Iniciación a las matemáticas para la ingeniería

PID_00270094

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat
Oberta
de Catalunya

3. Sistemas de ecuaciones

Índice

3.1. Sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas

3.1.1. Definición

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cada una como máximo, representadas con las mismas incógnitas.

Ejemplo. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

Como se puede observar, para indicar que se trata de un sistema de ecuaciones y no de dos ecuaciones independientes, las dos ecuaciones van encabezadas por una clave $\{$, que las agrupa.

Es muy común escribir las ecuaciones de la manera siguiente: todos los términos con incógnitas suelen estar en el miembro de la izquierda, mientras que todos los números (términos independientes) suelen estar en el miembro de la derecha. Si las ecuaciones no están expresadas de este modo, conviene transformarlas en otras equivalentes que lo sean de este modo.

3.1.2. Soluciones y tipos de sistemas

Se ha de insistir en que una **solución** de un sistema con dos incógnitas, si existe, es un par numérico, es decir, tiene que constar de dos **números,** uno para cada incógnita, y estos dos números tienen que satisfacer las dos ecuaciones a la vez. En cuanto al **número de soluciones** de un sistema de ecuaciones, puede haber tres casos:

- Un sistema con **una única solución**. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

  que tiene una única solución $(x, y) = (4, 3)$.

- Un sistema con **infinitas soluciones**. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 20 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

  que tiene estas (y otras muchas) soluciones: $(x, y) = (4, 3)$, $(x, y) = (2, 4)$, $(x, y) = (0, 5)$, ...

- Un sistema **sin soluciones**. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

  En este caso, es fácil comprobar que no es posible que la misma expresión pueda resultar igual a 8 en un caso e igual a 1 en el otro.

3.1.3. Métodos de resolución

Resolver un sistema de ecuaciones significa encontrar las soluciones del sistema, es decir, aquellos números que, al sustituir las incógnitas, transformen las ecuaciones en igualdades numéricas ciertas. Hay que destacar que los mismos números tienen que sustituir las incógnitas en **ambas** ecuaciones a la vez.

Ejemplo. Solución de un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x + 4y = 17 \end{cases}$$

tiene como solución $(x, y) = (5, 3)$, puesto que

$$\begin{cases} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19 \\ 5 + 4 \cdot 3 = 17 \end{cases}$$

Para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, hay principalmente tres de métodos de resolución.

Método de sustitución. Consiste en aislar una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones y sustituir la expresión en la otra ecuación. Una vez resuelta esta última ecuación se soluciona la otra ecuación introduciendo el valor hallado.

Ejemplo. Para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

por el método de sustitución, se tienen que seguir estos pasos:

1) *Se elige una de las ecuaciones.* Por ejemplo, $x + 4y = -2$. (Si hay una ecuación en que el coeficiente de la x o de la y es 1, elegimos esta ecuación para simplificar los cálculos.)

2) *Se aísla una de las incógnitas de esta ecuación.* Por ejemplo, se puede aislar la x de la manera siguiente:

$$x = -2 - 4y$$

3) *Se sustituye la incógnita anterior* (la x) *de la otra ecuación* ($2x - 3y = 7$) *por el valor que hemos encontrado en aislarla* $(-2 - 4y)$. En el ejemplo,

$$2 \cdot (-2 - 4y) - 3y = 7$$

4) *Se resuelve esta ecuación de primer grado con una incógnita.* En el ejemplo, la solución es $y = -1$.

5) *Se sustituye este valor encontrado en una de las dos ecuaciones del sistema inicial. Obtendremos una ecuación de primer grado con una incógnita, que podemos resolver.* Por ejemplo, si se sustituye $x = -1$ en la ecuación $x+4y = -2$, la ecuación resultante es $x+4\cdot(-1) = -2$, la solución de la cual es $x = 2$.

Por lo tanto, la solución del sistema es $(x, y) = (2, -1)$.
Es recomendable comprobar que estos valores resuelven realmente el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7 \\ 2 + 4 \cdot (-1) = -2 \end{cases}$$

son igualdades ciertas. Así, pues, $(x, y) = (2, -1)$ es la solución del sistema.

Método de igualación. El método de igualación consiste en aislar la misma incógnita en ambas ecuaciones del sistema. A continuación, se han de "igualar" las dos expresiones que han resultado de aislar esta incógnita, y definir así una nueva ecuación. Una vez resuelta esta ecuación, se sustituye el valor en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve para encontrar el otro valor.

Ejemplo. Si se quiere resolver el sistema anterior

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

por el método de igualación, tienen que seguirse estos pasos:

1) *Se aísla la misma incógnita en ambas ecuaciones.* Por ejemplo, la x:

$$x = \frac{7 + 3y}{2} \qquad x = -2 - 4y$$

2) *Se igualan las expresiones que resultan de aislar la incógnita:*

$$\frac{7 + 3y}{2} = -2 - 4y$$

3) *Se resuelve esta ecuación de primer grado con una incógnita.* En el ejemplo

$$7 + 3y = 2 \cdot (-2 - 4y)$$

$$7 + 3y = -4 - 8y$$

$$3y + 8y = -4 - 7$$

$$11y = -11$$

$$y = -1$$

4) *Se sustituye el valor de esta incógnita en cualquiera de las ecuaciones del sistema inicial, y se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita resultante.* En el ejemplo, sustituimos la y de la segunda ecuación por -1:

$$x + 4 \cdot (-1) = -2$$

La solución de esta ecuación es $x = 2$.

Igual que antes, comprobamos que los valores obtenidos resuelven el sistema de ecuaciones propuesto.

Método de reducción. El método de reducción consiste en multiplicar convenientemente las dos ecuaciones del sistema por unos números, de modo que al restar las ecuaciones resultantes se "reduzca" el número de incógnitas de dos a una. Una vez resuelta la ecuación resultante, puede sustituirse este valor en una de las ecuaciones iniciales y resolverla para obtener la solución general.

