Iniciación a las matemáticas para la ingeniería

PID_00270084

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat Oberta de Catalunya

2. Equaciones

Índice

2.1. Expresiones algebraicas

2.1.1. Definición

Por **expresión algebraica** se entiende cualquier combinación de letras y números relacionados entre sí por signos de operaciones. Así, si bien una expresión numérica viene dada por números y signos de operación entre sí, una expresión algebraica también contiene letras, que operan entre sí o con otros números.

¿Qué es una expresión algebraica?
Por expresión algebraica se entiende cualquier combinación de números, letras y signos de operación. Las letras de una expresión algebraica se tienen que tratar como si fueran números, y por eso se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir, siguiendo las mismas reglas que los números. Las expresiones algebraicas permiten expresar operaciones entre cantidades desconocidas sustituyendo el valor desconocido por una letra concreta.

Ejemplo. Expresión algebraica.

$$a - 23 \cdot c + 5 \cdot d - 7 \cdot a \cdot y$$

Las letras de una expresión algebraica se tienen que tratar como si fueran números: se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir, y cumplen, como veremos, las mismas propiedades de las operaciones entre números.

Las expresiones algebraicas se pueden usar en problemas reales, en los cuales se desconoce el valor de algún elemento. Así, por ejemplo, si una persona va a comprar y adquiere 3 kg de limones a 1.09 € el kilogramo, y 2 kg de patatas a 0.78 € el kilogramo, para calcular el valor de la compra se tiene que hacer:

$$3 \cdot 1.09 + 2 \cdot 0.78$$

Ahora bien, si no se conoce el precio del kilogramo de limones ni tampoco el precio del kilogramo de patatas, puede asociarse a cada valor una letra (relacionada con el nombre siempre que sea posible). Así, si por ejemplo usamos l para el precio del kilogramo de limones, y p para el precio del kilogramo de patatas, el valor de la compra anterior vendría dado por la siguiente expresión:

$$3 \cdot l + 2 \cdot p$$

Esta expresión algebraica permite calcular el valor total de la compra cuando se conozcan los precios por kilogramo de los limones y de las patatas, sustituyendo las dos letras por sus valores reales.

En las expresiones algebraicas, al multiplicar un número por una letra normalmente no se pone el signo de multiplicación, sino que se mantiene la letra seguida del número, y con esta notación se sobreentiende que se trata de un producto. De acuerdo con esta convención, la expresión algebraica anterior también puede escribirse así:

$$2l + 3p$$

Las letras de una expresión algebraica también pueden sustituirse por números concretos. Por ejemplo, en la expresión algebraica $4x - 2y + 6$ puede sustituirse la letra x por el valor 3, y la letra y por el valor 4. En este caso, la expresión algebraica se transforma en

$$4 \cdot \underbrace{3}_{x} + 2 \cdot \underbrace{4}_{y} + 6$$

Entonces, se dice que el valor numérico de la expresión algebraica $4x - 2y + 6$, cuando la x vale 3 e y vale 4, es igual a $4 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 6$, es decir, es 10. En definitiva, el **valor numérico de una expresión algebraica** se halla sustituyendo las letras por números concretos, operando y obteniendo el resultado. Es evidente que el valor numérico de una expresión algebraica depende de los valores concretos que reciben las letras.

Ejemplo. Valores numéricos de una expresión algebraica
Dada la expresión algebraica

$$4x - 2y + 6$$

Si $x = 5$ y $y = 2$, su valor numérico es igual a $4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 6 = 22$

Si $x = -3$ y $y = -1$, su valor numérico es igual a $4 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) + 6 = -2$

Si $x = -2$ y $y = 5$, su valor numérico es igual a $4 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 + 6 = -12$

2.1.2. Elementos

Una expresión algebraica puede escribirse a partir de varias sumas (recordemos que las restas son sumas con el opuesto) de ciertos productos mixtos (o, incluso, divisiones, aunque, de momento, no se usarán divisiones con denominadores que contengan letras) de números y letras. Cada uno de estos sumandos se denomina **término**.

¿Cuáles son los elementos básicos y las propiedades de las expresiones algebraicas? Los sumandos de una expresión algebraica están formados por letras y números. Cada uno de los sumandos se denomina término y las letras se denominan variables. Una expresión algebraica puede convertirse en otra de equivalente aplicando las propiedades de las operaciones entre letras y números, que son las mismas que las propiedades de las operaciones entre números reales.

Ejemplo. Términos de una expresión algebraica.
Dada la expresión algebraica:

$$a - 3c + 2d - 5ax$$

identificamos:

Términos (hay 4): $a, -3c, 2d$ y $-5ax$

Variables: a, c, d, x.

Recordemos que entre variables o entre números y variables es preferible obviar los signos de multiplicar $\cdot$ o $\times$.

Propiedades de la suma y el producto. Las propiedades de la suma y el producto de números y letras son las propiedades ya conocidas de las operaciones entre números reales.

- **Elemento neutro de la suma.** Es el 0 porque, sumado a cualquier otra letra o número, no lo modifica: $a + 0 = 0 + a = a$.
- **Elemento neutro del producto.** Es el 1 porque, multiplicado por cualquier otra letra o número, no lo modifica: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
- **Elemento opuesto de a.** Es $-a$ porque, sumados, el resultado es el elemento neutro de la suma: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- **Inverso de a.** Es $\frac{1}{a}$ (siendo $a \neq 0$) porque su producto es el elemento neutro del producto: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.
- **La resta.** Es la operación que consiste en sumar el opuesto: $a - b = a + (-b)$.
- **La división.** Es la operación que consiste a multiplicar por el inverso: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, siendo $b \neq 0$.
- **Propiedad conmutativa de la suma.** La suma de dos elementos no depende del orden en el que se realiza: $a + b = b + a$.
- **Propiedad asociativa de la suma.** La suma de tres elementos no depende del orden en el que se hagan las diferentes sumas: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$.
- **Propiedad conmutativa del producto.** El producte de dos elements no depèn de l'ordre en què es fa: $a \cdot b = b \cdot a$.

- **Propiedad asociativa del producto.** El producto de tres elementos no depende del orden en el que se hagan los diferentes productos: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

- **Propiedad distributiva del producto respecto de la suma.** Un producto de un elemento por una suma puede descomponerse como la suma de los productos del elemento por cada uno de los sumandos: $a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c$.

2.1.3. Manipulación

Con el fin de simplificar una expresión algebraica de cierta longitud, tienen que aplicarse las propiedades de la suma, resta, multiplicación y división. La **simplificación** consiste en convertir la expresión original en otra que sea equivalente, pero con el mínimo número de términos posible. Aunque la manera de simplificar no es única (las propiedades pueden aplicarse en otro orden), el resultado final es generalmente muy parecido.

¿En qué consiste simplificar una expresión algebraica? La simplificación de una expresión algebraica consiste en su reducción al mínimo número de términos posible utilizando las propiedades de las operaciones que intervienen en ella. Aunque las propiedades pueden aplicarse en orden diferente, el resultado final tiene que ser el mismo.

Veamos como utilizar las diferentes propiedades en la misma expresión con el objetivo de simplificarla. Consideremos la expresión algebraica

$$a - 4b - 3a + 5a - b$$

1) Se resuelve la suma $-3a + 5a$ utilizando la propiedad distributiva:

$$-3a + 5a = (-3 + 5) \cdot a = 2a$$

Por tanto,

$$a - 4b - 3a + 5a - b = a - 4b + 2a - b$$

2) Por la propiedad conmutativa, podemos agrupar los términos con a y los términos con b

$$a - 4b + 2a - b = a + 2a - 4b - b$$

3) Por la propiedad del elemento neutro de la suma, $a = 1 \cdot a$

$$a - 4b + 2a - b = 1a + 2a - 4b - 1b$$

4) Por la propiedad distributiva aplicada dos veces, una a los términos con a y la otra a los términos con b,

$$1a + 2a - 4b - 1b = (1 + 2) \cdot a + (-4 - 1) \cdot b$$

y simplificando algo más,

$$1a + 2a - 4b - 1b = 3a - 5b$$

Ejemplo. Simplificación

$a - 4b - 3a + 5a - b$ es equivalente a $3a - 5b$.

Esta última expresión, al ser más breve que la anterior, facilita la manipulación. Por eso, es recomendable simplificar toda expresión algebraica, del mismo modo que se simplifica una fracción hasta obtener la fracción irreducible o se encuentra el resultado de una expresión numérica.

2.1.4. Propiedades

Una **igualdad entre expresiones numéricas** está formada por dos expresiones numéricas, denominadas *miembros de la igualdad*, y un *signo de igualdad* (=) interpuesto entre ambas. Las igualdades pueden ser ciertas o falsas.

¿Qué son las igualdades entre expresiones numéricas y entre expresiones algebraicas? Una igualdad entre expresiones numéricas está formada por dos expresiones numéricas y un signo de igualdad interpuesto entre ambas, las cuales pueden ser ciertas o falsas. Una igualdad entre expresiones algebraicas está formada por dos expresiones numéricas y un signo de igualdad interpuesto entre ambas, las cuales pueden ser ciertas o falsas, pero también pueden ser ni ciertas ni falsas.

- Una **igualdad numérica es cierta** si el resultado del miembro de la izquierda es igual al resultado del miembro de la derecha. Por ejemplo:

$$3 \cdot 4 - 5 = 38 - 15 \cdot 2 - 1$$

  puesto que tanto el resultado de la derecha como el de la izquierda es 7. En este caso, se dice que ambas *expresiones numéricas* son *iguales*.

- Una **igualdad numérica es falsa**si el resultado del miembro de la izquierda no es igual al resultado del miembro de la derecha. Por ejemplo, esta igualdad es falsa:

$$4 \cdot (-2) + 8 = 3 - 7 \cdot 11$$

  porque el resultado de la izquierda es 0, mientras que el resultado de la derecha es -74.

De manera parecida a una **igualdad numérica, una igualdad entre expresiones algebraicas** está formada por dos expresiones algebraicas, denominadas *miembros de la igualdad*, y un signo de igualdad (=) interpuesto entre ambas. Las igualdades algebraicas también pueden ser ciertas o falsas.

- Una **igualdad algebraica es cierta** si la expresión algebraica del miembro de la izquierda puede convertirse en la de la derecha aplicando las propiedades de las operaciones descritas anteriormente. Por ejemplo:

$$a - 4b - 2a + 5a - b = 4a - 5b$$

  es una igualdad cierta porque $a - 4b - 2a + 5a - b$ se puede transformar en $4a - 5b$ usando las propiedades de las operaciones.

- Una **igualdad algebraica es falsa** si la expresión algebraica del miembro de la izquierda no puede convertirse en la de la derecha. Por ejemplo:

$$3a + 2 = 3a$$

  es una igualdad falsa porque $3a + 2$ no puede nunca ser $3a$.

Ahora bien, hay igualdades algebraicas que no son ni ciertas ni falsas. Por ejemplo:

$$2a - 5b - 4 = 3x + y$$

En este caso, no puede afirmarse que la expresión de la derecha pueda transformarse en la de la izquierda, ni tampoco que esto sea imposible. Este tipo de igualdades son las que pueden denominarse propiamente ecuaciones; hablamos de ellas en el próximo apartado.

2.2. Ecuaciones

2.2.1. Definición

Una igualdad entre expresiones algebraicas también puede denominarse ecuación. En este caso, las letras se llaman **incógnitas**.

¿Qué es una ecuación y qué es una solución de una ecuación? Una igualdad entre expresiones algebraicas también puede llamarse ecuación. Las igualdades entre expresiones algebraicas más interesantes son aquellas en las que no se puede establecer *a priori* su certeza o falsedad. La solución de una ecuación corresponde a aquellos números que, sustituyéndolos en las incógnitas, permiten transformar la ecuación en una igualdad numérica cierta.

Ejemplo. Ecuaciones.

$$\begin{aligned} 4a - b + c &= 3a - 6b + 7 \\ 2x + 2y + 8 &= 2x + 7 \end{aligned}$$

En el primer caso, las incógnitas son a, b y c. En el segundo caso, son x e y.

Cada uno de los sumandos de cada uno de los miembros se denomina **término**. El número que multiplica cada término se llama **coeficiente**. Un término que no contiene ninguna incógnita se denomina **término numérico** o término **independiente**.

Cada término de una ecuación puede tener varias incógnitas que se multiplican. El número de incógnitas que se multiplican es el **grado del término**. Se dice que el **grado de una ecuación** es el máximo grado de los términos que forman la ecuación.

Ejemplo. Grado de un término y grado de una ecuación.
Dada la ecuación

$$3xy - 2a + 5x^2y^2 = x + 11a^2x$$

El *terme* $11a^2x$ tiene 3 incógnitas que se multiplican, una x y dos a. Por tanto, su *grado* es 3.

El *grado de la ecuación* es 4, ya que el término con más incógnites es $5x^2y^2$, y tiene 4 (dos x y dos y).

Las incógnitas de cada miembro de una ecuación pueden sustituirse por valores numéricos concretos. Por ejemplo, en la ecuación $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$ puede sustituirse la x por 1, y la y por 5 obteniendo

$$2 \cdot \underbrace{1}_{x} + 4 \cdot \underbrace{5}_{y} - 5 = 4 \cdot \underbrace{1}_{x} - 5 \cdot \underbrace{5}_{y}$$

De este modo, la ecuación se transforma en una igualdad entre expresiones numéricas. En este caso, la igualdad numérica resultante es falsa porque el miembro de la izquierda es 17, mientras que el de la derecha es −21.

Este proceso se denomina **sustitución de las incógnitas de una ecuación por números** y, como se ha visto, da lugar a una igualdad numérica. Esta igualdad numérica resultante puede ser:

- Falsa, como en el último ejemplo.
- Cierta. Por ejemplo, si sustituimos en la misma ecuación 2 en el caso de la x, y 1 en el caso de la y, obtendremos $2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 5 = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 1$, y ambos miembros resultan iguales a 3.

En casos como este último, cuando se trata de una igualdad numérica cierta y se halla el valor que hace cierta la igualdad, se dice que se ha encontrado una **solución de la ecuación**.

Una solución de la ecuación $2x + 4y - 5 = 4x - 5y$ se compone del cambio de la x por 2, y de la y por 1. Dicho de otro modo, $x = 2$ e $y = 1$ una solución de la ecuación anterior porque hace cierta la igualdad. De ahí que digamos que una solución de una ecuación tiene que otorgar un valor a cada una de sus incógnitas.

2.2.2. Soluciones

La **solució de una ecuación** se define como cada uno de los valores de las variables para las que se cumple la igualdad. Se dice "cada uno de los valores" porque una ecuación puede tener más de una solución.

Ejemplo. Soluciones de una ecuación.
Dada la ecuación

$$2x + 4y - 5 = 4x - 5y$$

$x = 2$ e $y = 1$ es una solución, ya que $\underbrace{2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 5}_{3} = \underbrace{4 \cdot 2 - 5 \cdot 1}_{3}$.

$x = 11$ e $y = 3$ es una solución, ya que $\underbrace{2 \cdot 11 + 4 \cdot 3 - 5}_{29} = \underbrace{4 \cdot 11 - 5 \cdot 3}_{29}$.

2.2.3. Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones se denominan **ecuaciones equivalentes**. Así, las ecuaciones

$$7x - 3 = 6x - 4 \quad \text{i} \quad 14x - 6 = 12x - 8$$

¿Qué son las ecuaciones equivalentes y cómo pueden hallarse? Dos (o más) ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones. A pesar de que no siempre es sencillo determinar si dos ecuaciones son equivalentes, para encontrar una ecuación equivalente a otra, solo hay que sumar, restar, multiplicar o dividir ambos miembros de esta ecuación por un mismo número. Esta manipulación de una ecuación permite encontrar las soluciones.

son equivalentes, ya que la única solución en ambos casos es

$$x = -1$$

Veámoslo:

- Para la primera ecuación $7 \cdot (-1) - 3 = 6 \cdot (-1) - 4$, el resultado en ambos miembros es -10.
- Para la segunda ecuación $14 \cdot (-1) - 6 = 12 \cdot (-1) - 8$, el resultado en ambos miembros es -20.

