Iniciació a les matemàtiques per a l'enginyeria

PID_00270083

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat Oberta de Catalunya

11. Derivació de funcions

Índex

11.1. Derivada d'una funció en un punt

La derivada d'una funció en un punt és un dels conceptes que han revolucionat les matemàtiques. No és un concepte senzill, però, en canvi, té moltíssimes aplicacions. A més, tal com es veurà, el procés de càlcul de derivades no és excessivament complicat si se segueixen unes regles concretes.

Què és la derivada d'una funció en un punt?
És igual a un cert límit que coincideix geomètricament amb el pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt. La derivada d'una funció $f(x)$ en un punt x_0 s'indica per $f'(x_0)$.

11.1.1. Definició i interpretació

La **derivada d'una funció $f(x)$ en un punt concret** x_0 s'indica per $f'(x_0)$ i es defineix mitjançant el càlcul d'aquest límit:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}}$$

Alternativament, podem definir la derivada de la funció $f(x)$ en x_0 així:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

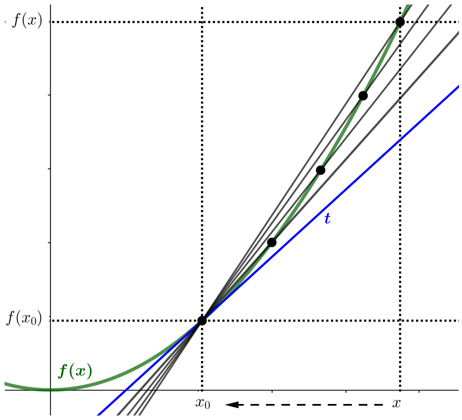
Les dues definicions són totalment equivalents i es poden utilitzar indistintament.

El càlcul diferencial és el terme amb què es fa referència al càlcul de derivades. Junt amb el càlcul integral, ha permès observar les matemàtiques des d'un nova perspectiva teòrica, a més de tenir un impacte extraordinari en la descripció i manipulació de la realitat física.
El concepte de límit, bàsic en càlcul diferencial, s'ha tractat des de l'antiguitat. Tanmateix, no va ser fins al segle XV que es va construir el càlcul diferencial (i integral) que coneixem avui en dia.

Pot passar que aquest límit no es pugui calcular, i en aquest cas es diu que la funció no és derivable en el punt x_0. Pràcticament totes les funcions que s'han introduït en aquest curs són derivables en tot el seu domini.

La definició de derivada d'una funció en un punt està lligada íntimament a la recta tangent a la funció en aquest punt. Vegem de quina manera.

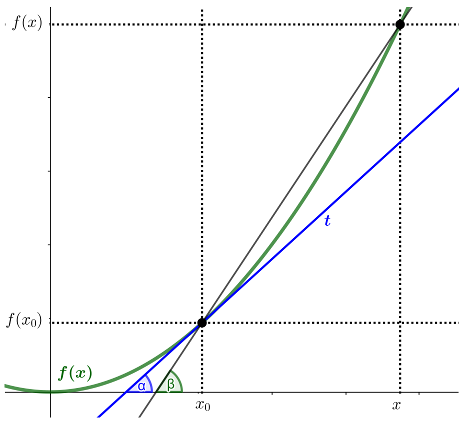
La imatge que hi ha a continuació representa la gràfica d'una funció $f(x)$ i la recta tangent t a la funció en un punt $(x_0, f(x_0))$. També s'hi han traçat altres rectes, que passen per aquest punt de tangència $(x_0, f(x_0))$ i altres punts de la funció, $(x, f(x))$, que es van acostant al punt de tangència $(x_0, f(x_0))$.



En analitzar aquesta situació notem que el quocient

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

representa la relació que hi ha entre els dos costats d'un triangle la hipotenusa del qual és la recta que passa pels punts $(x_0, f(x_0))$ i $(x, f(x))$. A més, observem que aquest quocient no és més que la tangent de l'angle que forma la recta tangent amb l'eix X i, per tant, el que determina el pendent d'aquesta recta, tal com pretén il·lustrar aquesta segona imatge:



Això vol dir que, com més a prop és un punt x de x_0, més a prop és la recta que passa per $(x_0, f(x_0))$ i $(x, f(x))$ de la recta tangent a la funció en x_0. Per tant, aquestes rectes coincideixen en el límit. Aquest fet explica per què el límit del quocient indicat ha de ser el pendent de la recta tangent en el punt $(x_0, f(x_0))$ i, això, la coincidència amb la definició de la derivada de la funció en el punt x_0.

D'acord amb aquesta situació geomètrica, aquest pendent no és més que la tangent de l'angle α, angle al qual tendeix l'angle β a mesura que s'aproxima a x_0. En definitiva:

$$f'(x_0) = \tan(\alpha)$$

on α és l'angle que hi ha entre l'eix X i la recta tangent a la funció en el punt x_0.

11.1.2. Càlcul

La derivada d'una funció en un punt x_0 del seu domini es pot calcular aplicant la definició de derivada d'una funció en el punt x_0 en qüestió:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Vegem-ne alguns exemples concrets:

Els grans creadors del càlcul diferencial van ser l'anglès Isaac Newton (1642-1727) i l'alemany Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). De manera diferent i independent, van sistematitzar i generalitzar idees i procediments que havien estat abordats amb èxit parcial des de l'antiguitat.

Exemple. Càlcul de la derivada d'una funció constant.

Sigui la funció constant

$$f(x) = 3$$

Calculem la seva derivada en el punt $x_0 = 2$ aplicant la definició de derivada d'una funció en aquest punt:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(2) - f(x)}{2 - x} = \lim_{x \to 2} \frac{3 - 3}{2 - x} = \lim_{x \to 2} \frac{0}{2 - x} = \lim_{x \to 2} 0 = 0$$

d'on resulta

$$f'(2) = 0$$

De fet, d'acord amb aquest procediment, es pot veure que la derivada d'aquesta funció, $f(x) = 3$, en qualsevol punt x_0 és sempre $f'(x_0) = 0$.

En general, la derivada d'una funció constant $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ en qualsevol punt x_0 és sempre $f'(x_0) = 0$.

Exemple. Càlcul de la derivada d'una funció lineal.

Sigui la funció lineal

$$f(x) = x$$

Calculem la seva derivada en el punt $x = 3$ aplicant la definició de derivada d'una funció en aquest punt:

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} = \lim_{x \to 3} \frac{3 - x}{3 - x} = \lim_{x \to 3} 1 = 1$$

d'on resulta

$$f'(3) = 1$$

De fet, d'acord amb aquest procediment, es pot veure com la derivada de la funció $f(x) = x$ en qualsevol punt x_0 és sempre $f'(x_0) = 1$.

Exemple. Càlcul de la derivada d'una funció quadràtica.

Sigui la funció quadràtica

$$f(x) = x^2$$

Calculem la seva derivada en el punt $x = 6$ aplicant la definició de derivada d'una funció en aquest punt:

$$f'(6) = \lim_{x\to 6} \frac{f(6) - f(x)}{6 - x} = \lim_{x\to 6} \frac{6^2 - x^2}{6 - x}$$

Sabem que $6^2 - x^2 = (6 - x)(6 + x)$, i per tant

$$f'(6) = \lim_{x\to 6} \frac{6^2 - x^2}{6 - x} = \lim_{x\to 6} \frac{\cancel{(6 - x)}(6 + x)}{\cancel{(6 - x)}} = \lim_{x\to 6}(6 + x) = 6 + 6 = 12$$

d'on resulta

$$f'(6) = 12$$

De fet, d'acord amb aquest procediment, es pot veure com la la derivada d'aquesta funció, $f(x) = x^2$, en qualsevol punt x_0 és sempre $f'(x_0) = 2x_0$.

Exemple. Càlcul de la derivada d'una funció polinòmica de grau 3.

Sigui la funció

$$f(x) = x^3$$

Calculem la seva derivada en el punt $x = 4$ aplicant la definició de derivada d'una funció en aquest punt:

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{f(4) - f(x)}{4 - x} = \lim_{x\to 4} \frac{4^3 - x^3}{4 - x}$$

Sabem que $4^3 - x^3 = (4 - x)\left(4^2 + 4x + x^2\right)$, i per tant

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{4^3 - x^3}{4 - x} = \lim_{x\to 4} \frac{(4 - x)\left(4^2 + 4x + x^2\right)}{4 - x} = \lim_{x\to 4}(4^2+4x+x^2) = 3\cdot 4^2 = 48$$

d'on resulta

$$f'(4) = 48$$

De fet, d'acord amb aquest procediment, es pot veure com la derivada d'aquesta funció, $f(x) = x^3$, en qualsevol punt x_0 és sempre $f'(x_0) = 3x_0^2$.

11.2. Derivada d'una funció

11.2.1. Definició i interpretació

En calcular la derivada d'una funció $f(x)$, s'obté una nova funció en tots els punts del seu domini.

Aquesta nova funció s'anomena **funció derivada de** $f(x)$, es designa per $f'(x)$ i fa correspondre a cada punt del domini el valor de la derivada de la funció f en aquest punt.

El procés de trobar la funció derivada d'una funció donada es denomina **derivar la funció**.

Sembla raonable que, per a derivar qualsevol funció, s'hauria de calcular $f'(x)$ per a tots els punts del seu domini. En altres paraules, s'hauria calcular el límit que defineix

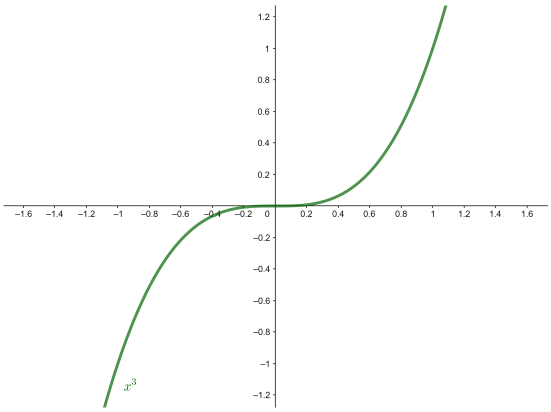
Què és la derivada d'una funció?
La derivada d'una funció f és aquella funció que associa a cada valor la derivada de la funció f. Aquesta nova funció es designa per f'. Encara que, teòricament, s'hauria de calcular el límit que condueix a la derivada per a cada punt, en la pràctica hi ha una taula amb les funcions derivades de les principals funcions.

la derivada en cadascun dels punts del seu domini. Aquest procés, però, és impossible. Ara bé, l'anàlisi dels límits que determinen la derivada de la funció en qualsevol punt del seu domini per a diferents funcions (de manera similar a com s'ha fet en l'apartat anterior per a diferents monomis) permet determinar una relació directa de les derivades de les principals funcions conegudes. Aquesta relació es presenta en format de taula, que es mostra a continuació.

