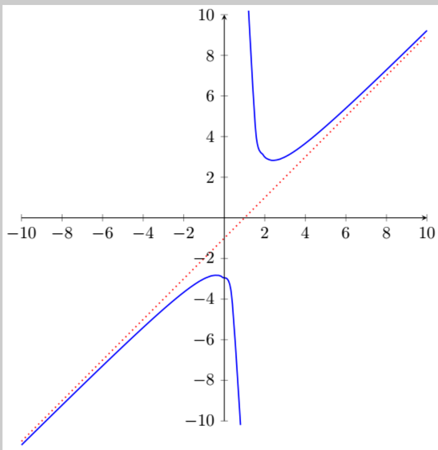
I, en calcular el límit quan x tendeix a infinit, el darrer terme tendeix a 0 i queda només el quocient (que és de grau 1 per ser la diferència entre els graus dels polinomis), que serà l'equació de l'asímptota.

Exemple. Asímptota oblíqua per un quocient de polinomis.

Sigui $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$. Quan calculem la divisió de polinomis ens queda

$$f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x-1} = \boxed{x-1} + \frac{2}{x-1},$$

on $x-1$ és el quocient i 2 la resta de la divisió. Per tant, l'asímptota té per equació $x-1$ (en vermell en la imatge), i veiem que és la mateixa asímptota per als dos límits.



Si una funció té asímptota horitzontal en un dels límits, en aquell límit no podrà tenir asímptota obliqua. Fixeu-vos que una asímptota horitzontal és un cas particular d'asímptota oblíqua en $a = 0$.

En el cas general, en què $f(x)$ no ha de ser necessàriament un quocient de polinomis, s'ha d'usar la definició d'asímptota obliqua directament per a trobar l'equació de la recta.

Hi ha una asímptota oblíqua si, i només si, es compleix

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \infty\\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= a\\ \lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-ax] &= b\end{aligned}$$

on a, b són nombres reals i $y = ax + b$ és l'equació de l'asímptota.

Exemple. Asímptota oblíqua usant les condicions necessàries i suficients.

Sigui $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$. Calculem els límits d'abans per comprovar que té asímptota obliqua. Primerament, comprovem que el límit a l'infinit divergeix,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+3}{x-1} = +\infty$$

ja que el numerador és de grau superior al denominador. Per a trobar el coeficient a, calculem el quocient entre x,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2-2x+3}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^2-x} = 1$$

ja que tant el numerador com el denominador són ara polinomis de grau 2, i la indeterminació $\frac{\infty}{\infty}$ es resol com a fracció dels termes dominants dels dos polinomis. Finalment, substituïm el valor $a = 1$ trobat al tercer límit per trobar b,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-2x+3}{x-1}-x\right] &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-2x+3}{x-1}-\frac{x(x-1)}{x-1}\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-2x+3}{x-1}-\frac{x^2-x)}{x-1}\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x+3}{x-1} = -1\end{aligned}$$

d'on tenim $b = -1$, i per tant l'equació de l'asímptota oblíqua és

$$y = x - 1.$$

Resum

Continuïtat de funcions

Definició límit. El **límit d'una funció** en un valor x és igual a un nombre al qual tendeix la funció quan la variable tendeix a aquest valor (sense arribar mai a ser-ho). Si el límit d'una funció $f(x)$ en un valor a és igual a b, s'escriu d'aquesta manera:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

La definició formal del concepte de límit d'una funció és:

El **límit de la funció** $f(x)$ quan x tendeix al valor a és b,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

si es compleix que, donat qualsevol nombre real $\varepsilon > 0$, hi ha un nombre real $\delta > 0$ de manera que si $0 < |x-a| < \delta$ es compleix $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Operacions amb límits

Suma i resta El límit de la suma (o resta) de dues funcions en un punt és igual a la suma (o resta) de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir,

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

Producte El límit del producte de dues funcions en un punt és igual al producte de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió, és a dir,