Por tanto, $x = -1$ resuelve ambas ecuaciones, lo que confirma que son ecuaciones equivalentes.

No siempre resulta fácil encontrar un procedimiento para determinar si dos ecuaciones son equivalentes. En todo caso, es interesante saber cómo puede transformarse una ecuación para obtener otra que sea equivalente, porque es una de las manipulaciones que permiten hallar soluciones de una ecuación.

Estos son los procedimientos usuales:

- *SSumando o restando el mismo número con ambos miembros.* Por ejemplo, si de la ecuación

  $$7x - 3 = 6x - 4$$

  se resta 2 a ambos lados, la ecuación resultante es

  $$7x - 3 - 2 = 6x - 4 - 2$$

  Y, operando, se obtiene $7x - 5 = 6x - 6$. La solución en ambos casos es $x = -1$. Visto esto, se puede afirmar que $7x - 3 = 6x - 4$ y $7x - 5 = 6x - 6$ son ecuaciones equivalentes.

- *Multiplicando o dividiendo ambos miembros por el mismo número.* Por ejemplo, si los miembros de la ecuación

  $$7x - 3 = 6x - 4$$

  se multiplican por 3, se obtiene

  $$3 \cdot (7x - 3) = 3 \cdot (6x - 4)$$

  es decir $21x - 9 = 18x - 12$. Ambas ecuaciones tienen por solución $x = -1$. Por tanto, se concluye que $7x - 3 = 6x - 4$ y $21x - 9 = 18x - 12$ son ecuaciones equivalentes.

2.2.4. Proceso de resolución

Antes de empezar a resolver una ecuación, tiene que simplificarse al máximo. Para **simplificar una ecuación** se entiende el hecho de reducir cada miembro a una expresión con un único término numérico y agrupar los términos con la misma variable.

¿Qué conviene hacer antes de resolver una ecuación? AAntes de resolver una ecuación, conviene simplificarla al máximo agrupando en cada miembro de la ecuación los términos con la misma variable que intervienen en ella. Si la ecuación contiene denominadores, es muy recomendable también buscar una ecuación equivalente que no los tenga.

Ejemplo. Simplificar una ecuación.

$$4x + 3 - 2x - 1 = 10 + 6x - 2 - x$$

Hay que simplificar ambos miembros uniendo los elementos dependientes de x, por un lado, y los términos numéricos, por el otro. Así, se convierte en la ecuación equivalente:

$$2x + 2 = 8 + 5x$$

En los casos en que la ecuación contiene números fraccionarios, conviene (a pesar de que no es imprescindible) transformar la ecuación en otra de equivalente que no contenga denominadores.

Por ejemplo, para eliminar los denominadores de la ecuación

$$\frac{3x}{5} - \frac{2}{3} = 4x - \frac{1}{3}$$

se puede seguir este procedimiento:

1) Se busca el MCM de los denominadores. En el caso del ejemplo, $\text{MCM}(5,3) = 15$.

2) Se escribe el mismo denominador en todos los términos, se divide el MCM entre el denominador que tienen (si no tienen denominador, significa que es igual a 1) y se multiplica el resultado por el numerador.

   En el ejemplo, la ecuación anterior se escribiría

   $$\frac{9x}{15} - \frac{10}{15} = \frac{60x}{15} - \frac{5}{15} \text{ y, de manera equivalente, } \frac{9x - 10}{15} = \frac{60x - 5}{15}.$$

3) Se elimina el denominador de ambos miembros (multiplicándolos por el valor de este mismo denominador). De este modo, queda una ecuación equivalente sin denominadores.

   En el ejemplo, se multiplican los dos miembros por 15:

   $$15 \cdot \frac{9x - 10}{15} = 15 \cdot \frac{60x - 5}{15}$$

   de donde resulta

   $$9x - 10 = 60x - 5$$

   siendo esta última una ecuación sin denominadores.

Ejemplo. Simplificar una ecuación con números fraccionarios.

Para simplificar la ecuación

$$\frac{3x}{5} - \frac{2}{3} = 4x - \frac{1}{3}$$

calculamos el MCM de los denominadores, hallamos los numeradores asociados y obtenemos la ecuación equivalente

$$\frac{9x - 10}{15} = \frac{60x - 5}{15}$$

de donde resulta la ecuación equivalente sin denominadores

$$9x - 10 = 60x - 5$$

Por **resolución de una ecuación** se entiende el proceso de encontrar las soluciones de una ecuación. Este proceso consiste en manipular la ecuación para conseguir las incógnitas y los valores numéricos por separado. De manera equivalente, puede hablarse del proceso de **aislar la incógnita de la ecuación**.

¿En qué consiste resolver una ecuación? Consiste en buscar todas sus soluciones. La dificultad en la resolución depende de muchos factores, entre los cuales están el número de incógnitas y el grado de la ecuación. A veces, solo es posible encontrar una aproximación de alguna de las soluciones; en este caso se dice que se ha encontrado una solución numérica de la ecuación.

El proceso de aislamiento, base de la resolución de cualquier ecuación, consta de tres pasos principales: agrupar los términos numéricos, agrupar los términos del mismo grado y eliminar adecuadamente los coeficientes de las incógnitas. La manera de proceder en este último caso dependerá del grado de estos términos.

Veamos un ejemplo con una ecuación de primer grado. Queremos resolver la ecuación de primer grado

¿Qué significa aislar una incógnita de una ecuación? El proceso por el que una incógnita de una ecuación queda en solitario en uno de los miembros se denomina aislar la incógnita de la ecuación. Este proceso es la base de la resolución de toda ecuación.

$$2x - 4 = 14 - 4x$$

Procederemos así:

1) Se agrupan los términos numéricos:

$$2x - 4 - (-4) = 14 - 4x - (-4)$$

Se simplifica y se obtiene

$$2x = 18 - 4x$$

2) Se agrupan los términos del mismo grado, en este caso solo de grado 1:

$$2x - (-4x) = 18 - 4x - (-4x)$$

Se simplifica:

$$6x = 18$$

3) Se eliminan adecuadamente los coeficientes de las incógnitas, en este caso solo una, la x:

$$\frac{6x}{6} = \frac{18}{6}$$

simplificando

$$\boxed{x = 3}$$

Así conseguimos aislar la incógnita y, a la vez, después de aislar la incógnita, concluimos que la solución de la ecuación es $x = 3$.

La búsqueda de las soluciones de una ecuación, o directamente la resolución de una ecuación, suele ser un problema matemático no siempre fácil de abordar. En todo caso, hay cierto tipo de ecuaciones, con unas características muy concretas, que tienen una resolución relativamente sencilla y metódica. Las características que determinan la dificultad en la resolución de una ecuación son:

- El *número de incógnitas de la ecuación*. Cuanto más pequeño es el número de incógnitas, más sencilla resulta su resolución. Así, la más usual tiene 1, 2 o, como máximo, 3 incógnitas. De todos modos, si no se dice explícitamente lo contrario, se suele reservar el término *ecuación* para las ecuaciones con un sola incógnita.
- El *grado de la ecuación*, es decir, el máximo grado de los términos que forman la ecuación. Por lo general, puede decirse que cuanto más pequeño es el grado de una ecuación, más sencillo será resolverla.

La complejidad de una ecuación puede impedir la resolución exacta. En estos casos puede intentarse una resolución numérica, es decir, una resolución con valores aproximados.

Por ejemplo, la ecuación $x^3 - 3x + 2 = x - 5$ no es una ecuación sencilla de resolver de manera exacta. Una solución numérica de esta ecuación puede ser $x = -2.5891$, ya que, sustituyendo en la ecuación, se obtiene

$$(-2.5891)^3 - 3 \cdot (-2.5891) + 2 = (-2.5891) - 5 \Longrightarrow -7.5886 \approx -7.5891$$

Es decir, los resultados están muy próximos. Por eso, se trata de una solución numérica.

La investigación de soluciones numéricas de una ecuación es uno de los problemas matemáticos que ha experimentado un mayor progreso gracias a la incorporación cada vez más generalizada de ordenadores potentes que permiten realizar una gran cantidad de cálculos en poco tiempo.

2.3. Ecuaciones de primer grado

2.3.1. Definición

Se dice que una **ecuación es de primer grado, o lineal, con una incógnita** cuando se trata de una ecuación con una única incógnita que aparece una vez por elemento como máximo, es decir, siempre con exponente 1.

¿Qué es una ecuación de primer grado con una incógnita? Es una ecuación con una única incógnita que aparece con exponente 1. Una ecuación de primer grado tiene en general una única solución, que es un número real. Toda ecuación de primer grado con una incógnita puede expresarse en su forma normal $ax + b = 0$, con MCD$(a, b) = 1$.

Ejemplo. Ecuación de primer grado con una incógnita.

$$3x - 2 = 5x + 6$$

2.3.2. Soluciones

En cuanto al tipo de solución, si hay, puede ser un número natural, entero, racional o real.

Ejemplo. Soluciones de una ecuación de primer grado con una incógnita.

$x = -1$ es la solución de la ecuación $1 - x = 2x + 4$ porque

$$\underbrace{1 - (-1)}_{2} = \underbrace{2 \cdot (-1) + 4}_{-2+4}$$

$x = \dfrac{3}{4}$ es la solución de la ecuación $2 - 3x = x - 1$ porque

$$\underbrace{2 - 3 \cdot \frac{3}{4}}_{2-\frac{9}{4}} = \underbrace{\frac{3}{4} - 1}_{-\frac{1}{4}}$$

En cuanto al números de soluciones, una ecuación lineal con una incógnita puede:

- **No tener ninguna solución.** Por ejemplo,

$$5x - 7 = 5x + 12$$

no tiene solución, puesto que al simplificarla obtenemos la ecuación equivalente $0x = 19$ y no hay ningún número real que, multiplicado por 0, dé 19. Estos casos son *igualdades algebraicas falsas*.

- **Tener solución.** En este caso pueden darse dos posibilidades:

  ◦ **Cualquier número es una solución de la ecuación.** Por ejemplo, la ecuación

$$5x - 3 = 5x - 3$$

tiene como solución cualquier número (tiene infinitas soluciones), ya que al simplificarla obtenemos la ecuación equivalente $0x0$, y todo número real multiplicado por cero es cero. En estos casos se trata de *igualdades algebraicas ciertas*.

  ◦ **Hay una única solución.** Por ejemplo, la ecuación

$$2x - 1 = 3x + 4$$

solo tiene una solución, que es $x = -5$, ya que la ecuación dada es equivalente a la ecuación $3x - 2x = 4 + 1$.

La mayor parte de ecuaciones de primer grado y, está claro, las más interesantes, son de este último tipo. La resolución de una ecuación de primer grado se habrá logrado cuando se encuentre esta única solución.

2.3.3. Proceso de resolución

La resolución de una ecuación de primer grado consta de varios pasos. Estos pasos se dan con el objetivo de convertir la ecuación inicial en una ecuación equivalente pero

¿Cuáles son los pasos de la resolución de una ecuación de primer grado? Son fundamentalmente tres: agrupar términos numéricos, agrupar términos de grado 1 y eliminar el coeficiente de la incógnita.

más sencilla de resolver. Si este proceso se repite, al final se obtendrá una ecuación de resolución inmediata. Dado que todas las ecuaciones son equivalentes, la solución obtenida en el último paso también lo será de la ecuación planteada inicialmente.

Los pasos que han de seguirse en este proceso pueden resumirse en tres, que ejemplificamos con la resolución de la ecuación

$$2x + 2 = 8 + 5x$$

Paso 1 *Agrupamos todos los términos numéricos que aparecen.* Normalmente, se suelen agrupar en el miembro de la derecha. De este modo, solo quedará un término numérico en la ecuación. El procedimiento es sencillo.

Se tiene que restar de ambos miembros el término o términos numéricos de la izquierda, de forma que la ecuación resultante sea equivalente de la inicial.

De acuerdo con el ejemplo, el término numérico de la izquierda es 2. Así, pues, se trata de restarlo en ambos miembros

$$2x + 2 - 2 = 8 + 5x - 2$$

Una vez simplificada, se transforma en una ecuación más sencilla que la inicial, porque el miembro de la izquierda no tiene término numérico, sin dejar de ser (y esto es fundamental) una ecuación equivalente a $2x + 2 = 8 + 5x$.

Paso 1
Este primer paso es conocido por la expresión "pasar el término numérico al otro miembro, cambiado de signo". Esto es así porque parece que esta es la transformación que se hace:

$$2x \; +2 \; = 8 + 5x - 2$$

Esta afirmación es falsa, pero es una buena manera de recordar y acelerar este paso. Es conveniente, pues, no olvidar el auténtico proceso que tiene lugar.

Paso 2 *Agrupamos los términos con incógnita.* Habitualmente, se agrupan los términos con incógnita en el miembro de la izquierda. El proceso es similar al que agrupa el término numérico.

Se tiene que restar a ambos lados el término o términos de grado 1 del miembro de la derecha. De este modo, se obtiene una ecuación equivalente más sencilla.

En el ejemplo, el término de grado 1 del miembro de la derecha es $5x$. Por lo tanto, se trata de restarlo de ambos miembros:

$$2x - 5x = 6 + 5x - 5x$$

que, simplificado, queda

$$-3x = 6$$

En este paso se puede averiguar si la ecuación tiene o no solución.

Paso 2
Este paso es conocido por la expresión "pasar el término de grado 1 al otro miembro, cambiado de signo". Esto es así porque este es aparentemente el proceso que se sigue:

$$2x \; -5x \; = 6 + 5x$$

Esta afirmación es falsa, pero es una buena manera de recordar y acelerar este paso. Es conveniente, pues, no olvidar el auténtico proceso que tiene lugar.

- Si el coeficiente de la incógnita es el mismo en los dos miembros
  - *No hay solución si el término numérico no es* 0.
    Por ejemplo, la ecuación
    $$3x = 3x - 2$$
    quedaría, después de seguir este paso, $0 = -2$, que es una igualdad falsa y, por lo tanto, la ecuación no tiene solución.
  - *Cualquier número es solución de la ecuación si el término numérico es* 0.
    Por ejemplo, en la ecuación
    $$8x = 8x$$

es sencillo darse cuenta de que cualquier número que sustituya la $x$es solución de la ecuación porque se trata de una igualdad algebraica cierta.

- *En caso contrario, la ecuación tiene una única solución.*Lo veremos en el caso del ejemplo estudiado.

Paso 3 *Tenemos que "eliminar" los coeficientes de la incógnita para que esta quede sola, es decir, aislada en el miembro de la izquierda.* El procedimiento es también sencillo.

Se trata de dividir ambos miembros de la ecuación entre el coeficiente que multiplica el término de grado 1 del miembro de la izquierda.

En el ejemplo considerado, el coeficiente de grado 1 del miembro de la izquierda es -3. Si dividimos ambos miembros entre este número el resultado es

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{6}{-3}$$

de donde resulta $x = -2$.

Es evidente, pues, que la solución de la ecuación planteada inicialmente es -2, porque las ecuaciones intermedias que se han ido obteniendo son todas equivalentes.

Paso 3
Este último paso es conocido por la expresión "pasar el coeficiente de la incógnita al otro miembro, con la operación contraria". Esto es así porque este es aparentemente el proceso que se sigue:

$$-3 \cdot x = \frac{6}{-3}$$

Esta afirmación es falsa, pero es una buena manera de recordar y acelerar este paso. Es conveniente, pues, no olvidar el auténtico proceso que tiene lugar.

Ejemplo. Resolver una ecuación de 1er grado con una incógnita.

$$2x + 2 = 8 + 5x$$

Trabajamos con ecuaciones,

$$\begin{aligned} 2x &= 6 + 5x \\ -3x &= 6 \end{aligned}$$

hasta tener la incógnita aislada que, en principio, es la solución:

$$x = -2$$

La comprobación **de la solución** (acción que se recomienda realizar siempre) es muy sencilla. Solo hay que sustituir la x de la ecuación inicial por el valor encontrado, que en principio es la solución.
En este caso, $x = -2$

$$4 \cdot (-2) + 3 - 2 \cdot (-2) - 1 = 10 + 6 \cdot (-2) - 2 - (-2)$$

En los dos miembros el resultado es el mismo.