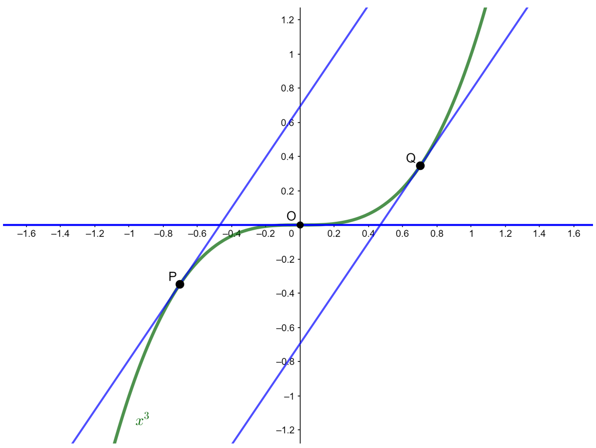
Taula de funcions derivades. Les derivades de les funcions principals són:

Taula de funcions derivades		
$f(x)$	$f'(x)$	**Exemples**
$k,\ k \in \mathbb{Z}$	0	$f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$
$a \cdot x,\ a \in \mathbb{R}$	a	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $g(x) = -4x \Rightarrow g'(x) = -4$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}$	$n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$	
$a^x,\ a \in \mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln(a)$	$f(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x \cdot \ln(3)$ $g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$
$\log_a(x)$	$\dfrac{1}{x} \cdot \log_a(e)$	$f(x) = \log_3(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\log_3(e)$ $g(x) = \ln(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$
$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

Estudiem un cas particular: el de la funció cúbica $f(x) = x^3$. Comencem per dibuixar-ne la gràfica:



D'acord amb això, la derivada d'aquesta funció en un punt qualsevol és igual al pendent de la recta tangent de la funció en el punt. Així ho confirma la imatge que hi ha a continuació, en la qual s'han traçat les tangents a la funció en diferents punts del seu domini.



En observar aquesta imatge notem:

(a) La recta tangent en el punt $(0, 0)$ és una recta horitzontal (casualment el mateix eix X) amb pendent 0. Aquest fet permet afirmar que la derivada de la funció en el 0 és exactament 0:

$$f'(0) = 0$$

(b) La derivada és la mateixa per a valors amb el mateix valor absolut: les tangents a la funció en els punts P, d'abscissa $x = -0.7$, i Q, d'abscissa $x = 0.7$ tenen el mateix pendent, és a dir, $f'(-0.7) = f'(0.7)$. Aquest fet en particular indica que en aquest cas la funció derivada ha de ser simètrica respecte de l'eix d'ordenades.

Analitzades les gràfiques de la funció $f(x) = x^3$ i les rectes tangents en alguns punts del seu domini, comprovem si aquestes característiques es compleixen en la funció derivada que obtenim mitjançant l'ús de la taula de les derivades.

Segons la taula, la derivada de la funció $f(x) = x^3$ és $f'(x) = 3x^2$. Aleshores, i com a confirmació del que hem observat anteriorment:

(a) $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$;

(b) La funció derivada $3x^2$ és una funció quadràtica senzilla d'estudiar:

- És sempre positiva i, en particular, compleix
$$f'(-0.7) = 3 \cdot (-0.7)^2 = 3(0.7)^2 = f'(0.7) = 1.47 > 0$$
- Té el vèrtex en el punt $(0,0)$, i això indica que és simètrica respecte de l'eix Y i per tant $f'(x) = f'(-x)$.

11.2.2. Regles de càlcul

La taula de derivades no permet calcular directament la derivada d'un polinomi, per exemple. Ara bé, hi ha una sèrie de regles per a la suma i resta, la multiplicació i divisió, la composició i la potència de funcions que es deriven de les regles de càlcul de límits (ja que la derivada no és més que un límit) i possibiliten calcular la derivada d'un gran nombre de funcions. Vegem quines són aquestes regles:

- La **derivada de la suma (i resta)** de dues funcions és igual a la suma (resta) de les derivades de cadascuna de les funcions:
$$\boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)}$$

Exemple. Derivada d'una suma de funcions.
Siguin $f(x) = x^3$ i $g(x) = x^2$. Tenim que $f'(x) = 3x^2$ i $g'(x) = 2x$.
Aleshores, la derivada de $f(x) + g(x)$ és
$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) = 3x^2 + 2x$$

Exemple. Derivada d'una resta de funcions.
Siguin $f(x) = x^5$ i $g(x) = x^2$. Tenim que $f'(x) = 5x^4$ i $g'(x) = 2x$.
Aleshores, la derivada de $f(x) - g(x)$ és
$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 5x^4 - 2x$$

- La **derivada del producte** de dues funcions és igual a la derivada de la primera funció multiplicada per la segona funció sense derivar més el producte de la primera funció sense derivar per la derivada de la segona funció.
$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Exemple. Derivada d'un producte de funcions polinòmiques
Considerem $h(x) = 3x^5$ com el producte de $f(x) = 3$ per $g(x) = x^5$.
La derivada de $f(x)$ és $f'(x) = 0$ i la derivada de $g(x)$ és $g'(x) = 5x^4$.
Aleshores, la derivada de $h(x)$ és
$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 0 \cdot x^5 + 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$$

Deduïm d'aquest exemple com la derivada de qualsevol monomi és igual al producte del coeficient per la derivada de la seva part literal.

Exemple. Derivada d'un producte de funcions no polinòmiques.
Siguin $f(x) = \cos(x)$ i $g(x) = \sin(x)$.
Considerem la funció producte $f(x) \cdot g(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$ la seva derivada és

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ &= -\sin(x) \cdot \sin(x) + \cos(x) \cdot \cos(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

- La **derivada del quocient** de dues funcions és igual a la derivada de la funció del numerador multiplicada per la funció del denominador sense derivar menys el producte de la funció del numerador sense derivar per la derivada de la funció del denominador, tot això dividit pel quadrat de la funció del denominador sense derivar.

$$\boxed{h'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

Exemple. Derivada d'un quocient entre funcions.
Considerem $h(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 4}{2x^3 + x}$ com el quocient entre $f(x) = 3x^2 - 4x + 4$ i $g(x) = 2x^3 + x$. Les derivades d'aquestes funcions són $f'(x) = 6x - 4$ i $g'(x) = 6x^2 + 1$.
Aleshores, la derivada de $h(x)$ és

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{(6x-4) \cdot \left(2x^3 + x\right) - \left(3x^2 - 4x + 4\right) \cdot \left(6x^2 + 1\right)}{\left(2x^3 + x\right)^2} \\ &= \frac{-6x^4 + 16x^3 - 21x^2 - 4}{x^2 \cdot \left(2x^2 + 1\right)^2} \end{aligned}$$

- La **derivada de la composició** de dues funcions es calcula utilitzant la **regla de la cadena**, que consisteix en multiplicar la derivada de la funció que s'aplica en primer lloc per la derivada de la segona funció aplicada a la primera.

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

o, equivalentment,

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x)$$

Exemple. Derivada d'una composició de funcions.
Siguin $f(x) = \ln(x)$ i $g(x) = 3x^2 - 1$. Considerem la funció composició $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln\left(3x^2 - 1\right)$.
Calculem les derivades $f'(x) = \frac{1}{x}$ i $g'(x) = 6x$.
Aeshores, la derivada de $(f \circ g)(x)$ és

$$(f \circ g)'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x) = \frac{6x}{3x^2 - 1}$$

- La **derivada d'una potència** de dues funcions es dedueix de la regla de la cadena:

  Si f i g són dues funcions, considerem la funció potència:

  $$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

  Aleshores, podem considerar

  $$\ln(h(x)) = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)$$

  D'aquesta manera s'ha eliminat l'exponent.

  Derivem ambdós membres de la igualtat utilitzant la regla de la cadena i la regla del producte de funcions. La derivada del terme de l'esquerra és

  $$(\ln(h(x)))' = \frac{1}{h(x)}\cdot h'(x)$$

  I la derivada del terme de la dreta esdevé

  $$(g(x)\cdot\ln(f(x)))' = g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}$$

  D'aquesta manera, si igualem les dues derivades,

  $$\frac{1}{h(x)}\cdot h'(x) = g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}$$

  Si aïllem $h'(x)$ a l'esquerra, obtenim finalment

  $$\boxed{\begin{aligned} h'(x) &= h(x)\cdot\left(g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right) \\ &= f(x)^{g(x)}\cdot\left(g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right) \end{aligned}}$$

Exemple. Derivada d'una composició de funcions.

Considerem $h(x) = x^{\sin(x)}$ com la potència de $f(x) = x$ elevada a $g(x) = \sin(x)$.

D'acord amb la definició de les funcions, f i g, $f'(x) = 1$ i $g'(x) = \cos(x)$.

Aeshores, la derivada de $h(x)$ és

$$\begin{aligned} h'(x) &= f(x)^{g(x)}\cdot\left(g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right) \\ &= x^{\sin(x)}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right) \end{aligned}$$

Amb aquestes regles i la taula de derivades, es pot derivar una gran quantitat de funcions.

11.3. Aplicacions de la derivada

Les aplicacions de la derivada en l'estudi de funcions són molt àmplies. Comprenen des del càlcul de certs elements interessants per a traçar-ne les gràfiques fins a problemes de maximització o minimització (anomenats també, de manera general, problemes d'extrems). Entre les moltes aplicacions importants que té la derivada en l'estudi de funcions, destaquem el fet d'identificar els intervals de creixement i decreixement d'una funció, i els de concavitat i convexitat, imprescindibles a l'hora de localitzar-ne els extrems (màxims i mínims) i els punts d'inflexió. Proporcionar aquesta informació és clau per a representar gràficament qualsevol funció.

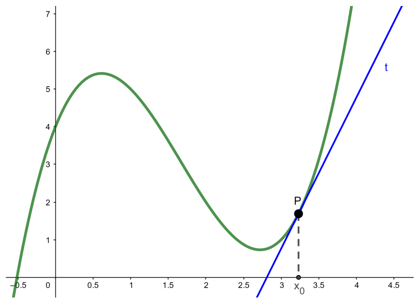
11.3.1. Creixement i decreixement d'una funció

Hem vist que la derivada de la funció en un punt és igual al pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt. Vegem amb alguns exemples la relació de la derivada amb la monotonia de la funció, és a dir, amb el seu creixement i decreixement.

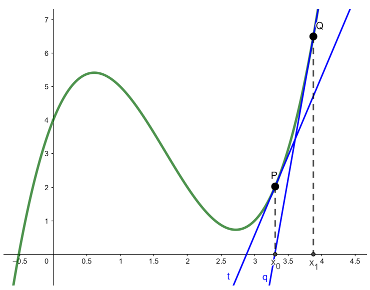
Quina relació hi ha entre la derivada d'una funció i el seu creixement/decreixement?
La derivada de la funció en un punt és igual al pendent de la recta tangent a la funció en aquest punt. En conseqüència:
– Si una funció és creixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en el punt és positiva. A més, com més ràpidament creix la funció més gran és el valor de la derivada en el punt.
– Si una funció és decreixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en el punt és negativa, i com més ràpidament decreix la funció menor és el valor de la derivada en el punt.

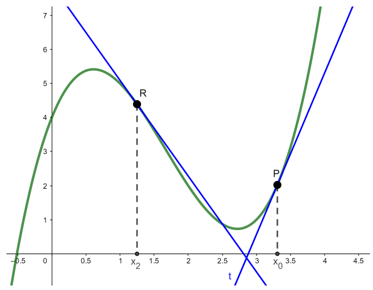
La imatge que hi ha a continuació mostra la gràfica d'una funció $f(x)$, en la qual s'ha traçat la recta t tangent a la gràfica en el punt P de coordenades (x_0, y_0).

Que t sigui una recta tangent en el punt P vol dir que és una recta que talla la gràfica de la funció en aquest punt P sense travessar-la, només recolzant-s'hi. El pendent d'aquesta recta, tal com s'ha vist abans, es correspon amb la derivada de la funció en aquest punt.