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Divisió El límit del quocient de dues funcions en un punt és igual al quocient de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió sempre que el denominador no sigui 0, és a dir,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Exponencial El límit de l'exponencial d'una funció per una altra en un punt és igual a l'exponencial de límits d'aquestes funcions en el punt en qüestió sempre que ambdues funcions no prenguin el valor 0 alhora, és a dir,

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Límits laterals. El **límit lateral per l'esquerra (la dreta)** d'una funció $f(x)$ en un punt a és el límit de la funció quan es considera que la variable només pot prendre valors més petits (o més grans) que el punt, això és, el valor que pren la funció quan ens aproximem al punt objectiu des de punts per l'esquerra (o per la dreta) d'aquest. Aquest límit es denota per

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b \qquad (\lim_{x\to a^+} f(x) = b)$$

En particular, podem veure que si el límit d'una funció en un cert punt existeix, coincidirà amb els límits laterals quan aquests tinguin sentit. El fet recíproc també és cert: si els dos límits laterals existeixen i coincideixen amb el mateix valor, el límit de la funció també existirà i prendrà el mateix valor. Tanmateix, si els dos límits laterals prenen valors diferents, el límit de la funció en aquell punt no existeix (encara que la funció sí que estigui definida en aquell punt).

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) \text{ existeix i val } b \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = b}$$

Límits a l'infinit

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = b$$

Es diu que el **límit d'una funció $f(x)$ quan x tendeix a $+\infty$** val b si per a qualsevol $\varepsilon > 0$ existeix un cert nombre k tal que si $x > k$ aleshores $|f(x)-b| < \varepsilon$. De manera similar, es diu que el **límit d'una funció $f(x)$ quan x tendeix a $-\infty$** val b si, per a qualsevol $\varepsilon > 0$ existeix un cert nombre k tal que si $x < k$ aleshores $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Regles de càlcul

$\boxed{k \cdot \infty = \infty, k \neq 0}$ En un producte, si un factor tendeix a infinit i l'altre tendeix a un e 0, el producte tendeix a infinit, i té un signe que resulta del signe de l'infinit del primer factor multiplicat pel signe del nombre al qual tendeix el segon factor.

$\boxed{\infty + \infty = \infty, k + \infty = \infty}$ En una suma, si un o més sumands tendeixen a infinit amb endeix a infinit amb el signe corresponent.

$\boxed{\frac{k}{\infty} = 0}$ En un quocient, si el denominador tendeix a infinit i el numerador tendeix cap a una constant k, el quocient tendeix a 0.

$\boxed{\frac{k}{0} = \infty, k \neq 0}$ En un quocient, si el numerador tendeix a una constant diferent de 0 i el denominador tendeix a 0, el quocient tendeix a infinit, i té un signe que resulta del signe de per a quina direcció s'aproxima el 0 del denominador multiplicat pel signe del nombre al qual tendeix el numerador.

Indeterminacions

$\boxed{\frac{0}{0}}$ Aquesta indeterminació se sol donar quan la funció és resultat d'un quocient de polinomis, les dues de les quals tendeixen a 0 en el punt per al qual volem calcular el límit, i per tant no podem aplicar la regla per al límit d'una divisió. Per a resoldre-la normalment, n'hi ha prou de factoritzar els dos polinomis i dividir els factors comuns.

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ Es tracta de límits en què la funció és una fracció el numerador i denominador de la qual tendeixen a ∞ (independentment del signe de l'infinit). En aquest cas, si

n és el grau del terme dominant del polinomi del numerador i m el del denominador tenim

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\begin{cases}0 & \text{si} \quad m>n\\ \infty & \text{si} \quad m<n\\ \dfrac{a_n}{b_n} & \text{si} \quad m=n\end{cases}$$

on a_n i b_n són els coeficients dels termes dominants de $p(x)$ i $q(x)$ respectivament i el signe de ∞ per a $m<n$ s'haurà d'estudiar en cada cas.