De acuerdo con lo que hemos dicho, y tal como acabamos de comprobar, el proceso de resolución de una ecuación de primer grado consiste fundamentalmente en aislar la incógnita en uno de los miembros de la ecuación para que en el otro miembro aparezca la solución de la ecuación.

Fórmula de resolución La solución de una ecuación de primer grado puede obtenerse a partir de una fórmula, que se deduce de los pasos descritos en el apartado anterior. Para ello, en primer lugar, la ecuación que se ha de resolver tiene que convertirse en una ecuación equivalente en la que el miembro de la derecha sea 0.

¿Existe una fórmula para hallar la solución de una ecuación de primer grado? La manera más sencilla de encontrar la solución de una ecuación de primer grado es transformarla en una ecuación del tipo $ax + b = 0$, con $a \neq 0$. Entonces, la fórmula de la solución de esta ecuación es $x = \frac{-b}{a}$.

La generalización de este procedimiento recibe el nombre de la **forma normal** de la ecuación de primer grado con una incógnita, y puede escribirse siempre de este modo:

$$a \cdot x + b = 0$$

donde x es la incógnita y $a \neq 0$ y b son valores reales conocidos.

En particular, a es el coeficiente de la incógnita (que no puede ser 0 porque si no ya no sería una ecuación de primer grado) y b es el término numérico independiente. De este modo, la solución **general** de una ecuación de este tipo es

$$x = \frac{-b}{a}$$

Ejemplo. Deducción de la forma normal y la solución general de una ecuación de primer grado.
La ecuación

$$4x - 3 = 2x + 5$$

es equivalente a la ecuación en forma normal

$$2x - 8 = 0$$

Entonces, la solución es $x = \frac{8}{2} = 4$.

Ejemplo. Soluciones generales de una ecuación de primer grado.

La solución de la ecuación $3x - 5 = 0$ es $x = \frac{5}{3}$

La solución de la ecuación $2x + 5 = 0$ es $x = \frac{-5}{2}$

La solución de la ecuación $-3x - \frac{1}{2} = 0$ es $x = \frac{-1}{6}$

2.4. Ecuaciones de segundo grado

2.4.1. Definición

Diremos que una **ecuación** es **de segundo grado con una incógnita** cuando tratamos una ecuación con una sola incógnita que contenga términos de segundo grado, es decir, cuando la incógnita esté elevada al cuadrado.

¿Cómo se expresa, de manera general, una ecuación de segundo grado con una incógnita? Se puede expresar de manera normal. La forma normal de cualquier ecuación de segundo grado se halla transformando la ecuación original en una ecuación equivalente del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, con MCD$(a, b, c) = 1$.

Ejemplo. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x - 4 &= 2x + 5 \\ 2x^2 - 4x + 5 &= 3x^2 - 5x + 4 \end{aligned}$$

Para hallar la solución de una ecuación de segundo grado, tiene que expresarse de **forma normal**, es decir, tiene que encontrarse la forma equivalente en la que el miembro de la derecha es igual a 0. De manera general, se escribe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde x es la incógnita y $a \neq 0$, b y c son valores reales conocidos.

En particular, a es el coeficiente del término de segundo grado (que no puede ser 0 porque si no ya no sería una ecuación de segundo grado), b es el coeficiente del término de primer grado y es c el término numérico (o independiente).

A pesar de que no es imprescindible, es conveniente que el coeficiente de grado 2 sea positivo. Si se llega a una forma normal en la que el término de segundo grado, es decir, de x^2, es negativo y se quiere positivo, solo tienen que multiplicarse ambos miembros de la ecuación por -1.

Para que la forma normal esté simplificada al máximo, hay que dividir todos los coeficientes por el MCD de todos, es decir, dividir todos los coeficientes de los diferentes términos entre el $\mathrm{MCD}(a, b, c)$.

Ejemplo. Forma normal de una ecuación de segundo grado.
La forma normal de la ecuación

$$x^2 + 4x - 5 = 3x^2 - 6x + 7$$

viene dada por

$$x^2 + 4x - 5 - 3x^2 + 6x - 7 = 0$$

Al operar esta expresión, queda

$$-2x^2 + 10x - 12 = 0$$

Si se quiere con término de segundo grado positivo, se convierte en

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

y, simplificando al máximo, dividiendo por el $\mathrm{MCD}(2, -10, 12) = 2$ queda

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

2.4.2. Proceso de resolución

Son fáciles de resolver aquellas ecuaciones de segundo grado que, en su forma normal, $\left(ax^2 + bx + c = 0\right)$, el término independiente es 0 ($c = 0$), o bien as que tienen 0 el coeficiente de grado 1 ($b = 0$). Entonces, en general, las soluciones venden dadas por

$\boxed{\text{Caso } c = 0}$ Toda ecuación de segundo grado sin término independiente, es decir, del tipo

$$ax^2 + bx = 0$$

tiene como solución el 0 y $\dfrac{-b}{a}$.

¿Hay ecuaciones de segundo grado fáciles de resolver? Sí. A partir de su forma normal, resultan fáciles de resolver aquellas ecuaciones de segundo grado con coeficiente de grado 1 igual a 0, y también las que tienen término independiente igual a 0. Una ecuación de segundo grado sin término independiente, $ax^2 + bx = 0$, tiene como solución el 0 y $\frac{-b}{a}$. Una ecuación de segundo grado con coeficiente de grado 1 igual a 0, $ax^2 + c = 0$, tiene como solución $\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ siempre que $\frac{-c}{a}$ sea un número positivo.

$\boxed{\text{Caso } b = 0}$ Las soluciones de una ecuación de segundo grado del tipo

$$ax^2 + c = 0$$

son $x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ y $x = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$, siempre que $\frac{-c}{a}$ sea un número positivo (ya que no hay ningún número real cuyo cuadrado sea igual a un número negativo).

Ejemplo. Resoluciones fáciles de ecuaciones de segundo grado. Caso $c = 0$

$$3x^2 - x = 0$$

es una ecuación de segundo grado sin término independiente.

Para resolverla tan solo es necesario observar que puede extraerse una x de factor común:

$$3x^2 - x = x(3x - 1) = 0$$

Por lo tanto, la ecuación puede transformarse en

$$x(3x - 1) = 0$$

Se trata de un producto de dos números, x y $3x - 1$, que tiene que ser 0. Por lo tanto, alguno de estos números tiene que ser 0. Esto significa que $x = 0$ o $3x - 1 = 0$ (de donde resulta $x = \frac{1}{3}$).

Podemos concluir, pues, que la ecuación de segundo grado $3x^2 - x = 0$ tiene como soluciones el 0 y $\frac{1}{3}$.

Ejemplo. Resoluciones fáciles de ecuaciones de segundo grado. Caso $b = 0$

$$2x^2 - 18 = 0$$

es una ecuación de segundo grado sin término de grado 1.

En este caso, se tiene que aislar la x^2 como si se tratara de una ecuación de primer grado. Así, quedaría

$$x^2 = \frac{18}{2} = 9$$

A partir de aquí, observamos que las soluciones son aquellos números cuyo cuadrado es 9. Por lo tanto, las soluciones son 3 y -3, que puede escribirse $x = \pm 3$ utilizando el símbolo $\pm$.

Fórmula de resolución Como se ha dicho, una ecuación de segundo grado se puede escribir generalmente en forma normal así:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde x es la incógnita, a el coeficiente de grado 2 (siempre diferente de 0), b el coeficiente de grado 1, y c el término numérico.

¿Existe una fórmula general para hallar una solución de una ecuación de segundo grado? Hay una fórmula para encontrar todas las soluciones de una ecuación de segundo grado expresada en forma normal, $ax^2 + bx + c = 0$. Esta fórmula es $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ donde el símbolo $\pm$ indica que se tienen que distinguir dos casos: uno en el que se usa el + y el otro, en que se considera el $-$.

De manera general, y de acuerdo con esta forma normal de las ecuaciones de segundo grado, las soluciones x venden dadas por estas fórmulas:

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{i} \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Para simplificar la notación y dar las soluciones de una ecuación de segundo grado conjuntamente, se utiliza normalmente esta fórmula general:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

en la que el símbolo ± significa que se han de distinguir dos casos: uno en el que se utiliza el + y otro en el que se utiliza el −.

Ejemplo. Solución general de una ecuación de segundo grado.

Sea la ecuación

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

Por la fórmula de resolución general:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\cdot 2\cdot 12}}{2\cdot 2} = \frac{10\pm 2}{4}$$

Por lo tanto, las soluciones a la ecuación son

$$x_1 = \frac{10+2}{4} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{10-2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Para comprobar si los valores obtenidos aplicando la fórmula de resolución son efectivamente las soluciones, solo hay que sustituir en la ecuación las x por los diferentes valores encontrados. Si satisfacen la igualdad, son solución. De lo contrario, no lo serán.

Ejemplo. Comprobación de las soluciones de una ecuación de segundo grado.

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

Se ha obtenido como soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. Comprobemos si efectivamente son soluciones:

Si $x = 3 \rightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 2\cdot 3^2 - 10\cdot 3 + 12 = 18 - 30 + 12 = 30 - 30 = 0$, de modo que cumple la igualdad de la ecuación.

Si $x = 2 \rightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 2\cdot 2^2 - 10\cdot 2 + 12 = 8 - 20 + 12 = 20 - 20 = 0$, por lo que cumple la igualdad de la ecuación.

Podemos comprobar que esta fórmula es correcta para cualquier ecuación de segundo grado. Para lo cual, sólo hay que sustituir los valores en la ecuación general. Es decir, sustituir la x por $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ a $ax^2 + bx + c = 0$.

Vemos como queda para $x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c$$

$$= a\left(\frac{b^2+b^2-4ac-2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}\right) + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c$$

$$= \frac{b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + c$$

$$= \frac{b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{2ac}{2a}$$

$$= \frac{b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}+2ac}{2a} = \frac{0}{2a} = 0$$

2.4.3. Soluciones

El estudio de la raíz cuadrada que hay en la fórmula de la solución de una ecuación de segundo grado proporciona el número de soluciones de la ecuación.
La expresión contenida en la raíz cuadrada de la solución se denomina **discriminante**, y se indica con la letra griega delta mayúscula, Δ.
Así, dada la forma normal de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, el discriminante de la solución es

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de segundo grado? Una ecuación de segundo grado en forma normal, $ax^2 + bx + c = 0$, tiene dos soluciones como máximo. El número de soluciones se puede determinar a partir del valor discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Si Δ es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales; si Δ es negativo, la ecuación no tiene ninguna solución real; y si Δ es 0, la ecuación tiene una única solución, denominada solución doble.

Este elemento permitirá establecer el número de soluciones de cualquier ecuación de segundo grado.

- *Si el discriminante es positivo,* $\Delta > 0$ ese puede asegurar que la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes, que pueden calcularse.
  Por ejemplo, la ecuación
  $$x^2 - 3x + 2 = 0$$
  tiene dos soluciones porque $\Delta = (-3)\cdot 2 - 4\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0$.
  En particular, sus soluciones son, aplicando la fórmula:
  $$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm 1}{2}$$
  de donde se obtiene $x = 1$ y $x = 2$.

- *Si el discriminante es* 0*,* $\Delta = 0$ e puede asegurar que la ecuación tiene una única solución real, que es una solución doble que puede calcularse.
  Por ejemplo, la ecuación
  $$x^2 - 4x + 4 = 0$$
  tiene una única solución porque $\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 0$.
  En este caso, la solución única pero doble a la vez es

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^{-}4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

- *Si el discriminante es negativo,* $\Delta < 0$ se puede asegurar que la ecuación no tiene ninguna solución real.

  Por ejemplo, la ecuación

  $$2x^2 - 3x + 5x = 0$$

  no tiene ninguna solución, puesto que $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31 < 0$.

  En este caso es imposible aplicar la fórmula porque no existe la raíz cuadrada de un número negativo.

2.4.4. Ecuaciones cuadráticas

Hay ecuaciones de grado mayor que dos que pueden resolverse con la ayuda de la fórmula para las ecuaciones de segundo grado. Se trata de ecuaciones que tienen, en forma normal, tres términos como máximo: el término numérico, un término de cualquier grado y otro término de grado doble del anterior. Estas ecuaciones reciben el nombre de **ecuaciones de tipo cuadrático**.

¿Qué es una ecuación de tipo cuadrático? Es aquella que tiene, en forma normal, un término independiente, un término de grado cualquiera y otro término con grado que es el doble del anterior. Este tipo de ecuaciones pueden resolverse de manera parecida a las ecuaciones de segundo grado, ya que la expresión de la ecuación cuadrática es similar a las de segundo grado.

Ejemplo. Ecuaciones de tipo cuadrático.

Son ecuaciones de tipo cuadrático,

$$4x^8 + 5x^4 + 10 = 0$$
$$3x^{10} + x^5 - 15 = 0$$

porque tienen dos términos dependientes de una incógnita, de modo que un grado es el doble que el otro:

- En el primer ejemplo, el grado de $4x^8$ es el doble que el grado de $5x^4$
- En el segundo caso, el grado del término $3x^{10}$ es el doble del grado del término x^5

Puesto que estas ecuaciones tienen un término de grado que es el doble que otro, de modo que es un término numérico, podemos interpretar la ecuación original como una de segundo grado. Teniendo en cuenta esta particularidad, estos tipos de ecuaciones pueden resolverse observando que los términos dobles pueden escribirse como potencias de 2.

De acuerdo con esto, fijaos, retomando los ejemplos anteriores, que:

$4x^8 + 5x^4 + 10 = 0$ es pot escriure $4(x^4)^2 + 5x^4 + 10 = 0$

$3x^{10} + x^5 - 15 = 0$, que es pot escriure $3(x^5)^2 + x^5 - 15 = 0$.

Si se observan estas expresiones de las ecuaciones originales, puede comprobarse su gran parecido con una ecuación de segundo grado. La única diferencia de resolución es que se sustituye la incógnita por una potencia de esta incógnita. En todo caso, la fórmula tiene que ser muy parecida a la fórmula de la ecuación de segundo grado.

El caso más sencillo de ecuación de tipo cuadrático es la denominada **ecuación bicuadrada**, una ecuación de cuarto grado que solo tiene, en forma normal, los términos de grado 4, 2 y el término independiente, que equivale a grado 0.
Veámoslo con un ejemplo:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

es una ecuación bicuadrada. Al reescribir esta ecuación para que se asemeje a una ecuación de segundo grado, queda

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$$

Si consideramos que la incógnita de esta ecuación es x^2, aplicando la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado, la solución viene dada

$$(x^2) = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2}$$

Por lo tanto, $x^2 = 4$ o $x^2 = 9$. Con esto hemos encontrado los valores para x^2.
Por último, es preciso descubrir los valores de la x.

Si $x^2 = 9$, $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Si $x^2 = 4$, $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

Por lo tanto, las posibles soluciones de la ecuación bicuadrada son 2, −2, 3 y −3.
Para comprobar si son efectivamente soluciones de la ecuación original, solo hay que sustituir la x de la ecuación original por cada uno de los valores encontrados.

Ejemplo. Ecuación bicuadrada y su resolución.
La ecuación

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

puede reescribirse así:

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$$

Si aplicamos la fórmula de la ecuación de segundo grado queda así:

$$x^2 = \{4, 9\}$$

Por lo tanto, las posibles soluciones son $x = \{2, -2, 3, -3\}$

Por lo general, puede concluirse que una ecuación bicuadrada puede tener desde cero hasta cuatro soluciones.

El resto de las ecuaciones de tipo cuadrático pueden resolverse de manera parecida.
Por ejemplo:

$$3x^8 - 6x^4 - 9 = 0$$

se puede transformar en

$$3(x^4)^2 - 6x^4 - 9 = 0$$

y, por lo tanto, aplicando la fórmula de la resolución de las ecuaciones de segundo grado, las soluciones vendrían dadas

$$x^4 = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9)}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm 12}{6}$$

de donde se obtiene que $x^4 = 3$ o $x^4 = -1$. Por lo tanto:

Si $x^4 = 3$, se obtiene que $x = \pm\sqrt[4]{3}$,

Si $x^4 = -1$, no hay solución, ya que no hay ningún número que, elevado a 4, dé -1.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación anterior son $x = +\sqrt[4]{3}$ y $x = -\sqrt[4]{3}$.

