Iniciació a les matemàtiques per a l'enginyeria

PID_00270078

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat
Oberta
de Catalunya

12. Integració de funcions

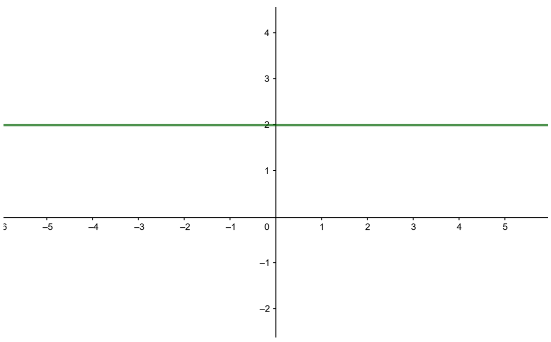
Índex

12.1. Integració d'una funció

12.1.1. Noció intuïtiva

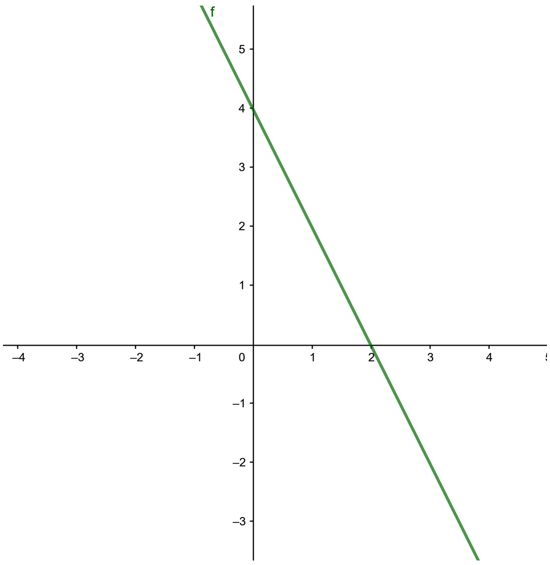
Donada una funció $f(x)$ és possible trobar la seva derivada $f'(x)$ utilitzant la taula de derivades i les regles pertinents. Aquesta transformació suggereix una pregunta: donada una funció $f(x)$, és possible trobar una funció $F(x)$ la derivada de la qual sigui la funció inicial $f(x)$, és a dir, $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$?

Per exemple, si sabem que la derivada d'una funció $F(x)$ té la gràfica següent, què podem dir sobre la funció $F(x)$?



Veiem en primer lloc que la derivada es correspon amb la funció constant 2. Per tant, sabem que la funció $F(x)$ podria ser $2x$. Però també podria ser $2x + 5$ o, entre altres possibilitats, $2x - 8$. Aleshores podem dir que la funció $F(x)$ serà de la forma $2x + C$, on C pot ser qualsevol nombre real.

Considerem un segon exemple: suposem que el gràfic següent ens mostra la derivada d'una funció $F(x)$



En aquest cas, primer hem de trobar l'expressió de la derivada. Veiem que la gràfica és una recta que passa pels punts $(0,4)$ i $(2,0)$ i per tant podem deduir que la seva expressió algebraica és $-2x+4$. Si pensem quines funcions tenen aquesta derivada, tenim per exemple $-x^2+4x$, $-x^2+4x-5$ o també, entre d'altres, $-x^2+4x-8$. Totes aquestes funcions tenen la mateixa derivada $-2x+4$, i per tant en aquest cas deduïm que $F(x)=-x^2+4x+C$, on C serà qualsevol nombre real.

Podem pensar en exemples més complicats. Donada la funció $f(x)=3x^2+5$, podem trobar una funció, $F(x)$, la derivada de la qual sigui precisament $f(x)$? En aquest cas, es pot comprovar que la funció $F(x)=x^3+5x$ té com a derivada $F'(x)=f(x)=3x^2+5$. Podríem trobar una altra funció que complís la mateixa condició? Notem que la funció $G(x)=x^3+5x+3$ també té com derivada $f(x)$. En general, tota funció de la forma x^3+5x+C, on C és un nombre, té la mateixa derivada, ja que la derivada de C sempre serà 0.

12.1.2. Definició i interpretació

Un procés d'aquest tipus es denomina **integració** de la funció $f(x)$, i la funció resultant es denomina **primitiva** de $f(x)$. La integració és, per tant, l'operació oposada a la derivació:

si $f(x)$ és la derivada de $F(x)$, $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$.

Així, podem afirmar que tota funció de la forma $F(x)+C$, on C és un nombre, també és una primitiva de $f(x)$. El conjunt de totes les primitives d'una funció $f(x)$ es denomina **integral indefinida** o simplement integral de la funció $f(x)$. Així, per exemple, la integral de la funció $f(x)=3x^2+5$ (on C és un nombre real qualsevol), perquè qualsevol primitiva de la funció $f(x)$ s'escriurà d'aquesta manera. És a dir, l'única diferència entre una primitiva d'aquesta funció i una altra serà el seu terme independent.

Per a expressar la integració d'una funció, s'utilitza un símbol d'integral $\int$ anteposat a la funció **integrand**, i a continuació el símbol dx, denominat **diferencial** de x, que ens indica respecte de quina variable estem integrant. És a dir, la integral indefinida d'una funció $f(x)$ s'expressa així:

$$\int f(x)dx$$

Així, doncs, l'exemple anterior podem expressar-lo així:

$$\int (3x^2 + 5)dx = x^3 + 5x + C$$

12.1.3. Taula d'integrals immediates

Hi ha algunes integrals que es poden obtenir de manera immediata si tenim la integral de la derivada d'una funció. En aquest cas, n'hi ha prou de conèixer les regles de derivació de funcions per a calcular la integral desitjada. Aquestes integrals s'anomenen **integrals immediates**.

Presentem una taula de les integrals immediates més usuals. Recordem que C denota un nombre real qualsevol.

Taula d'integrals immediates		
$f(x)$	$\int f(x)dx$	**Exemples**
k constant	$k \cdot x + C$	$\int 3dx = 3x + C$
x^n si $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln(3)} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	

12.1.4. Regles de càlcul

El càlcul de la primitiva d'una funció qualsevol no és tan senzill com el de la derivada, ja que les úniques regles immediates que es poden aplicar són:

- La integral de la suma (o resta) de funcions és igual a la suma (o resta) de les integrals de les funcions.

$$\boxed{\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx}$$

- La integral del producte d'un nombre per una funció és igual al producte del nombre per la integral de la funció.

$$\boxed{\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx}$$

- En $g(x) = \int f(x)dx$, $g'(x) = f(x)$.
- La regla de la cadena $((f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g')$ ens permet escriure

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = f(g(x)) + C}$$

A partir de l'última regla podem generalitzar la taula d'integrals immediates anterior a les integrals que s'anomenen sovint **integrals quasi immediates**.

Integrals quasiimmediates	
Integral	**Exemples**
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq 1$	$\int [\sin(x)]^4 \cdot \cos(x)dx = \frac{[\sin(x)]^5}{5} + C$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\|f(x)\| + C$	$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+13}dx = \ln\|x^2-3x+12\| + C$
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C$	$\int e^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)dx = e^{4x^2+3x-2} + C$
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + C$	$\int 5^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)dx = \frac{5^{4x^2+3x-2}}{\ln(5)} + C$
$\int f'(x) \cdot \sin(f(x))dx = -\cos(f(x)) + C$	$\int \cos(x)\sin(\sin(x))dx = -\cos(\sin(x)) + C$
$\int f'(x) \cdot \cos(f(x))dx = \sin(f(x)) + C$	$\int 6 \cdot \cos(6x-2)dx = \sin(6x-2) + C$
$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx = \arctan(f(x)) + C$	$\int \frac{\frac{1}{x}}{1+(\ln(x))^2}dx = \arctan(\ln(x)) + C$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \arcsin(f(x)) + C$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}dx = \arcsin(e^x) + C$

12.1.5. Mètodes d'integració

En general, per a calcular la integral d'una funció no en tenim prou de conèixer les integrals immediates i les regles d'integració que acabem de veure, sinó que necessitarem utilitzar alguns mètodes i tècniques que poden ajudar en el càlcul. Tot i això, no sempre és possible arribar a trobar una expressió algebraica que resolgui la integral plantejada.