Considerem ara un segon punt de la funció f, Q de coordenades (x_1, y_1), on tracem la recta tangent q, tal com mostra la primera de les dues imatges de sota. En comparar el pendent d'aquesta nova recta tangent $q$amb l'anterior recta t, notem que aquest és superior al de la recta tangent t. Aquest fet permet assegurar que la derivada de la funció f en x_0 és menor que la derivada de f en x_1. A més, deduïm que en aquests dos punts, P i Q, la derivada ha de ser positiva, perquè si la recta és creixent el seu pendent és positiu. D'acord amb aquest exemple, podem generalitzar dient que sempre que la funció sigui creixent (com en aquests dos casos) la derivada serà positiva perquè el pendent de la recta tangent ho és (ja que és una recta creixent) i, a més, es compleix $0 < f'(x_0) < f'(x_1)$, si $x_0 < x_1$.





Per altra banda, sempre que la funció sigui decreixent, la derivada serà negativa perquè el pendent de la recta tangent ho és (ja que és una recta decreixent), és a dir, $f'(x_2) < 0$. Així es visualitza en el cas de la recta tangent r a la funció f en el punt $R = (x_2, y_2)$, que presenta la segona de les dues imatges anteriors.

D'acord amb el que acabem d'observar, podem concloure:

- Si una funció és creixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en aquest punt és positiva. A més, com més ràpidament creix la funció, més gran és el valor de la derivada en el punt.
- Si una funció és decreixent en un punt, la derivada d'aquesta funció en aquest punt és negativa. A més, com més ràpidament decreix la funció, menor és el valor de la derivada en el punt.

Exemple. La derivada i els intervals de creixement/decreixement d'una funció.

Sigui la funció

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

La seva derivada és la funció

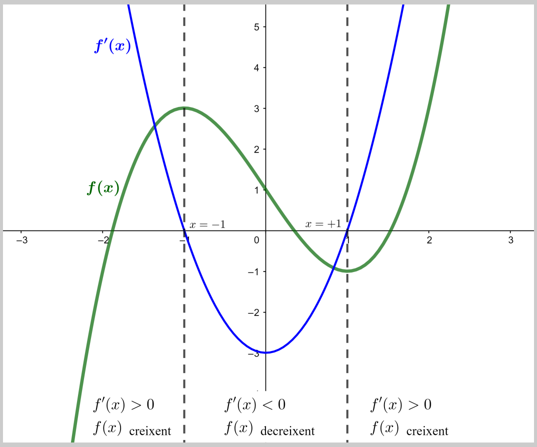
$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Aquesta funció és positiva en els intervals $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$ i negativa en l'interval $(-1, 1)$.

Aquest fet permet dir:

- $f(x)$ és creixent en els intervals $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$.
- $f(x)$ és decreixent en l'interval $(-1, 1)$.

Així ho mostra la gràfica de la funció $f(x)$:



11.3.2. Màxims i mínims d'una funció

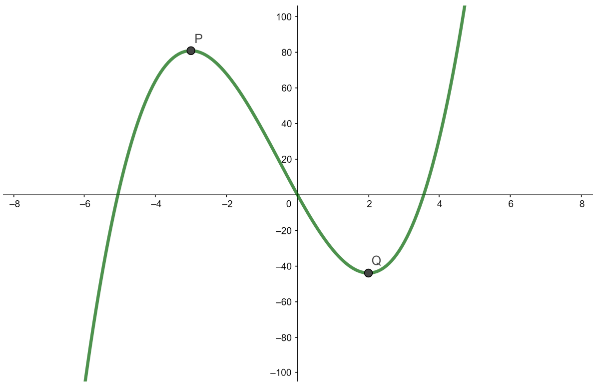
Una de les aplicacions més importants de les derivades és la recerca de punts extrems (màxims i mínims) d'una funció.

Com es localitzen màxims i mínims d'una funció utilitzant-ne la derivada?
Una funció $f(x)$, té un màxim en un punt x_0 si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$.
Una funció té un mínim en x_0 si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$.
També es poden trobar màxims i mínims analitzant el signe de la derivada de $f(x)$ en un entorn del punt x_0.

Definicions. Un **màxim** és un punt d'una funció la imatge del qual és més gran o igual que la imatge de qualsevol altre punt que és proper a aquest punt. Un **mínim** és un punt d'una funció la imatge del qual és menor o igual que la imatge de qualsevol punt que sigui proper a aquest punt. D'acord amb aquestes definicions, donada una funció $f(x)$, s'escriu

$(x_0, f(x_0))$ màxim de $f(x)$ en el cas que, per a tot x d'un entorn de x_0, $f(x_0) \geq f(x)$
$(x_0, f(x_0))$ mínim de $f(x)$ en el cas que, per a tot x d'un entorn de x_0, $f(x_0) \leq f(x)$

Identifiquem aquests punts destacats d'una funció en un exemple concret. Agafem, per exemple, el de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$. La gràfica d'aquesta funció és:



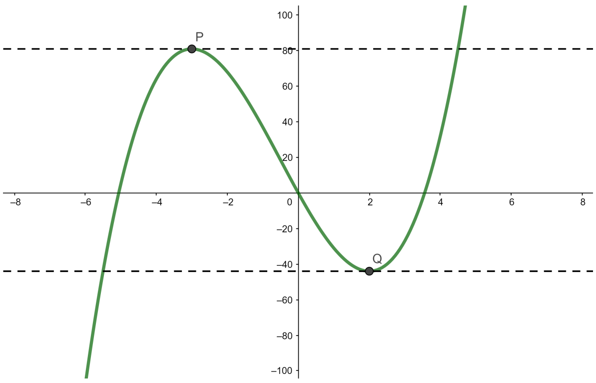
En aquesta gràfica s'hi han marcat dos punts de la funció, P i Q. Aquests punts corresponen respectivament a un màxim local (o relatiu) i a un mínim local (o relatiu) de la funció $f(x)$. Usem el terme *local (o relatiu)* perquè fem referència a un màxim i un mínim en un entorn dels punts extrems, però no a un màxim i un mínim globals de la funció, és a dir, en tot el seu domini.

En el cas del màxim, P, observem que la funció és creixent abans d'arribar al punt, mentre que la funció és decreixent després del punt màxim. Així, abans del màxim la derivada de la funció ha de ser positiva (si una funció és creixent, la seva derivada és positiva), mentre que després del màxim la derivada de la funció ha de ser negativa (si una funció és decreixent, la seva derivada és negativa). Per tant, concloem que, en el punt màxim la derivada passa de ser positiva a ser negativa i, per tant, no queda cap més possibilitat que la derivada de la funció en el màxim de coordenades $(x_{max}, f(x_{max}))$ sigui exactament igual a 0, és a dir, $f'(x_{max}) = 0$.

En el cas de mínim, observem que la funció és decreixent abans d'arribar al punt, mentre que la funció és creixent després del punt mínim. Així, abans del mínim la derivada ha de ser negativa (si una funció és decreixent, la seva derivada és negativa) i després del mínim ha de ser positiva (si una funció és creixent, la seva derivada és positiva). Per tant, en el punt mínim de coordenades $(x_{min}, f(x_{min}))$ la derivada passa de ser negativa a positiva, i no queda altra possibilitat que la derivada de la funció en el mínim sigui exactament igual a 0, és a dir, $f'(x_{min}) = 0$.

En definitiva, quan un punt d'una funció és un màxim o un mínim, la seva derivada en aquests punts s'anul·la, és a dir, és exactament zero.

Aquest fet és comprovable visualment traçant simplement les tangents en aquests punts extrems. Recuperem la gràfica de la funció anterior $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ on, a més, tracem les rectes tangents a la funció en els punts extrems: en el màxim local P i en el mínim local Q.



Tant en el cas del màxim com en el del mínim, la recta tangent en ells és horitzontal i, per tant, amb pendent nul (és a dir, igual a 0), i això indica que la derivada de la funció és 0 en aquests punts.

Exemple. Localització de màxims i mínims d'una funció (I).
Sigui la funció

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

La seva derivada és

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 36$$

Resolem l'equació $f'(x) = 0$ i obtenim les solucions:

$$x = -3 \text{ i } x = 2$$

Això vol dir que els extrems de la funció estan en els punts $x = -3$ i $x = 2$. Més concretament, els punts extrems de la funció $f(x)$ són

$$(-3, f(-3)) = (-3, 81) \text{ i } (2, f(2)) = (2, -44)$$

i això confirma el que havíem observat amb la gràfica de la funció.

Per tant, és possible determinar si un punt és un extrem derivant la funció i resolent l'equació que resulta d'igualar la derivada a 0. Ara bé, **es pot saber quan un extrem és un màxim o un mínim sense haver d'estudiar la gràfica de la funció?**

Sí. Només cal derivar la funció una altra vegada.

Per a calcular la *segona derivada* de la funció, f'', s'utilitzen les regles de derivació habituals. Una vegada calculada la segona derivada de la funció, cal estudiar el signe que pren en ser avaluada en el punt x_0 en qüestió. Aleshores, la regla per a determinar si la funció presenta un màxim o mínim en el punt x_0 del seu domini és la següent:

- En $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$ el punt $(x_0, f(x_0))$ és un màxim de la funció f.
- En $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$ el punt $(x_0, f(x_0))$ és un mínim de la funció f.
- En $f''(x_0) = 0$ no es pot dir res sobre si es tracta d'un màxim o un mínim.

Exemple. Localització de màxims i mínims d'una funció (II).

Donada la funció anterior

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

La derivada de la funció f és

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$$

Els punts en què la derivada s'anul·la són

$$x = -3 \text{ i } x = 2$$

Derivem la derivada de la funció per obtenir la segona derivada de la funció:

$$f''(x) = 12x + 6$$

Estudiem el cas $x_0 = -3$:

$$f''(-3) = 12 \cdot (-3) + 6 = -30 < 0$$

Per tant, el punt $(-3, f(-3)) = (-3, 81)$ és un màxim de la funció, i això confirma el que s'ha observat amb la gràfica de la funció.

Estudiem el cas $x_0 = 2$:

$$f''(2) = 12 \cdot 2 + 6 = 30 > 0$$

Per tant, el punt $(2, f(2)) = (2, -44)$ és un mínim de la funció, i això confirma el que s'ha observat amb la gràfica de la funció.

Una altra manera per saber si una funció f presenta un màxim o un mínim en un punt $(x_0, f(x_0))$ és estudiar el creixement o decreixement de la funció en un entorn de x_0. Així, tenim:

- En $f'(x_0) = 0$ i si la derivada en aquest punt passa de ser negativa a positiva, i per tant la funció passa de decreixent a creixent, $(x_0, f(x_0))$ és un màxim.

- En $f'(x_0) = 0$ i si la derivada en aquest punt passa de ser positiva a negativa, i per tant la funció passa de creixent a decreixent, $(x_0, f(x_0))$ és un mínim.

Exemple. Localització de màxims i mínims d'una funció (III).

Donada la funció anterior $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ i la seva derivada $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$, veiem que els punts en què s'anul·la la derivada són

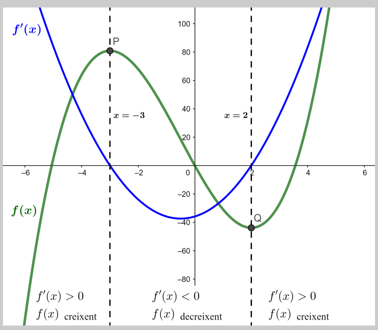
$$x = -3 \text{ i } x = 2$$

Avaluem la funció derivada en punts propers a $x = -3$ i $x = 2$ i notem:

- $f'(x) > 0$ en $x < -3$ i $f'(x) < 0$ en $x > -3$. Per tant, $x = -3$ és un màxim.