$\boxed{0\cdot\infty}$ Aquesta situació sempre es dona en límits del tipus

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x),$$

on un dels límits de les funcions val 0 i l'altre ∞ (independentment del seu signe). Veiem que podem reescriure el producte com a

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

de manera que la nostra indeterminació s'ha convertit en una del tipus $\dfrac{\infty}{\infty}$, que ja sabem resoldre.

$\boxed{\infty-\infty}$ Aquesta indeterminació és habitual en diferències de funcions que contenen arrels. En aquests casos s'ha de multiplicar i dividir la funció per la seva conjugada (la mateixa expressió canviant la resta per una suma) i fer servir la igualtat notable $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$\boxed{1^\infty}$ És una indeterminació que es dona quan tenim una funció exponencial en què la base tendeix cap a 1 i l'exponent cap a ∞.

Això és, si tenim la nostra funció escrita com a $f(x)^{g(x)}$ per a $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, aleshores $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ dona lloc a aquest tipus d'indeterminació.

Se soluciona mitjançant el canvi

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}.$$

Definició funció contínua. Es diu que una funció $f(x)$ és **contínua en un punt** x_0 si la funció es pot avaluar en aquest punt i el seu valor coincideix amb el límit de la funció quan x tendeix a x_0, és a dir,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Es diu que una funció és **contínua** quan és contínua en tots els punts del seu domini.

Tipus de discontinuïtats

Discontinuïtat evitable Aquest tipus de discontinuïtat es dona quan la funció no és definida en el punt x_0, però els límits laterals sí que existeixen i coincideixen. És a dir,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x),\ \text{però } \nexists f(x0).}$$

Discontinuïtat de salt Aquest és el cas quan els dos límits laterals de la funció existeixen però no prenen el mateix valor, independentment de si la funció és definida en aquell punt o no. És a dir,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)}$$

Discontinuïtat asimptòtica Aquesta discontinuïtat és una versió extrema del cas anterior, en què almenys un dels dos límits laterals divergeix. Això és,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty.}$$

Asímptotes

Asímptotes verticals Es donen en un punt k de l'eix X quan almenys un dels límits laterals en aquest punt tendeix a $\pm\infty$, és a dir, quan en la funció té una discontinuïtat asimptòtica en k. En aquest cas, la recta d'equació $\boxed{x = k}$ és l'asímptota vertical.

Asímptotes horitzontals Es donen quan existeix el límit a algun dels infinits. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$, la recta d'equació $\boxed{y = k}$ és l'asímptota horitzontal (ídem amb el límit amb $-\infty$). Una funció pot tenir fins a dues asímptotes horitzontals si els dos límits a $\pm\infty$ existeixen i prenen valors diferents.

Asímptotes obliqües Si, i només si, es compleix

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \infty \\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= a \\ \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] &= b \end{aligned}$$

on a, b són nombres reals i $y = ax + b$ és l'equació de l'asímptota.

Exercicis resolts

1. **Calculeu els límits següents, si existeixen, pas a pas:**

(a) $\lim_{x\to 3} x^3 - 2x^2 + 1$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^3 - 4x}{3x - 5}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x} - (x + 1)\right]$

(d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{2x^3 + x^2 - 9}$

(e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{-19}{(x - 2)^3}$

(f) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2}\right)^{x^2}$

(g) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

(h) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2 - (a + 1)x + a}{x^3 - a^3}$

(i) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + x + 1}{2x + 1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

(j) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} - x\right)$

Solució:

(a) En aquest primer límit n'hi ha prou substituint el valor de x que és 3 a la funció de la qual calculem el límit, així obtenim que el límit és 10.

(b) Igual que hem fet en el cas anterior, si substituïm les x de la funció per 0 obtenim que el límit és 0.