Ejemplo. Si queremos resolver el mismo sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

por el método de reducción, tienen que seguirse estos pasos:

1) *Se elige una de las incógnitas.* Por ejemplo, la x.

2) *Se multiplica cada ecuación por un número elegido convenientemente, de modo que las ecuaciones resultantes tengan el término idéntico con la incógnita elegida.* La manera más sencilla de hacerlo consiste en multiplicar los miembros de la primera ecuación por el coeficiente de la incógnita escogida en la segunda ecuación, y los miembros de la segunda ecuación por el coeficiente de la incógnita escogida en la primera ecuación.

   En el ejemplo, multiplicamos $2x - 3y = 7$ por 1 (coeficiente de la x en la ecuación $x + 4y = -2$) y multiplicamos $x + 4y = -2$ por 2 (coeficiente de la x en la ecuación $2x - 3y = 7$) y obtenemos así las ecuaciones con el mismo término en x.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 2x + 8y = -4 \end{cases}$$

3) *Se restan ambas ecuaciones resultantes, miembro a miembro.* En el ejemplo:

$$\begin{array}{lll} 2x & -3y & = 7 \\ -(2x & +8y & = -4) \\ \hline & -11y & = 11 \end{array}$$

4) *Se resuelve la ecuación de primer grado resultante.* En el ejemplo, la solución de $-11y = 11$ es $y = -1$.

5) *e sustituye el valor de esta incógnita en cualquiera de las ecuaciones del sistema y se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita resultante.* En el ejemplo, sustituimos la y de la segunda ecuación por -1:

$$x + 4 \cdot (-1) = -2$$

   La solución de esta ecuación es $x = 2$. Y, por lo tanto, la solución del sistema es $(x, y) = (2, -1)$.

Tal como hemos visto antes, comprobamos que los valores obtenidos resuelven el sistema de ecuaciones propuesto.

Observad que, después de resolver el mismo sistema con los tres métodos, el método que se utiliza para resolver un sistema de ecuaciones no influye en la solución del sistema.

3.2. Sistemas lineales de tres ecuaciones y tres incógnitas

3.2.1. Definición

Igual que antes, podemos definir un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas como un conjunto de tres ecuaciones de primer grado con las tres mismas incógnitas en cada una de las ecuaciones.

Ejemplo. Sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 4x - 2y - 3z = -4 \end{cases}$$

3.2.2. Método de resolución

La solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas consta de tres números que, al sustituir las incógnitas correspondientes a la vez, permiten resolver el sistema.

Ejemplo. Solución de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas.
$(x, y, z) = (1, 2, -3)$ es la solución del sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 5y - 2z = -2 \\ 3x + 4y + z = 8 \end{cases}$$

ya que

$$\begin{cases} 1 + 2 + (-3) = 0 \\ 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = -2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-3) = 8 \end{cases}$$

Para resolver un sistema de este tipo, puede utilizarse un método parecido al de reducción operando de la manera siguiente:

1) *Operar adecuadamente con la primera ecuación para eliminar la primera incógnita de las dos ecuaciones siguientes.*
Al multiplicar la primera ecuación por 2 y restarla de la segunda se obtiene $-7y - 4z = -2$.Multiplicando la primera ecuación por 3 y restándola de la tercera, se obtiene $y - 2z = 8$. Evidentemente, ambos sistemas son equivalentes.

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ 2x - 5y - 2z &= -2 \\ 3x + 4y + z &= 8 \end{cases} \xrightarrow[Eq3=Eq3-3\cdot Eq1]{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1} \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ -7y - 4z &= -2 \\ y - 2z &= 8 \end{cases}$$

2) *Operar adecuadamente con la segunda ecuación del nuevo sistema para eliminar la segunda incógnita de la tercera ecuación.*
Para encontrar la tercera ecuación nueva, multiplicamos la tercera ecuación por 7 y la sumamos a la segunda. Observamos que en la última ecuación queda ahora

una sola incógnita.

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ -7y-4z &= -2 \\ y-2z &= 8 \end{cases} \xrightarrow{Eq3=7\cdot Eq3+Eq2} \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ -7y-4z &= -2 \\ -18z &= 54 \end{cases}$$

3) *Resolver la última ecuación que tendrá solo una incógnita:*

$$-18z = 54 \Leftrightarrow z = \frac{-54}{18} = -3.$$

4) *Resolver la segunda ecuación del último sistema, sustituyendo la z por el valor hallado.* En este caso tenemos que $z = -3$

$$7y - 4\cdot(-3) = -2 \Leftrightarrow y = \frac{-2-12}{7} = 2$$

Obtenemos que $y = 2$.

5) *Finalmente, sustituir los valores encontrados de la y y la z en la primera ecuación, y encontrar la x.* Utilizando $z = -3$ y $y = 2$, tenemos

$$x + 2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

En este caso, $x = 1$.

Por lo tanto la solución del sistema es $(x, y, z) = (1, 2, -3)$.

Este método se denomina **método de Gauss**.

3.3. Sistemas lineales de m ecuaciones y n incógnitas

Ahora queremos estudiar cómo trabajar con sistemas de ecuaciones lineales con cualquier número de ecuaciones lineales e incógnitas.

3.3.1. Definición

Un **sistema de m ecuaciones y n incógnitas** (que denominaremos $x_1, x_2, \ldots, x_n$) con términos independientes $b_1, \ldots, b_n$, también denominados constantes y donde m y n son dos números naturales, tiene la forma siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Como en el resto de los sistemas, una **solución de este sistema** es un **n-tupla** (es decir, una colección de n números) que, al sustituir $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ convenientemente en este sistema, resuelve todas las ecuaciones simultáneamente. Es evidente que alguno de los coeficientes de cada incógnita tiene que ser diferente de 0 en alguna de las ecuaciones (en caso contrario, esta incógnita sería superflua).