Vegem les dues tècniques més utilitzades per a calcular integrals no immediates. L'objectiu dels dos mètodes és simplificar la integral per poder-la calcular com una integral immediata o quasiimmediata.

Mètode de substitució (o de canvi de variable). Amb aquest mètode es canvia la variable d'integració per una funció seva. Amb aquesta transformació es pretén obtenir una nova integral, més simplificada que la primera. Vegem de manera general quins són els passos a seguir. Suposem que volem resoldre la integral

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Considerem el canvi $x = g(t)$, on la funció $g(t)$ i la seva derivada $g'(t)$ són funcions contínues. Aleshores, per la regla de la cadena, tenim

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

Podem resumir l'aplicació d'aquest mètode amb els passos següents:

1) Substituïm x per $u(t)$ i dx per $u'(t)dt$

$$\int f(x)dx \xrightarrow[x=u(t)]{dx=u'(t)dt} \int f(u(t))u'(t)dt$$

2) Resolem la nova integral, que serà immediata o quasiimmediata.

$$\int f(u(t))u'(t)dt = G(t) + C$$

3) Aïllem la variable t de la igualtat $x = u(t)$ i obtenim $t = u^{-1}(x)$.

4) Desfem el canvi i obtenim

$$\int f(x)dx = G(u^{-1}(x)) + C$$

Vegem uns quants exemples de com aplicar aquest mètode.

Exemple. Integració per canvi de variable (1).

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$$

En aquest cas, no sabem calcular directament aquesta integral, però observem que si prenem $t = \sqrt{x-1}$ podem aïllar x de manera que obtenim $x = 1 + t^2$ i la seva derivada $dx = 2tdt$. Així, si apliquem aquest canvi ens queda

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{t^2+1}{t} \cdot 2tdt = 2\int (t^2+1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} + t\right) + C$$

Finalment, desfem el canvi (substituïm $t = \sqrt{x-1}$ en la solució) i tenim

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = 2\left(\frac{2(\sqrt{x-1})^3}{3} + \sqrt{x-1}\right) + C$$

Exemple. Integració per canvi de variable (2).

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx$$

En aquest cas prenem $t = \ln(x)$ i, per tant, $dt = \frac{1}{x}dx$. Així doncs, tenim

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C$$

Per tant, desfent el canvi,

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{\ln^2(x)}{2} + C$$

Exemple. Integració per canvi de variable (3).

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx$$

Podem fer el canvi $x = \sin(t)$ i, per tant, $dx = cos(t)dt$. Així, doncs,

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2(t)} = \cos(t)$$

Podem calcular la integral plantejada recordant que $\cos^2(t) = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \int \cos(t) \cdot \cos(t) dt = \int \cos^2(t) dt = \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int 1\,dt + \frac{1}{2} \int \cos(2t) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \frac{\sin(2t)}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2} t + \frac{2\sin(t) \cdot \cos(t)}{4} + C$$

on hem utilitzat $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$. Si desfem el canvi, com que $x = \sin(t)$, $t = \arcsin(x)$ i $\sqrt{1 - x^2} = \cos(t)$. Si substituïm en l'expressió, tenim

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C$$

Observem que en els dos primers exemples els canvis de variable poden ser intuïtius si pensem que la idea és simplificar les integrals. En canvi, en l'últim exemple el canvi de variable requereix alguna indicació (o molta pràctica).

Mètode d'integració per parts. Aquest mètode es basa en la regla de la derivació del producte. Recordem que si f i g són dues funcions, sabem que la derivada del seu producte és

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

I, de fet, podem reescriure aquesta expressió de la forma

$$f(x) \cdot g'(x) = (f(x) \cdot g(x))' - f'(x) \cdot g(x)$$

Si ara integrem en ambdós termes de la igualtat, tenim

$$\int \left[f(x) \cdot g'(x)\right] dx = \int \left[(f(x) \cdot g(x))' - f'(x) \cdot g(x)\right] dx$$

I, per tant, d'aquí obtenim la fórmula d'integració per parts:

$$\boxed{\int \left[f(x) \cdot g'(x)\right] dx = (f(x) \cdot g(x)) - \int \left[f'(x) \cdot g(x)\right] dx}$$

Aquesta fórmula s'ha d'aplicar quan la integral del membre de la dreta és més senzilla que la de l'esquerra (per això, aquesta última s'ha de descompondre en el producte de dues funcions; una d'aquestes, $g'(x)$, ha de ser la derivada d'una altra funció g, que, a més, ha de ser fàcil de trobar).

Moltes vegades, per a simplificar la fórmula d'integració per parts s'utilitzen les variables u en lloc de $f(x)$, i v en lloc de $g(x)$, de manera que s'escriu

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Normalment, l'ordre en què es tria la funció u segons les funcions que tinguem a la integral inicial és: funcions logarítmiques, funcions potència, funcions trigonomètriques i, finalment, funcions exponencials.

Vegem uns quants exemples d'aquest mètode d'integració.

Exemple. Integració per parts (1).

$$\int xe^x dx$$

Triem $u = x$ i, per tant, $du = 1 \cdot dx$ i $dv = e^x dx$ i, per tant, $v = \int e^x dx = e^x$. Si ara apliquem la fórmula d'integració per parts, obtenim

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

de manera que la nova integral de la dreta ara és immediata i, per tant, obtenim

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C.$$

Exemple. Integració per parts (2).

$$\int \ln(x) dx$$

Triem $u = \ln(x)$ i, per tant, $du = \frac{1}{x} \cdot dx$ i $dv = 1 \cdot dx$ i, per tant, $v = \int 1dx = x$. Si ara apliquem la fórmula d'integració per parts, obtenim

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot xdx = x\ln(x) - \int 1dx$$

de manera que la nova integral de la dreta ara és immediata i, per tant, obtenim

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + C = x(\ln(x) - 1) + C.$$

Exemple. Integració per parts (3).

$$\int e^x \sin(x)dx$$

Igual que en les anteriors integrals, triem $u = \sin(x)$ i, per tant, $du = \cos(x)$ i $dv = e^x\,dx$, de manera que $v = \int e^x dx = e^x$. Així, a partir de la fórmula d'integració per parts, obtenim

$$\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx$$

En aquest cas, no obtenim una integral immediata i per tant tornem a integrar per parts la integral que hem obtingut. Triem $u = \cos(x)$ i, per tant, $du = -\sin(x)$ i $dv = e^x\,dx$, de manera que $v = \int e^x dx = e^x$. D'aquesta manera tenim

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x)dx &= e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx\\ &= e^x \sin(x) - \left[e^x \cos(x) - \int e^x(-\sin(x))dx\right]\\ &= e^x\left(\sin(x) - \cos(x)\right) - \int e^x \sin(x)dx\end{aligned}$$

Veiem com abans que la integral que obtenim no és més fàcil que les anteriors, però aquesta vegada podem observar que és exactament igual a la inicial, i per tant el que fem en aquest cas és passar la integral al primer membre, de manera que obtenim

$$2\int e^x \sin(x)dx = e^x\left(\sin(x) - \cos(x)\right) + C$$

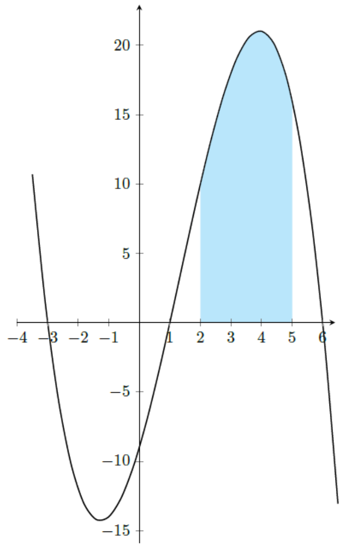
I, per tant, finalment obtenim

$$\int e^x \sin(x)dx = \frac{e^x}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right) + C$$