- $f'(x) < 2$ en $x < 2$ i $f'(x) > 0$ en $x > 2$. Per tant, $x = 2$ és un mínim.

Això es pot observar en la imatge amb els gràfics de la funció $f(x)$ i la seva derivada:



Problemes d'extrems. D'acord amb les definicions donades, una de les aplicacions de la derivada és la resolució de problemes de maximització i minimització.

En aquest sentit, es diu que un problema és de màxims o mínims, o de maximització o minimització, o en general un **problema d'extrems**, quan es vol resoldre una situació en la qual una determinada magnitud, diguem-li M, depèn d'una altra magnitud, diguem-li x, de manera que $M = f(x)$, i s'ha de trobar un màxim o un mínim de M.

En el cas d'un problema de màxims, es tracta de trobar un màxim de $f(x)$ i, per tant, s'ha de buscar un punt x_0 tal que compleixi alhora $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$. En canvi, en el cas d'un problema de mínims, es tracta de trobar un mínim de $f(x)$ i, per tant, un punt x_0 tal que compleixi alhora $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$.

En l'apartat de problemes resolts hi ha alguns exemples d'aquests tipus de problemes resolts pas a pas per tal d'il·lustrar com es pot procedir en aquests casos.

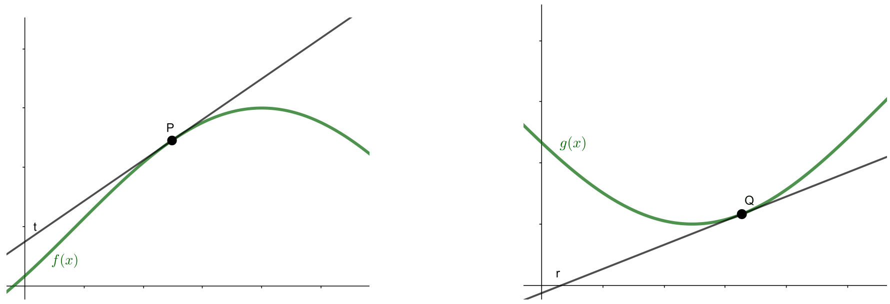
11.3.3. Concavitat i convexitat d'una funció

Quina relació hi ha entre la derivació i la concavitat i convexitat d'una funció?
Quan una funció a prop d'un punt és menor que la recta tangent en aquest punt, es diu que la funció és còncava, mentre que quan la funció és major que la recta tangent, es diu que la funció és convexa. Una funció és còncava en aquells punts en què la seva derivada segona és negativa, mentre que una funció és convexa en aquells punts en què la seva derivada segona és positiva.

En els apartats anteriors s'ha parlat de la relació que hi ha entre la derivada d'una funció i la seva monotonia, és a dir, dels punts del domini en què la funció és creixent, constant o decreixent. En aquest apartat es parlarà de l'aplicació de la derivació per a estudiar la curvatura d'una funció, és a dir, dels punts del domini, en què una funció és còncava o convexa.

Les imatges que hi ha a continuació representen un fragment de les gràfiques de dues funcions $f(x)$ i $g(x)$. En cada una s'hi ha marcat un punt concret. En aquests punts s'hi ha traçat la recta tangent a la funció corresponent.

Funció còncava | Funció convexa

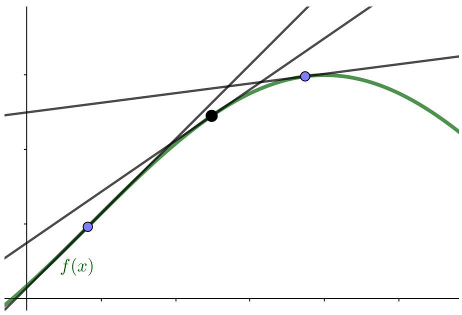


En ambdós casos, la tangent traçada és en un punt en què la funció és creixent. Així mateix, notem que la situació resultant no és la mateixa.

En el cas de la funció f, la tangent en el punt P és per sobre de la funció. Per tant, veiem que a prop del punt P la funció f pren valors més petits que els que pren la tangent, i es diu que la funció és **còncava**. Però en el cas de la funció g la tangent en el punt Q és per sota de la funció. Per tant, la funció g pren valors més grans que la tangent, i es diu que és **convexa**.

Per a conèixer en quins punts del seu domini una funció és còncava i en quins punts és convexa, és essencial estudiar la segona derivada de la funció, tal com veurem amb alguns exemples.

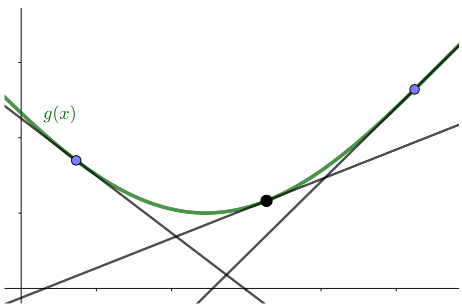
La imatge que hi ha a continuació recupera la gràfica de la funció $f(x)$ anterior que, d'acord amb les descripcions donades, és una funció còncava. Juntament amb la funció, hi trobem dibuixada la recta tangent en diferents punts del seu domini:



Podem observar que el pendent de la recta tangent disminueix a mesura que la variable x pren valors més grans. Com sabem, el pendent de la recta tangent a una funció no és altra cosa que la derivada de la funció. Per tant, deduïm que quan la funció és còncava, la derivada de la funció derivada disminueix a mesura que augmenta la variable x. Això vol dir que quan la funció és còncava, la funció derivada és una funció decreixent. Al seu torn, si la funció derivada és decreixent, la seva derivada (és a dir, la derivada segona de la funció original) ha de ser negativa. Per tant:

una ***funció és còncava*** *en aquells punts en què la seva derivada segona és negativa.*

De manera similar, deduïm la relació entre la derivada segona d'una funció i la seva convexitat. La imatge que hi ha a continuació mostra la gràfica de la funció $g(x)$ que, d'acord amb la descripció anterior, és una funció convexa. Juntament amb la funció, s'ha traçat la recta tangent en diferents punts del seu domini.



Podem observar que el pendent de la recta tangent augmenta a mesura que la variable x pren valors més grans. Tal com s'ha recordat abans, el pendent de la recta tangent a una funció no és altra cosa que la derivada de la funció. Per tant, deduïm que quan la funció és convexa, la derivada de la funció derivada augmenta a mesura que augmenta la variable x. Això vol dir que quan la funció és convexa, la funció derivada és una funció creixent. Al seu torn, si la funció derivada és creixent, la derivada segona de la funció original ha de ser positiva. Per tant:

una ***funció és convexa*** *en aquells punts en què la seva derivada segona és positiva.*

Analitzem ara aquestes fets amb algun exemple concret.

Exemple. Estudi de la concavitat i convexitat d'una funció.

Sigui la funció

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

La seva derivada és

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$$

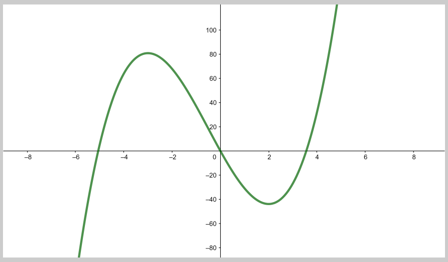
I la seva segona derivada és

$$f''(x) = 12x + 6$$

Notem:

- La funció derivada segona és negativa $f''(x) < 0$ per a $x < -\frac{1}{2}$.
  Per tant, $f(x)$ ha de ser còncava en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.
- La funció derivada segona és positiva $f''(x) > 0$ per a $x > -\frac{1}{2}$.
  Per tant, $f(x)$ ha de ser convexa en $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

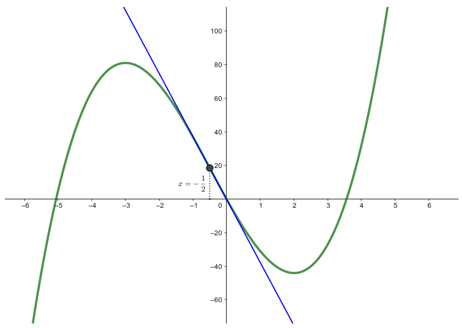
En observar la gràfica de la funció,



comprovem que és així: la funció és còncava en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ i és convexa en $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Ara bé, què passa en el punt que canvia la curvatura d'una funció, com és el punt $x = -\frac{1}{2}$ en el cas de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ de l'exemple? Si derivem la funció $f(x)$ dos cops, observem que en $x = -\frac{1}{2}$, la segona derivada de la funció s'anul·la:

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = 0$$



Per tant, d'acord amb les descripcions anteriors, no podem dir que en aquest punt del domini $x = -\frac{1}{2}$ la funció f sigui còncava o convexa. Ara bé, si estudiem el comportament de la tangent en un entorn d'aquest punt $x = -\frac{1}{2}$ notem que a la seva esquerra la funció és còncava, mentre que a la dreta la funció és convexa. En altres paraules, a l'esquerra de $x = -\frac{1}{2}$ la tangent és més gran que la funció, mentre que a la seva dreta la funció és més petita que la tangent. Es tracta d'un punt on la funció passa de ser còncava a convexa. Els punts en què la funció canvia de curvatura s'anomenen **punts d'inflexió**.

Tal com veurem, una de les característiques dels punts d'inflexió és que la segona derivada de la funció s'hi anuanul·la. Això es deu al fet que els punts d'inflexió són aquells punts on la derivada de la funció té algun màxim o mínim. Si recuperem l'exemple anterior, només cal adonar-se que quan ens acostem al punt d'inflexió $x = -\frac{1}{2}$ la funció f cada vegada decreix més ràpidament, però en passar aquest punt la funció comença a decréixer més lentament. En general, en acostar-nos a un punt d'inflexió la funció cada vegada creix (o decreix) més ràpidament, però en sobrepassar el punt d'inflexió la funció comença a créixer (o decréixer) més lentament. Aquests fets indiquen justament que on hi ha un punt d'inflexió la derivada de la funció té un extrem. Per això mateix, podem trobar els punts d'inflexió buscant zeros de la segona derivada de la funció.

Tal com acabem de dir, si una funció té un punt d'inflexió en un punt x_0, la segona derivada és $f''(x_0) = 0$. Ara bé, que la segona derivada sigui zero en un punt no és condició suficient perquè en aquest punt hi hagi un punt d'inflexió. Ens hem d'assegurar que la curvatura de la funció canvia. Per això, es pot estudiar el comportament de la funció a esquerra i dreta del punt o bé considerar les derivades d'ordre superior a f''. En aquest cas, s'ha de tenir en compte:

- Si la primera derivada (per sobre de f'') que no s'anul·la és d'ordre parell, el punt no és d'inflexió.
- Si la primera derivada (per sobre de f'') que no s'anul·la és d'ordre senar, el punt és d'inflexió.

En definitiva, per a trobar els intervals de concavitat i convexitat d'una funció, cal trobar en primer lloc els valors x del seu domini on la segona derivada de la funció s'anul·la (és a dir, resoldre $f''(x) = 0$) i els valors $\widetilde{x}$ on aquesta segona derivada no existeix, i estudiar posteriorment el signe de la segona derivada en ells. En particular, si la segona derivada canvia de signe en un entorn de x, el punt $(x, f(x))$ és un punt d'inflexió de la funció $f(x)$.