3.3.2. Método de Gauss

Tal como hemos visto en el caso de sistemas con tres ecuaciones y tres incógnitas, el método de Gauss consiste en aplicar una serie de transformaciones lineales al sistema inicial hasta obtener un sistema más fácil de resolver.

Las transformaciones lineales que podemos aplicar cuando utilizamos el método de Gauss son:

- Dos ecuaciones cualesquiera son intercambiables.
- Una ecuación cualquiera del sistema puede multiplicarse (en ambos miembros) por una constante diferente de cero.
- Una ecuación cualquiera del sistema puede reemplazarse por la ecuación que resulta de sumar a esta misma ecuación cualquier otra ecuación del sistema, la cual se puede multiplicar además por cualquier número.

Estas tres transformaciones elementales suelen denominarse (en este orden): *intercambiar ecuaciones, reescalar* (es decir, multiplicar por un número) y *pivotar*.

En cada una de las ecuaciones del sistema lineal, la primera incógnita que aparece con un coeficiente diferente de cero se denomina **incógnita inicial** de la ecuación. Se dice que un sistema está en **forma escalonada** (o es **triangular**) si la incógnita inicial en cada ecuación (obviamente, excepto en la primera) está a la derecha de la incógnita inicial de la ecuación que la precede. Es decir que (en caso de que tengamos el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, $m = n$) la forma del sistema en forma escalonada es la siguiente:

$$
\left\{
\begin{array}{cccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\ldots & +\ldots & +a_{1(n-1)}x_{n-1} & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\ldots & +\ldots & +a_{2(n-1)}x_{n-1} & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
 & & +a_{33}x_3 & +\ldots & +\ldots & +a_{3(n-1)}x_{n-1} & +a_{3n}x_n & = b_3 \\
 & & & +\ldots & +\ldots & +\ldots & +\ldots & = \ldots \\
 & 0 & & & +\ldots & +\ldots & +\ldots & = \ldots \\
 & & & & & +a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & +a_{(n-1)n}x_n & = b_{n-1} \\
 & & & & & & +a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}
\right.
$$

El **método de Gauss** consiste en utilizar las tres transformaciones elementales entre ecuaciones (intercambiar, reescalar y pivotar) para encontrar un sistema equivalente en el inicial en forma esglaonada. Así, empezando por la última incógnita, podremos resolver fácilmente el sistema.

Para conseguirlo:

1) Empezamos repasando todos los coeficientes de x_1 (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}) hasta encontrar el primer coeficiente que sea diferente de cero. Este coeficiente podría ser el mismo a_{11}. Si no es el primero, se intercambia la ecuación con la primera que tenga este término diferente de 0.

2) Consideramos que un nuevo sistema tiene un número diferente de 0 como coeficiente a_{11}.

3) Mediante las operaciones de reescalar y pivotar, se consiga que todos los coeficientes que estén bajo este nuevo a_{11} sean 0. Así, si en la ecuación que ocupa la fila k-ésima su primer coeficiente a_{k1} es diferente de 0, se pivota multiplicando la primera fila por $\frac{a_{k1}}{a_{11}}$ y restando el resultado a la fila k-ésima. El resultado será la nueva fila k-ésima. El nuevo sistema tendrá esta forma:

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ & +a'_{22}x_2 & +\dots & +a'_{2n}x_n & =b'_2 \\ & \dots & & & \\ & \dots & & & \\ & +a'_{m2}x_2 & +\dots & +a'_{mn}x_n & =b'_m \end{array}\right.$$

4) Una vez eliminados todos los coeficientes de la primera incógnita (excepto el de la primera ecuación), repetimos el mismo procedimiento con los coeficientes de la segunda incógnita, x_2, a partir de la segunda ecuación.

5) A continuación, se realiza el mismo procedimiento con la tercera incógnita, x_3, a partir de la tercera ecuación. Y así sucesivamente hasta llegar a la última ecuación. Una vez llegado al final del proceso, el número de ecuaciones que no son del tipo $0 = 0$ es igual a un cierto número, que denominaremos r, de modo que $r \leq m$.

3.3.3. Soluciones y tipos de sistemas

Una vez finalizado el procedimiento de Gauss, el sistema resultante tendrá que hallarse en una de estas situaciones:

- Que aparezca una fila con todos los coeficientes iguales a cero y con la constante diferente de cero. En este caso el sistema no tiene ninguna solución. Se llama que el sistema es **incompatible**.

- Que no aparezca ninguna ecuación con ceros, o que todas las filas con coeficientes iguales a cero tengan también constantes iguales a cero (en este caso todas estas filas son superfluas y pueden eliminarse). Si esto es así, el sistema tiene solución. Se llama que el sistema es **compatible**, y puede ser:

    ◦ **Compatible determinado**: la solución es única si el número r de ecuaciones resultantes en el sistema escalonado es igual a n (el número de incógnitas).

- ∘ **Compatible indeterminado**: con infinitas soluciones si el número r de ecuaciones en el sistema escalonado es menor que n (el número de incógnitas).

