Iniciación a las matemáticas para la ingeniería

PID_00270090

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat
Oberta
de Catalunya

4. Polinomios

Índice

4.1. Definición y aspectos generales

4.1.1. Definición

Un polinomio de una sola variable o, para abreviar, un **polinomio**, es una expresión algebraica con una única letra, llamada variable. Los *términos* de esta expresión son el producto de un número por una potencia positiva de la variable, excepto en el caso de un único término, que corresponde a la potencia 0 de la variable, y por eso solo consta de un número. Este término se denomina *término independiente*.

¿Qué es un polinomio? Es una expresión algebraica con una única letra llamada variable. Los elementos básicos de un polinomio son los términos. Cada término es producto de un coeficiente y un grado. Un polinomio con un solo término se denomina monomio. Si tiene dos términos se denomina binomio.

Ejemplo. Polinomios.

Polinomio con variable a

$3a - 42a^3 + 5a - 2a + 2$, cuyos términos son: $3a$, $42a^3$, $5a$, $-2a$, $+2$.

Polinomio con variable b

$5b - 56b^2 + b - 17$, cuyos términos son: $5b$, $-56b^2$, $+b$, -17.

Los polinomios pueden designarse mediante una letra. De este modo se evita escribir todos los términos de un polinomio cada vez que quiere hacerse referencia a este. Esta letra va seguida de la variable, entre paréntesis, del polinomio. Estos paréntesis no tienen que confundirse con los paréntesis que contienen operaciones.

Ejemplo. Nomenclatura.

Denominar $p(x)$ al polinomio $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$, significa que

$$p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$$

donde p representa el nombre del polinomio, y x entre paréntesis indica la variable del polinomio.

Esta asignación permite referirnos al polinomio $p(x)$ sin necesidad de escribir todos los términos que lo definen.

Cabe decir que la variable más usada para expresar polinomios es la x. Se trata de una costumbre, por lo que no tiene que considerarse una obligación.

4.1.2. Elementos y características de un polinomio

Como ya se ha dicho, por **término de un polinomio** se entienden los diferentes elementos de un polinomio (así como de cualquier expresión algebraica) que son producto de un coeficiente y una potencia de la variable.

Los tipos de polinomios se distinguen según el número de términos que presentan. En particular:

- Un polinomio con un solo término se denomina **monomio**.
- Un polinomio con dos términos se denomina **binomio**.
- Un polinomio con tres términos se denomina **trinomio**.

Ejemplo. Tipos de polinomios.

Monomios de variable b: $-13b^4$, $5b^{23}$, $-7b^2$

Binomios de variable c: $3c^3 - 5c$

Trinomios de variable d: $3d^4 + 2d^2 - 5$

Los polinomios y sus términos presentan características que es preciso distinguir. Estas características son las siguientes:

- El **grado de un término** es el exponente de la variable de este término.
- El **grado del polinomio** es el grado del término de grado máximo. Así, hay polinomios de grado 0, de grado 1 o de primer grado, de grado 2 o de segundo grado, etc. Generalmente, los términos de un polinomio se escriben de izquierda a derecha de mayor a menor grado.
- El **término independiente** es el término de grado 0 y, por lo tanto, no aparece en la variable.

- El **coeficiente de un término** es el número que multiplica la variable en este término. El resto del término se denomina **parte literal**.

Ejemplo. Características de un polinomio.
Sea el polinomio $p(x) = 9x^6 - 3x^4 + x - 6$.

- El término de grado 6 es $9x^6$, el término de grado 4 es $-3x^4$, el término de grado 1 es x, y el término independiente es -6. Los términos correspondientes a los grados que no aparecen son iguales a 0.
- El grado del polinomio es, por lo tanto, 6.
- El coeficiente del término de grado 6 es 9, y su parte literal es x^6.
- El coeficiente del término de grado 4 (o, para abreviar, coeficiente de grado 4) es -3, y su parte literal es x^4.
- El coeficiente de grado 1 es 1, y su parte literal es x.
- Los coeficientes de los otros términos son 0.

4.1.3. Valor numérico de un polinomio

El **valor numérico** de un polinomio es el valor que se obtiene al sustituir la variable por un número determinado. Así, dado el polinomio $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$,al sustituir la x por 1, su valor numérico es

$$p(1) = 5 \cdot 13 - 4 \cdot 12 + 5 \cdot 1 - 1 = 5$$

Diremos, pues, que el valor numérico del polinomio $p(x)$, cuando x es igual a 1, es 5. Matemáticamente, y de manera abreviada, se escribe $p(1) = 5$.
Dado un polinomio, podemos calcular diferentes valores numéricos.