Por lo general, concluimos que las ecuaciones de tipo cuadrático tendrán, como máximo, un número de soluciones igual al grado de la ecuación.

2.5. Inecuaciones

2.5.1. Definición

Una **inecuación** es una desigualdad entre expresiones algebraicas. Los signos utilizados para marcar estas desigualdades son < (*menor que*), > (*mayor que*), ≤ (*menor o igual que*) y ≥ (*mayor o igual que*).

¿Qué es una inecuación? Es una desigualdad entre expresiones algebraicas. Como en las ecuaciones, las soluciones son valores numéricos que, al sustituir las variables en la inecuación, hacen que la desigualdad numérica resultante sea cierta.

Ejemplo. Inecuación.
Son ejemplos de inecuaciones,

$$\begin{aligned} 3x - a &< 2x - 1 \\ 2x + 4y - 5 &\geq 4x - 5y \end{aligned}$$

2.5.2. Soluciones

Como en el caso de las ecuaciones, las incógnitas de cada miembro de una inecuación pueden sustituirse también por valores numéricos.
Por ejemplo, en la inecuación

$$2x + 4y - 5 \geq 4x - 5y$$

pueden sustituirse la x por 1 y la y por 5. Entonces,

$$2 \cdot \underbrace{1}_{x} + 4 \cdot \underbrace{5}_{y} - 5 \geq 4 \cdot \underbrace{1}_{x} - 5 \cdot \underbrace{5}_{y}$$

De este modo, la inecuación se transforma en una desigualdad entre expresiones numéricas. En caso de que sea cierta, se dice que se ha hallado una **solución de la inecuación**.
AAsí, una solución de la inecuación planteada consiste en sustituir la x por 2 y la y por 1. Dicho de otro modo, $x = 2$ e $y = 1$ es una solución de la inecuación anterior.

Se ha de tener en cuenta que:

- Una solución de una inecuación tiene que otorgar un valor a cada una de sus incógnitas.
- Una inecuación puede tener más de una solución.
  Por ejemplo, en el caso de la inecuación planteada, otra solución podría ser $x = 1$ y $y = 3$, ya que
  $$2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 5 \geq 4 \cdot 1 - 5 \cdot 3$$
- Dos inecuaciones que tienen las mismas soluciones se llaman **inecuaciones equivalentes**. Se puede encontrar una inecuación equivalente a otra utilizando procedimientos similares a los conocidos para las ecuaciones y que podemos resumir así:
  - *Sumar o restar el mismo número con los dos miembros.*
  - *Multiplicar o dividir ambos miembros con el mismo número (diferente de* 0*).* En este caso, hay que destacar que si el factor por el que se multiplican (o se dividen) ambos miembros es negativo, el signo de la desigualdad cambia de orientación (es decir, se transforma en , y se transforma en <).

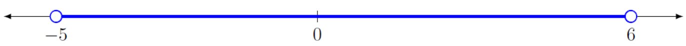
    Por ejemplo, dada la inecuación
    $$3x + 4 < 2 - x$$
    puede obtenerse una inecuación equivalente multiplicando ambos miembros por -2, de modo que
    $$-2 \cdot (3x + 4) > -2 \cdot (2 - x)$$
    y, simplificados los signos, queda
    $$-6x - 8 > -4 + 2x$$
    Esto es así porque, como sabemos, al multiplicar (o dividir) ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, la desigualdad cambia de orientación.

2.5.3. Proceso de resolución

Intervalo de la recta real. Para **resolver inecuaciones**, es necesario trabajar con intervalos. Recordemos algunos de los conceptos descritos en el tema sobre los números.

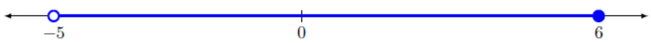
Vimos que los extremos de un intervalo pueden pertenecer o no al intervalo. En función de si los extremos pertenecen o no al intervalo, se distinguen diferentes tipos de intervalo:

- Intervalo abierto Ninguno de los dos extremos pertenece al intervalo. En el caso del intervalo de extremos -5 y 6, se escribe $(-5,6)$ y encima de la recta real se representa por

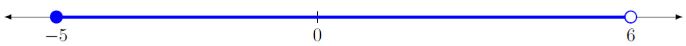


- Intervalo cerrado Los dos extremos pertenecen al intervalo. En el caso del intervalo de extremos -5 y 6, se escribe $[-5,6]$ y encima de la recta real se representa por

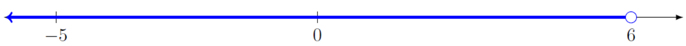
- Intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha En el caso del intervalo de extremos -5 y 6, s'escriu $(-5,6]$ y encima de la recta real se representa por



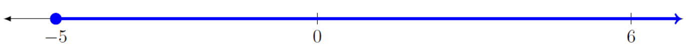
- Intervalo cerrado por la izquierda y abierto por la derecha En el caso del intervalo de extremos -5 y 6, se escribe $[-5,6)$ y encima de la recta real se representa por



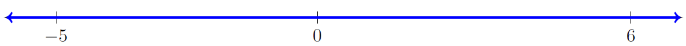
- Intervalo infinito por la izquierda (o sin extremo por la izquierda) En el caso del intervalo de extremo superior 6, se escribe $[-\infty,6)$ (si el extremo superior no se incluye) y encima de la recta real se representa por



- Intervalo infinito por la derecha (o sin extremo por la derecha) En el caso del intervalo de extremo inferior -5, se escribe $[-5,+\infty]$ (si el extremo inferior se incluye) y encima de la recta real se representa por



- Intervalo infinito Es el intervalo sin extremos que incluye todos los números reales. Por lo tanto, es equivalente en la recta real. Escribimos $(-\infty,+\infty)$ y se marca toda la recta



Resolución de inecuaciones de primer grado. Para **resolver una inecuación de primer grado**, es conveniente seguir unos pasos determinados. Veámoslos con un ejemplo concreto.

Queremos resolver la inecuación de primer grado

$$2x + 5 \geq 2 - x$$

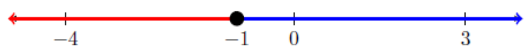
1) *Se resuelve la ecuación asociada a la inecuación lineal.* La ecuación asociada a una inecuación es aquella que se obtiene cambiando el signo de desigualdad por el signo de igual.

En el caso del ejemplo, se trata de resolver la ecuación de primer grado $2x+5 = 2-x$. Resolvemos la ecuación de primer grado asociada:

$$\begin{aligned} 2x + 5 &= 2 - x \\ 2x + x &= 2 - 5 \\ 3x &= -3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

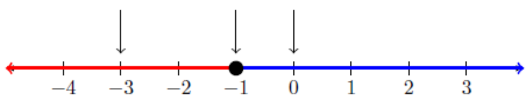
Por lo tanto, la solución es $x = -1$.

La solución de la ecuación divide la recta real en tres zonas diferentes: $(-\infty, -1)$, -1 y $(-1, +\infty)$.



Una vez determinadas las tres zonas, hay que estudiar qué pasa en cada una. Por cada una de las franjas, seguiremos los pasos que se describen a continuación. Son los pasos necesarios para saber cuál de estas tres zonas pertenecen o no a la solución de la inecuación.

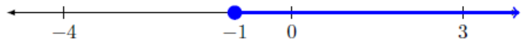
2) *Se elige un número que esté dentro de estas zonas.*
En el ejemplo, aparte del 1, que es un punto único, puede elegirse cualquier número de cada intervalo, por ejemplo -3 y 0, ya que $-3 \in (-\infty, -1)$ y $0 \in (-1, +\infty)$.



3) *Se sustituyen los valores anteriores (el de la solución de la ecuación asociada y los del segundo paso) en la inecuación y se comprueba cuál verifica la desigualdad inicial.*
De acuerdo con el ejemplo:

- Para $x = -1$, la desigualdad resultante es cierta, porque $\underbrace{2 \cdot (-1) + 5}_{3} \geq \underbrace{2 - (-1)}_{3}$ es cierto.
- Para $x = -3$, la desigualdad resultante es falsa, porque $\underbrace{2 \cdot (-3) + 5}_{-1} \geq \underbrace{2 - (-3)}_{5}$ es falso.
- Para $x = 0$, la desigualdad resultante es cierta, porque $\underbrace{2 \cdot 0 + 5}_{5} \geq \underbrace{2 - 0}_{2}$ es cierto.

4) *La solución de la inecuación está formada por los números que est'an en la misma zona que los valores que hacen ciertas las desigualdades del paso anterior.*
En el ejemplo, las zonas de solución son -1 y $(-1, +\infty)$. Por lo tanto, la solución de la inecuación es $[-1, +\infty)$, que representada en la recta real, queda



Ejemplo. Solución de una inecuación de primer grado.
La solución de la inecuación de primer grado

$$2x + 5 \geq 2 - x$$

es

$$[-1, +\infty).$$

Resolución de inecuaciones de segundo grado. De manera similar, también pueden **resolverse inecuaciones de segundo grado**.
Veamos cómo proceder en estos casos con un ejemplo. Resolvamos la inecuación de segundo grado

$$2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$$

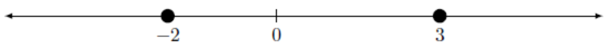
1) *En primer lugar, resolvemos la ecuación asociada a la inecuación de segundo grado.* En este caso, la ecuación asociada es

$$2x^2 - 2x - 2 = x^2 - x + 4$$

Simplificamos la ecuación en la forma normal y solucionamos la ecuación de segundo grado aplicando la fórmula de resolución conocida. Obtenemos

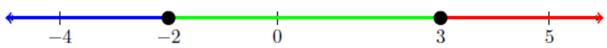
$$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$$
$$x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

Por lo tanto, la ecuación asociada tiene dos soluciones, que son $x = 3$ y $x = -2$. Marcamos las dos soluciones en la recta real

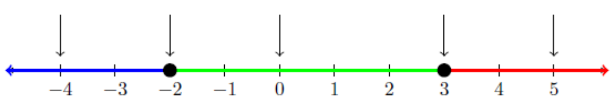


Ahora hay que estudiar qué pasa en cada una de las zonas en que ha quedado dividida la recta real, de manera similar al ejemplo anterior.

2) *Se divide la recta real en varias zonas de acuerdo con las soluciones obtenidas en el paso anterior.*
En el ejemplo, los puntos -2 y 3 y las franjas son los valores que quedan antes del -2, en medio del -2 y 3 y más allá del 3. Por lo tanto, tienen que considerarse los intervalos y valores $(-\infty, -2)$, -2, $(-2, 3)$, 3, $(3, +\infty)$.



3) *Se selecciona un número cualquiera de cada una de las zonas.*
Por ejemplo, además de -2 y 3, consideramos $-4 \in (-\infty, -2)$, $0 \in (-2, 3)$ y $6 \in (3, +\infty)$:



4) *Se comprueba qué número es una solución de la inecuación*, es decir qué verifican las desigualdades iniciales:

-4 no es solución de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ porque $\underbrace{2 \cdot (-4)^2 - 2 \cdot (-4) - 2}_{38} \leq \underbrace{(-4)^2 - (-4) + 4}_{0}$ es falso.

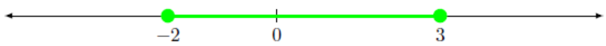
-2 es solución de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ porque $\underbrace{2 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 2}_{10} \leq \underbrace{(-2)^2 - (-2) - 2}_{10}$ es cierto.

0 es solución de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ porque $\underbrace{2 \cdot (0)^2 - 2 \cdot (0) - 2}_{-2} \leq \underbrace{(0)^2 - (0) + 4}_{4}$ es cierto.

3 es solución de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ porque $\underbrace{2 \cdot (3)^2 - 2 \cdot (3) - 2}_{-10} \leq \underbrace{(3)^2 - (3) + 4}_{-1}$ es cierto.

5 no es solución de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4x + 4$ porque $\underbrace{2 \cdot (5)^2 - 2 \cdot (5) - 2}_{0} \leq \underbrace{(5)^2 - (5) + 4}_{24}$ es falso.

5) La solución de la inecuación viene dada por la reunión de todas las zonas (intervalos o valores) del paso anterior, en las que el número escogido es solución porque cumple la desigualdad. Así, en el ejemplo, la solución de la inecuación es el intervalo cerrado $[-2, 3]$.



Podemos añadir como curiosidad que si la inecuación fuera

$$2x^2 - 2x - 2 > x^2 - x + 4$$

su solución estaría formada por todos los números de $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

El símbolo $\cup$ es el símbolo de la unión de conjuntos e indica que hay que reunir todos los números de un intervalo con los del otro.

Ejemplo. Solución inecuación de segundo grado.
La solución de la inecuación de segundo grado

$$2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$$

es

$$(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)\,.$$

Resumen

Las expresiones algebraicas

Aspectos generales de las expresiones algebraicas

Componentes. Toda expresión algebraica es producto de:

- Números de cualquier tipo, para representar valores conocidos.
- Letras, para representar valores desconocidos.
- Signos de operaciones: sumas, restos, multiplicaciones y divisiones.

Valor numérico. El valor numérico de una expresión algebraica se halla sustituyendo las letras por números concretos y calculando el resultado. Este valor depende de los valores concretos que reciban las letras.

Por ejemplo, el valor numérico de la expresión algebraica $4x - 2y + 6$ cuando $x = 5$ e $y = 2$ es $4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 6 = 22$.

Utilidad. Las expresiones algebraicas son útiles para simplificar una situación real en la que tienen que hacerse operaciones entre cantidades conocidas y cantidades desconocidas.

Propietats de les operacions en les expressions algebraiques

Propiedades de la suma y la resta

- *Propiedad conmutativa.* El resultado de sumar dos elementos, números o letras, en cualquier orden es siempre el mismo: $a + b = b + a$.
- *Propiedad asociativa.* Al sumar tres elementos, números o letras, cualesquiera, se pueden agrupar en cualquier orden porque el resultado no varía: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$
- *Elemento neutro de la suma.* Es el 0, ya que si se suma este número a cualquier otro número, el resultado es el mismo número: $a + 0 = a$.
- *Elemento opuesto.* El elemento opuesto de cualquier elemento a es $-a$, ya que el resultado de sumarlos es el elemento neutro de la suma: $a + (-a) = 0$.

Recordemos que la resta es la suma con el opuesto: $a - b = a + (-b)$. Por lo tanto, las propiedades son las mismas que las de la suma.

Propiedades del producto y de la división

- *Propiedad conmutativa.* Dos elementos, números o letras, pueden multiplicarse en cualquier orden, y el resultado es siempre el mismo: $a \cdot b = b \cdot a$.
- *Propiedad asociativa.* Al multiplicar tres elementos, números o letras cualesquiera, pueden agruparse en cualquier orden porque el resultado no varía: $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- *Elemento neutro del producto.* Es el 1, porque al multiplicar cualquier elemento por 1, el resultado siempre es el mismo número inicial: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
- *Elemento inverso.* El elemento inverso de un elemento cualquiera que no sea 0 es aquel elemento que, multiplicado por este, da 1, es decir, el elemento neutro de a es $\frac{1}{a}$, ya que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, siempre que $a \neq 0$.
- *Propiedad distributiva de la suma respecto al producto.*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Recordad que la división es un producto del inverso siempre que este no sea 0: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ siempre que $b \neq 0$. Por lo tanto, las propiedades de la división son las mismas que las del producto.

Igualdad entre expresiones algebraicas

Componentes. Toda igualdad algebraica es producto de estos elementos:

- Dos expresiones algebraicas, llamadas miembros.
- Un signo igual (=) interpuesto entre ambos miembros.

Tipo

- *Cierta,* si la expresión algebraica del miembro de la izquierda puede convertirse en la expresión algebraica del de la derecha aplicando las propiedades de las operaciones descritas anteriormente.
  Por ejemplo, $a - 4b - 2a + 5a - b = 4a - 5b$
- *Falsa,* si la expresión algebraica del miembro del izquierdo no puede convertirse en la expresión algebraica del de la derecha a pesar de aplicar las propiedades de las operaciones descritas anteriormente.
  Por ejemplo, $4a - 5b + 2 = 4a - 5b + 7$.