Veamos cómo son las soluciones en el caso de sistemas compatibles:

$\boxed{\text{Caso } r = n}$ El sistema resultante en forma escalonada, después de utilizar el método erá de la forma:

$$\left\{\begin{array}{cccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{1(n-1)}x_{n-1} & +a_{1n}x_n & =b_1\\
 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{2(n-1)}x_{n-1} & +a_{2n}x_n & =b_2\\
 & & +a_{33}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{3(n-1)}x_{n-1} & +a_{3n}x_n & =b_3\\
 & & & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & =\dots\\
 & 0 & & & +\dots & +\dots & +\dots & =\dots\\
 & & & & & +a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & +a_{(n-1)n}x_n & =b_{n-1}\\
 & & & & & & +a_{nn}x_n & =b_n
\end{array}\right.$$

Para encontrar la solución única de este sistema, se utiliza la llamada *sustitución hacia atrás* (un proceso muy parecido al que se ha seguido en los sistemas de tres ecuaciones lineales):

1) Se aísla x_n de la última ecuación:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

2) Se sustituye este valor en la ecuación anterior y se encuentra el valor de x_{n-1}:

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{(n-1)n}\cdot\frac{b_n}{a_{nn}}\right)$$

3) Se sigue el mismo procedimiento de sustitución hacia atrás hasta que se han encontrado los valores para todas las incógnitas.

$\boxed{\text{Caso } r < n}$ El sistema de ecuaciones quedaría de la manera siguiente:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & +a_{1n}x_n & =b_1\\
 & a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & +a_{2n}x_n & =b_2\\
0 & & \dots & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & =\dots\\
 & & & & a_{rn}x_r & +a_{r(n+1)}x_{r+1} & +\dots & +a_{rn}x_n & =b_r
\end{array}\right.$$

Para resolver este sistema, haremos lo siguiente:

- Reducir este sistema a un sistema con tantas incógnitas como filas. Para hacerlo, se pasan todas las incógnitas a partir de x_{r+1} al otro miembro.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \quad +a_{12}x_2 \quad +a_{13}x_3 \quad +\ldots \quad +a_{1r}x_r \quad = b_1 - a_{1(r+1)}x_r - \ldots - a_{1n}x_n \\ \qquad\qquad a_{22}x_2 \quad +a_{23}x_3 \quad +\ldots \quad +a_{2r}x_r \quad = b_2 - a_{2(r+1)}x_r - \ldots - a_{2n}x_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{rn}x_r \quad = b_r - a_{r(n+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

- De este modo, tenemos las r primeras incógnitas en el miembro izquierdo de las ecuaciones, y las $n-r$ incógnitas del miembro de la derecha de las ecuaciones se tratan como si fueran valores conocidos (como los números b_i). Obtenemos así un sistema con r ecuaciones y r incógnitas, que puede resolverse haciendo el proceso de sustitución hacia atrás.

- Ahora bien, se obtendrá la solución para las r primeras incógnitas, que dependerán del valor que tengan las $n-r$ incógnitas restantes, y estas $n-r$ podrán tomar cualquier valor real. Por eso mismo, este tipo de sistemas tiene **más de una solución** (de hecho, tiene infinitas soluciones).

3.4. Sistemas de inecuaciones

3.4.1. Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita

Definición. Un sistema de inecuaciones lineales con una única incógnita está formado por varias inecuaciones lineales y limitado por una clave que indica precisamente que se trata de un sistema, y no de inecuaciones independientes.

Ejemplo. Un sistema de inecuaciones podría ser:

$$\begin{cases} 3x+4 \leq 2x+8 \\ 2x-1 > x \end{cases}$$

Un número es solución de un sistema de inecuaciones de este tipo si es solución de todas las inecuaciones que forman el sistema. Tengamos en cuenta que la solución de un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita puede tener solución o no, y en caso de que tenga solución esta puede ser un solo número, un intervalo de números o bien la unión de varios intervalos.

Ejemplo. $x=3$ es una solución del sistema de inecuaciones anterior, puesto que

$$\begin{cases} 3\cdot 3+4 \leq 2\cdot 3+8 \\ 2\cdot 3-1 > 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 13 \leq 14 \\ 5 > 3 \end{cases}$$

Métodos de resolución. Para resolver sistemas de inecuaciones, proponemos dos métodos diferentes.

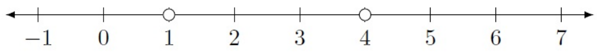
En **el primer método**, los pasos para la resolución son los siguientes:

1) *Se resuelven por separado las ecuaciones asociadas a cada una de las inecuaciones del sistema.* La ecuación asociada a una inecuación es la resultante de sustituir la desigualdad de la inecuación por una igualdad. En el ejemplo anterior, tenemos que resolver cada una de las dos ecuaciones siguientes:

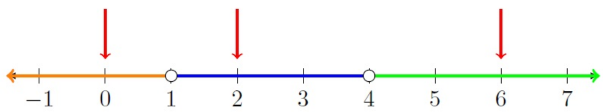
$$3x + 4 = 2x + 8 \Leftrightarrow x = 4$$

$$2x - 1 = x \Leftrightarrow x = 1$$

2) *Se marcan en la recta real las soluciones anteriores.* Esto hará que la recta real quede dividida en 3 partes. En el ejemplo:

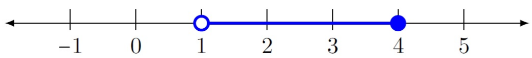


3) *Se selecciona un número de cada una de las partes en las que queda dividida la recta por los números anteriores.* En el ejemplo, pueden escogerse los números 0, 2 y 6.



4) *Se comprueba cuál de estos números, además de las soluciones de las ecuaciones, son solución de todo el sistema de inecuaciones.* En el ejemplo, se tienen que probar el 0, 2 y 6 que hemos marcado en el paso anterior y las dos soluciones 1 y 4. Es s fácil comprobar que son únicamente solución del sistema el 2 y el 4.