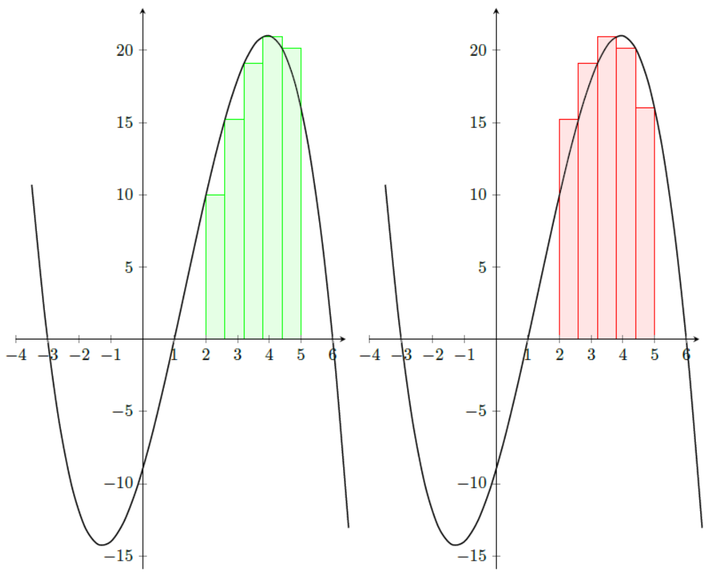
12.1.6. Integral definida. Regla de Barrow

Integral definida. La integral definida neix de la necessitat de calcular l'àrea tancada per una funció i l'eix X en un cert interval. Aquesta àrea es pot aproximar sumant certs rectangles, la base dels quals és constant i l'altura és el valor de la funció en certs punts escollits convenientment. El límit d'aquest càlcul quan la base d'aquests rectangles tendeix a 0 és igual a la integral definida d'aquesta funció en aquest interval, és a dir, l'àrea que busquem.

Vegem-ho amb un exemple i alguns gràfics. Volem calcular l'àrea limitada per la funció $f(x) = -\frac{1}{2}(x-6)(x-1)(x+3)$ i l'eix X entre 2 i 5, tal i com es mostra en la gràfica següent:



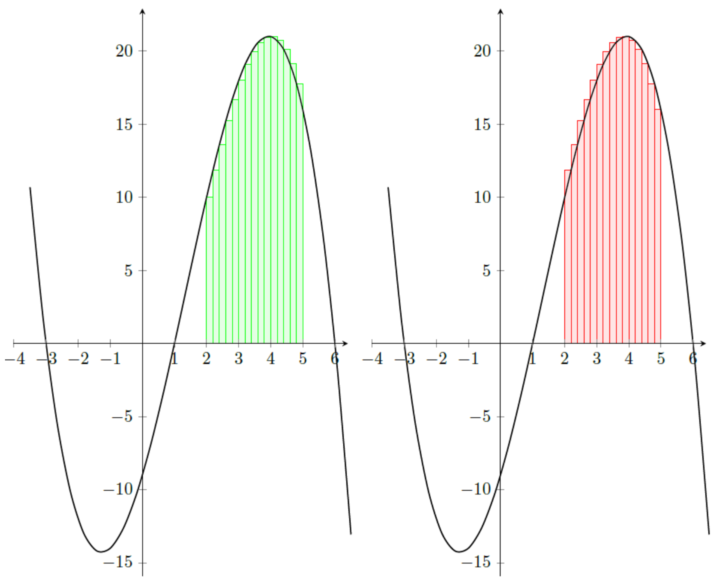
L'àrea que tanca la gràfica entre els punts 2 i 5 (la part en blau) es pot aproximar per la suma de l'àrea d'alguns rectangles. Vegem en les gràfiques següents dos exemples de formes d'aproximar l'àrea com a suma de rectangles. (Tot i que presentem només dos exemples, hi ha altres maneres de definir els rectangles.)



En ambdós casos, com en l'altre, hem dividit l'interval $[2,5]$ en 5 parts. Per a cada part, hem construït un rectangle l'alçària del qual coincideix amb la imatge del primer punt de la base en la primera gràfica i amb la imatge del segon punt de la base en el cas de la segona gràfica.

D'aquesta manera, les bases de tots els rectangles són iguals: $\frac{5-2}{5} = 0.6$. Si ens fixem en el primer rectangle verd, la seva alçària és $f(2) = -\frac{1}{2}(2-6)(2-1)(2+3) = 10$ i, per tant, la seva àrea és $0.6 \cdot 10 = 6$. En canvi, si mirem el primer rectangle vermell, l'alçària és $f(2.6) = -\frac{1}{2}(2.6-6)(2.6-1)(2.6+3) = 15.23$ i, per tant, la seva àrea és $0.6 \cdot 15.23 = 9.13$

Si enlloc de 5 rectangles haguéssim dividit l'interval en més parts, obtindríem una millor aproximació de l'àrea que volem.



Així, en general, si volem calcular l'àrea d'una funció $f(x)$ en un interval (a,b), dividim aquest interval en n parts i siguin x_0, x_1, ..., x_n són els punts resultants, on $x_0 = a$ i $x_n = b$. Aleshores, si construïm els rectangles com en l'exemple dels rectangles en verd, tenim

$$A \cong \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

I, si ho fem com en l'exemple dels rectangles en vermell,

$$A \cong \sum_{i=0}^{n} f(x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

De fet, l'àrea que busquem és exactament igual a aquest límit:

$$A = \lim_{(x_{i+1}-x_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

és a dir, el límit quan la diferència entre una x_i i la següent tendeix a 0, és a dir, quan els rectangles tenen una base tan petita com vulguem i, per tant, tenim infinits rectangles.

$\sum_{i=0}^{n}$ és el símbol de sumatori i indica que s'han de sumar els termes de dins del sumatori des de $i = 0$ fins a $i = n$.

Aquest límit s'escriu normalment en forma d'integral quan la funció $f(x)$ és positiva:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{(x_{i+1}-x_i)\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

on a i b es denominen **límits d'integració**. Aquesta expressió rep el nom d'**integral definida d'extrems a i b**.

Regla de Barrow. Es pot comprovar que tant la integral definida com la indefinida utilitzen pràcticament els mateixos símbols, amb la diferència dels límits d'integració que utilitza la integral definida. Això no és casual, perquè la integral definida es pot calcular a partir d'una primitiva de la funció. De fet, el càlcul de la integral definida es facilita a partir de la **Regla de Barrow**

Si $f(x)$ és una funció contínua en $[a,b]$ i $F(x)$ és una primitiva qualsevol de $f(x)$,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Fixem-nos que podem triar la primitiva que vulguem, però la triarem habitualment amb $C = 0$ perquè és més senzilla. Si en triéssim qualsevol altra, el resultat seria exactament el mateix, ja que estarien restant la C i es cancel·laria.

Per una funció $F(x)$ escriurem $F(x)]_a^b$ per denotar que la funció $F(x)$ s'avalua en b i en a i es resten els resultats, o sigui que és equivalent a $F(b) - F(a)$.

Exemple. Regla de Barrow.
Calculem la integral

$$\int_1^3 (2x^2 + 3)dx$$

Per a calcular aquesta integral, hem de buscar una primitiva (prendrem $C = 0$) i avaluar-la en els extrems:

$$\int_1^3 (2x^2 + 3)dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x\Big]_1^3 = \left(\frac{2}{3}3^3 + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{2}{3}1^3 + 3\cdot 1\right) = \frac{70}{3}$$

En el moment de la definició de la integral definida hem suposat $a < b$, però també podem considerar el cas $b < a$. Llavors tindrem

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Per tant, els límits d'integració poden ser qualssevol.