(c) En aquest cas, en principi dona indeterminació $\infty - \infty$, i per tant el que farem serà multiplicar pel conjugat:

$$\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x} - (x + 1)\right] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{\left(\sqrt{x^2 + x} - (x + 1)\right)\left(\sqrt{x^2 + x} + (x + 1)\right)}{\sqrt{x^2 + x} + (x + 1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^2 + x - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + x} + (x + 1)}\right] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{-x - 1}{\sqrt{x^2 + x} + (x + 1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{\frac{-x-1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} + \frac{(x+1)}{x}}\right] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{-1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 + \frac{1}{x}}\right] = \frac{-1}{2}$$

(d) Veiem que és el quocient de dos polinomis del mateix grau, i per tant,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{2x^3 + x^2 - 9} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^3-x^2+1}{x^3}}{\frac{2x^3+x^2-9}{x^3}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{9}{x^3}} = \frac{1}{2}$$

(e) Observem que en aquest cas, si substituïm els valors de x per 0, ens queda $\frac{-19}{0}$, i per tant hem de treballar una mica més aquest límit per veure quant val en cas que existeixi. Ens fixem amb els límits laterals

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{-19}{(x - 2)^3} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-19}{(x - 2)^3} = +\infty$$

Com que els dos límits laterals són diferents, el límit no existeix.

(f) Veiem que aquest límit dona 1^∞, que sabem que és una indeterminació i, per tant, si ho escrivim apropiadament tenim

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e$$

(g) En aquest cas, quan substituïm les x per 2 observem que el resultat és $\frac{0}{0}$ i, per tant, una indeterminació. Intentem simplificar-ho:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 4$$

(h) En aquest cas, quan substituïm les x per a observem que el resultat és $\frac{0}{0}$i, per tant, una indeterminació. Intentem simplificar-ho:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} = \lim_{x\to a} \frac{(x-1)\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-1)}{(x^2+ax+a^2)} = \frac{a-1}{3a^2}$$

L'únic valor conflictiu és $a = 0$ perquè anul·la el denominador. Ens mirem doncs aquest cas per separat.

Si $a = 0$, el límit inicial és $\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2}$ i, per tant, com que el denominador és sempre positiu i de grau major que el numerador, tenim que aquest límit és $-\infty$ independentment que x sigui major o menor que 0.

(i) Observem que es tracta d'una indeterminació del tipus 1^∞, i per tant calculem $(f(x) - 1)g(x)$, on $f(x)$ és la funció que tendeix a 1 i $g(x)$ la que va a infinit

$$(f(x)-1)g(x) = \left(\frac{x^2+x+1}{2x+1} - 1\right)\frac{1}{x-1} = \frac{x^2-x}{2x+1}\frac{1}{x-1} = \frac{x\cancel{(x-1)}}{(2x+1)\cancel{(x-1)}} \xrightarrow{x\to 1} \frac{1}{3}$$

Per tant, el límit que busquem és $e^{\frac{1}{3}}$.

(j) Observem que es tracta d'una indeterminació del tipus $\infty - \infty$, i per tant intentarem operar les dues funcions per a poder resoldre-la.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-3x+1}{x-3} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x+1-x^2+3x}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-3} = 0$$

2. **Indiqueu els punts en què aquestes funcions no són contínues i el tipus de discontinuïtat que presenten. Raoneu la resposta.**

(a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \textbf{si } x \neq 0 \\ 1 & \textbf{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x-1}$

Solució:

(a) Observem que aquesta funció presenta una discontinuïtat quan el denominador s'anul·la, i per tant per a $x = 0$. I, a més, si calculem els límits laterals en aquest punt, tenim

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+3}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{x+3}{x} = -\infty$$

Per tant, en $x = 0$ tenim una discontinuïtat asimptòtica.

(b) En aquest cas, similar a l'anterior, la funció presenta una discontinuïtat quan el denominador s'anul·la, i per tant per a $x = 0$. I, a més, si calculem els límits laterals en aquest punt, tenim

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+3}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{x+3}{x} = -\infty$$

Però a diferencia de l'anterior, en $x = 0$ tenim definida la imatge, i per tant és un cas especial de discontinuïtat asimptòtica.