5) *Finalmente, las soluciones del sistema son los números que están en el mismo intervalo que los números que en el paso 4 hemos comprobado que eran solución del sistema de inecuaciones.* Además, incluiremos las soluciones obtenidas en el apartado 1 si cumplen el sistema de inecuaciones. En el ejemplo, los números que son solución del sistema están entre el 1 y el 4, más el 4, y por lo tanto el intervalo $(1, 4]$, la sección coloreada de esta recta real:



Por lo tanto, las soluciones del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 4 \leq 2x + 8 \\ 2x - 1 > x \end{cases}$$

son todos los números mayores que 1 y menores o iguales a 4, es decir, todos los números, x, que cumplen $1 < x \leq 4$. En forma de intervalo, la solución se expresaría de la manera siguiente:

$$(1, 4]$$

Un **segundo método** para resolver este sistema es:

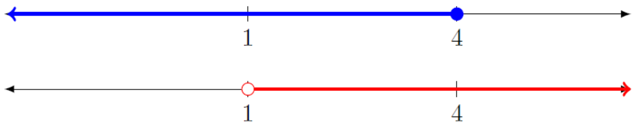
1) *Resolvemos la primera inecuación.* En el ejemplo, tenemos que resolver

$$3x + 4 \leq 2x + 8$$

Tal como hemos visto en el método anterior, la solución de la ecuación asociada es $x = 4$, y si comprobamos los valores 0, 4 y 5 en la inecuación obtenemos como solución el intervalo, $(-\infty, 4]$.

2) *Resolvemos la segunda inecuación.* En el ejemplo, procedemos del mismo modo que en el paso anterior y obtenemos que la solución de $2x - 1 > x$ es el intervalo $(1, +\infty]$.

3) *Buscamos cuáles son los puntos en común que tienen las dos soluciones obtenidas.* En el ejemplo vemos que coinciden en el intervalo $(1, 4]$



3.4.2. Sistemas de inecuaciones de segundo grado con una incógnita

Definición Un sistema de inecuaciones de segundo grado con una única incógnita está formado por varias inecuaciones lineales o de segundo grado y limitado por una clave.

Ejemplo. Un sistema de inecuaciones de segundo grado puede ser

$$\begin{cases} 2x + 5 \geq 2 - x \\ 2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4 \end{cases}$$

Un número es solución de un sistema de inecuaciones de este tipo si es solución de todas las inecuaciones que forman el sistema. Tengamos en cuenta que la solución de un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita puede tener solución o no, y en caso de que tenga solución esta puede ser un solo número, un intervalo de números o bien la unión de varios intervalos.

Ejemplo. $x = \frac{1}{2}$ es una solución del sistema de inecuaciones, puesto que

$$2\left(\frac{1}{2}\right) + 5 \geq 2 - \left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 6 \geq \frac{3}{2}$$
$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 4 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq \frac{15}{4}$$

Método de resolución. Un procedimiento para encontrar las soluciones de un sistema de inecuaciones de segundo grado es muy parecido al de resolución de sistema de inecuaciones lineales. De hecho podemos elegir cualquiera de los dos métodos que hemos visto y utilizarlos también en este caso. Elegimos por ejemplo el segundo. Así, para encontrar la solución del sistema hay que resolver cada una de las ecuaciones aparte, después buscar las soluciones de las dos inecuaciones por separado y finalmente buscar todas las zonas comunes:

1) Se resuelven las dos ecuaciones asociadas.

$$\begin{cases} 2x + 5 = 2 - x \Leftrightarrow x = -1 \\ 2x^2 - 2x - 2 = x^2 - x + 4 \Leftrightarrow x = -2,\ 3 \end{cases}$$

2) Se resuelven las dos inecuaciones por separado.

- La solución de $2x + 5 \geq 2 - x$ es $[-1, +\infty)$.

- La solución de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ es $[-2, 3]$.

3) Se busca la zona común de la solución de ambas inecuaciones, que es $[-1, 3]$:

Por lo tanto, las soluciones del sistema de ecuaciones de segundo grado

$$\begin{cases} 2x + 5 \geq 2 - x \\ 2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4 \end{cases}$$

son todos los números mayores o iguales a -1 y menores o iguales a 3, es decir, todos los números, x que cumplan $-1 \leq x \leq 3$. En forma de intervalo, la solución se expresaría de la manera siguiente: $[-1, 3]$.

Resumen

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas	
Definición: es un conjunto de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cada una, representadas por las mismas letras.	*Ejemplo:* $\begin{cases} 3x - 6y = 5 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$
Escritura habitual: términos con incógnita en el miembro de la izquierda y términos numéricos en el de la derecha.	
Solución: un par de números que, al sustituir las incógnitas correspondientes en cada una de las ecuaciones, dan lugar a dos igualdades ciertas.	$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ té solució $(x, y) = (2, 1)$, ja que $\begin{cases} 2 + 1 = 3 \\ 2 \cdot 2 - 1 = 3 \end{cases}$
Resolución: proceso de búsqueda de las soluciones del sistema.	
Métodos de resolución	
Método de sustitución	
Procedimiento	*Ejemplo:* $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$
1. Se elige una de las dos ecuaciones.	$2x + y = 4$
2. Se aísla una de las incógnitas de la ecuación elegida.	$y = 4 - 2x$
3. Se sustituye el valor de la incógnita en la otra ecuación.	$4x - 2 \cdot (\mathbf{4 - 2x}) = 8$
4. Se resuelve la ecuación resultante.	$4x - 8 + 4x = 8 \Leftrightarrow 8x - 8 = 8$ $\Leftrightarrow 8x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{8} = 2$
5. Se sustituye el valor encontrado en la ecuación del paso 2 y obtenemos el valor de la otra incógnita y la solución.	$y = 4 - 2 \cdot \mathbf{2} = 0$ Solución: $(x, y) = (2, 0)$
6. Se comprueba la solución.	$\begin{cases} 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \\ 2 \cdot 2 + 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \end{cases}$
Método de igualación	
Procedimiento	*Ejemplo:* $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$
1. Se aísla la misma incógnita en las dos ecuaciones.	$y = \frac{4x - 8}{2} = 2x - 4$ $y = 4 - 2x$
2. Se igualan las dos expresiones resultantes.	$2x - 4 = 4 - 2x$
3. Se resuelve la ecuación resultante.	$2x - 4 = 4 - 2x \Leftrightarrow 4x = 8$ $\Leftrightarrow x = \frac{8}{4} = 2$
4. Se sustituye la incógnita de cualquiera de las ecuaciones del sistema del paso 1 por el valor encontrado.	$y = 4 - 2 \cdot 2 = 0$ Solución: $(x, y) = (2, 0)$
5. Se comprueba la solución.	$\begin{cases} 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \\ 2 \cdot 2 + 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \end{cases}$