Ejemplo. Valores numéricos de un polinomio.
Sea $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$:

- $p(0) = 5 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 1 = -1$. Por lo tanto, -1 es el valor numérico de $p(x)$ cuando x es 0.
- $p(-1) = 5 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 1 = -15$. Por lo tanto, -15 es el valor numérico de $p(x)$ cuando x es -1.

4.2. Operaciones y propiedades básicas

4.2.1. Operaciones básicas entre monomios

Es importante saber cómo se hacen las operaciones entre monomios porque sirven de base para entender las operaciones entre polinomios. Veamos pues, cómo se operan los monomios.

Operaciones entre monomios

$$3x^4 + (2x) = 3x^4 + 2x$$
$$5x^3 - \left(2x^3\right) = 3x^3$$
$$4x^3 \cdot \left(-5x^2\right) = -20x^5$$
$$\frac{8x^4}{2x^3} = 4x$$

$\boxed{\text{Suma y resta}}$ La suma (o resta) de dos monomios de grado diferente es un binomio en el que los dos únicos términos son exactamente estos dos monomios. Por ejemplo, la suma de los monomios $3x^4$ y $2x$, que se representa por $\left(3x^4\right) + (2x)$, es igual al binomio $3x^4 + 2x$.
La suma (o resta) de dos monomios del mismo grado es otro monomio con idéntico grado, y con coeficiente igual a la suma (o resta) de los coeficientes de estos monomios. Por ejemplo, la resta de $5x^3$ y $2x^3$, que se representa por $\left(5x^3\right) - \left(2x^3\right)$, es igual al monomio $3x^3$.

$\boxed{\text{Producto}}$ El producto de dos monomios es otro monomio. Su coeficiente es el producto de los coeficientes de los monomios que se multiplican, y su grado es la suma de grados de los monomios iniciales. Por ejemplo, el producto de los monomios $4x^3$ y $-5x^2$, que se representa por $\left(4x^3\right) \cdot \left(-5x^2\right)$, es $-20x^5$, puesto que $4 \cdot (-5) = -20$ y $x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$.

$\boxed{\text{Cociente}}$ El cociente de dos monomios es otro monomio. Su coeficiente es el cociente de los coeficientes de los monomios que se dividen, y su grado es la diferencia de grados de estos dos monomios. En este caso, el grado del numerador no puede ser inferior al grado del denominador. Por ejemplo, el cociente de los monomios $8x^4$ y $2x^3$, que se representa por $\dfrac{8x^4}{2x^3}$, es el monomio $4x$, puesto que $\dfrac{8}{2} = 4$ y $\dfrac{x^4}{x^3} = x^{4-3} = x^1$.

4.2.2. Operaciones básicas entre polinomios

Visto como se operan los monomios, estudiemos las operaciones básicas entre polinomios.

¿Cómo se suman (o restan) dos polinomios?
La suma (o resta) de dos polinomios es igual al polinomio resultante de la suma (o resta) de los términos del mismo grado. Los términos del mismo grado se pueden colocar en columna, se suman los coeficientes de cada término y se coloca el resultado debajo de los dos polinomios, separado por una línea horizontal.

$\boxed{\text{Suma y resta de polinomios}}$ La suma (o resta) de dos polinomios es igual al polinomio resultante de la suma (o resta) de los términos que tienen el mismo grado. Cada término resultante corresponde a la suma de los términos del mismo grado de los polinomios que se suman (o restan). De acuerdo con la suma (o resta) de monomios, se trata, pues, de sumar los coeficientes de los términos del mismo grado y mantener el orden de estos términos.

Por ejemplo, para sumar $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ y $5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x + 16$, se tienen que sumar los coeficientes de los términos de grado 4 con los de grado 4, los coeficientes de grado 3 con los de grado 3, y así para cada término. El polinomio suma será la suma de las sumas de cada uno de estos elementos de mismo grado. Nos ayudamos de una tabla para verlo más claro.