L'origen del símbol integral és una S allargada, que indica que es tracta d'un sumatori, mentre que l'origen del símbol diferencial, dx, prové del fet que es tracta de diferències de x (si es pren la inicial de "diferència" juntament amb la x, resulta, precisament, dx).

Utilitzant la regla de Barrow, podem comprovar que les propietats de la integral definida són molt semblants a les regles de càlcul establertes per la integral indefinida.

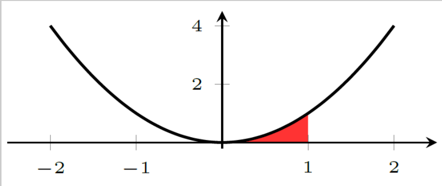
- $\int_a^b K\cdot f(x)dx = K\cdot \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- Siguin a, b, c nombres arbitraris

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

A partir de la definició de la integral definida, podem calcular l'àrea sota una funció (positiva) en un interval. Tot seguit aprofundirem en aquest tema, però vegem-ne uns primers exemples senzills.

Exemple. Càlcul d'àrea.

Volem calcular l'àrea sota la funció $f(x) = x^2$ en l'interval $(0,1)$, és a dir, l'àrea marcada en vermell en la gràfica següent:



Observem que la funció és positiva, i per tant per trobar l'àrea hem de calcular la integral $\int_0^1 x^2 dx$. Podem calcular primer la integral indefinida:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

I, de totes les primitives, triem la més simple, és a dir, amb $C = 0$. Finalment, hem d'avaluar la integral en els dos extrems i restar-los:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Per tant, l'àrea que volíem és $\frac{1}{3}\text{u}^2$.

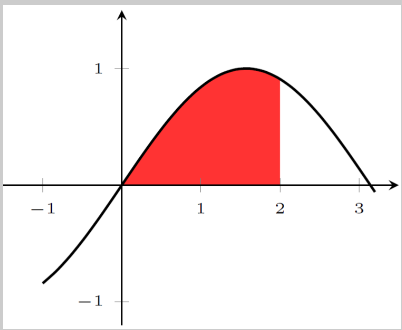
Observem que si en lloc de prendre $C = 0$ haguéssim pres qualsevol altre valor, el resultat hauria sigut exactament el mateix:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3} + C\right]_0^1 = \frac{1}{3} + C - (0 + C) = \frac{1}{3}$$

Observem que, com que calculem àrees, el resultat final és en u^2, on u pot ser ser m, cm... depenent del context.

Exemple. Càlcul d'àrea.

Volem calcular l'àrea sota la funció $f(x) = \sin(x)$ en l'interval $(0,2)$, és a dir, l'àrea marcada en vermell en la gràfica següent:



Observem que la funció és positiva, i per tant per trobar l'àrea, hem de calcular la integral $\int_0^2 \sin(x)dx$. En aquest segon exemple podem fer els càlculs directament sense calcular primer la integral indefinida. Així, doncs, tenim

$$\int_0^2 \sin(x)dx = -\cos(x)\Big]_0^2 = -\cos(2) + \cos(0) = -(-0.41615) + 1 = 1.41615\text{u}^2$$

Per tant, l'àrea és 1.41615u^2

12.2. Aplicacions

12.2.1. Càlcul d'àrees

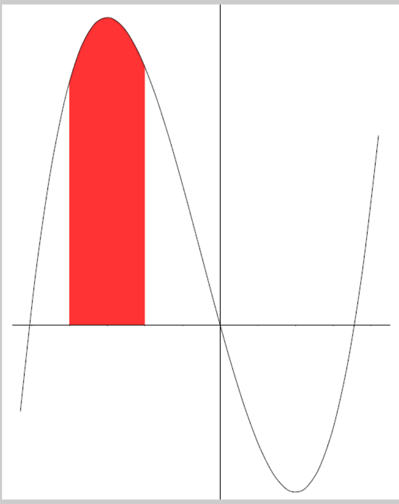
Ja hem vist que la integral definida ens permet calcular àrees sota la corba definida per $f(x)$ si $f(x)$ és positiva. Ara veurem els diferents casos en què ens podem trobar. Recordem sempre que l'àrea ha de ser un valor positiu (no pot ser mai negatiu, ja que és una mesura).

Càlcul àrea si $f(x) \geq 0$ en l'interval $[a, b]$. Si $f(x)$ és una funció positiva en l'interval $[a, b]$ ((és sempre per sobre de l'eix X), l'àrea que tanca aquesta funció i l'eix X, dins de l'interval $[a, b)]$, és igual a

$$\boxed{\mathrm{A} = \int_a^b f(x)dx}$$

tal com es desprèn de manera immediata de la definició d'integral definida.

Exemple. Càlcul d'àrea en $f(x) \geq 0$ a $[a, b]$.
Calculem l'àrea de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en l'interval $[-4, -2]$



Com que veiem que la funció és positiva en tot l'interval $[-4, -2]$, l'àrea que busquem és

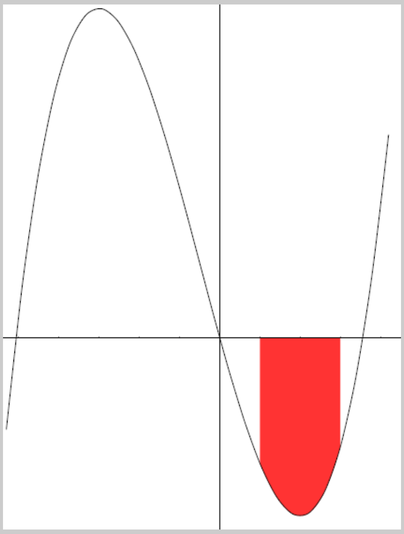
$$\int_{-4}^{-2} f(x)dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 36 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg]_{-4}^{-2} = 152$$

Veiem, doncs, que l'àrea és $152\mathrm{u}^2$.

Càlcul d'àrea si $f(x) \leq 0$ en l'interval $[a, b]$. Si $f(x)$ és una funció negativa en l'interval $[a, b]$ (és sempre per sota de l'eix X), l'àrea que tanca aquesta funció i l'eix X, dins de l'interval $[a, b]$, és igual a

$$\boxed{A = -\int_a^b f(x)dx}$$

Exemple. Càlcul d'àrea en $f(x) \leq 0$ a $[a, b]$.
Calculem l'àrea de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en l'interval $[1, 3]$:



Com que veiem que la funció és negativa en tot l'interval $[1, 3]$, l'àrea que busquem és

$$A = -\int_1^3 f(x)dx = -\left[2 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 36 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 78$$

Veiem, doncs, que l'àrea és $78u^2$.

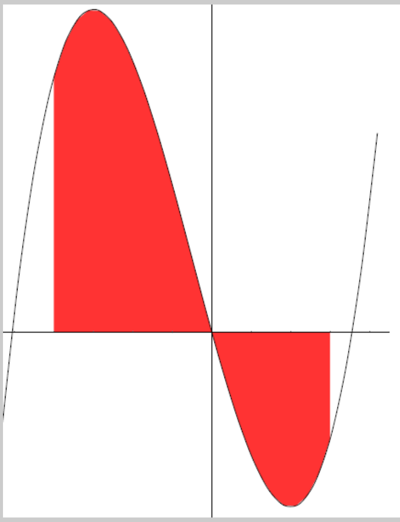
Observem que si sabem que la funció en l'interval $[a, b]$ és sempre per sobre o sota de l'eix X però no sabem quin dels dos casos és, podem calcular-ho com a
$$A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$
i així obtindrem sempre un valor positiu. Això ens serveix si la funció és sempre per sobre o per sota de l'eix X.