Método de reducción

Procedimiento	*Ejemplo:* $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$
1. Se elige una de las dos incógnitas.	Por ejemplo, y
2. Se multiplican los dos miembros de la primera ecuación por el coeficiente de la incógnita escogida en la segunda ecuación y los dos miembros de la segunda ecuación por el coeficiente de la incógnita escogida en la primera ecuación.	$1 \cdot (4x - 2y = 8)$ $-2 \cdot (2x + y = 4)$ $\Downarrow$ $\begin{array}{rrl} 4x & -2y & = 8 \\ -4x & -2y & = -8 \end{array}$
3. Se restan las dos ecuaciones resultantes.	$\begin{array}{rrrl} & 4x & -2y & = 8 \\ - & -4x & -2y & = -8 \\ \hline & 8x & & = 16 \end{array}$
4. Se resuelve la ecuación resultante.	$x = 2$
5. Se sustituye el valor de la incógnita hallada en cualquiera de las ecuaciones del sistema.	Se sustituye $x = 2$ a $2x + y = 4$: $2 \cdot 2 + y = 4$
6. Se resuelve la ecuación resultante.	$4 + y = 4 \Rightarrow y = 0$ Solució: $(x, y) = (2, 0)$
7. Se comprueba la solución.	$\begin{cases} 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \\ 2 \cdot 2 + 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \end{cases}$

Sistema de m ecuaciones y n incógnitas

Un **sistema de m ecuaciones y n incógnitas** (que denominaremos x_1, x_2, ..., x_n), con términos independientes b_1, ..., b_n, denominados también constantes, y en el que m y n son dos números naturales, tiene la forma siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Resolución de un sistema de varias ecuaciones lineales por el método de Gauss

1. Operar con la primera ecuación para eliminar la primera incógnita de las otras ecuaciones.	$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 5y - 2z = -2 \\ 3x + 4y + z = 8 \end{cases} \xrightarrow[Eq3=-3\cdot Eq1+Eq3]{Eq2=-2\cdot Eq1+Eq2}$ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y - 4z = -2 \\ y - 2z = 8 \end{cases}$
2. Operar con la segunda ecuación para eliminar la segunda incógnita de las ecuaciones siguientes. 3. Se hace la misma operación hasta agotar las ecuaciones y se obtiene un sistema escalonado.	$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y - 4z = -2 \\ y - 2z = 8 \end{cases} \xrightarrow{Eq3=Eq2+7\cdot Eq3}$ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -7y - 4z = -2 \\ -18z = 54 \end{cases}$
4. Se resuelve la última ecuación y se sustituyen los valores *hacia* atrás.	$\begin{cases} 18z = 54 \Rightarrow z = -\frac{54}{18} = -3 \\ -7y - 4 \cdot (-3) = -2 \Rightarrow y = 2 \\ x + 2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

Número de soluciones de un sistema

Un sistema de m ecuaciones y n incógnitas puede no tener solución, tener una o tener infinitas.

- El sistema no tiene ninguna solución cuando aparece una fila con todos los coeficientes iguales a 0 y con la constante diferente de 0. Se dice que el sistema es **incompatible**.
- En caso contrario, el sistema tiene solución, se denomina sistema **compatible** y puede ser:
  - **Compatible determinado** (con solución única): si el número de ecuaciones resultantes en el sistema escalonado es igual al número de incógnitas.
  - **Compatible indeterminado** (con infinitas soluciones): si el número de ecuaciones en el sistema escalonado es menor que el número de incógnitas.

Sistemas de inecuaciones

Un sistema de inecuaciones con una única incógnita está formado por varias inecuaciones y limitado por una clave que indica precisamente que se trata de un sistema y no de inecuaciones independientes.

Resolución de sistemas de inecuaciones

1) Se resuelven las ecuaciones asociadas a las inecuaciones del sistema.

2) Se marcan las soluciones anteriores en la recta real.

3) Se selecciona un número de cada una de las partes en las que queda dividida la recta por los números anteriores.

4) Se comprueba cuál de estos números son solución del sistema de inecuaciones.

5) Las soluciones del sistema son los números que están en el mismo intervalo que los números que en el apartado 4 hemos comprobado que eran solución del sistema de inecuaciones.

Ejercicios resueltos

1. **Encuentra las soluciones en el sistema de ecuaciones usando el método de Gauss:**

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

Solución:

Se observa que la primera incógnita inicial es la x en la primera ecuación, puesto que su coeficiente es diferente de 0 (es 1). Pivotando este elemento se obtiene:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1} \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

Solo la primera ecuación tiene incógnita x, y por lo tanto la primera incógnita inicial, que es y, está en la tercera ecuación (puesto que en la segunda ecuación no hay incógnita y. Así, pues, intercambiamos las filas:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{Eq1\leftrightarrow Eq2} \begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

De este modo, ya no hay más incógnitas y. La nueva incógnita inicial de la tercera ecuación es z; por lo tanto, puede mantenerse en la posición y servirá de pivote para eliminar la incógnita z de la última ecuación:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{Eq4=Eq4-2\cdot Eq3} \begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ -3w = -3 \end{cases}$$

Se ha llegado a la última ecuación, y la situación es de igual número de incógnitas que de ecuaciones. Por lo tanto, se trata de un sistema compatible determinado. Se aplica la sustitución hacia atrás al último sistema para resolverlo:

- Se deduce que $w = 1$ de la última ecuación.
- Se sustituye este valor en la ecuación anterior y se resuelve:
$$z + 2\cdot 1 = 4 \Rightarrow z = 4 - 2 = 2.$$
- Se sustituyen $z = 2$ y $w = 1$ en la ecuación anterior:
$$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1.$$
- Se sustituyen $y = -1$, $z = 2$, $w = 1$:
$$x - (-1) = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Por lo tanto, la solución del sistema es $x = -1$, $y = -1$, $z = 2$, $w = 1$. También puede escribirse $(x, y, z, w) = (-1, -1, 2, 1)$.