Las ecuaciones

Definición. Se entiende por ecuación toda igualdad entre dos expresiones algebraicas, especialmente cuando no se puede establecer *a priori* su certeza o falsedad. En este caso, las letras se denominan **incógnitas**. Cada uno de los sumandos se denomina **término** y el número que multiplica cada incógnita se denomina **coeficiente**.

Ejemplos

- Ecuaciones con una incógnita: $a + 3 = 5$, $2c + 6 = c + 10$
- Ecuaciones con dos incógnitas: $2x + 2y + 8 = 2x + 7$

Soluciones de una ecuación. Todos los valores numéricos que convierten la ecuación en una igualdad entre expresiones numéricas verdaderas son solución de una ecuación, por ejemplo, si al sustituir las letras de la expresión $2x+4y-5 = 4x-5y$ para $x = 2$ e $y = 1$, al aplicar las propiedades de las operaciones se obtiene $2\cdot2+4\cdot1-5 = 4\cdot2-5\cdot1$ y el valor numérico de ambos miembros resulta 3.

Equaciones equivalentes. Ecuaciones que tienen exactamente las mismas soluciones.
Por ejemplo, $x + 1 = 3$ y $2x + 2 = 6$, ya que en ambos casos la solución es $x = 2$.

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita

Concepto

Ejemplo y definición. $3x - 5 = x + 5$ es una ecuación de primer grado con una incógnita porque verifica lo siguiente:

- Es una ecuación porque es una igualdad entre expresiones algebraicas.
- Tiene una incógnita, que es la letra x.
- Es de primer grado porque la incógnita x no se multiplica nunca por ninguna otra incógnita, incluida ella misma.

Componentes. Toda ecuación de primer grado contiene lo siguiente:

- *Término*: cada uno de los sumandos de la ecuación.
- *Términos numéricos*: términos que no contienen la incógnita.
- *Coeficiente de la incógnita*: número que multiplica la incógnita en cada término.

Forma normal. Se denomina forma normal de una ecuación de primer grado con una incógnita la ecuación equivalente a la dada en la que el miembro de la derecha es cero y el miembro de la izquierda está completamente simplificado. De manera general, se expresa

$$a \cdot x + b = 0$$

En este caso, el término numérico, que es único, se denomina término independiente.
Por ejemplo, la forma normal de $3x - 5 = 2x + 4$ es $x - 9 = 0$.

Resolución

Fórmula de resolución. Para resolver una ecuación de primer grado con un incógnita, es recomendable seguir el procedimiento que se detalla a continuación.
Veámoslo intermediando un ejemplo concreto: la resolución de $3x - 5 = x + 5$

1) Agrupar términos numéricos: $3x = x + 5 + 5$

2) Agrupar términos con incógnita: $3x - x = 10$

3) Eliminar el coeficiente de la incógnita: $x = \frac{10}{2} = 5$

Soluciones. La solución de una ecuación de primer grado en forma normal $ax + b = 0$ es $x = \dfrac{-b}{a}$.

Esta solución puede existir o no en los números reales.

- *No existe* cuando el coeficiente de la incógnita es igual a 0 y el término independiente no es 0 ($a = 0$ y $b \neq 0$). En este caso no hay ningún número real que, multiplicado por 0, dé un número real.
- *Existe* si:
  - El coeficiente de la incógnita es diferente de 0 ($a \neq 0$). Entonces hay una única solución $x = \dfrac{-b}{a}$.
  - Tanto el coeficiente de la incógnita como el término independiente son 0 ($a = 0$ y $b = 0$). Entonces hay infinitas soluciones, puesto que cualquier número es solución de la ecuación, dado que cualquier número multiplicado por 0 da 0.

Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Concepto

Ejemplo y definición. $3x^2 + 3x - 5 = 2x^2 - 7$ es una ecuación de segundo grado con una incógnita porque verifica lo siguiente:

- Es una ecuación porque es una igualdad entre expresiones algebraicas.
- Tiene una única incógnita, que es la letra x.
- Es de segundo grado porque tiene al menos un término de grado 2 y el resto son de grado dos o de grado menor.

Forma normal. Se denomina forma normal de una ecuación de segundo grado con una incógnita la ecuación equivalente a la dada en la que el miembro de la derecha es cero y el miembro de la izquierda es simplificado completamente.
De manera general, si a, b y c son números reales, con $a \neq 0$ se expresa

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Por ejemplo, la forma normal de $3x^2 + 3x - 5 = 2x^2 - 7$ es $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Componentes. Dada la forma normal de una ecuación de segundo grado, como por ejemplo

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

se habla de

- *Término.* Cada uno de los sumandos. En el ejemplo, términos x^2, 3 y 2.
- *Coeficiente.* El número que en cada término multiplica la incógnita. Así, se habla de:
  - *coeficiente de grado* 2: número que multiplica el término de grado 2. En el ejemplo, 1.
  - *Coeficiente de grado* 1: número que multiplica el término de grado 1. En el ejemplo, 3.
  - *Coeficiente de grado* 0: número que multiplica el término de grado 1. En el ejemplo, 2.
- *Término independiente*: número que aparece sin multiplicar la incógnita, que corresponde al coeficiente de grado 0. En el ejemplo, 2.

Resolución

Fórmula de resolución. Para resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita en forma normal $ax^2 + bx + c = 0$, puede aplicarse la fórmula siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde:

- a es el coeficiente del término de grado 2.
- b es el coeficiente del término de grado 1.
- c es el término independiente.
- el signo ± (más-menos) permite abreviar la expresión de las dos soluciones posibles
- $\Delta = b^2 - 4ac$ recibe el nombre de **discriminante**.

Ejemplo. Para resolver $x^2 + 3x + 2 = 0$, identificamos

$$a = 1,\ b = 3,\ c = 2,\ \Delta = 32 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1.$$

Entonces

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \{-1, -2\}$$

Por lo tanto, -1 y -2 son las soluciones a la ecuación dada.

Solucioness: Una ecuación de segundo grado con una incógnita puede tener hasta dos soluciones.

- Si el discriminante es positivo, $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales. La ecuación $2x^2 + 3x - 4 = 0$ tiene dos soluciones, puesto que $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 41 > 0$.
- Si el discriminante es cero, $\Delta = 0$, la ecuación tiene una única solución real, denominada solución doble. La ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$ tiene una única solución, puesto que $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$.
- Si el discriminante es negativo, $\Delta < 0$, la ecuación no tiene ninguna solución real. La ecuación $3x^2 - 4x + 5 = 0$ no tiene ninguna solución, puesto que $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -46 < 0$.

Las ecuaciones cuadráticas

Definición y ejemplo. Una ecuación de tipo cuadrático es aquella que tiene, en forma normal, un término independiente, un término de grado cualquiera y otro término con grado el doble del anterior. Esta característica hace que se pueda interpretar como ecuación de segundo grado. Por ejemplo, $4x^8 + 5x^4 + 10 = 0$
El caso más sencillo es la denominada **ecuación bicuadrada**, una ecuación de cuarto grado que solo tiene, en forma normal, los términos de grado 4, 2 y 0.
Ejemplo. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Resolución. Se pueden resolver de manera parecida a las ecuaciones de segundo grado, puesto que la expresión de la ecuación cuadrática es similar a las de segundo grado.
Ejemplo.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

es una ecuación bicuadrada que puede reescribirse como una ecuación de segundo grado:

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$$

Al considerar x^2 como la incógnita, puede aplicarse la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado para x^2. Entonces, la solución es producto de

$$(x^2) = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

Por lo tanto, $x^2 = 4$, de donde resulta $x = \pm 2$ y $x^2 = 9$, y de donde resulta $x = \pm 3$.
Finalmente, es conveniente comprobar las soluciones obtenidas en la ecuación inicial.

Las inecuaciones

Concepto

Definición. Una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas que puede tener soluciones. Cómo en las ecuaciones, las soluciones son valores numéricos que al sustituir las variables en la inecuación hacen que la desigualdad numérica resultante sea cierta.

Ejemplos.

- $2x + 5 \geq 2 - x$ es una inecuación de primer grado.
- $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ es una inecuación de segundo grado.

Resolución

Procedimiento. Las inecuaciones de primer y segundo grado pueden resolverse de manera similar. Los pasos principales del procedimiento que suele seguirse son los siguientes:

Procedimiento	Ejemplo: $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$
1) *Se resuelve la ecuación asociada a la inecuación*, que se obtiene cambiando el signo de desigualdad por el signo de igualdad.	$2x^2-2x-2 = x^2-x+4 \Rightarrow x = \{-2, 3\}$
2) *Se consideran las soluciones de la ecuación asociada, que dividen la recta real en varias zonas.*	Zonas a considerar: los puntos -2 y 3, y las franjas $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$, $(3, +\infty)$
3) *Se selecciona un número cualquiera de cada una de las zonas y se evalúa en la inecuación.*	Puntos que hay que evaluar: -2 y 3, y, por ejemplo, $-4 \in (-\infty; -2)$, $0 \in (-2, 3)$ y $6 \in (3, +\infty)$
4) *Se comprueba cuál de los números seleccionados verifica la desigualdad de la inecuación.*	La desigualdad se verifica para $x = -2$, $x = 0$ y $x = 3$, pero no para $x = -4$ ni $x = 6$
5) *La solución de la inecuación es producto de la reunión de todas las zonas del paso anterior en las que el número escogido cumple la desigualdad.*	Por lo tanto, la solución es $[-2, 3]$

Ejercicios resueltos

1. **Determina para qué valores de t la ecuación $x^2 + tx + 16 = 0$...**

(a) tiene dos soluciones reales.

(b) tiene una única solución real, doble.

(c) no tiene solución real.

Solución:

Para poder responder la pregunta, hay que estudiar los valores que puede tomar el discriminante de la ecuación, Δ, en función de los valores de t.

Dado que la ecuación de segundo grado $x^2 + tx + 16 = 0$ ya está en su forma normal, identificamos los coeficientes $a = 1$, $b = t$ y $c = 16$, y por lo tanto, su discriminante es

$$\Delta = b^2 - 4ac = t^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = t^2 - 64$$

Entonces, atendiendo al hecho de que una ecuación de segundo grado tiene

- dos soluciones reales cuando el discriminante es positivo (en nuestro caso cuándo $\Delta = t^2 - 64 > 0$)
- una única solución, doble, real cuando el discriminante se anula (por lo tanto, cuando $\Delta = t^2 - 64 > 0$)
- ninguna solución real cuando el discriminante es negativo (por lo tanto, cuándo $\Delta = t^2 - 64 < 0$)

es necesario estudiar las inecuaciones resultantes.

Por eso, resolveremos primero la ecuación de segundo grado $\Delta = 0$ y, encontrada la solución, estudiaremos qué pasa en cada una de las franjas obtenidas.

$$\Delta = t^2 - 64 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 64 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{64} = \pm 8$$

De esta resolución obtenemos que, cuando $t = 8$ o $t = -8$, $\Delta = 0$ y, por lo tanto, podemos decir que cuando $t = 8$ o $t = -8$ la ecuación tiene una única solución real, que es doble.

Para determinar las otras dos situaciones, hay que mirar qué pasa para valores menores que -8, comprendidos entre -8 y 8 y mayores que 8. En otras palabras, hay que estudiar los valores de Δ cuando $t < -8$, $-8 < t < 8$ y $8 < t$. Por eso, evaluaremos Δ para un valor cualquier comprendido en $(-\infty, -8)$, otro valor entre $(-8, 8)$ y otro entre $(8, +\infty)$. Veámoslo:

Consideramos $t = -10 \in (-\infty, -8) : t^2 - 64 = 100 - 64 = 36 > 0$

Consideramos $t = 0 \in (-8, 8) : t^2 - 64 = 0 - 64 = -64 < 0$

Consideramos $t = 10 \in (8, +\infty) : t^2 - 64 = 100 - 64 = 36 > 0$

Por lo tanto, concluimos:

- Si $t < -8$ o $t > 8$,la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes.
- Si $t = 8$ o $t = -8$, la ecuación tiene una única solución real, doble.
- Si $-8 < t < 8$, la ecuación no tiene solución real.

2. **La suma de dos números es 13 y su producto es 36. ¿Con qué ecuación de segundo grado pueden obtenerse estos dos números? ¿Qué números son?**

Solución:

El enunciado pide encontrar dos números que tienen que cumplir dos condiciones a la vez. Fijémonos en la primera de las condiciones: que los números sumen 13. De acuerdo con esta premisa, si llamamos x a uno de estos dos números, el otro será el producto de la diferencia entre este número y el total de la suma, que en este caso es 13. Por lo tanto, el segundo número será $13 - x$.

Fijada la expresión de ambos números, imponemos la segunda condición, es decir, que su producto sea 36. Por lo tanto, que

$$x \cdot (13 - x) = 36$$

Si operamos esta igualdad, obtenemos la ecuación

$$-x^2 + 13 \cdot x = 36$$

que, podemos reescribir de manera equivalente:

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

Una vez encontrada la ecuación de segundo grado en su forma normal, podemos resolverla y encontrar así los números desconocidos.

Aplicamos la fórmula de resolución de las ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

De donde resulta $x_1 = \dfrac{18}{2} = 9$ y $x_2 = \dfrac{8}{2} = 4$.

Por lo tanto, si consideramos $x = 9$, el otro número es $13 - 9 = 4$

Y, al revés, si consideramos $x = 4$, el otro número es: $13 - 4 = 9$

Concluimos, pues que el par de dos números buscados es 9 y 4.

Por lo tanto, la respuesta al ejercicio es:

- La ecuación que representa la situación es $x^2 - 13x + 36 = 0$.
- Los dos números que satisfacen la doble condición son 9 y 4.

3. **Resuelve las ecuaciones irracionales siguientes:**

(a) $\sqrt{x+3} + 2x = 30$

(b) $x + 3 + \sqrt{x+5} = 10$

Solución:

Para resolver estas ecuaciones, será conveniente encontrar ecuaciones equivalentes que no contengan ninguna raíz cuadrada.

(a) Resolvemos la primera de las ecuaciones: $\sqrt{x+3} + 2x = 30$.

Aislamos la raíz cuadrada para poder aplicar el cuadrado a toda la expresión:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x+3} & = & 30 - 2x \\ \left(\sqrt{x+3}\right)^2 & = & (30-2x)^2 \end{array}$$

Calculamos los cuadrados de cada uno de los términos de la ecuación. Fijémonos que será necesario aplicar identidades notables. En este caso particular, en el término de la derecha hay que aplicar el cuadrado de una diferencia:

$$x + 3 = 30^2 + (2x)^2 - 2 \cdot 30 \cdot (2x)$$

Operamos y obtenemos una ecuación de segundo grado:

$$x + 3 = 900 + 4x^2 - 120x$$

Asociamos términos y los ordenamos para obtener la ecuación equivalente en forma normal:

$$4x^2 - 121x + 897 = 0$$

Obtenida la forma normal de la ecuación de segundo grado asociada, aplicamos la fórmula de resolución de las ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{121 \pm \sqrt{(-121)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 897}}{2 \cdot 4} = \frac{121 \pm \sqrt{289}}{8} = \frac{121 \pm 17}{8}$$

de donde obtenemos dos soluciones de la ecuación de segundo grado asociada.

$$x_1 = \frac{121 - 17}{8} = \frac{104}{8} = 13$$
$$x_2 = \frac{121 + 17}{8} = \frac{138}{8} = \frac{69}{4}$$

Encontradas las soluciones de la ecuación de segundo grado, hay que comprobar si son efectivamente también solución de la ecuación inicial:

- Si $x = 13$

  $$\sqrt{x+3} + 2x = \sqrt{13+3} + 2 \cdot 13 = \sqrt{16} + 26 = 4 + 26 = 30$$

  Por lo tanto, $x = 13$ es solución.