Càlcul d'àrea si $f(x)$ canvia de signe en l'interval $[a, b]$. En els dos casos anteriors hem calculat l'àrea d'una funció positiva o una funció negativa en tot l'interval $[a, b]$. En general, per a trobar l'àrea que es forma entre l'eix X i qualsevol funció $f(x)$, que pren valors positius i negatius entre els límits a i b, s'han de trobar les arrels de l'equació $f(x) = 0$ que són dins de l'interval $[a, b]$ i separar l'interval $[a, b]$ en subintervals que tinguin per extrems aquestes arrels.
Així, si tenim, per exemple, 3 arrels x_1, x_2, x_3 en l'interval $[a, b]$ tals $x_1 < x_2 < x_3$, l'àrea que busquem és

$$\boxed{A = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)dx\right|}$$

Fixeu-vos que el valor absolut ens permet no haver d'estudiar si la funció és per sobre o per sota de l'eix X en cada un dels intervals.

Exemple. Càlcul d'àrea si $f(x)$ és positiva i negativa en $[a,b]$.
Calculem l'àrea de la funció $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en l'interval $[-4,3]$:



Primer calculem les arrels de $f(x) = 0$ i veiem que són 0 i aproximadament -5.06 i 3.56. Ens fixem que només $x = 0$ és dins de l'interval $[-4,3]$. Així doncs, l'àrea que busquem és

$$A = \left|\int_{-4}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{3} f(x)dx\right| = \left|\left[2\cdot\frac{x^4}{4} + 3\cdot\frac{x^3}{3} - 36\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{0}\right| + \left|\left[2\cdot\frac{x^4}{4} + 3\cdot\frac{x^3}{3} - 36\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right| = 224 + 94.5 = 318.5$$

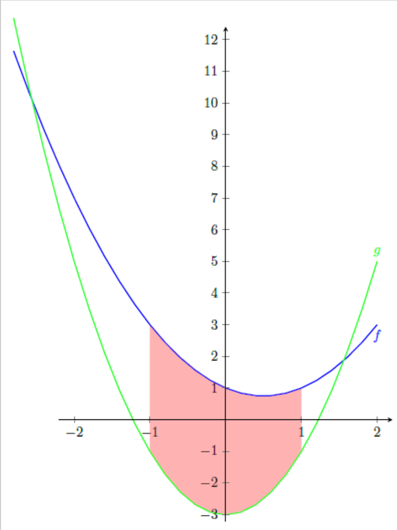
Per tant, l'àrea val 318.5u^2.

Càlcul d'àrea entre dues corbes $f(x)$ i $g(x)$ en l'interval $[a,b]$. En aquest cas podem aplicar els casos anteriors amb una sola funció considerant la funció diferència $f(x)-g(x)$. Exactament igual que hem fet abans, haurem de separar els casos segons si la diferència és sempre positiva, sempre negativa o bé si canvia de signe dins de l'interval $[a,b]$, i per tant haurem de separar l'interval $[a,b]$ en els subintervals corresponents. Per tant, hem de començar buscant les arrels de $f(x) - g(x)$ (o sigui que hem de resoldre l'equació $f(x) - g(x) = 0$) i veure si pertanyen a l'interval $[a,b]$. Cal adonar-se que parlem del signe de la diferència de les funcions, no de si les funcions són per sobre o per sota de l'eix X.

El canvi de signe de la diferència de funcions es donarà quan canviï la funció de les dues que és per sobre.

Exemple. Càlcul d'àrea entre $f(x)$ i $g(x)$ a $[a,b]$.

Calculem l'àrea entre les funcions $f(x)=x^2-x+1$ i $g(x)=2x^2-3$ en l'interval $[-1,1]$. Volem calcular, per tant, l'àrea marcada en vermell en la gràfica



1) Busquem els punts de tall entre les dues funcions, i per tant hem de resoldre

$$x^2-x+1=2x^2-3$$

o sigui que hem de resoldre l'equació $x^2+x-4=0$. Obtenim dues solucions que són aproximadament -2.56 i 1.56. Com que cap de les dues és en l'interval $[-1,1]$ en el nostre interval la diferència de les dues funcions no canvia de signe, o sigui que no canvia l'ordre de la funció que és per sobre en tot l'interval on calcular l'àrea.

2) Calculem l'àrea:

$$A=\left|\int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]dx\right|=\left|\int_{-1}^{1}[-x^2-x+4]dx\right|=\left|-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{1}\right|=\frac{22}{3}$$

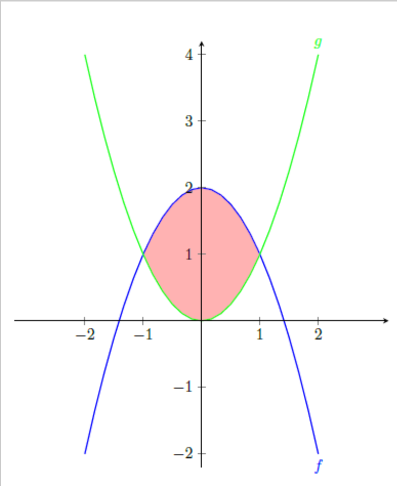
Per tant, l'àrea que busquem és $\frac{22}{3}\mathrm{u}^2$.

Hauríem pogut treure el valor absolut si haguéssim estudiat primer quina de les dues funcions és per sobre i, per tant, si hem de calcular la integral de $f(x)-g(x)$ o bé $g(x)-f(x)$.

Càlcul d'àrea entre dues corbes $f(x)$ i $g(x)$. En aquest cas, a diferència dels anteriors, no ens limiten a l'interval, i per tant haurem d'estudiar els punts on es tallen les dues funcions per a trobar els límits d'integració. Per tant, haurem de resoldre l'equació $f(x)=g(x)$ i calcular l'àrea de cada regió limitada entre dos punts de tall seguits.

Exemple. Càlcul d'àrea entre $f(x)$ i $g(x)$.

Calculem l'àrea entre les funcions $f(x) = 2 - x^2$ i $g(x) = x^2$:



El primer pas que hem de fer és buscar els punts de tall de les dues funcions. Aquests punts de tall són els que ens donaran els límits d'integració. Igualem les dues funcions i resolem l'equació resultant:

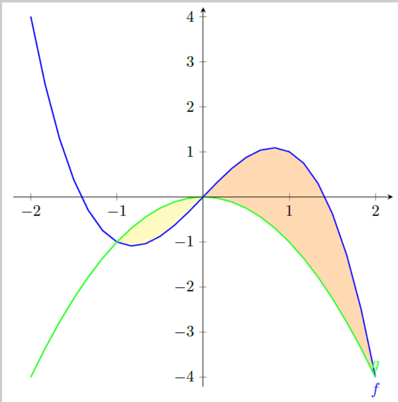
$$2 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Per tant, per a obtenir l'àrea que volem, hem de calcular la integral següent:

$$A = \left| \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)] dx \right| = \left| \int_{-1}^{1} [2 - 2x^2] dx \right| = \left| 2x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^{1} \right| = \frac{8}{3}$$

Per tant, l'àrea que busquem és $\frac{8}{3}$u^2.

Exemple. Càlcul d'àrea entre $f(x)$ i $g(x)$.
Calculem l'àrea entre les funcions $f(x) = 2x - x^3$ i $g(x) = -x^2$:



En aquest cas, ja podem intuir gràficament que hem de separar l'àrea que volem calcular en dos trossos perquè les gràfiques es tallen en 3 punts i, per tant, canvien la posició sobre quina de les dues és per sobre de l'altra.
Comencem, doncs, buscant els punts de tall de les dues funcions:

$$2x - x^3 = -x^2 \Leftrightarrow 2x - x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = -1,\ x = 2$$

Per tant,

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_{-1}^{0}[f(x) - g(x)]dx\right| + \left|\int_{0}^{2}[f(x) - g(x)]dx\right| = \left|\left[x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}\right| \\ &+ \left|\left[x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2}\right| = \left|-\frac{5}{12}\right| + \left|\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}\text{u}^2 \end{aligned}$$

Per tant, l'àrea que busquem és $\frac{37}{12}\text{u}^2$.
Com abans, notem que hauríem pogut ometre el valor absolut si haguéssim estudiat el signe de $f(x) - g(x)$ en cada interval.