2. **Encuentra las soluciones en el sistema de ecuaciones usando el método de Gauss.**

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ 3x + 6z - 6w = 6 \\ -y + z - w = 1 \end{cases}$$

Solución:

Para obtener la forma escalonada hacemos lo siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ 3x + 6z - 6w = 6 \\ -y + z - w = 1 \end{cases} \xrightarrow{Eq3=Eq3-3\cdot Eq1} \begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ -3y + 3z - 3w = 3 \\ -y + z - w = 1 \end{cases} \xrightarrow[Eq4=Eq4+Eq2]{Eq3=Eq3+3\cdot Eq2}$$

$$\xrightarrow[Eq4=Eq4+Eq2]{Eq3=Eq3+3\cdot Eq2}\begin{cases} x+y+z-w=1\\ y-z+w=-1\\ 0=0\\ 0=0\end{cases}$$

Eliminamos las dos igualdades 0 = 0, puesto que son superfluas. El sistema escalonado es:

$$\begin{cases} x+y+z-w=1\\ y-z+w=-1\end{cases}$$

En este caso, $n=4$ y $r=2$; por lo tanto, se trata de un sistema compatible indeterminado. Para poder utilizar el procedimiento de sustitución hacia atrás, tiene que haber tantas incógnitas como ecuaciones; por eso, movemos las dos incógnitas restantes al miembro de la derecha.

$$\begin{cases} x+y=1-z+w\\ y=-1+z-w\end{cases}$$

Ahora ya podemos resolver el sistema. La última ecuación nos da el valor de la y.

$$y=-1+z-w.$$

Si sustituimos hacia atrás el valor de la y en la primera ecuación,

$$x-1+z-w=1-z+w \Rightarrow x=2-2z+2w.$$

Así, las soluciones son de este tipo:

$$x=2-2z+2w$$
$$y=-1+z-w$$

donde z y w pueden ser cualquier número. Escribiremos la solución $(x,y,z,w)=(2-2z+2w,1+z-w,z,w)$ para z, $w\in\mathbb{R}$. Por eso, el sistema tiene infinitas soluciones, tantas como valores se den a z y w. Ejemplos concretos serían los siguientes:

- Si $z=0$ y $w=0$, entonces $x=2$ e $y=-1$. Por lo tanto, una solución del sistema es $x=2$, $y=-1$, $z=0$, $w=0$.
- Si $z=1$ y $w=-2$, la solución del sistema sería $x=-4$, $y=2$, $z=1$, $w=-2$.

Así pues, para cada par de valores cualquiera z,w podemos conseguir una solución del sistema. Es decir, el sistema tiene soluciones infinitas.

3. **Encuentra las soluciones del sistema.**

$$\begin{cases} 2x+3y+z=4\\ x-2y+z=-2\\ 8x+5y+5z=1\end{cases}$$

Solución:

Solucionamos el sistema encontrando la forma escalonada. Para ello, hacemos lo siguiente:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=4\\ x-2y+z=-2\\ 8x+5y+5z=1\end{cases}\xrightarrow{Eq1\leftrightarrow Eq2}\begin{cases} x-2y+z=-2\\ 2x+3y+z=4\\ 8x+5y+5z=1\end{cases}\xrightarrow[Eq3=Eq3-8\cdot Eq1]{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1}$$

$$\xrightarrow[Eq3=Eq3-8\cdot Eq1]{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1}\begin{cases} x-2y+z=-2\\ 7y-z=8\\ 21y-3z=17\end{cases}\xrightarrow{Eq3=Eq3-3\cdot Eq2}\begin{cases} x-2y+z=-2\\ 7y-z=8\\ 0=-7\end{cases}$$

En vista de la tercera ecuación, que no tiene ninguna posible solución porque siempre es falsa, podemos deducir que el sistema es incompatible.

4. **Añade una ecuación al sistema siguiente, de forma que resulte...**

$$\begin{cases} x+y+z=1\\ x-z=2\end{cases}$$

(a) compatible determinado.

(b) compatible indeterminado.

(c) incompatible.

Solución:

(a) Tenemos que asegurarnos de hallar una tercera ecuación que no dé lugar a un sistema incompatible o que sea irrelevante. Dado que la segunda ecuación no tiene la variable

y, podemos dar una tercera ecuación con esta variable, por ejemplo, $y = 0$. O bien, para complicar más esta tercera ecuación, $y = 0$ más una combinación lineal de las otras dos ecuaciones (de modo que al simplificar el sistema devuelva a $y = 0$).

Con esta tercera ecuación ($y = 0$), haciendo sustitución hacia atrás, nos queda el sistema

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases} \xrightarrow{Eq2=Eq2-Eq1} \begin{cases} x + z = 1 \\ \quad -2z = 1 \end{cases}$$

Y puesto que es un sistema escalonado de dos ecuaciones y dos variables, ya sabemos que es compatible determinado. ¿Sabes resolverlo?

(b) Puesto que con las dos ecuaciones que nos dan ya tenemos un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas, si añadimos una ecuación irrelevante mantendremos el mismo tipo de sistema.