- Si $x = \dfrac{69}{4}$

  $$\sqrt{x+3} + 2x = \sqrt{\frac{69}{4} + 3} + 2 \cdot \frac{69}{4} = \sqrt{\frac{81}{4}} + \frac{69}{2} = \frac{9}{2} + \frac{69}{2} = \frac{78}{2} = 39 \neq 30$$

  Por lo tanto, $x = \dfrac{69}{4}$ no es solución.

(b) Resolvemos de manera similar la segunda ecuación:

$$
\begin{aligned}
&x + 3 + \sqrt{x+5} = 10\\
&\sqrt{x+5} = 10 - x - 3\\
&\sqrt{x+5} = 7 - x\\
&\left(\sqrt{x+5}\right)^2 = (7-x)^2\\
&x + 5 = 7^2 + x^2 - 2 \cdot 7 \cdot x\\
&x + 5 = 49 + x^2 - 14x\\
&x^2 - 15x + 44 = 0
\end{aligned}
$$

Calculamos las soluciones de la ecuación de segundo grado aplicando la fórmula sabida:

$$x = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 44}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{15 \pm 7}{2}$$

de donde obtenemos dos soluciones de la ecuación de segundo grado asociada.

$$x_1 = \frac{15-7}{2} = \tfrac{8}{2} = 4$$
$$x_2 = \frac{15+7}{2} = \tfrac{22}{2} = 11$$

Encontradas las soluciones de la ecuación de segundo grado, hay que comprobar si son efectivamente también solución de la ecuación inicial:

- Si $x = 4$

  $$x + 3 + \sqrt{x+5} = 4 + 3 + \sqrt{4+5} = 7 + \sqrt{9} = 7 + 3 = 10$$

  Por lo tanto, $x = 4$ es solución.
- Si $x = 11$

  $$x + 3 + \sqrt{x+5} = 11 + 3 + \sqrt{11+5} = 14 + \sqrt{16} = 14 + 4 = 18 \neq 10$$

  Por lo tanto, $x = 11$ no es solución.

Ejercicios para practicar con las soluciones

4. **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

(a) $\frac{x+5}{4} + \frac{3x-2}{3} - \frac{2x+5}{2} = 4 - \frac{5x-1}{6}$

(b) $x + 1 + \frac{x+2}{2} + \frac{x+3}{3} = -\frac{x+4}{4} + 5$

5. **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

(a) $x^2 + x = 12$

(b) $-x^2 + 10x + 11 = 0$

(c) $(2+x)(5-x) = 9 + 3x$

(d) $3x^2 - 2(x-5)^2 = 22x - 26$

6. **Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:**

(a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

(b) $x^4 - 73x^2 + 576 = 0$

(c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Soluciones:

4) (a) $x = \frac{73}{13}$

(b) $x = \frac{12}{25}$

5) (a) $x = \{-4, 3\}$

(b) $x = \{-1, 11\}$

(c) $x = \{-1, 1\}$

(d) $x = \{-4, 6\}$

6) (a) $x = \{1, -1, 2, -2\}$

(b) $x = \{3, -3, 8, -8\}$

(c) $x = \{-2, 2, 3, -3\}$

3. Sistemas de ecuaciones

Índice

3.1. Sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas

3.1.1. Definición

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cada una como máximo, representadas con las mismas incógnitas.

Ejemplo. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

Como se puede observar, para indicar que se trata de un sistema de ecuaciones y no de dos ecuaciones independientes, las dos ecuaciones van encabezadas por una clave $\{$, que las agrupa.

Es muy común escribir las ecuaciones de la manera siguiente: todos los términos con incógnitas suelen estar en el miembro de la izquierda, mientras que todos los números (términos independientes) suelen estar en el miembro de la derecha. Si las ecuaciones no están expresadas de este modo, conviene transformarlas en otras equivalentes que lo sean de este modo.

3.1.2. Soluciones y tipos de sistemas

Se ha de insistir en que una **solución** de un sistema con dos incógnitas, si existe, es un par numérico, es decir, tiene que constar de dos **números,** uno para cada incógnita, y estos dos números tienen que satisfacer las dos ecuaciones a la vez. En cuanto al **número de soluciones** de un sistema de ecuaciones, puede haber tres casos:

- Un sistema con **una única solución**. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

  que tiene una única solución $(x, y) = (4, 3)$.

- Un sistema con **infinitas soluciones**. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 20 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

  que tiene estas (y otras muchas) soluciones: $(x, y) = (4, 3)$, $(x, y) = (2, 4)$, $(x, y) = (0, 5)$, ...

- Un sistema **sin soluciones**. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

  En este caso, es fácil comprobar que no es posible que la misma expresión pueda resultar igual a 8 en un caso e igual a 1 en el otro.

3.1.3. Métodos de resolución

Resolver un sistema de ecuaciones significa encontrar las soluciones del sistema, es decir, aquellos números que, al sustituir las incógnitas, transformen las ecuaciones en igualdades numéricas ciertas. Hay que destacar que los mismos números tienen que sustituir las incógnitas en **ambas** ecuaciones a la vez.

Ejemplo. Solución de un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x + 4y = 17 \end{cases}$$

tiene como solución $(x, y) = (5, 3)$, puesto que

$$\begin{cases} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19 \\ 5 + 4 \cdot 3 = 17 \end{cases}$$

Para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, hay principalmente tres de métodos de resolución.

Método de sustitución. Consiste en aislar una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones y sustituir la expresión en la otra ecuación. Una vez resuelta esta última ecuación se soluciona la otra ecuación introduciendo el valor hallado.

Ejemplo. Para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

por el método de sustitución, se tienen que seguir estos pasos:

1) *Se elige una de las ecuaciones.* Por ejemplo, $x + 4y = -2$. (Si hay una ecuación en que el coeficiente de la x o de la y es 1, elegimos esta ecuación para simplificar los cálculos.)

2) *Se aísla una de las incógnitas de esta ecuación.* Por ejemplo, se puede aislar la x de la manera siguiente:

$$x = -2 - 4y$$

3) *Se sustituye la incógnita anterior* (la x) *de la otra ecuación* ($2x - 3y = 7$) *por el valor que hemos encontrado en aislarla* $(-2 - 4y)$. En el ejemplo,

$$2 \cdot (-2 - 4y) - 3y = 7$$

4) *Se resuelve esta ecuación de primer grado con una incógnita.* En el ejemplo, la solución es $y = -1$.

5) *Se sustituye este valor encontrado en una de las dos ecuaciones del sistema inicial. Obtendremos una ecuación de primer grado con una incógnita, que podemos resolver.* Por ejemplo, si se sustituye $x = -1$ en la ecuación $x+4y = -2$, la ecuación resultante es $x+4\cdot(-1) = -2$, la solución de la cual es $x = 2$.

Por lo tanto, la solución del sistema es $(x, y) = (2, -1)$.
Es recomendable comprobar que estos valores resuelven realmente el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7 \\ 2 + 4 \cdot (-1) = -2 \end{cases}$$

son igualdades ciertas. Así, pues, $(x, y) = (2, -1)$ es la solución del sistema.

Método de igualación. El método de igualación consiste en aislar la misma incógnita en ambas ecuaciones del sistema. A continuación, se han de “igualar” las dos expresiones que han resultado de aislar esta incógnita, y definir así una nueva ecuación. Una vez resuelta esta ecuación, se sustituye el valor en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve para encontrar el otro valor.

Ejemplo. Si se quiere resolver el sistema anterior

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

por el método de igualación, tienen que seguirse estos pasos:

1) *Se aísla la misma incógnita en ambas ecuaciones.* Por ejemplo, la x:
$$x = \frac{7+3y}{2} \qquad x = -2 - 4y$$
2) *Se igualan las expresiones que resultan de aislar la incógnita:*
$$\frac{7+3y}{2} = -2 - 4y$$
3) *Se resuelve esta ecuación de primer grado con una incógnita.* En el ejemplo
$$7 + 3y = 2 \cdot (-2 - 4y)$$
$$7 + 3y = -4 - 8y$$
$$3y + 8y = -4 - 7$$
$$11y = -11$$
$$y = -1$$

4) *Se sustituye el valor de esta incógnita en cualquiera de las ecuaciones del sistema inicial, y se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita resultante.* En el ejemplo, sustituimos la y de la segunda ecuación por -1:
$$x + 4 \cdot (-1) = -2$$
La solución de esta ecuación es $x = 2$.

Igual que antes, comprobamos que los valores obtenidos resuelven el sistema de ecuaciones propuesto.

Método de reducción. El método de reducción consiste en multiplicar convenientemente las dos ecuaciones del sistema por unos números, de modo que al restar las ecuaciones resultantes se "reduzca" el número de incógnitas de dos a una. Una vez resuelta la ecuación resultante, puede sustituirse este valor en una de las ecuaciones iniciales y resolverla para obtener la solución general.

Ejemplo. Si queremos resolver el mismo sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

por el método de reducción, tienen que seguirse estos pasos:

1) *Se elige una de las incógnitas.* Por ejemplo, la x.

2) *Se multiplica cada ecuación por un número elegido convenientemente, de modo que las ecuaciones resultantes tengan el término idéntico con la incógnita elegida.* La manera más sencilla de hacerlo consiste en multiplicar los miembros de la primera ecuación por el coeficiente de la incógnita escogida en la segunda ecuación, y los miembros de la segunda ecuación por el coeficiente de la incógnita escogida en la primera ecuación.

   En el ejemplo, multiplicamos $2x - 3y = 7$ por 1 (coeficiente de la x en la ecuación $x + 4y = -2$) y multiplicamos $x + 4y = -2$ por 2 (coeficiente de la x en la ecuación $2x - 3y = 7$) y obtenemos así las ecuaciones con el mismo término en x.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 2x + 8y = -4 \end{cases}$$

3) *Se restan ambas ecuaciones resultantes, miembro a miembro.* En el ejemplo:

$$\begin{array}{lll} 2x & -3y & = 7 \\ -(2x & +8y & = -4) \\ \hline & -11y & = 11 \end{array}$$

4) *Se resuelve la ecuación de primer grado resultante.* En el ejemplo, la solución de $-11y = 11$ es $y = -1$.

5) *e sustituye el valor de esta incógnita en cualquiera de las ecuaciones del sistema y se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita resultante.* En el ejemplo, sustituimos la y de la segunda ecuación por -1:

$$x + 4 \cdot (-1) = -2$$

   La solución de esta ecuación es $x = 2$. Y, por lo tanto, la solución del sistema es $(x, y) = (2, -1)$.

Tal como hemos visto antes, comprobamos que los valores obtenidos resuelven el sistema de ecuaciones propuesto.

Observad que, después de resolver el mismo sistema con los tres métodos, el método que se utiliza para resolver un sistema de ecuaciones no influye en la solución del sistema.

3.2. Sistemas lineales de tres ecuaciones y tres incógnitas

3.2.1. Definción

Igual que antes, podemos definir un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas como un conjunto de tres ecuaciones de primer grado con las tres mismas incógnitas en cada una de las ecuaciones.

Ejemplo. Sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 4x - 2y - 3z = -4 \end{cases}$$

3.2.2. Método de resolución

La solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas consta de tres números que, al sustituir las incógnitas correspondientes a la vez, permiten resolver el sistema.

Ejemplo. Solución de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas.
$(x, y, z) = (1, 2, -3)$ es la solución del sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 5y - 2z = -2 \\ 3x + 4y + z = 8 \end{cases}$$

ya que

$$\begin{cases} 1 + 2 + (-3) = 0 \\ 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = -2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-3) = 8 \end{cases}$$

Para resolver un sistema de este tipo, puede utilizarse un método parecido al de reducción operando de la manera siguiente:

1) *Operar adecuadamente con la primera ecuación para eliminar la primera incógnita de las dos ecuaciones siguientes.*
Al multiplicar la primera ecuación por 2 y restarla de la segunda se obtiene $-7y - 4z = -2$.Multiplicando la primera ecuación por 3 y restándola de la tercera, se obtiene $y - 2z = 8$. Evidentemente, ambos sistemas son equivalentes.

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ 2x - 5y - 2z &= -2 \\ 3x + 4y + z &= 8 \end{cases} \xrightarrow[Eq3=Eq3-3\cdot Eq1]{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1} \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ -7y - 4z &= -2 \\ y - 2z &= 8 \end{cases}$$

2) *Operar adecuadamente con la segunda ecuación del nuevo sistema para eliminar la segunda incógnita de la tercera ecuación.*
Para encontrar la tercera ecuación nueva, multiplicamos la tercera ecuación por 7 y la sumamos a la segunda. Observamos que en la última ecuación queda ahora

una sola incógnita.

$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ -7y-4z &= -2 \\ y-2z &= 8 \end{cases} \xrightarrow{Eq3=7\cdot Eq3+Eq2} \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ -7y-4z &= -2 \\ -18z &= 54 \end{cases}$$

3) *Resolver la última ecuación que tendrá solo una incógnita:*

$$-18z = 54 \Leftrightarrow z = \frac{-54}{18} = -3.$$

4) *Resolver la segunda ecuación del último sistema, sustituyendo la z por el valor hallado.* En este caso tenemos que $z = -3$

$$7y - 4\cdot(-3) = -2 \Leftrightarrow y = \frac{-2-12}{7} = 2$$

Obtenemos que $y = 2$.

5) *Finalmente, sustituir los valores encontrados de la y y la z en la primera ecuación, y encontrar la x.* Utilizando $z = -3$ y $y = 2$, tenemos

$$x + 2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

En este caso, $x = 1$.

Por lo tanto la solución del sistema es $(x, y, z) = (1, 2, -3)$.

Este método se denomina **método de Gauss**.

3.3. Sistemas lineales de m ecuaciones y n incógnitas

Ahora queremos estudiar cómo trabajar con sistemas de ecuaciones lineales con cualquier número de ecuaciones lineales e incógnitas.

3.3.1. Definición

Un **sistema de m ecuaciones y n incógnitas** (que denominaremos $x_1, x_2, \ldots, x_n$) con términos independientes $b_1, \ldots, b_n$, también denominados constantes y donde m y n son dos números naturales, tiene la forma siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Como en el resto de los sistemas, una **solución de este sistema** es un **n-tupla** (es decir, una colección de n números) que, al sustituir $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ convenientemente en este sistema, resuelve todas las ecuaciones simultáneamente. Es evidente que alguno de los coeficientes de cada incógnita tiene que ser diferente de 0 en alguna de las ecuaciones (en caso contrario, esta incógnita sería superflua).

3.3.2. Método de Gauss

Tal como hemos visto en el caso de sistemas con tres ecuaciones y tres incógnitas, el método de Gauss consiste en aplicar una serie de transformaciones lineales al sistema inicial hasta obtener un sistema más fácil de resolver.

Las transformaciones lineales que podemos aplicar cuando utilizamos el método de Gauss son:

- Dos ecuaciones cualesquiera son intercambiables.
- Una ecuación cualquiera del sistema puede multiplicarse (en ambos miembros) por una constante diferente de cero.
- Una ecuación cualquiera del sistema puede reemplazarse por la ecuación que resulta de sumar a esta misma ecuación cualquier otra ecuación del sistema, la cual se puede multiplicar además por cualquier número.

Estas tres transformaciones elementales suelen denominarse (en este orden): *intercambiar ecuaciones, reescalar* (es decir, multiplicar por un número) y *pivotar*.

En cada una de las ecuaciones del sistema lineal, la primera incógnita que aparece con un coeficiente diferente de cero se denomina **incógnita inicial** de la ecuación. Se dice que un sistema está en **forma escalonada** (o es **triangular**) si la incógnita inicial en cada ecuación (obviamente, excepto en la primera) está a la derecha de la incógnita inicial de la ecuación que la precede. Es decir que (en caso de que tengamos el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, $m = n$) la forma del sistema en forma escalonada es la siguiente:

$$
\left\{
\begin{array}{cccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{1(n-1)}x_{n-1} & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{2(n-1)}x_{n-1} & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
 & & +a_{33}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{3(n-1)}x_{n-1} & +a_{3n}x_n & = b_3 \\
 & & & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & = \dots \\
 & 0 & & & +\dots & +\dots & +\dots & = \dots \\
 & & & & & +a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & +a_{(n-1)n}x_n & = b_{n-1} \\
 & & & & & & +a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}
\right.
$$

El **método de Gauss** consiste en utilizar las tres transformaciones elementales entre ecuaciones (intercambiar, reescalar y pivotar) para encontrar un sistema equivalente en el inicial en forma esglaonada. Así, empezando por la última incógnita, podremos resolver fácilmente el sistema.