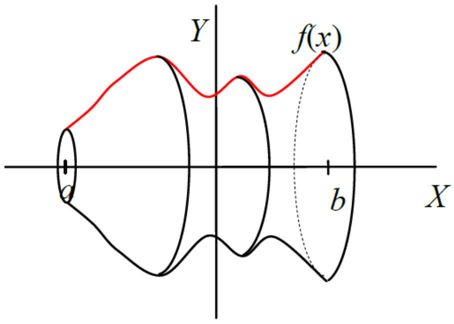
12.2.2. Càlcul de volums

La interpretació d'una integral com a suma d'infinits sumands infinitament petits ens permet calcular àrees i també volums.

Si $f(x)$ és una funció positiva en un interval $[a, b]$, el càlcul del volum de la figura que s'obté en girar sobre l'eix X aquesta funció, o sigui que la **figura de revolució** que té per **generatriu** la funció $f(x)$ es pot calcular a partir d'una integral.

Un cos o figura de revolució és la figura sòlida que resulta de fer voltar una corba plana (generatriu) al voltant d'una recta (eix de simetria).

Volem calcular, per exemple, el volum del cos de revolució que es genera en girar una funció positiva $f(x)$ en un interval $[a, b]$ sobre l'eix X, tal com mostra aquesta gràfica:



Els plans perpendiculars a l'eix X donen lloc a seccions circulars del cos de revolució. En particular, el pla que passa pel punt $x = b$ dona lloc a una secció circular de radi $f(x)$.

Per tant, ens podem mirar el cos com a format per "llesques" en forma de cilindre. En particular, aquests cilindres tenen:

Base: $\pi \cdot [f(x)]^2$

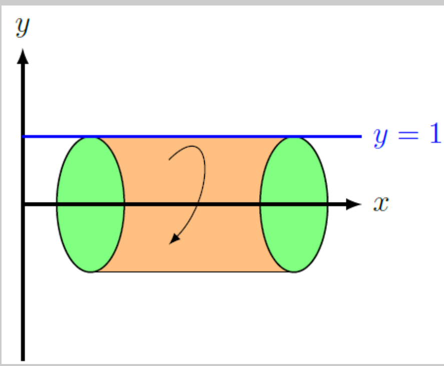
Altura: dx

Volum: $\pi \cdot [f(x)]^2 dx$

Per tant, si sumem tots aquests cilindres tindrem el volum buscat:

$$\boxed{V = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

Exemple. Càlcul del volum d'un cos de revolució.



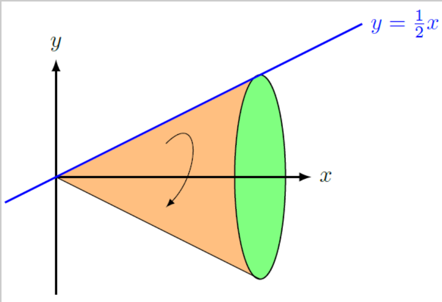
En aquest cas la funció $f(x)$ és senzilla, $f(x) = 1$. Si volem calcular el volum del cos de revolució que genera (un cilindre) en l'interval $[1,4]$, tenim

$$V = \pi \int_1^4 [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^4 1^2 dx = \pi \cdot x]_1^4 = 3\pi.$$

Per tant, el volum del cilindre proposat és $3\pi\,\mathrm{u}^3$.

Observem que ara estem calculant volums, per tant el resultat serà en u^3.

Exemple. Càlcul del volum d'un cos de revolució.



En aquest segon cas la funció és $f(x) = \frac{1}{2}x$. Si volem calcular el volum del con generat a partir d'aquesta recta en l'interval $[0,4]$ tenim

$$V = \pi \int_0^4 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx = \pi \cdot \frac{x^3}{6}\Big]_0^4 = \frac{32}{3}\pi$$

Per tant, el volum del con proposat és $\frac{32}{3}\pi\,\mathrm{u}^3$.

A partir d'aquest segon exemple podem generalitzar el càlcul del volum d'un con d'altura h i radi de la base r. La generatriu $f(x)$ ha de complir

$$f(0) = 0 \quad f(h) = r$$

i, per tant, la funció lineal generatriu serà $f(x) = \frac{rx}{h}$. Per a trobar-ne el volum, s'ha d'integrar entre 0 a h:

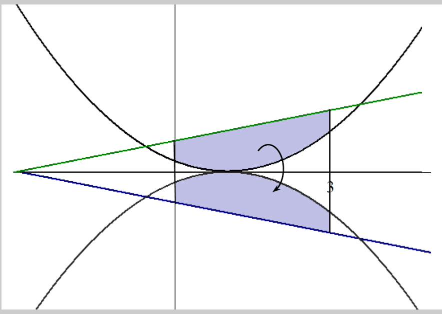
$$V = \pi \int_0^h (f(x))^2 dx = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

Finalment, ens podem trobar en el cas d'haver de calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, en l'interval $[a,b]$ on $f(x)$, $g(x) \geq 0$. En aquest cas, n'hi ha prou de calcular el volum de la figura de revolució generada per $f(x)$ i restar-li el volum de la figura de revolució generada per $g(x)$. Afegim el valor absolut perquè no sabem a priori quina de les dues funcions és per sobre. Aleshores,

$$\boxed{V = \pi \left| \int_a^b (f(x))^2 dx - \pi \int_a^b (g(x))^2 dx \right| = \pi \left| \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] dx \right|}$$

Exemple. Càlcul del volum d'un cos de revolució engendrat per l'àrea entre $f(x)$ i $g(x)$.

Volem calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea limitada entre la recta $y = x+3$ i la paràbola $y = x^2 - 2x + 1$, tal com s'observa en aquest gràfica:



Evidentment, s'han de restar els volums generats per la rotació de cadascuna de les funcions en l'interval $[0,3]$ tenint en compte que la funció més gran és sempre la recta:

$$V = \pi \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx = \pi \int_0^3 \left[(x+3)^2 - \left(x^2 - 2x + 1 \right)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^3 \left[-x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 10x + 8 \right] dx = \frac{282\pi}{5}$$

Per tant, el volum del con proposat és $\frac{282}{5}\pi\,\mathrm{u}^3$.

Resum

Integració de funcions

Integral indefinida

Definició. La integració és l'operació oposada a la derivació:

si $f(x)$ és la derivada de $F(x)$, llavors $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$.

Podem afirmar que tota funció de la forma $F(x) + C$ (on C és un nombre) també és una primitiva de $f(x)$. El conjunt de totes les primitives d'una funció $f(x)$ es denomina **integral indefinida** o, simplement, integral de la funció $f(x)$.

Expressió. Per a expressar la integració d'una funció, s'utilitza el símbol d'integral $\int$ anteposat a la funció **integrand**, i a continuació el símbol dx, denominat **diferencial** de x, que ens indica respecte de quina variable integrem. Per tant, l'expressió de la integral indefinida d'una funció $f(x)$ és

$$\int f(x)dx$$

Taula integrals immediates

Taula d'integrals immediates		
$f(x)$	$\int f(x)dx$	**Exemples**
k constant	$k \cdot x + C$	$\int 3dx = 3x + C$
x^n si $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln(3)} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arccos(x) + C$	

Regles de càlcul. El càlcul de la primitiva d'una funció qualsevol no és tan senzill com el de la derivada, ja que les úniques regles immediates que es poden aplicar són:

- La integral de la suma (o resta) de funcions és igual a la suma (o resta) de les integrals de les funcions.

$$\boxed{\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx}$$

- La integral del producte d'un nombre per una funció és igual al producte del nombre per la integral de la funció.

$$\boxed{\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx}$$

- Si $g(x) = \displaystyle\int f(x)dx$, aleshores $g'(x) = f(x)$.