(c) Com en els casos anteriors, vegem en quins punts s'anul·la el denominador. Veiem que és per a $x = 1$. Calculem ara el límit en aquest punt per veure quin tipus de discontinuïtat tenim:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1} x = 1$$

Com que el límit existeix, veiem que la discontinuïtat és evitable.

3. **Considereu la funció**

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x}$$

Quin valor cal assignar a $f(0)$ perquè la funció f sigui contínua en $x = 0$? Expliqueu-ho.

Solució:
Abans d'estudiar el punt $x = 0$, mirem quins són els punts de discontinuïtat (si n'hi ha) de la funció. Per a fer-ho, mirem en quins punts s'anul·la el denominador.

$$8x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(8x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Per tant, aquesta funció només té una discontinuïtat en $x = 0$. N'estudiem el límit i veiem que és una indeterminació del tipus $\frac{0}{0}$, i per tant

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{8x^3 + 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x^2 - 2x + 1)}{\cancel{x}(8x^2 + 3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x + 1}{8x^2 + 3} = \frac{1}{3}$$

Per tant, si prenem $f(0) = \frac{1}{3}$, la funció serà contínua.

4. **Calculeu el domini com a unió d'intervals de continuïtat, estudieu el comportament de la funció en els extrems del domini (asímptotes) i els tipus de discontinuïtats que presenten les funcions següents:**

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$

(b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 + x^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{e^{1/x} + 1}$

(d) $f(x) = \dfrac{6 + e^{1/x}}{2 + e^{1/x}}$

Solució:

(a) Veiem que el denominador d'aquesta funció s'anul·la per a $x = -2$ i $x = 3$, i per tant el domini serà

$$\text{Dom}f = (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$$

Per tant, ara hem d'estudiar els límits en $x = -2$, $x = 3$ i $\pm\infty$ per a saber quins tipus de discontinuïtats tenim i quines asímptotes té la funció

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^- \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1^+ \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x\cancel{(x-3)}}{(x+2)\cancel{(x-3)}} = \frac{3}{5}$$

Per tant, podem concloure que aquesta funció té una discontinuïtat evitable en $x = 3$, una asímptota vertical en $x = -2$ i una asímptota horitzontal en $y = 1$.

(b) Veiem que el denominador d'aquesta funció s'anul·la per a $x = 0$ i $x = -1$, i per tant el domini serà

$$\text{Dom}f = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

Per tant, ara hem d'estudiar els límits en $x = -1$, $x = 0$ i $\pm\infty$ per a saber quins tipus de discontinuïtats tenim i quines asímptotes té la funció:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

Per tant, podem concloure que aquesta funció té dues asímptotes verticals: una en $x = 0$ i una en $x = -1$. També té una asímptota horitzontal en $y = 0$.

(c) Veiem que el domini d'aquesta funció és $\text{Dom}f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Ara hem d'estudiar els límits en $x = 0$ i $\pm\infty$ per a saber quins tipus de discontinuïtats tenim i quines asímptotes té la funció

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \left[\frac{0}{1}\right] = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \left[\frac{0}{+\infty}\right] = 0$$

Per tant, aquesta funció presenta una discontinuïtat evitable en $x = 0$ i no té asímptotes.

(d) Com en el cas de la funció anterior, veiem que el domini d'aquesta funció és $\text{Dom}f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Ara hem d'estudiar els límits en $x = 0$ i $\pm\infty$ per a saber quins tipus de discontinuïtats tenim i quines asímptotes té la funció.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{6+1}{2+1} = \frac{7}{3} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{6+0}{2+0} = 3 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\frac{6}{e^{1/x}} + 1}{\frac{2}{e^{1/x}} + 1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

Per tant, aquesta funció presenta una discontinuïtat de salt en $x = 0$ i té una asímptota a horitzontal en $y = \frac{7}{3}$.