Para conseguirlo:

1) Empezamos repasando todos los coeficientes de x_1 (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}) hasta encontrar el primer coeficiente que sea diferente de cero. Este coeficiente podría ser el mismo a_{11}. Si no es el primero, se intercambia la ecuación con la primera que tenga este término diferente de 0.

2) Consideramos que un nuevo sistema tiene un número diferente de 0 como coeficiente a_{11}.

3) Mediante las operaciones de reescalar y pivotar, se consiga que todos los coeficientes que estén bajo este nuevo a_{11} sean 0. Así, si en la ecuación que ocupa la fila k-ésima su primer coeficiente a_{k1} es diferente de 0, se pivota multiplicando la primera fila por $\frac{a_{k1}}{a_{11}}$ y restando el resultado a la fila k-ésima. El resultado será la nueva fila k-ésima. El nuevo sistema tendrá esta forma:

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ & +a'_{22}x_2 & +\dots & +a'_{2n}x_n & = b'_2 \\ & \dots & & & \\ & \dots & & & \\ & +a'_{m2}x_2 & +\dots & +a'_{mn}x_n & = b'_m \end{array}\right.$$

4) Una vez eliminados todos los coeficientes de la primera incógnita (excepto el de la primera ecuación), repetimos el mismo procedimiento con los coeficientes de la segunda incógnita, x_2, a partir de la segunda ecuación.

5) A continuación, se realiza el mismo procedimiento con la tercera incógnita, x_3, a partir de la tercera ecuación. Y así sucesivamente hasta llegar a la última ecuación. Una vez llegado al final del proceso, el número de ecuaciones que no son del tipo $0 = 0$ es igual a un cierto número, que denominaremos r, de modo que $r \leq m$.

3.3.3. Soluciones y tipos de sistemas

Una vez finalizado el procedimiento de Gauss, el sistema resultante tendrá que hallarse en una de estas situaciones:

- Que aparezca una fila con todos los coeficientes iguales a cero y con la constante diferente de cero. En este caso el sistema no tiene ninguna solución. Se llama que el sistema es **incompatible**.

- Que no aparezca ninguna ecuación con ceros, o que todas las filas con coeficientes iguales a cero tengan también constantes iguales a cero (en este caso todas estas filas son superfluas y pueden eliminarse). Si esto es así, el sistema tiene solución. Se llama que el sistema es **compatible**, y puede ser:

  ◦ **Compatible determinado**: la solución es única si el número r de ecuaciones resultantes en el sistema escalonado es igual a n (el número de incógnitas).

∘ **Compatible indeterminado**: con infinitas soluciones si el número r de ecuaciones en el sistema escalonado es menor que n (el número de incógnitas).

Veamos cómo son las soluciones en el caso de sistemas compatibles:

$\boxed{\text{Caso } r = n}$ El sistema resultante en forma escalonada, después de utilizar el método erá de la forma:

$$\left\{\begin{array}{llllllll}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{1(n-1)}x_{n-1} & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{2(n-1)}x_{n-1} & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
 & & +a_{33}x_3 & +\dots & +\dots & +a_{3(n-1)}x_{n-1} & +a_{3n}x_n & = b_3 \\
 & & & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & = \dots \\
 & 0 & & & +\dots & +\dots & +\dots & = \dots \\
 & & & & & +a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & +a_{(n-1)n}x_n & = b_{n-1} \\
 & & & & & & +a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}\right.$$

Para encontrar la solución única de este sistema, se utiliza la llamada *sustitución hacia atrás* (un proceso muy parecido al que se ha seguido en los sistemas de tres ecuaciones lineales):

1) Se aísla x_n de la última ecuación:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

2) Se sustituye este valor en la ecuación anterior y se encuentra el valor de x_{n-1}:

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left(b_{n-1} - a_{(n-1)n} \cdot \frac{b_n}{a_{nn}}\right)$$

3) Se sigue el mismo procedimiento de sustitución hacia atrás hasta que se han encontrado los valores para todas las incógnitas.

$\boxed{\text{Caso } r < n}$ El sistema de ecuaciones quedaría de la manera siguiente:

$$\left\{\begin{array}{lllllllll}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\
 & a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\
0 & & \dots & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & +\dots & = \dots \\
 & & & & a_{rn}x_r & +a_{r(n+1)}x_{r+1} & +\dots & +a_{rn}x_n & = b_r
\end{array}\right.$$

Para resolver este sistema, haremos lo siguiente:

- Reducir este sistema a un sistema con tantas incógnitas como filas. Para hacerlo, se pasan todas las incógnitas a partir de x_{r+1} al otro miembro.

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\ldots & +a_{1r}x_r & = b_1 - a_{1(r+1)}x_r - \ldots - a_{1n}x_n \\ & a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\ldots & +a_{2r}x_r & = b_2 - a_{2(r+1)}x_r - \ldots - a_{2n}x_n \\ & & & \ldots & & \\ & & & & a_{rn}x_r & = b_r - a_{r(n+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{array}\right.$$

- De este modo, tenemos las r primeras incógnitas en el miembro izquierdo de las ecuaciones, y las $n-r$ incógnitas del miembro de la derecha de las ecuaciones se tratan como si fueran valores conocidos (como los números b_i). Obtenemos así un sistema con r ecuaciones y r incógnitas, que puede resolverse haciendo el proceso de sustitución hacia atrás.

- Ahora bien, se obtendrá la solución para las r primeras incógnitas, que dependerán del valor que tengan las $n-r$ incógnitas restantes, y estas $n-r$ podrán tomar cualquier valor real. Por eso mismo, este tipo de sistemas tiene **más de una solución** (de hecho, tiene infinitas soluciones).

3.4. Sistemas de inecuaciones

3.4.1. Sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita

Definición. Un sistema de inecuaciones lineales con una única incógnita está formado por varias inecuaciones lineales y limitado por una clave que indica precisamente que se trata de un sistema, y no de inecuaciones independientes.

Ejemplo. Un sistema de inecuaciones podría ser:

$$\begin{cases} 3x + 4 \leq 2x + 8 \\ 2x - 1 > x \end{cases}$$

Un número es solución de un sistema de inecuaciones de este tipo si es solución de todas las inecuaciones que forman el sistema. Tengamos en cuenta que la solución de un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita puede tener solución o no, y en caso de que tenga solución esta puede ser un solo número, un intervalo de números o bien la unión de varios intervalos.

Ejemplo. $x = 3$ es una solución del sistema de inecuaciones anterior, puesto que

$$\begin{cases} 3 \cdot 3 + 4 \leq 2 \cdot 3 + 8 \\ 2 \cdot 3 - 1 > 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 13 \leq 14 \\ 5 > 3 \end{cases}$$

Métodos de resolución. Para resolver sistemas de inecuaciones, proponemos dos métodos diferentes.

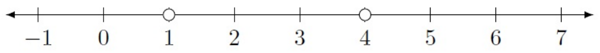
En **el primer método**, los pasos para la resolución son los siguientes:

1) *Se resuelven por separado las ecuaciones asociadas a cada una de las inecuaciones del sistema.* La ecuación asociada a una inecuación es la resultante de sustituir la desigualdad de la inecuación por una igualdad. En el ejemplo anterior, tenemos que resolver cada una de las dos ecuaciones siguientes:

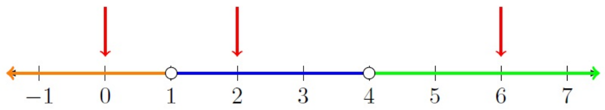
$$3x + 4 = 2x + 8 \Leftrightarrow x = 4$$

$$2x - 1 = x \Leftrightarrow x = 1$$

2) *Se marcan en la recta real las soluciones anteriores.* Esto hará que la recta real quede dividida en 3 partes. En el ejemplo:

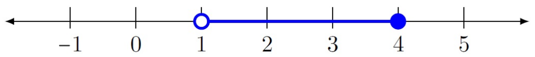


3) *Se selecciona un número de cada una de las partes en las que queda dividida la recta por los números anteriores.* En el ejemplo, pueden escogerse los números 0, 2 y 6.



4) *Se comprueba cuál de estos números, además de las soluciones de las ecuaciones, son solución de todo el sistema de inecuaciones.* En el ejemplo, se tienen que probar el 0, 2 y 6 que hemos marcado en el paso anterior y las dos soluciones 1 y 4. Es s fácil comprobar que son únicamente solución del sistema el 2 y el 4.

5) *Finalmente, las soluciones del sistema son los números que están en el mismo intervalo que los números que en el paso 4 hemos comprobado que eran solución del sistema de inecuaciones.* Además, incluiremos las soluciones obtenidas en el apartado 1 si cumplen el sistema de inecuaciones. En el ejemplo, los números que son solución del sistema están entre el 1 y el 4, más el 4, y por lo tanto el intervalo $(1, 4]$, la sección coloreada de esta recta real:



Por lo tanto, las soluciones del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 4 \leq 2x + 8 \\ 2x - 1 > x \end{cases}$$

son todos los números mayores que 1 y menores o iguales a 4, es decir, todos los números, x, que cumplen $1 < x \leq 4$. En forma de intervalo, la solución se expresaría de la manera siguiente:

$$(1, 4]$$

Un **segundo método** para resolver este sistema es:

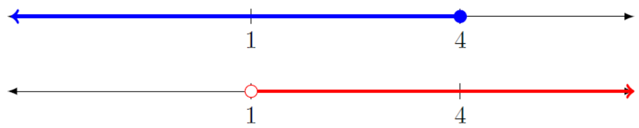
1) *Resolvemos la primera inecuación.* En el ejemplo, tenemos que resolver

$$3x + 4 \leq 2x + 8$$

Tal como hemos visto en el método anterior, la solución de la ecuación asociada es $x = 4$, y si comprobamos los valores 0, 4 y 5 en la inecuación obtenemos como solución el intervalo, $(-\infty, 4]$.

2) *Resolvemos la segunda inecuación.* En el ejemplo, procedemos del mismo modo que en el paso anterior y obtenemos que la solución de $2x - 1 > x$ es el intervalo $(1, +\infty]$.

3) *Buscamos cuáles son los puntos en común que tienen las dos soluciones obtenidas.* En el ejemplo vemos que coinciden en el intervalo $(1, 4]$



3.4.2. Sistemas de inecuaciones de segundo grado con una incógnita

Definición Un sistema de inecuaciones de segundo grado con una única incógnita está formado por varias inecuaciones lineales o de segundo grado y limitado por una clave.

> **Ejemplo.** Un sistema de inecuaciones de segundo grado puede ser
>
> $$\begin{cases} 2x + 5 \geq 2 - x \\ 2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4 \end{cases}$$

Un número es solución de un sistema de inecuaciones de este tipo si es solución de todas las inecuaciones que forman el sistema. Tengamos en cuenta que la solución de un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita puede tener solución o no, y en caso de que tenga solución esta puede ser un solo número, un intervalo de números o bien la unión de varios intervalos.

> **Ejemplo.** $x = \frac{1}{2}$ es una solución del sistema de inecuaciones, puesto que
>
> $$2\left(\frac{1}{2}\right) + 5 \geq 2 - \left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 6 \geq \frac{3}{2}$$
> $$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 4 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq \frac{15}{4}$$

Método de resolución. Un procedimiento para encontrar las soluciones de un sistema de inecuaciones de segundo grado es muy parecido al de resolución de sistema de inecuaciones lineales. De hecho podemos elegir cualquiera de los dos métodos que hemos visto y utilizarlos también en este caso. Elegimos por ejemplo el segundo. Así, para encontrar la solución del sistema hay que resolver cada una de las ecuaciones aparte, después buscar las soluciones de las dos inecuaciones por separado y finalmente buscar todas las zonas comunes:

1) Se resuelven las dos ecuaciones asociadas.

$$\begin{cases} 2x + 5 = 2 - x \Leftrightarrow x = -1 \\ 2x^2 - 2x - 2 = x^2 - x + 4 \Leftrightarrow x = -2,\ 3 \end{cases}$$

2) Se resuelven las dos inecuaciones por separado.

- La solución de $2x + 5 \geq 2 - x$ es $[-1, +\infty)$.

- La solución de $2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$ es $[-2, 3]$.

3) Se busca la zona común de la solución de ambas inecuaciones, que es $[-1, 3]$:

Por lo tanto, las soluciones del sistema de ecuaciones de segundo grado

$$\begin{cases} 2x + 5 \geq 2 - x \\ 2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4 \end{cases}$$

son todos los números mayores o iguales a -1 y menores o iguales a 3, es decir, todos los números, x que cumplan $-1 \leq x \leq 3$. En forma de intervalo, la solución se expresaría de la manera siguiente: $[-1, 3]$.

Resumen

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas	
Definición: es un conjunto de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cada una, representadas por las mismas letras.	*Ejemplo:* $\begin{cases} 3x - 6y = 5 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$
Escritura habitual: términos con incógnita en el miembro de la izquierda y términos numéricos en el de la derecha.	
Solución: un par de números que, al sustituir las incógnitas correspondientes en cada una de las ecuaciones, dan lugar a dos igualdades ciertas.	$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ té solució $(x, y) = (2, 1)$, ja que $\begin{cases} 2 + 1 = 3 \\ 2 \cdot 2 - 1 = 3 \end{cases}$
Resolución: proceso de búsqueda de las soluciones del sistema.	
Métodos de resolución	
Método de sustitución	
Procedimiento	*Ejemplo:* $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$
1. Se elige una de las dos ecuaciones.	$2x + y = 4$
2. Se aísla una de las incógnitas de la ecuación elegida.	$y = 4 - 2x$
3. Se sustituye el valor de la incógnita en la otra ecuación.	$4x - 2 \cdot (\mathbf{4 - 2x}) = 8$
4. Se resuelve la ecuación resultante.	$4x - 8 + 4x = 8 \Leftrightarrow 8x - 8 = 8$ $\Leftrightarrow 8x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{8} = 2$
5. Se sustituye el valor encontrado en la ecuación del paso 2 y obtenemos el valor de la otra incógnita y la solución.	$y = 4 - 2 \cdot \mathbf{2} = 0$ Solución: $(x, y) = (2, 0)$
6. Se comprueba la solución.	$\begin{cases} 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \\ 2 \cdot 2 + 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \end{cases}$
Método de igualación	
Procedimiento	*Ejemplo:* $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$
1. Se aísla la misma incógnita en las dos ecuaciones.	$y = \frac{4x - 8}{2} = 2x - 4$ $y = 4 - 2x$
2. Se igualan las dos expresiones resultantes.	$2x - 4 = 4 - 2x$
3. Se resuelve la ecuación resultante.	$2x - 4 = 4 - 2x \Leftrightarrow 4x = 8$ $\Leftrightarrow x = \frac{8}{4} = 2$
4. Se sustituye la incógnita de cualquiera de las ecuaciones del sistema del paso 1 por el valor encontrado.	$y = 4 - 2 \cdot 2 = 0$ Solución: $(x, y) = (2, 0)$
5. Se comprueba la solución.	$\begin{cases} 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \\ 2 \cdot 2 + 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \end{cases}$

Método de reducción

Procedimiento	*Ejemplo:* $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$
1. Se elige una de las dos incógnitas.	Por ejemplo, y
2. Se multiplican los dos miembros de la primera ecuación por el coeficiente de la incógnita escogida en la segunda ecuación y los dos miembros de la segunda ecuación por el coeficiente de la incógnita escogida en la primera ecuación.	$1 \cdot (4x - 2y = 8)$ $-2 \cdot (2x + y = 4)$ $\Downarrow$ $\begin{array}{rrl} 4x & -2y & = 8 \\ -4x & -2y & = -8 \end{array}$
3. Se restan las dos ecuaciones resultantes.	$\begin{array}{rrrl} & 4x & -2y & = 8 \\ - & -4x & -2y & = -8 \\ \hline & 8x & & = 16 \end{array}$
4. Se resuelve la ecuación resultante.	$x = 2$
5. Se sustituye el valor de la incógnita hallada en cualquiera de las ecuaciones del sistema.	Se sustituye $x = 2$ a $2x + y = 4$: $2 \cdot 2 + y = 4$
6. Se resuelve la ecuación resultante.	$4 + y = 4 \Rightarrow y = 0$ Solució: $(x, y) = (2, 0)$
7. Se comprueba la solución.	$\begin{cases} 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \\ 2 \cdot 2 + 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \end{cases}$

Sistema de m ecuaciones y n incógnitas

Un **sistema de m ecuaciones y n incógnitas** (que denominaremos x_1, x_2, $\ldots$, x_n), con términos independientes b_1, $\ldots$, b_n, denominados también constantes, y en el que m y n son dos números naturales, tiene la forma siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Resolución de un sistema de varias ecuaciones lineales por el método de Gauss

1. Operar con la primera ecuación para eliminar la primera incógnita de las otras ecuaciones.	$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ 2x - 5y - 2z & = -2 \\ 3x + 4y + z & = 8 \end{cases} \xrightarrow[Eq3 = -3 \cdot Eq1 + Eq3]{Eq2 = -2 \cdot Eq1 + Eq2}$ $\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ -7y - 4z & = -2 \\ y - 2z & = 8 \end{cases}$
2. Operar con la segunda ecuación para eliminar la segunda incógnita de las ecuaciones siguientes. 3. Se hace la misma operación hasta agotar las ecuaciones y se obtiene un sistema escalonado.	$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ -7y - 4z & = -2 \\ y - 2z & = 8 \end{cases} \xrightarrow{Eq3 = Eq2 + 7 \cdot Eq3}$ $\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ -7y - 4z & = -2 \\ -18z & = 54 \end{cases}$
4. Se resuelve la última ecuación y se sustituyen los valores *hacia* atrás.	$\begin{cases} 18z = 54 \Rightarrow z = -\frac{54}{18} = -3 \\ -7y - 4 \cdot (-3) = -2 \Rightarrow y = 2 \\ x + 2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

Número de soluciones de un sistema

Un sistema de m ecuaciones y n incógnitas puede no tener solución, tener una o tener infinitas.