11.3.4. Representació gràfica d'una funció

Per a traçar la gràfica d'una funció, és necessari conèixer diferents aspectes de la funció, com el domini o els talls amb els eixos. Entre aquests aspectes també n'hi ha que requereixen el càlcul de derivades, com la *monotonia* (creixement i decreixement de la funció), l'*existència d'extrems* (màxims i mínims de la funció) o la *curvatura* (concavitat i convexitat de la funció). A continuació veurem amb més detalls quins són aquests aspectes útils i més importants per al traçat (aproximat) de la gràfica d'una funció. Els exemplificarem amb l'estudi de la funció racional

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Els aspectes més importants per a la representació aproximada d'una funció són:

- **Domini**. Els punts on la funció és ben definida.

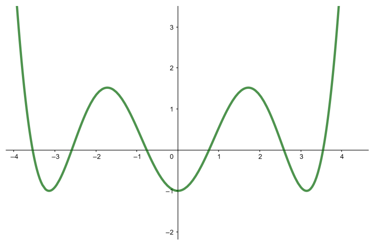
Quina informació cal conèixer per a representar la gràfica d'una funció?
La informació bàsica que s'ha de buscar per a representar una funció és: domini, punts de tall amb els eixos, possibles simetries, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims, intervals de concavitat i convexitat, punts d'inflexió i comportament asimptòtic. Veiem que el càlcul de derivades esdevé una eina vital per a determinar aquestes informacions.

La funció $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ és una funció racional. Per tant, és ben definida per a tots els punts que no anul·len el denominador. Això vol dir que el seu domini són tots els x tals que $x^2-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \{-1,1\}$. Per tant, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

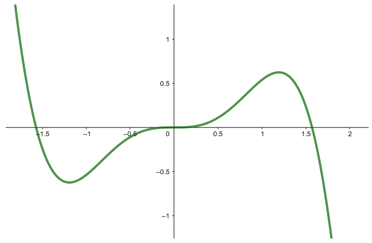
- **Punts de tall amb els eixos**. Els punts de la gràfica de la funció del tipus $(0, f(0))$ i $(x, 0)$.

Eix Y: $x = 0$: $f(0) = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow$ punt $P(0,0)$
Eix X: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Per tant, hi ha un únic punt de tall amb els eixos, que és el punt $P(0,0)$.

- **Simetria**. Determinar si es dona alguna de les condicions següents:
  - Es diu que una funció $f(x)$ és parell o **simètrica respecte de l'eix X** si es compleix $f(-x) = f(x)$.



  - Es diu que una funció $f(x)$ és senar o **simètrica respecte de l'origen** si es compleix $f(-x) = -f(x)$.



Val a dir que una funció pot ser que no sigui ni simètrica respecte de l'eix X ni simètrica respecte de l'origen.

La funció de l'exemple és simètrica respecte de l'origen, ja que

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$$

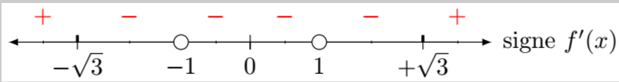
- **Intervals de creixement i decreixement**. Els intervals del domini on la funció creix és constant o decreix. Es poden determinar trobant els punts on s'anul·la la derivada de la funció i estudiant el signe que pren la derivada en ells.

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Per a veure en quins punts la derivada de la funció és positiva o negativa, n'hi ha prou d'estudiar el signe del numerador, ja que el denominador és sempre positiu per ser un quadrat.

Calculem els punts on s'anul·la el numerador. Tenint en compte $x^4 - 3x^2 = x^2(x^2-3)$, obtenim els punts $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ i $x = -\sqrt{3}$. Per a estudiar el signe de la derivada, també hem de tenir en compte els punts on no és definida. En aquest cas, $x = \pm 1$.

Així, doncs, tots aquest punts ens divideixen el domini en sis intervals on la funció pren valors negatius i positius. Vegem el signe dels sis intervals definits en la imatge següent:



Per tant, tenim

$f(x)$ és creixent en $(-\infty, -\sqrt{3})$ i $(\sqrt{3}, +\infty)$

$f(x)$ és decreixent en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\sqrt{3})$.

- **Extrems: màxims i mínims**. Els punts en què la funció assoleix els valors màxims i mínims. Es poden trobar estudiant el comportament de la funció en un entorn dels punts on s'anul·la la derivada de la funció.

La derivada de la funció f

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

s'anul·la en

$$x = 0,\ x = -\sqrt{3} \text{ i } x = \sqrt{3}$$

En estudiar el comportament de la funció en aquests punts, notem:

- En $x = 0$: $0 \in (-1, 1)$ que és un interval on la funció és creixent. Per tant, en $x = 0$ no hi ha ni màxim ni mínim.
- En $x = -\sqrt{3}$: tenint en compte els intervals de creixement i decreixement, veiem que en aquest punt la funció passa de ser creixent a decreixent i per tant hi ha un màxim. El màxim és $\left(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})\right) = \left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.
- En $x = \sqrt{3}$: a partir dels intervals de creixement i decreixement veiem que la funció passa de decreixent a creixent en aquest punt. Per tant, en $x = \sqrt{3}$ hi ha un mínim i el punt màxim és $\left(+\sqrt{3}, f(+\sqrt{3})\right) = \left(+\sqrt{3}, +\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

- **Concavitat, convexitat i punts d'inflexió**. Els intervals del domini on la funció és còncava o convexa i els punts d'inflexió. Es poden determinar trobant els punts on s'anul·la la segona derivada de la funció i on aquesta derivada no és definida i, a continuació, estudiant el signe de la segona derivada en ells.

Busquem els punts on s'anul·la la segona derivada de la funció i on aquesta no és definida:

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = 0$$

L'única arrel del numerador és $x = 0$. Per al denominador, les arrels són $x = \pm 1$. Cal estudiar el signe de la $f''(x)$ en les zones que determinen aquests punts, i per tant en els intervals $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(+1, +\infty)$. I tenim:

- $f''(x) > 0$ per a $x \in (-\infty, -1)$ i $x \in (0, +1)$. Per tant, $f(x)$ és convexa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
- $f''(x) < 0$ per a $x \in (-1, 0)$ i $x \in (+1, +\infty)$. Per tant, $f(x)$ és còncava en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.
- $f''(0) = 0$ i en $x = 0$ la funció f passa de còncava a convexa. Per tant, en $x = 0$ hi ha un punt d'inflexió $(0, f(0)) = (0, 0)$.

- **Asímptotes**. Rectes (verticals, horitzontals o obliqües) a les quals s'aproxima la corba de la gràfica de la funció. Per a les verticals, s'han d'estudiar els límits en els punts que no pertanyen al domini i, per a les horitzontals, els límits quan x tendeix a $\pm\infty$. Les asímptotes obliqües se solen trobar en funcions racionals en les quals el polinomi del numerador és d'un grau superior al del polinomi denominador.

- $\boxed{\text{Asímptotes verticals}}$ S'han d'estudiar els límits en els punts que no pertanyen al domini, que són $x = -1$ i $x = +1$:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +1^+} f(x) = +\infty$$

  Per tant, les rectes $x = -1$ i $x = 1$ són asímptotes verticals.

- $\boxed{\text{Asímptotes horitzontals}}$ No en té, ja que els límits de la funció quan x tendeix $\pm\infty$ són ambdós infinits i no tendeixen a cap valor concret.

- $\boxed{\text{Asímptotes obliqües}}$ $f(x)$ és una funció racional tal que el grau del seu polinomi numerador (3) és d'un grau superior al del seu polinomi denominador (2). Podem trobar l'expressió d'aquesta recta, que ha de ser de la forma $y = mx + n$, calculant els límits corresponents:

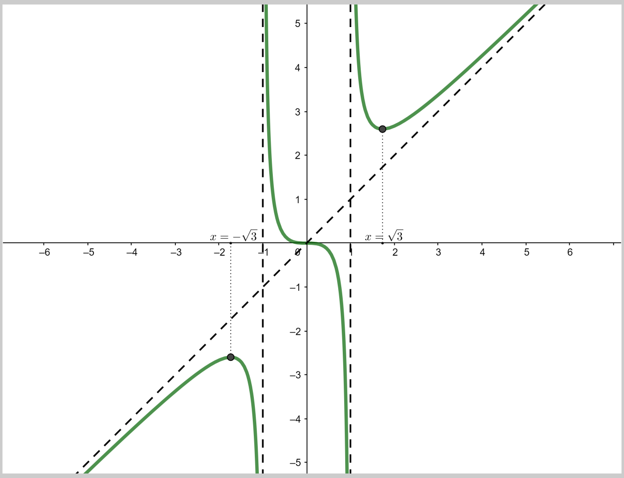
$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x \cdot (x^2 - 1)} = 1$$
$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{(x^2 - 1)} - x \right) = 0$$

  Per tant, la recta $y = x$ és una asímptota oblíqua de la funció $f(x)$. Ho comprovem així:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0 \text{ i } \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$$

- **Gràfica de la funció**. Una vegada identificats tots aquests elements, és possible la gràfica següent.

Gràfica de la funció
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$



Resum

Derivació de funcions

Derivada d'una funció en un punt

Definició. La derivada d'una funció f en un punt x_0 s'indica per $f'(x_0)$ i es defineix per aquest límit:

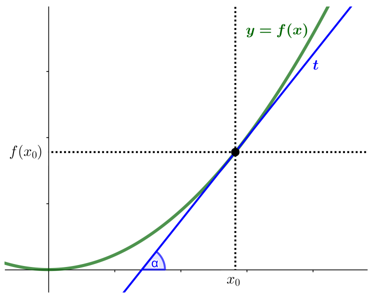
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}}$$

Si aquest límit no existeix, es diu que la funció $f(x)$ no és derivable en x_0.

Interpretació. La derivada d'una funció $f(x)$ en un punt x_0 del seu domini coincideix amb el pendent de la recta tangent de la funció en aquest punt. És a dir,

$$f'(x_0) = \tan(\alpha)$$

on α és l'angle que hi ha entre l'eix X i la recta tangent a la funció en el punt x_0.



Derivada d'una funció

Definició. La derivada d'una funció f és aquella funció que associa a cada punt x del domini la derivada d'aquesta funció. La funció derivada es designa per $f'(x)$.