- La regla de la cadena $((f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g')$ ens permet escriure

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + C}$$

A partir de l'última regla podem generalitzar la taula d'integrals immediates anterior a les integrals, que s'anomenen sovint **integrals quasiimmediates**.

Integrals quasiimmediates	
Integral	**Exemples**
$\displaystyle\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq 1$	$\displaystyle\int [\sin(x)]^4 \cdot \cos(x)dx = \frac{[\sin(x)]^5}{5} + C$
$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	$\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-3x+13}dx = \ln\lvert x^2-3x+12\rvert + C$
$\displaystyle\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C$	$\displaystyle\int e^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)dx = e^{4x^2+3x-2} + C$
$\displaystyle\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + C$	$\displaystyle\int 5^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)dx = \frac{5^{4x^2+3x-2}}{\ln(5)} + C$
$\displaystyle\int f'(x) \cdot \sin(f(x))dx = -\cos(f(x)) + C$	$\displaystyle\int \cos(x)\sin(\sin(x))dx = -\cos(\sin(x)) + C$
$\displaystyle\int f'(x) \cdot \cos(f(x))dx = \sin(f(x)) + C$	$\displaystyle\int 6 \cdot \cos(6x-2)dx = \sin(6x-2) + C$
$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx = \arctan(f(x)) + C$	$\displaystyle\int \frac{\frac{1}{x}}{1+(\ln(x))^2}dx = \arctan(\ln(x)) + C$
$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \arcsin(f(x)) + C$	$\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}dx = \arcsin(e^x) + C$

Mètode de substitució. Mètode per a transformar una integral en una integral immediata o quasiimmediata mitjançant un canvi de variable. Els passos a seguir són:

1) Substituïm x per $u(t)$ i dx per $u'(t)dt$:

$$\int f(x)dx \xrightarrow[x=u(t)]{dx=u'(t)dt} \int f(u(t))u'(t)dt.$$

2) Resolem la nova integral:

$$\int f(u(t))u'(t)dt = G(t) + C$$

3) Aïllem la variable t de la igualtat $x = u(t)$ i obtenim $t = u^{-1}(x)$.

4) Desfem el canvi i obtenim

$$\int f(x)dx = G(u^{-1}(x)) + C$$

Mètode d'integració per parts. Mètode per a transformar una integral en una integral immediata o quasiimmediata a partir de la regla de la derivació del producte.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Si integrem a les dues bandes i ho reescrivim, obtenim

$$\boxed{\int \left[f(x) \cdot g'(x)\right] dx = (f(x) \cdot g(x)) - \int \left[f'(x) \cdot g(x)\right] dx}$$

Integral definida

La integral definida neix de la necessitat de calcular l'àrea tancada per una funció i l'eix X en un cert interval. Aquesta àrea es pot aproximar sumant certs rectangles la base dels quals sigui constant i l'altura el valor de la funció en certs punts escollits convenientment. El límit d'aquest càlcul quan la base d'aquests rectangles tendeix a 0 és igual a la integral definida d'aquesta funció en aquest interval, és a dir, l'àrea que busquem.

El càlcul de la integral definida es facilita a partir de la **Regla de Barrow**:

Si $f(x)$ és una funció contínua en $[a, b]$ i $F(x)$ és una primitiva qualsevol de $f(x)$,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Càlcul d'àrees

1) **Càlcul d'àrea entre $f(x)$ i l'eix X si $f(x) \geq 0$ en l'interval $[a, b]$.**

$$\text{A} = \int_a^b f(x)dx$$

2) **Càlcul d'àrea $f(x)$ i l'eix X si $f(x) \leq 0$ en l'interval $[a, b]$.**

$$\text{A} = -\int_a^b f(x)dx$$

De fet, podem unir els dos casos anteriors afegint un valor absolut:

$$\text{A} = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

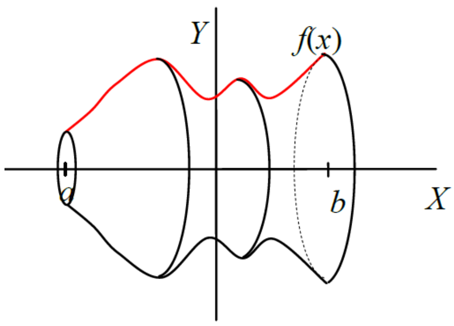
3) **Càlcul d'àrea $f(x)$ i l'eix X si $f(x)$ canvia de signe en l'interval $[a, b]$.** Així, si tenim, per exemple, 3 arrels x_1, x_2, x_3 en l'interval $[a, b]$ tals que $x_1 < x_2 < x_3$, l'àrea que busquem és

$$\mathrm{A} = \left| \int_a^{x_1} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_3}^{b} f(x)dx \right|$$

4) **Càlcul d'àrea entre dues corbes $f(x)$ i $g(x)$ en l'interval $[a, b]$.** Podem aplicar els casos anteriors amb una sola funció considerant la funció diferència $f(x) - g(x)$. Igual que hem fet abans, haurem de separar els casos segons si la diferència és sempre positiva, sempre negativa o bé si canvia de signe dins de l'interval $[a, b]$, i en aquest cas haurem de separar l'interval $[a, b]$ en subintervals d'extrems els punts on la diferència de les funcions canvia de signe.

5) **Càlcul àrea entre dues corbes $f(x)$ i $g(x)$.** En aquest cas, a diferència dels anteriors, no ens limita l'interval, i per tant haurem d'estudiar els punts on es tallen les dues funcions per a trobar els límits d'integració. Per tant, haurem de resoldre l'equació $f(x) = g(x)$ i calcular l'àrea de cada regió limitada entre dos punts de tall seguits.

Càlcul volums. Si $f(x)$ és una funció positiva en un interval $[a, b]$, el càlcul del volum de la figura que s'obté en girar sobre l'eix X aquesta funció, o sigui que la figura de revolució que té per generatriu la funció $f(x)$ es pot calcular a partir d'una integral.



$$\boxed{V = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

En conseqüència, calcular el volum d'una figura de revolució generada per l'àrea tancada per dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, en l'interval $[a, b]$, de manera que $f(x)$, $g(x) \geq 0$.

$$\boxed{V = \pi \left| \int_a^b (f(x))^2 dx - \pi \int_a^b (g(x))^2 dx \right| = \pi \left| \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx \right|}$$

Exercicis resolts

1. **Calculeu les integrals següents:**

(a) $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}dx$

(b) $\int \sin^3(x)\cos^2(x)dx$

(c) $\int x^2 e^{3x}dx$

Solucions

(a) Comencem fent un canvi de variable $u = x^2$ i, per tant, $du = 2xdx$. Així, la nostra integral ens queda

$$\int \frac{1}{2\cos^2(u)}du$$

Ara només ens cal recordar que la funció que hem d'integrar és justament la derivada de $\tan(u)$, i per tant ja sabem que el resultat de la integral és $\tan(u) + C$, Si desfem el canvi, tenim que el resultat de la integral és

$$\frac{\tan(x^2)}{2} + C$$

(b) Abans de començar a resoldre la integral, utilitzem $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, per tant l'integral ens queda

$$\int \sin(x)\cos^2(x)(1 - \cos^2(x))dx$$

Ara utilitzem el mètode de substitució prenent $u = \cos(x)$ i, per tant, $du = -\sin(x)dx$. Així, obtenim

$$\int u^2(u^2 - 1)du = \int (u^4 - u^2)du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C$$