- El sistema no tiene ninguna solución cuando aparece una fila con todos los coeficientes iguales a 0 y con la constante diferente de 0. Se dice que el sistema es **incompatible**.
- En caso contrario, el sistema tiene solución, se denomina sistema **compatible** y puede ser:
  - **Compatible determinado** (con solución única): si el número de ecuaciones resultantes en el sistema escalonado es igual al número de incógnitas.
  - **Compatible indeterminado** (con infinitas soluciones): si el número de ecuaciones en el sistema escalonado es menor que el número de incógnitas.

Sistemas de inecuaciones
Un sistema de inecuaciones con una única incógnita está formado por varias inecuaciones y limitado por una clave que indica precisamente que se trata de un sistema y no de inecuaciones independientes.
Resolución de sistemas de inecuaciones
1) Se resuelven las ecuaciones asociadas a las inecuaciones del sistema. 2) Se marcan las soluciones anteriores en la recta real. 3) Se selecciona un número de cada una de las partes en las que queda dividida la recta por los números anteriores. 4) Se comprueba cuál de estos números son solución del sistema de inecuaciones. 5) Las soluciones del sistema son los números que están en el mismo intervalo que los números que en el apartado 4 hemos comprobado que eran solución del sistema de inecuaciones.

Ejercicios resueltos

1. **Encuentra las soluciones en el sistema de ecuaciones usando el método de Gauss:**

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

Solución:

Se observa que la primera incógnita inicial es la x en la primera ecuación, puesto que su coeficiente es diferente de 0 (es 1). Pivotando este elemento se obtiene:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1} \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

Solo la primera ecuación tiene incógnita x, y por lo tanto la primera incógnita inicial, que es y, está en la tercera ecuación (puesto que en la segunda ecuación no hay incógnita y. Así, pues, intercambiamos las filas:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{Eq1\leftrightarrow Eq2} \begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ 2z + w = 5 \end{cases}$$

De este modo, ya no hay más incógnitas y. La nueva incógnita inicial de la tercera ecuación es z; por lo tanto, puede mantenerse en la posición y servirá de pivote para eliminar la incógnita z de la última ecuación:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \xrightarrow{Eq4=Eq4-2\cdot Eq3} \begin{cases} x - y = 0 \\ y + w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ -3w = -3 \end{cases}$$

Se ha llegado a la última ecuación, y la situación es de igual número de incógnitas que de ecuaciones. Por lo tanto, se trata de un sistema compatible determinado. Se aplica la sustitución hacia atrás al último sistema para resolverlo:

- Se deduce que $w = 1$ de la última ecuación.
- Se sustituye este valor en la ecuación anterior y se resuelve:
  $$z + 2 \cdot 1 = 4 \Rightarrow z = 4 - 2 = 2.$$
- Se sustituyen $z = 2$ y $w = 1$ en la ecuación anterior:
  $$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1.$$
- Se sustituyen $y = -1$, $z = 2$, $w = 1$:
  $$x - (-1) = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Por lo tanto, la solución del sistema es $x = -1$, $y = -1$, $z = 2$, $w = 1$. También puede escribirse $(x,y,z,w) = (-1,-1,2,1)$.

2. **Encuentra las soluciones en el sistema de ecuaciones usando el método de Gauss.**

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ 3x + 6z - 6w = 6 \\ -y + z - w = 1 \end{cases}$$

Solución:

Para obtener la forma escalonada hacemos lo siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ 3x + 6z - 6w = 6 \\ -y + z - w = 1 \end{cases} \xrightarrow{Eq3=Eq3-3\cdot Eq1} \begin{cases} x + y + z - w = 1 \\ y - z + w = -1 \\ -3y + 3z - 3w = 3 \\ -y + z - w = 1 \end{cases} \xrightarrow[Eq4=Eq4+Eq2]{Eq3=Eq3+3\cdot Eq2}$$

$$\xrightarrow[Eq4=Eq4+Eq2]{Eq3=Eq3+3\cdot Eq2}\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & -w = & 1 \\ & y & -z & +w = & -1 \\ & & & 0 = & 0 \\ & & & 0 = & 0 \end{array}\right.$$

Eliminamos las dos igualdades 0 = 0, puesto que son superfluas. El sistema escalonado es:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +y & +z & -w = & 1 \\ & y & -z & +w = & -1 \end{array}\right.$$

En este caso, $n = 4$ y $r = 2$; por lo tanto, se trata de un sistema compatible indeterminado. Para poder utilizar el procedimiento de sustitución hacia atrás, tiene que haber tantas incógnitas como ecuaciones; por eso, movemos las dos incógnitas restantes al miembro de la derecha.

$$\left\{\begin{array}{rrll} x & +y = & 1 & -z +w \\ & y = & -1 & +z -w \end{array}\right.$$

Ahora ya podemos resolver el sistema. La última ecuación nos da el valor de la y.

$$y = -1 + z - w.$$

Si sustituimos hacia atrás el valor de la y en la primera ecuación,

$$x - 1 + z - w = 1 - z + w \Rightarrow x = 2 - 2z + 2w.$$

Así, las soluciones son de este tipo:

$$x = 2 - 2z + 2w$$
$$y = -1 + z - w$$

donde z y w pueden ser cualquier número. Escribiremos la solución $(x, y, z, w) = (2 - 2z + 2w, 1 + z - w, z, w)$ para z, $w \in \mathbb{R}$. Por eso, el sistema tiene infinitas soluciones, tantas como valores se den a z y w. Ejemplos concretos serían los siguientes:

- Si $z = 0$ y $w = 0$, entonces $x = 2$ e $y = -1$. Por lo tanto, una solución del sistema es $x = 2$, $y = -1$, $z = 0$, $w = 0$.
- Si $z = 1$ y $w = -2$, la solución del sistema sería $x = -4$, $y = 2$, $z = 1$, $w = -2$.

Así pues, para cada par de valores cualquiera z, w podemos conseguir una solución del sistema. Es decir, el sistema tiene soluciones infinitas.

3. **Encuentra las soluciones del sistema.**

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y + z = 4 \\ x - 2y + z = -2 \\ 8x + 5y + 5z = 1 \end{array}\right.$$

Solución:

Solucionamos el sistema encontrando la forma escalonada. Para ello, hacemos lo siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & +3y & +z = & 4 \\ x & -2y & +z = & -2 \\ 8x & +5y & +5z = & 1 \end{array}\right. \xrightarrow{Eq1\leftrightarrow Eq2} \left\{\begin{array}{rrrl} x & -2y & +z = & -2 \\ 2x & +3y & +z = & 4 \\ 8x & +5y & +5z = & 1 \end{array}\right. \xrightarrow[Eq3=Eq3-8\cdot Eq1]{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1}$$

$$\xrightarrow[Eq3=Eq3-8\cdot Eq1]{Eq2=Eq2-2\cdot Eq1}\left\{\begin{array}{rrrl} x & -2y & +z = & -2 \\ & 7y & -z = & 8 \\ & 21y & -3z = & 17 \end{array}\right. \xrightarrow{Eq3=Eq3-3\cdot Eq2} \left\{\begin{array}{rrrl} x & -2y & +z = & -2 \\ & 7y & -z = & 8 \\ & & 0 = & -7 \end{array}\right.$$

En vista de la tercera ecuación, que no tiene ninguna posible solución porque siempre es falsa, podemos deducir que el sistema es incompatible.

4. **Añade una ecuación al sistema siguiente, de forma que resulte...**

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +z = & 1 \\ x & & -z = & 2 \end{array}\right.$$

(a) compatible determinado.

(b) compatible indeterminado.

(c) incompatible.

Solución:

(a) Tenemos que asegurarnos de hallar una tercera ecuación que no dé lugar a un sistema incompatible o que sea irrelevante. Dado que la segunda ecuación no tiene la variable

y, podemos dar una tercera ecuación con esta variable, por ejemplo, $y = 0$. O bien, para complicar más esta tercera ecuación, $y = 0$ más una combinación lineal de las otras dos ecuaciones (de modo que al simplificar el sistema devuelva a $y = 0$).

Con esta tercera ecuación ($y = 0$), haciendo sustitución hacia atrás, nos queda el sistema

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases} \xrightarrow{Eq2=Eq2-Eq1} \begin{cases} x + z = 1 \\ \quad -2z = 1 \end{cases}$$

Y puesto que es un sistema escalonado de dos ecuaciones y dos variables, ya sabemos que es compatible determinado. ¿Sabes resolverlo?

(b) Puesto que con las dos ecuaciones que nos dan ya tenemos un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas, si añadimos una ecuación irrelevante mantendremos el mismo tipo de sistema.

Por ejemplo, la tercera ecuación podría ser $0 = 0$ (que siempre es cierta y no da más información que la que ya tenemos, y por lo tanto es irrelevante), $x-z = 2$ (que es idéntica a la segunda ecuación) o cualquier combinación lineal de las ecuaciones iniciales.

(c) Para que el sistema resulte incompatible, basta con dar una ecuación que no pueda solucionarse. Por ejemplo, si la tercera ecuación fuera $0 = 1$ no habría solución del sistema (ya que la tercera ecuación nunca sería cierta), y por lo tanto el sistema sería incompatible.

Otra opción es dar una tercera ecuación que sea realmente incompatible con alguna de las anteriores, por ejemplo, $x-z = 1$. Dado que la segunda ecuación es $x-z = 2$, no puede ser que las dos sean ciertas a la vez (dicho de otro modo, al restar una ecuación de la otra obtendríamos 0 1 como antes); por lo tanto, el sistema es incompatible.

5. **Encuentra la solución del sistema de inecuaciones siguiente:**

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{x-1}{3} > x \\ x - 1 < 3 - \dfrac{x+1}{2} \end{cases}$$

Solución:

Si operamos la primera inecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} 2x - x &> \frac{x-1}{3} \\ x &> \frac{x-1}{3} \\ 3x &> x - 1 \\ 2x &> -1 \\ x &> \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

Mientras que, para la segunda,

$$\begin{aligned} x - 4 &< -\frac{x+1}{2} \\ 2x - 8 &< -(x+1) \\ 3x &< 7 \\ x &< \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, si unimos las dos soluciones tenemos la solución $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{3}\right)$.

6. **Resuelve el sistema de inecuaciones siguiente:**

$$\begin{cases} 2x^2 - 3 \le 6x + 5 \\ 7x + 1 \le 13 + 4x \end{cases}$$

Solución:

Si reordenamos la primera inecuación, tenemos

$$2x^2 - 6x - 8 \le 0.$$

Ahora bien, si igualamos la parte de la izquierda a 0 y solucionamos la ecuación aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado, tenemos $x = -1, 4$ como soluciones. Estos valores son donde la inecuación se satisface con una igualdad. Para saber cuál de los intervalos que quedan soluciona la inecuación, tomamos un valor de cada intervalo y los evaluamos:

- Cogemos un número más pequeño que -1, por ejemplo, -2, y lo sustituimos en la inecuación, de modo que queda $8 \le 0$. Dado que esto no es cierto, entonces el intervalo $(-\infty, -1)$

no pertenece a la solución.

- Cogemos un número entre -1 y 4, por ejemplo, el 0, y lo sustituimos en la inecuación, de forma que queda $-8 \leq 0$. Al ser cierto, entonces este intervalo sí pertenece a la solución.
- Cogemos un número mayor que 4, por ejemplo, 5, y lo sustituimos en la inecuación, de modo que queda $12 \leq 0$. Al no ser cierto, el intervalo $(4, +\infty)$ no pertenece a la solución.

En conclusión, la primera inecuación tiene como solución el intervalo $[-1, 4]$.

Solucionamos la segunda inecuación de forma que queda

$$\begin{aligned} 7x + 1 &\leq 13 + 4x \\ 7x - 4x &\leq 13 - 1 \\ 3x &\leq 4 \end{aligned}$$

y, por lo tanto, tiene como solución $x \leq 4$.

Ahora sabemos que la solución del sistema será la intersección de las soluciones de cada una de las inecuaciones. Así tendremos que la solución del sistema es $[-1, 4]$.

Ejercicios para practicar con las soluciones

7. **Encuentra las soluciones de los sistemas de ecuaciones siguientes usando el método de Gauss:**

(a)

$$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ x - 2y = 9 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 3x + y + z + u + v = 0 \\ z - u = 1 \\ 2v = 4 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} -2x + y + z - t = 2 \\ y + z + 2t = 4 \\ z + 2t = 3 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -4x + 5y - 6z = 1 \end{cases}$$

(e)

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

8. **Un sistema lineal se ha resuelto de dos maneras obteniendo los dos conjuntos de soluciones siguientes:**

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3\mu - 1 \\ y = 3 - 6\mu \\ z = 1 + 3\mu \end{cases}$$

para λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Prueba que las dos soluciones coinciden.

9. **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones de grado 1:**

(a)

$$\begin{cases} 2x - (x - 4) < 6 \\ x > 3 \cdot (2x - 1) + 18 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-4}{3} > 2x - 1 \\ 2x - \dfrac{x-5}{3} > x - 3 \end{cases}$$

10. **Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones de grado 2:**

(a)

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \leq 0 \\ -x^2 + 8x > 7 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 1} \leq 0 \\ 7 \cdot (3 - x) \geq 5 \end{cases}$$

Soluciones:

7.

(a) $x = 5, y = -2$

(b) $\left(\dfrac{-3 - y - 2u}{3}, y, 1 + u, u, 2\right)$

(c) $\left(1 - \dfrac{3t}{2}, 1, 3 - 2t, t\right)$

(d) $\left(\frac{-2}{3} - 11z, \frac{-1}{3} - 4z, z\right)$

(e) Es un sistema incompatible

8. Comprobamos que para $\lambda = 3\mu - 1$ obtenemos las mismas expresiones para las soluciones.

9.

(a) $(-\infty, -3)$

(b) $(-7, 1)$

10.

(a) $(1, 6]$

(b) $(-\infty, -3] \cup \left(1, \frac{16}{7}\right]$