Taula de derivades. Les principals derivades de funcions són:

Taula de derivades		
$f(x)$	$f'(x)$	**Exemples**
$k,\ k \in \mathbb{Z}$	0	$f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$
$a \cdot x,\ a \in \mathbb{R}$	a	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $g(x) = -4x \Rightarrow g'(x) = -4$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}$	$n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$	
$a^x,\ a \in \mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln(a)$	$f(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x \cdot \ln(3)$ $g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a(e)$	$f(x) = \log_3(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \log_3(e)$ $g(x) = \ln(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Regles de càlcul

- Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions, la derivada de la suma (o resta) de les dues funcions és

$$\boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)}$$

- Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions, la derivada del producte de les dues funcions és

$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

- Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions, la derivada del quocient de les dues funcions és

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

- Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions, la derivada de la composició de les dues funcions és

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

- Si $f(x)$ i $g(x)$ són dues funcions, per a derivar la potència de f elevada a g, $h(x) = f(x)^{g(x)}$ cal extreure en primer lloc el ln d'aquesta funció:

$$\ln(h(x)) = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x) \cdot \ln(f(x))$$

Llavors es deriva aquesta segona funció aplicant la regla de la cadena:

$$\boxed{h'(x) = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}\right)}$$

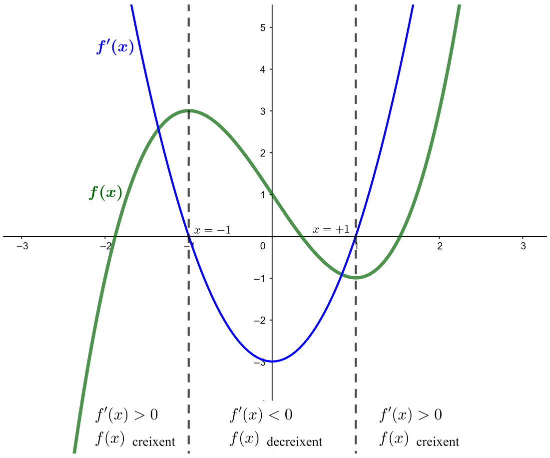
Creixement i decreixement

Definicions

- **Funció creixent**. Si una funció f és creixent en un punt x_0, la seva derivada en aquest punt x_0 és positiva: $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ és creixent en x_0.
  A més, com més ràpidament creix la funció, més gran és el valor de la derivada en el punt.

- **Funció decreixent**. Si una funció f és decreixent en un punt x_0, la seva derivada en aquest punt x_0 és negativa: $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ és decreixent en x_0.
  A més, com més ràpidament decreix la funció, més petit és el valor de la derivada en el punt,.

Exemple



Localització d'extrems

Els extrems d'una funció són els punts màxims i punts mínims que presenta la funció.

Definició d'extrems. Distingim dos tipus d'extrems:

- Un **màxim** d'una funció f és un punt de la funció la imatge del qual és més gran o igual que la imatge de qualsevol altre punt que és proper al punt:
  $$(x_0, f(x_0)) \text{ màxim de } f(x) \text{ si } \forall x \text{ d'un entorn de } x_0 : f(x_0) \geq f(x)$$

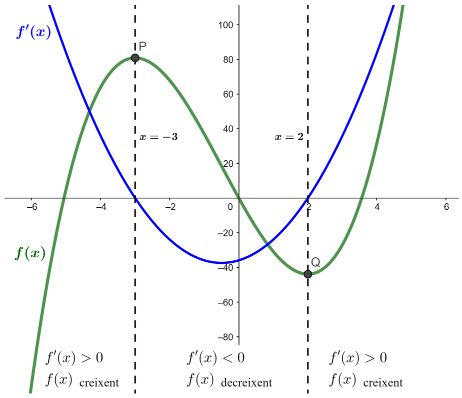
- Un **mínim** és un punt de la funció la imatge del qual és menor o igual que la imatge de qualsevol altre punt que és proper al punt:
  $$(x_0, f(x_0)) \text{ mínim de } f(x) \text{ si } \forall x \text{ d'un entorn de } x_0 : f(x_0) \leq f(x)$$

Recerca d'extrems. Hi ha dues maneres de trobar els màxims i mínims de $f(x)$:

- Trobar la primera i segona derivades de la funció. Aleshores:
  $$(x_0, f(x_0)) \text{ màxim de } f(x) \text{ si } f'(x_0) = 0 \text{ i } f''(x_0) < 0$$
  $$(x_0, f(x_0)) \text{ mínim de } f(x) \text{ si } f'(x_0) = 0 \text{ i } f''(x_0) > 0$$

- Trobar la primera derivada i estudiar el comporament de la funció. Aleshores:
  $(x_0, f(x_0))$ és màxim de $f(x)$ en $f'(x_0) = 0$, i la derivada en aquest punt passa de ser positiva a negativa.
  $(x_0, f(x_0)$ és mínim de $f(x)$ en $f'(x_0) = 0$, i la derivada en aquest punt passa de ser negativa a positiva.

Exemple



Problema d'extrems. Es demana resoldre una situació en la qual una certa magnitud M depèn d'una altra magnitud x de manera que $M = f(x)$, i s'ha de trobar el màxim o el mínim d'aquesta funció M. Es distingeixen dos casos:

- En el cas d'un problema de màxims, es tracta de trobar un màxim de $f(x)$ i, per tant, s'ha de buscar un punt x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ i, alhora, $f''(x_0) < 0$.

- En el cas d'un problema de mínims, es tracta de trobar un mínim de $f(x)$ i, per tant, s'ha de buscar un punt x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ i, alhora, $f''(x_0) > 0$.

Concavitat i convexitat

Definicions

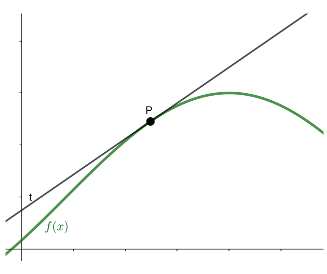
- Una funció $f(x)$ és **convexa** en un punt (x_0, y_0) quan el valor d'aquesta funció és més gran que el valor de la tangent de la funció en un entorn d'aquest punt. En aquest cas, $f''(x_0) > 0$.

- Una funció f és **còncava** en un punt (x_0, y_0) quan el valor d'aquesta funció és més petit que el valor de la tangent de la funció en un entorn d'aquest punt. En aquest cas, $f''(x_0) < 0$.

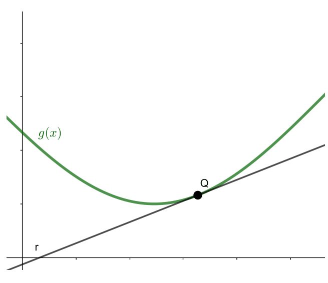
- Un **punt d'inflexió** d'una funció f és un punt en el qual la funció canvia la seva curvatura, és a dir, passa de ser còncava a convexa, o viceversa. En aquest cas, $f''(x_0) = 0$.

Exemples

Funció còncava



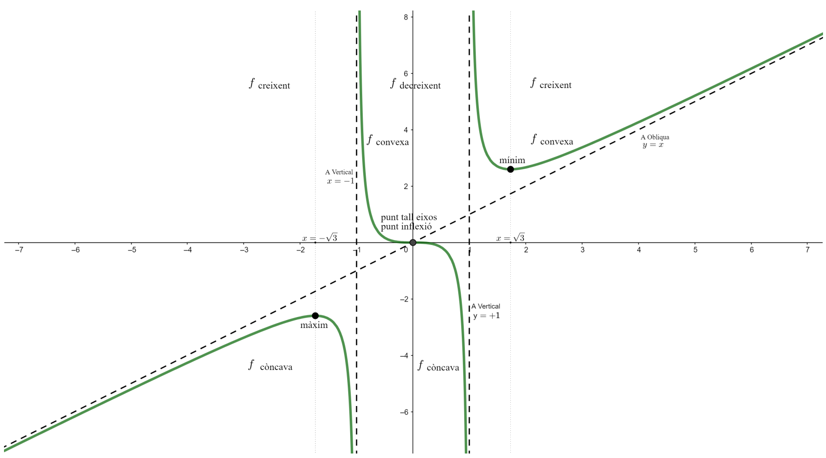
Funció convexa



Representació gràfica d'una funció

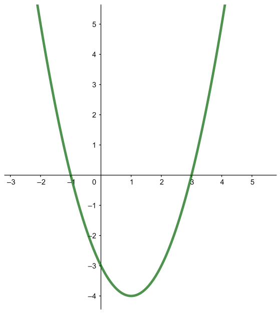
Per a representar gràficament una funció, cal conèixer certa informació. Il·lustrem aquesta informació imprescindible amb un exemple concret:

Descripció dels elements per a representar gràficament una funció $f(x)$.	**Exemple**. Representar gràficament $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$
Domini	
Punts de l'eix X on $f(x)$ és definida.	$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
Punts de tall amb els eixos	
Punts del tipus $(0, f(0))$ i $(x, 0)$.	Un únic punt de tall, el $(0, 0)$
Simetria	
Una funció f és parell o simètrica respecte de l'eix Y quan $f(-x) = f(x)$. Una funció f és simètrica respecte de l'origen quan $f(-x) = -f(x)$.	És simètrica respecte de l'origen: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$
Intervals de creixement i decreixement	
Signe de la derivada de la funció: • $f(x)$ és creixent en $f'(x) > 0$. • $f(x)$ és decreixent en $f'(x) < 0$.	És creixent en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ i decreixent en $\left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right)$
Extrems: màxims i mínims	
Quan s'anul·la la derivada de la funció, • x_0 màxim de f si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$. • x_0 mínim de f si $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$.	$\left(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})\right) = \left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ és màxim. $\left(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})\right) = \left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ és mínim.
Punts d'inflexió	
Quan s'anul·la la segona derivada de la funció, x_0 punt d'inflexió en $f''(x_0) = 0$ i f'' canvia de signe en un entorn de x_0.	$(0, f(0)) = (0, 0)$ és un punt d'inflexió
Intervals de concavitat i convexitat	
Signe de la segona derivada de la funció: • $f(x)$ convexa si $f''(x) > 0$ • $f(x)$ còncava si $f''(x) < 0$	És còncava en $(-1, 0)$ i $(1, \infty)$. És convexa en $(-\infty, -1)$ i $(0, 1)$.
Comportament asimptòtic	
Estudi de l'existència d'asímptotes verticals, horitzontals o obliqües de la funció.	$x = -1$ i $x = 1$ són asímptotes verticals i $y = x$ és una asímptota oblíqua
Gràfica	



Exercicis resolts

1. **La imatge mostra la gràfica de la derivada, $f'(x)$, d'una funció, $f(x)$.**



Contesteu raonadament aquestes preguntes sobre la funció $f(x)$:

(a) A $x = 0$: és $f(x)$ creixent o decreixent?

(b) A $x = 3.5$: és $f(x)$ creixent o decreixent?

(c) Té $f(x)$ cap mínim?

(d) Té $f(x)$ cap màxim?

(e) Determineu els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$.

Solució:

(a) A $x = 0$: la derivada és negativa, i per tant $f(x)$ és decreixent en aquest punt.

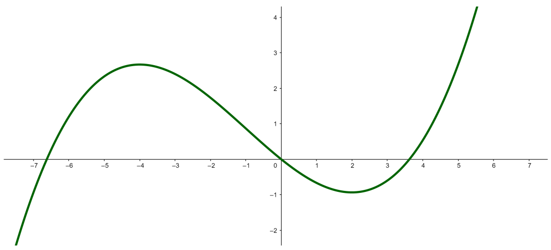
(b) A $x = 3.5$: la derivada és positiva, i per tant $f(x)$ és creixent en aquest punt.

(c) Sí, en el punt $x = 3$, perquè la derivada passa de ser negativa a positiva.

(d) Sí, en el punt $x = -1$, perquè la derivada passa de ser positiva a negativa.

(e) La funció $f(x)$ és decreixent en $[-1, 3]$ perquè la derivada és negativa en aquest interval, i $f(x)$ és creixent a la resta del domini, és a dir, en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, perquè és on la derivada és positiva.

2. **La gràfica d'una funció $f(x)$ és**



Contesteu raonadament aquestes preguntes sobre la funció derivada $f'(x)$:

(a) Quin és el signe de la derivada, $f'(x)$, en $x = 3$? I en $x = -0.5$?

(b) Hi ha cap punt en què la derivada, $f'(x)$, s'anul·li?

(c) Determineu el signe de la derivada, $f'(x)$, en tots els punts del domini de la funció.