Por ejemplo, la tercera ecuación podría ser $0 = 0$ (que siempre es cierta y no da más información que la que ya tenemos, y por lo tanto es irrelevante), $x - z = 2$ (que es idéntica a la segunda ecuación) o cualquier combinación lineal de las ecuaciones iniciales.

(c) Para que el sistema resulte incompatible, basta con dar una ecuación que no pueda solucionarse. Por ejemplo, si la tercera ecuación fuera $0 = 1$ no habría solución del sistema (ya que la tercera ecuación nunca sería cierta), y por lo tanto el sistema sería incompatible.

Otra opción es dar una tercera ecuación que sea realmente incompatible con alguna de las anteriores, por ejemplo, $x - z = 1$. Dado que la segunda ecuación es $x - z = 2$, no puede ser que las dos sean ciertas a la vez (dicho de otro modo, al restar una ecuación de la otra obtendríamos 0 1 como antes); por lo tanto, el sistema es incompatible.

5. **Encuentra la solución del sistema de inecuaciones siguiente:**

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{x-1}{3} > x \\ x - 1 < 3 - \dfrac{x+1}{2} \end{cases}$$

Solución:

Si operamos la primera inecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} 2x - x &> \frac{x-1}{3} \\ x &> \frac{x-1}{3} \\ 3x &> x - 1 \\ 2x &> -1 \\ x &> \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

Mientras que, para la segunda,

$$\begin{aligned} x - 4 &< -\frac{x+1}{2} \\ 2x - 8 &< -(x+1) \\ 3x &< 7 \\ x &< \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, si unimos las dos soluciones tenemos la solución $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right)$.

6. **Resuelve el sistema de inecuaciones siguiente:**

$$\begin{cases} 2x^2 - 3 \leq 6x + 5 \\ 7x + 1 \leq 13 + 4x \end{cases}$$

Solución:

Si reordenamos la primera inecuación, tenemos

$$2x^2 - 6x - 8 \leq 0.$$

Ahora bien, si igualamos la parte de la izquierda a 0 y solucionamos la ecuación aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado, tenemos $x = -1, 4$ como soluciones. Estos valores son donde la inecuación se satisface con una igualdad. Para saber cuál de los intervalos que quedan soluciona la inecuación, tomamos un valor de cada intervalo y los evaluamos:

- Cogemos un número más pequeño que -1, por ejemplo, -2, y lo sustituimos en la inecuación, de modo que queda $8 \leq 0$. Dado que esto no es cierto, entonces el intervalo $(-\infty, -1)$

no pertenece a la solución.

- Cogemos un número entre -1 y 4, por ejemplo, el 0, y lo sustituimos en la inecuación, de forma que queda $-8 \leq 0$. Al ser cierto, entonces este intervalo sí pertenece a la solución.
- Cogemos un número mayor que 4, por ejemplo, 5, y lo sustituimos en la inecuación, de modo que queda $12 \leq 0$. Al no ser cierto, el intervalo $(4, +\infty)$ no pertenece a la solución.

En conclusión, la primera inecuación tiene como solución el intervalo $[-1, 4]$.

Solucionamos la segunda inecuación de forma que queda

$$\begin{aligned} 7x + 1 &\leq 13 + 4x \\ 7x - 4x &\leq 13 - 1 \\ 3x &\leq 4 \end{aligned}$$

y, por lo tanto, tiene como solución $x \leq 4$.

Ahora sabemos que la solución del sistema será la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones. Así tendremos que la solución del sistema es $[-1, 4]$.

Ejercicios para practicar con las soluciones

7. **Encuentra las soluciones de los sistemas de ecuaciones siguientes usando el método de Gauss:**

(a)

$$\begin{cases} x & +3y & = -1 \\ x & -2y & = 9 \\ 3x & +4y & = 7 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 3x & +y & +z & +u & +v & = 0 \\ & & +z & -u & & = 1 \\ & & & & 2v & = 4 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} -2x & +y & +z & -t & = 2 \\ & y & +z & +2t & = 4 \\ & & z & +2t & = 3 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} x & -2y & +3z & = 0 \\ -4x & +5y & -6z & = 1 \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} x & +2y & +2z & = 3 \\ & y & +z & = 1 \\ x & +y & +z & = 0 \end{cases}$$

8. **Un sistema lineal se ha resuelto de dos maneras obteniendo los dos conjuntos de soluciones siguientes:**

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3\mu - 1 \\ y = 3 - 6\mu \\ z = 1 + 3\mu \end{cases}$$

para λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Prueba que las dos soluciones coinciden.

9. **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones de grado 1:**

(a)

$$\begin{cases} 2x - (x - 4) < 6 \\ x > 3 \cdot (2x - 1) + 18 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-4}{3} > 2x - 1 \\ 2x - \dfrac{x-5}{3} > x - 3 \end{cases}$$

10. **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones de grado 2:**

(a)

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leq 0 \\ -x^2 + 8x > 7 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 1} \leq 0 \\ 7 \cdot (3 - x) \geq 5 \end{cases}$$

Soluciones:

7.

(a) $x = 5, y = -2$

(b) $\left(\dfrac{-3 - y - 2u}{3}, y, 1 + u, u, 2\right)$

(c) $\left(1 - \dfrac{3t}{2}, 1, 3 - 2t, t\right)$

(d) $\left(\frac{-2}{3} - 11z, \frac{-1}{3} - 4z, z\right)$

(e) Es un sistema incompatible

8. Comprobamos que para $\lambda = 3\mu - 1$ obtenemos las mismas expresiones para las soluciones.

9.

(a) $(-\infty, -3)$

(b) $(-7, 1)$

10.

(a) $(1, 6]$

(b) $(-\infty, -3] \cup \left(1, \frac{16}{7}\right]$