Si ara desfem el canvi, obtenim

$$\frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3} + C$$

(c) Per a resoldre aquesta integral, haurem d'aplicar la integració per parts dues vegades. Prenem $u = x^2$ i, per tant, $du = 2xdx$ i $dv = e^{3x}dx$ i $v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$. Així, tenim

$$\int x^2 e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx$$

Tornem a integrar per parts prenent $u = x$ i, per tant, $du = dx$ i $dv = e^{3x}dx$ i $v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}$. Així, tenim

$$\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$$

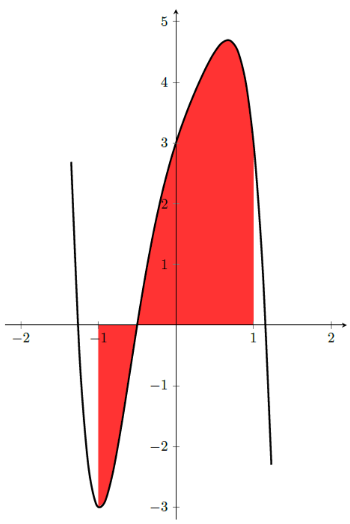
Si ara unim els dos resultats, tenim que la integral que busquem és

$$\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C = e^{3x}\left[\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right] + C$$

2. **Calculeu l'àrea entre l'eix X i la funció $f(x) = -4x^5 + 3x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ en l'interval $[-1, 1]$.**

Solució

En primer lloc, sempre que puguem és bo fer la gràfica de la funció amb què treballem i l'àrea que volem calcular. En aquest cas tenim la gràfica següent:



Veiem que tenim una arrel de $f(x) = 0$ dins de l'interval $[-1, 1]$ i que tenim trossos de la funció per sobre i per sota de l'eix X. Per tant, comencem buscant les arrels de $f(x) = 0$ i tenim que són $x = -0.5$ (dins de l'interval) i aproximadament $x = -1.264$ i $x = 1.1557$ (fora de l'interval). Per tant, per a calcular l'àrea que volem, haurem de dividir l'interval en dos subintervals: $[-1, -0.5]$ i $[-0.5, 1]$. I llavors l'àrea que busquem serà

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_{-1}^{-0.5}[-4x^5+3x^3-3x^2+4x+3]dx\right| + \left|\int_{-0.5}^{1}[-4x^5+3x^3-3x^2+4x+3]dx\right| \\ &= \left|-\frac{2x^6}{3}+\frac{3x^4}{4}-x^3+2x^2+3x\right]_{-1}^{-0.5}\Bigg| + \left|-\frac{2x^6}{3}+\frac{3x^4}{4}-x^3+2x^2+3x\right]_{-0.5}^{1}\Bigg| \\ &= \frac{59}{64}+\frac{315}{64}=\frac{187}{32} \end{aligned}$$

Per tant, l'àrea és $\frac{187}{32}\text{u}^2$.

3. **Calculeu el volum de la figura de revolució obtinguda en fer girar sobre l'eix X una circumferència de radi 2 d'equació**

$$x^2 + y^2 = 4$$

Solució

En primer lloc hem d'aïllar la y de l'expressió de la circumferència. Fixeu-vos que, de fet, n'hi ha prou d'aïllar y^2, ja que la integral que ens permet calcular el volum ens demana $f(x)^2$. Per tant, obtenim

$$y^2 = 4 - x^2$$

I podem calcular el volum a partir d'una integral

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-2}^{2}(f(x))^2dx = \pi\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx = \pi\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_{-2}^{2} \\ &= \pi\left(4\cdot 2-\frac{2^3}{3}-\left(4\cdot(-2)-\frac{(-2)^3}{3}\right)\right)=\frac{32\pi}{3}\text{u}^3 \end{aligned}$$

Per tant, el volum serà $\frac{32\pi}{3}\text{u}^3$.

4. **Calculeu l'àrea tancada entre les gràfiques de $y = x^2 - 2x + 1$ i $y = x + 5$.**

Solució

En primer lloc, hem de calcular els punts en què es tallen ambdues funcions per a trobar els límits d'integració:

$$x^2 - 2x + 1 = x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4,\ x = -1$$

Els punts en què es tallen ambdues funcions són, per tant, $(-1, 4)$, $(4, 9)$. A més, la recta sempre és major que la paràbola en aquest interval. Per tant, l'àrea serà igual a la integral definida de la recta entre ambdós punts menys la integral de la paràbola entre ambdós punts:

$$\int_{-1}^{4} x+5-\left(x^2-2x+1\right)dx = \int_{-1}^{4} -x^2+3x+4dx = -\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4\ x]_{-1}^{4} = \frac{125}{6}$$

Per tant, l'àrea és $\frac{125}{6}\text{u}^2$.

5. **Trobeu l'equació de la recta que passa per l'origen i delimita amb la gràfica de $f(x) = x^3$ dins del primer quadrant generant una àrea de $4u^2$.**

Solució

Com que busquem una recta que passa per l'origen aquesta de la de la forma $y = mx$.
La primera cosa que hem de calcular són els límits d'integració, que seran els punts de tall entre $f(x) = x^3$ i la recta $y = mx$

$$mx = x^3 \Leftrightarrow x(m - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad x = \pm\sqrt{m}$$

Per tant, necessitem que $m > 0$, i com que sabem que som en el primer quadrant, prenem només la solució $x = \sqrt{m}$ i així sabem

$$4 = \int_0^{\sqrt{m}}(mx-x^3)dx = \left[m\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{m}} = \frac{m^2}{2}-\frac{m^2}{4}=\frac{m^2}{4}$$

Per tant, $4 = \dfrac{m^2}{4}$ i llavors $m = \pm 4$, però descartem la solució negativa i, per tant, tenim $y = 4x$.

6. **Calculeu el volum engendrat per la regió entre la gràfica de $f(x) = \sqrt{x}$ i l'eix X en l'interval $[0, 4]$.**

Solució

En aquest cas, la funció $\sqrt{x}$ és sempre positiva per tant, l'àrea que busquem és

$$\int_0^4 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Bigg]_0^4 = \frac{2}{3}\sqrt{4^3} = \frac{16}{3}.$$

Per tant, l'àrea és $\frac{16}{3}\text{u}^2$.

Exercicis per a practicar amb les solucions

7. **Calculeu les integrals següents:**

(a) $\int (3x^3 - 2x^2 + 4x - 4)\, dx$

(b) $\int x(x^2 + 1)^3\, dx$

(c) $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$

(d) $\int \sqrt{2x - 6} dx$

(e) $\int 3e^{-2x+1} dx$

(f) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

(g) $\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$

8. **Utilitzeu el mètode d'integració per parts per a calcular les integrals següents:**

(a) $\int 2xe^{-x} dx$

(b) $\int (x + 1)\cos(2x) dx$

(c) $\int x \ln x dx$

(d) $\int x^2 e^x dx$

9. **Calculeu l'àrea que es forma entre les gràfiques de les funcions $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x^2$ entre $x = 0$ i $x = 1$.**

10. **Calculeu l'àrea de la regió delimitada per les paràboles $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ i la recta $y = 4$.**

11. **Trobeu el volum de la *copa* que engendra la regió compresa entre la gràfica $f(x) = \sqrt{x} - 1$ i l'eix X en l'interval $[0, 4]$.**

Solucions

7. (a) $\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 4x + c$
   (b) $\frac{(x^2 + 1)^4}{8} + C$
   (c) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$
   (d) $\frac{\sqrt{(2x - 6)^3}}{3} + C$
   (e) $-\frac{3}{2} \cdot e^{-2x+1} + C$
   (f) $\frac{(\ln x)^2}{2} + C$
   (g) $\frac{(\sin x)^2}{2} + C$
8. (a) $-2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$
   (b) $(x + 1)\sin(2x) + \frac{\cos(2x)}{4} + C$
   (c) $x \ln x - x^2 + C$
   (d) $e^x (x^2 - 2x + 2) + C$
9. $\frac{1}{3}\mathrm{u}^2$
10. $8\mathrm{u}^2$
11. $\frac{153}{5}\pi\mathrm{u}^3$