Solució:

(a) En $x = 3$ la funció derivada $f'(x)$ és positiva perquè la funció $f(x)$ és creixent en aquest punt.
En $x = -0.5$ la funció derivada $f'(x)$ és negativa perquè la funció $f(x)$ és decreixent en aquest punt.

(b) Sí, en els punts $x = -4$ i $x = 2$, perquè s'hi troben, respectivament, un màxim i un mínim locals de la funció $f(x)$.

(c) La derivada $f'(x)$ és negativa en $(-4, 2)$ perquè la funció és decreixent en aquest interval. La derivada $f'(x)$ és positiva a $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$ perquè la funció és creixent en aquests intervals.

3. **Per a cadascuna d'questes tres funcions,**

$$f(x) = \frac{8x^2}{4 - x^2} \qquad g(x) = \frac{2x}{\ln(x)} \qquad h(x) = x^3 - 3x + 2$$

determineu:

(a) el domini de cadascuna,

(b) els seus punts de tall amb els eixos,

(c) els corresponents màxims i mínims,

(d) els punts d'inflexió,

(e) els intervals de creixement i decreixement,

(f) els intervals de concavitat i convexitat,

(g) les asímptotes,

(h) la seva gràfica.

Solucions:

Estudi de la primera funció:

$$f(x) = \frac{8x^2}{4 - x^2}$$

(a) Per ser $f(x)$ una funció racional, el seu domini consta de tots els nombres excepte aquells que anul·len el polinomi del denominador:

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \{-2, +2\}$$

Per tant, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\} = (0, -2) \cup (2, +\infty)$.

(b) Talls amb els eixos:

Eix Y: $f(0) = \dfrac{0}{4-0} = 0 \Rightarrow$ el punt $(0, 0)$.

Eix X: $f(x) = \dfrac{8x^2}{4-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ el punt $(0, 0)$.

(c) Per a trobar els màxims i mínims, derivem la funció i la igualem a 0:

$$f'(x) = \frac{16x \cdot \left(4 - x^2\right) - 8x^2 \cdot (-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{64x}{(4 - x^2)^2} = 0$$

Resolem l'equació i obtenim una única possibilitat:

$$x = 0$$

Calculem la segona derivada:

$$f''(x) = \frac{192x^2 + 256}{(4 - x^2)^3}$$

En avaluar la segona derivada en $x = 0$, obtenim que és positiva,

$$f''(0) = 4 > 0$$

la qual cosa informa que es tracta d'un mínim.

Per tant, $f(x)$ presenta únicament un mínim, que és el punt $(0, f(0)) = (0, 0)$.

(d) No hi ha cap punt d'inflexió perquè no trobem cap punt x_0 que compleixi $f''(x_0) = 0$.

(e) Hi ha quatre intervals de creixement o decreixement, separats pels límits del domini i pel mínim. Estudiem el comportament de la funció en cada un d'aquests quatre intervals avaluant la derivada en un punt interior en cada un:

- De $-\infty$ a -2: $f(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ és decreixent.
- De -2 a 0: $f(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ és decreixent.
- De 0 a 2: $f(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ és creixent.
- De 2 a $+\infty$: $f(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ és creixent.

(f) Per a determinar els intervals de concavitat i convexitat, n'hi ha prou d'estudiar el signe de la segona derivada de la funció entre els límits del domini únicament, atès que no hi ha cap punt d'inflexió (on $f''(x) = 0$):

- De $-\infty$ a -2: $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ és còncava
- De -2 a $+2$: $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ és convexa.
- De $+2$ a $+\infty$: $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ és còncava.

(g) Té tres asímptotes: dues de verticals i una d'horitzontal:

- Asímptotes verticals: s'han d'estudiar els límits en els punts que no pertanyen al domini, que són $x = -2$ i $x = +2$:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +2^+} f(x) = +\infty$$

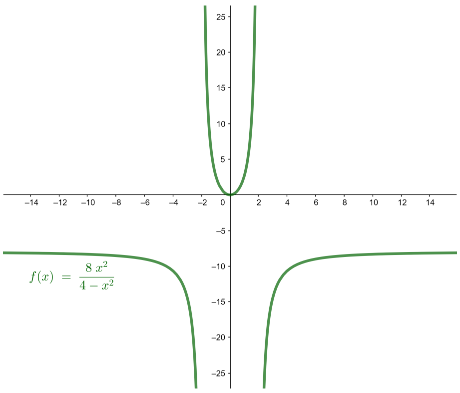
  Per tant, les rectes $x = -2$ i $x = +2$ són asímptotes verticals.

- Asímptotes horitzontals: s'han d'estudiar els límits de la funció quan x tendeix $-\infty$ i $+\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -8 = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

  Per tant, la recta $y = -8$ és una asímptota horitzontal de la funció f

(h) La gràfica de la funció f és



Estudi de la segona funció:

$$g(x) = \frac{2x}{\ln(x)}$$

(a) Domini:
Per ser $g(x)$ una funció amb un logaritme en el denominador, la funció és ben definida per a tots els nombres més grans que 0 (ja que el logaritme només és definit per a nombres positius), excepte aquells que anul·len el denominador:

$$\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

Per tant, $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,+\infty)$.

(b) Talls amb els eixos:
Eix Y: $g(0)$ no es pot calcular, ja que $x = 0$ no pertany al domini. Per tant, no n'hi ha.
Eix X: $g(x) = \dfrac{2x}{\ln(x)} = 0 \Rightarrow \ 0$, però $x = 0$ no pertany al domini. Per tant, no n'hi ha.

(c) Per a trobar els màxims i mínims, derivem la funció i la igualem a 0:

$$g'(x) = \frac{2\ln(x) - 2}{\ln^2(x)}$$

Resolem l'equació i obtenim una única possibilitat:

$$x = e$$

Calculem la segona derivada:

$$g''(x) = -\frac{2 \cdot \ln(x) - 4}{x \cdot \ln^3(x)}$$

En avaluar la segona derivada en $x = e$, obtenim que és positiva,

$$\frac{2}{e} > 0$$

la qual cosa informa que es tracta d'un mínim.
Per tant, $g(x)$ presenta únicament un mínim, que és el punt $(e, g(e)) = (e, 2e)$.

(d) Per a trobar els punts d'inflexió, igualem la segona derivada a 0 i resolem l'equació resultant:

$$g''(x) = -\frac{2 \cdot \ln(x) - 4}{x \cdot \ln^3(x)} = 0 \Rightarrow x = e^2$$

A més,

$$g'''(x) = \frac{2 \cdot \ln^2(x) - 12}{x^2 \cdot \ln^4(x)}$$

d'on resulta

$$g'''(e^2) \neq 0$$

Per tant, $\left(e^2, g(e^2)\right) = (e^2, e^2)$ és un punt d'inflexió de g.

(e) Hi ha tres intervals de creixement o decreixement, separats pels límits del domini i pel mínim. Estudiem el comportament de la funció en cada un d'aquests tres intervals avaluant la derivada en un punt interior en cada un:

- De 0 a 1: $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ és decreixent
- De 1 a e: $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ és decreixent
- De e a $+\infty$: $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ és creixent

(f) Per a determinar els intervals de concavitat i convexitat, cal estudiar la segona derivada de la funció entre els límits del domini i el punt d'inflexió:

- De 0 a 1: $g''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ és còncava.
- De 1 a e^2: $g''(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ és convexa.
- De e^2 a $+\infty$: $g''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ és còncava.

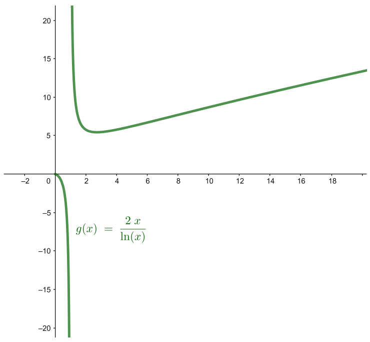
(g) Té una asímptota únicament, que és vertical:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

Per tant, la recta $x = 1$ és una asímptota vertical de la funció g.
A més, notem

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

(h) La gràfica de la funció g és



Estudi de la tercera funció:

$$h(x) = x^3 - 3x + 2$$

(a) Per ser $h(x)$ una funció polinòmica, el seu domini consta de tots els nombres reals. Per tant, $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$.

(b) Talls amb els eixos:
Eix Y: $h(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow$ el punt $(0, 2)$.
Eix X: $h(x) = x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ i $x = 1 \Rightarrow$ els punts $Q(-2, 0)$ i $(1, 0)$.

(c) Per a trobar els màxims i mínims, derivem la funció i la igualem a 0:

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

Resolem l'equació i obtenim dues possibilitats: $x = -1$ i $x = +1$.
Calculem la segona derivada:

$$h''(x) = 6x$$

L'avaluem en $x = -1$ i $x = +1$ i obtenim:

$$h''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \text{ i } h''(+1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$$

Per tant, h té un màxim en $(-1, h(-1)) = (-1, 4)$ i un mínim en $(1, h(1)) = (1, 0)$.

(d) Per a trobar els punts d'inflexió, igualem la segona derivada a 0 i resolem l'equació resultant:

$$h''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

A més, $h'''(x) = 6 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Per tant, el punt $(0, h(0)) = (0, 2)$ és un punt d'inflexió de h.

(e) Hi ha tres intervals de creixement o decreixement, separats pels extrems trobats (el màxim i el mínim). Estudiem el comportament de la funció en cada un d'aquests tres intervals avaluant la derivada en un punt interior en cada un:

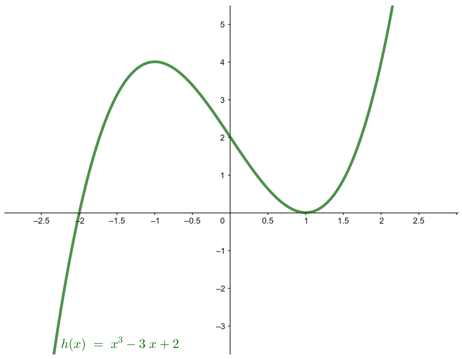
- De $-\infty$ a -1: $h'(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ és creixent
- De -1 a 1: $h'(x) < 0 \Rightarrow h(x)$ és decreixent
- De 1 a $+\infty$: $h'(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ és creixent

(f) Per a determinar els intervals de concavitat i convexitat, només cal estudiar la segona derivada de la funció abans i després del punt d'inflexió (ja que el domini són tots els reals):

- De $-\infty$ a 0: $h''(x) < 0 \Rightarrow h(x)$ és còncava.
- De 0 a $+\infty$: $h''(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ és convexa.