5. **Estudieu el domini i la continuïtat de la funció**

$$f(x) = \frac{x^3 - ax^2}{x^2 - 9}$$

en funció del paràmetre a, un nombre real positiu.

Solució:
En primer lloc observem que el denominador de la funció s'anul·la per a $x = 3$ i $x = -3$. Així, doncs, el domini d'aquesta funció és $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Ara hem d'estudiar els límits en aquests dos punts per a veure'n la continuïtat.
Comencem per $x = -3$ i mirem els límits laterals

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$$

ja que el numerador tendeix a $9(-3 - a)$ (un valor negatiu) i el denominador a 0 amb valors positius.

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$$

ja que el numerador tendeix a $9(-3 - a)$ (un valor negatiu) i el denominador a 0 amb valors negatius. Per tant, en $x = -3$ tenim una discontinuïtat asimptòtica per a qualsevol valor d'a.

Ara mirem què passa amb $x = 3$. I, de fet, si estudiem els límits laterals, ens trobarem
Mirem ara què passa amb $x = 3$. I de fet, si estudiem els límits laterals ens trobarem la mateixa situació que en el punt anterior exceptuant el cas $a = 3$. Si $a = 3$, tindrem

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - ax^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 \cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \frac{3}{2}$$

Per tant, si $a \neq 3$ tenim una discontinuïtat asimptòtica en $x = 3$, però si $a = 3$, la discontinuïtat serà evitable.

Exercicis per a practicar amb les solucions

6. **Calculeu els límits següents:**

(a) $\lim_{x\to 3}(x^2-2)$

(b) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+1}$

(c) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}$

(d) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-5x+3}{8x^3-2x^2+6}$

(e) $\lim_{x\to 1}2e^{\frac{1}{(x-1)^2}}$

(f) $\lim_{x\to +\infty}x^2-3$

(g) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{1}{4x}$

(h) $\lim_{x\to \infty}x-\sqrt{x^2-3x}$

7. **Considereu la funció següent:**

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^3+3x^2-4}$$

(a) Trobeu el límit de la funció quan x tendeix a aquests valors: 0, 1, -2, $+\infty$, $-\infty$.

(b) Estudieu la continuïtat d'aquesta funció i digueu si presenta discontinuïtats i de quin tipus.

8. **Calculeu el límit de la funció següent quan x tendeix a 3:**

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & \textbf{si} \quad x<3\\ 2x & \textbf{si} \quad x>3\end{cases}$$

9. **Per quin valor de $p\in\mathbb{R}$ serà contínua la funció $f(x)$ següent?**

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-px+3 & \textbf{si} \quad x\geq 1\\ 2x+3 & \textbf{si} \quad x<1\end{cases}$$

10. **Trobeu les asímptotes horitzontals de la funció $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$, les asímptotes verticals de $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$ i les asímptotes oblíqües de $h(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$.**

Solucions:

6. (a) 7
   (b) 0
   (c) $\dfrac{-3}{2}$
   (d) $\dfrac{1}{4}$
   (e) $+\infty$
   (f) $+\infty$
   (g) 0
   (h) $\dfrac{3}{2}$
7. (a) $\lim_{x\to 0}f(x)=-\dfrac{3}{4}$, $\lim_{x\to 1}f(x)=-\dfrac{2}{9}$, $\lim_{x\to -2}f(x)=-\infty$ i $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$.
   (b) Aquesta funció és contínua excepte en $x=1$ (discontinuïtat evitable) i $x=-2$ (discontinuïtat asimptòtica).
8. Calculem els dos límits laterals i veiem que tots dos són 6. Per tant, el límit quan $x$tendeix a 3 és 6.
9. $p=0$
10. $y=2$ és una asímptota horitzontal de $f(x)$, $x=2$ és una asímptota vertical de $g(x)$ i $y=x+1$ és una asímptota obliqua de $h(x)$.