(g) Aquesta funció no té cap asímptota

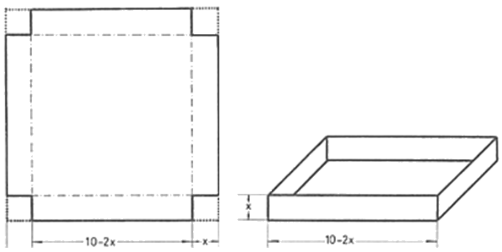
(h) La gràfica de la funció h és



4. **Amb una peça de cartolina de** 10 **dm de costat es vol construir una caixa retallant peces quadrades de costat** x **en cada vèrtex del quadrat. Quin valor s'ha de donar a** x **perquè el volum de la caixa sigui el màxim?**

Solució

Comencem per representar gràficament la situació que descriu l'enunciat del problema:



Notem que el volum de la caixa es correspon amb el volum d'un prisma rectangular. El seu valor es pot trobar multiplicant amplada per llargada i per altura. Si sabem, a més, que la cartolina fa 10 dm de costat, el volum del prisma és producte de l'expressió

$$V(x) = (10-2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$

Així, queda clar que el volum de la caixa depèn del valor de x. Trobada la funció amb què treballar, es tracta de trobar-ne un màxim en l'interval $(0,5)$ per simetria, ja que el tall en els extrems no pot superar 5 dm. En particular, notem que el volum de la caixa, tant en 0 com en 5, és igual a 0:

$$V(0) = V(5) = 0$$

Vegem, doncs, si podem trobar el màxim en l'interior d'aquest interval. Per això, tractarem de trobar un punt, $x_0 \in (0,5)$, que compleixi les condicions de màxim, és a dir, que compleixi alhora

$$V'(x_0) = 0 \text{ i } V''(x_0) < 0$$

Trobem la derivada de la funció i la igualem a 0:

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 4 \cdot (3x^2 - 20x + 25) = 0$$

Resolem l'equació obtinguda aplicant la fórmula de resolució per a equacions de segon grau i trobem que s'anul·la en dos punts:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400-300}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} = \left\{5, \frac{5}{3}\right\}$$

El primer valor, $x = 5$, no és dintre de l'interval $(0,5)$ considerat, i per tant només podem considerar el segon resultat: $x = \frac{5}{3}$. Per a saber si en aquest punt hi ha un màxim o un mínim de la funció, hem de calcular la segona derivada de la funció i avaluar-la en aquest punt:

$$V''(x) = 24x - 80 \text{ i } V''\left(\frac{5}{3}\right) = 24 \cdot \frac{5}{3} - 80 = -40 < 0$$

Per tant, podem concloure que en $x = \frac{5}{3} \approx 1.66$ hi ha un màxim de la funció.

Això vol dir que, per tal que la nova caixa tingui el volum màxim possible, s'hauran de retallar quadrats d'aproximadament 1.66 dm de costat. Aleshores, el volum de la caixa resultant, que serà màxim, serà

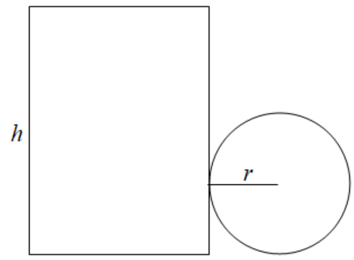
$$V\left(\frac{5}{3}\right) = \left(10 - 2 \cdot \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} = \left(\frac{20}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{2000}{27} \approx 74.07 \text{ dm}^3$$

5. **Es volen construir pots cilíndrics (com els de les begudes refrescants) de** 500 **cm**^{3} **de volum. Quines dimensions (altura i diàmetre de la base) s'han de donar a un envàs d'aquestes característiques perquè necessiti la mínima quantitat de material?**

Solució

Distingim dues possibilitats en funció de si el pot, que ha de ser cilíndric, té una o dues tapes.

Primer cas: pot amb una tapa. Si considerem que el pot, que és cilíndric, té una única tapa, el desenvolupament pla que li correspon és



Aleshores, el material necessari per a construir-lo ha de tenir una superfície de

$$S = 2\pi rh + \pi r^2$$

L'enunciat imposa que el volum del pot ha de ser de 500 cm^3, i per tant s'ha de complir

$$\pi r^2 h = 500$$

d'on, aïllant h en funció de r, resulta

$$h = \frac{500}{\pi r^2}$$

Per tant, la funció S a estudiar, que dependrà del radi r, esdevé

$$S(r) = 2\pi r \cdot \left(\frac{500}{\pi r^2}\right) + \pi r^2 = \frac{1000}{r} + \pi r^2$$

Així, es tracta de trobar un valor per a r de manera que faci mńim el valor de $S(r)$. Per això, sabem que si r_0 és el valor mínim d'aquesta funció, es compleix

$$S'(r_0) = 0 \text{ i } S''(r_0) > 0$$

Calculem, doncs, $S'(r)$ i igualem a 0:

$$S'(r) = -\frac{1000}{r^2} + 2\pi r = 0$$
$$2\pi r = \frac{1000}{r^2}$$
$$2\pi r^3 = 1000$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}}$$
$$r = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \approx 5.42$$

Per tant, el radi hauria de mesurar aproximadament 5,42 cm.
Trobat el valor candidat a extrem, comprovem si es tracta realment d'un mínim de la funció i, per tant, fa mínim el valor de la funció:

$$S''(r) = \frac{3000}{r^3} + 2\pi \text{ i } S''(5.42) \approx 18.85 > 0$$

Confirmem així que en prendre $r \approx 5.42$ cm, la funció superfície $S(r)$ pren un valor mínim, que és igual a $S(5.42) \approx 276.8$ cm^2 aproximadament.

Segon cas: pot amb dues tapes. Si s'interpreta que el pot cilíndric té, com les llaunes de refrescs, dues tapes i no solament una, la funció superfície ha d'incloure la superfície de l'altra tapa. Aleshores, cal treballar amb la funció

$$S(r) = 2\pi rh + 2\left(\pi r^2\right)$$

En imposar la condició que el volum ha de ser de 500 cm^3, la funció en funció del radi r esdevé

$$S(r) = \frac{1000}{r} + 2\pi r^2$$

Aleshores,

$$S'(r) = -\frac{1000}{r^2} + 4\pi r = 0$$

d'on resulta

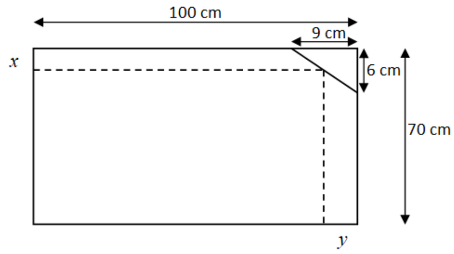
$$4\pi r = \frac{1000}{r^2}$$
$$r^3 = \frac{1000}{4\pi}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{4\pi}}$$
$$r = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \approx 4.3$$

Per tant, el radi hauria de mesurar aproximadament 4,3 cm.
Trobat el valor candidat a extrem, comprovem si es tracta realment d'un mínim de la funció i, per tant, fa mínim el valor de la funció:

$$S''(r) = \frac{3000}{r^3} + 4\pi \text{ i } S''(4.3) \approx 37.7 > 0$$

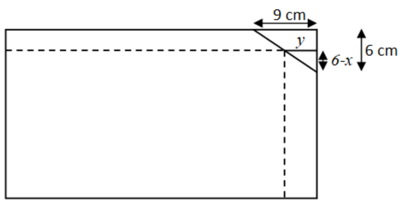
Confirmem així que en prendre $r \approx 4.3$ la funció superfície $S(r)$ pren un valor mínim, que és igual a $S(4.3) \approx 348.73$ cm^2 aproximadament.

6. **En traslladar un mirall de 70×100 cm s'ha trencat per un dels vèrtexs. El bocí trencat és un triangle rectangle de 6×9 cm de costat, tal com es veu en la figura. Calcula per on s'ha de tallar el mirall per a obtenir un altre mirall que també sigui rectangular i que tingui l'àrea més gran possible.**



Solució

Es tracta d'un problema de maximització, ja que es presenta una situació en què hem de maximitzar certes dimensions d'un objecte que podem mesurar. En aquest cas, en particular, l'àrea d'un rectangle corresponent a un mirall.
Per tal de resoldre el problema, refem gràficament la situació plantejada. Si ens fixem bé en aquesta representació,



notem que es tracta d'escollir les mesures x i y de manera que l'àrea del rectangle puntejat, que representa el nou rectangle, sigui la màxima possible.
D'acord amb aquesta imatge, l'àrea del nou mirall és producte de l'expressió:

$$(100 - y) \cdot (70 - x)$$

Ara bé, com que l'expressió és producte de dues variables, es fa necessari en primer lloc determinar una de les incògnites en funció de l'altra. Posem, per exemple, y en funció de x. Aquest canvi es pot fer gràcies a les raons de semblança entre triangles. En particular, en aquest cas s'ha de complir

$$\frac{y}{6 - x} = \frac{9}{6}$$

d'on podem aïllar y en funció de x i, per tant, podem considerar

$$y \Longrightarrow \frac{3}{2} \cdot (6 - x)$$

Per tant, en substituir y en funció de x, la funció àrea a maximitzar esdevé

$$f(x) = \left(100 - \frac{3}{2} \cdot (6 - x)\right)(70 - x)$$

$$f(x) = 6370 + 14x - \frac{3}{2}x^2$$

Ara busquem la seva derivada per trobar un màxim. Per això, calculem la derivada de la funció:

$$f'(x) = 14 - 3x$$

La igualem a 0 i resolem l'equació resultant:

$$14 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{14}{3}$$

Per tant, el valor candidat és $x = \frac{14}{3} \approx 4.67$ cm.
Com que

$$f''(x) = -3 < 0, \ \forall x$$

ens trobem, com buscàvem, davant d'un màxim.
D'acord amb aquest valor de x, el valor corresponent de y resulta

$$y = \frac{3}{2} \cdot \left(6 - \frac{14}{3}\right) = 2$$

Per tant, i d'acord amb la imatge considerada, les mesures que faran màxima l'àrea del nou mirall seran: $100 - 2 = 98$ cm de llarg per $70 - \frac{14}{3} = \frac{196}{3} \approx 65.33$ cm d'ample. És a dir, que s'hauria de retallar el mirall de manera que tingués 98 cm de llarg i aproximadament 65.33 cm d'ample. Aleshores, l'àrea d'aquest nou rectangle retallat, que serà màxima, serà de $98 \cdot \frac{196}{3} = 6402.7$ cm^2.

Exercicis per a practicar amb les solucions

7. **Donada la funció a trossos següent,**

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & \textbf{si } x < -1 \\ 1 & \textbf{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{3}{4-x} & \textbf{si } x > 1 \end{cases}$$

estudia'n la derivabilitat i escriu l'expressió de la funció derivada $f'(x)$.

8. **Calcula les derivades d'aquestes funcions:**

(a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

(b) $g(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$

(c) $h(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$

(d) $r(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{\ln(x)}$

(e) $b(x) = e^{3x^2 - x - 1}$

9. **Troba les asímptotes de les funcions següents:**

$$f(x) = x \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^- 1}}$$

Solucions

7. L'expressió de la funció derivada és

$$f'(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x \in (-\infty, -1) \\ 0 & \text{si } x \in (-1, +1) \\ \dfrac{3}{(4-x)^2} & \text{si } x \in (1, +\infty) \setminus \{4\} \end{cases}$$

La funció és derivable en tot el seu domini menys en els punts $(-1, 1)$ i $(1, 1)$ perquè en ells no existeix el límit que defineix a derivada d'una funció en un punt (els límits per l'esquerra i la dreta són diferents).

8. Les derivades, simplificades al màxim, de les funcions són:

(a) $f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$

(b) $g'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

(c) $h'(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}}$

(d) $t'(x) = \dfrac{2e^{2x+1} \cdot \ln(x) - \frac{e^{2x+1}}{x}}{\ln^2(x)}$

(e) $b'(x) = (6x - 1)\, e^{3x^2 - x - 1}$

9. Les asímptotes són:
En el cas de $f(x)$: una asímptota vertical en $x = 1$ i una asímptota obliqua en $y = x + 1$.
En el cas de $g(x)$: dues asímptotes verticals: $x = -1$ i $x = +1$ i una asímptota obliqua en $y = x$.