Términos	1$^{\text{er}}$ polinomio	2$^{\text{o}}$ polinomio	polinomio suma
grado 4	0	$5x^4$	$0 + 5x^4 = \boxed{5x^4}$
grado 3	$2x^3$	$-2x^3$	$2x^3 - 2x^3 = \boxed{0x^3}$
grado 2	$-3x^2$	$-5x^2$	$-3x^2 - 5x^2 = \boxed{-8x^2}$
grado 1	$4x$	$-3x$	$4x - 3x = \boxed{x}$
grado 0	-6	16	$-6 + 16 = \boxed{10}$

Por lo tanto, el polinomio suma es

$$\left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 6\right) + \left(5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x + 16\right) = 5x^4 - 8x^2 + x + 10$$

Habitualmente, y especialmente por comodidad, una suma entre polinomios se expresa escribiendo los polinomios uno encima del otro, poniendo en columna los elementos del mismo grado y el resultado a continuación de una línea horizontal debajo de la columna del grado correspondiente.

Ejemplo. Suma de polinomios.

$$\left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 6\right) + \left(5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x + 16\right)$$

$$\begin{array}{cccccc} & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\ + & 5x^4 & -2x^3 & -5x^2 & -3x & +16 \\ \hline & 5x^4 & & -8x^2 & +x & +10 \end{array}$$

Para restar dos polinomios, se procede como en el caso de la suma pero restando término a término siempre del mismo grado.

$$\begin{array}{cccccc} & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\ - & (5x^4 & -2x^3 & -5x^2 & -3x & +16) \\ \hline & -5x^4 & +4x^3 & +2x^2 & +7x & -22 \end{array}$$

Para evitar errores a la hora de restar, es recomendable cambiar, antes de restar, el signo de cada uno de los términos del segundo polinomio por su opuesto, y después sumar.

$$\begin{array}{cccccc} & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\ + & -5x^4 & +2x^3 & +5x^2 & +3x & -16 \\ \hline & -5x^4 & +4x^3 & +2x^2 & +7x & -22 \end{array}$$

En cualquier caso, el resultado de la resta de estos dos polinomios es siempre la misma.

Ejemplo. Resta de dos polinomios.
$\left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 6\right) - \left(5x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 3x + 16\right) = -5x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 7x - 22$

$\boxed{\text{Producto de polinomios}}$ La multiplicación de dos polinomios es igual a la suma de todos los productos de cada uno de los términos del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio. Normalmente, el número de operaciones que se tienen que hacer es enorme. Por eso, es conveniente hacer la multiplicación de manera ordenada.

Para ser más precisos, los pasos que tienen que seguirse son los siguientes:

¿Cómo se multiplican dos polinomios? La multiplicación de dos polinomios es igual a la suma de todos los productos de cada uno de los términos del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio. Al hacer el producto es conveniente que todos los términos del mismo grado queden en una misma columna.

1) Se sitúan los dos polinomios en columna, uno sobre el otro, y se multiplica cada término del segundo polinomio por cada uno de los términos del primer polinomio.
2) El resultado del paso anterior se pone en la fila siguiente, debajo de una línea horizontal. Como en el caso de la suma, es recomendable que todos los términos del mismo grado queden en una misma columna.
3) Finalmente, se suman los términos de cada columna.

Para entender cómo se desarrolla este proceso, va bien analizar primeramente el caso de multiplicar un polinomio por un monomio. En este caso, se multiplica el monomio por cada término del polinomio y se suman los términos producto obtenidos. Lo podemos ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Producto de polinomio por monomio.

$$\left(7x^4 - 5x^2 + 3x - 8\right) \cdot \left(2x^3\right)$$

$$\begin{array}{lrrrr}
 & 7x^4 & -5x^2 & +3x & -8 \\
\cdot & & & & 2x^3 \\
\hline
 & 14x^7 & -10x^5 & +6x^4 & -16x^3
\end{array}$$

Tal como se observa en el ejemplo, es conveniente dejar un vacío donde falten términos.

Para hacer el producto de dos polinomios cualesquiera, tiene que repetirse lo que se ha hecho en el caso anterior con cada uno de los términos del polinomio que multiplica, sumando al final los resultados por cada uno de los grados del polinomio.

Estudiemos los pasos a seguir con la ayuda de un ejemplo, en este caso el producto del polinomio $2x^4 - 7x^3 + 5x - 8$ por el polinomio $x^2 - 7x + 2$.

1) En primer lugar, colocamos un polinomio sobre otro situando los términos de mismo grado en una misma columna.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 2x^4 & -7x^3 & & +5x & -8 \\
\cdot & & & x^2 & -7x & +2 \\
\hline
\end{array}$$

2) A continuación, empezamos a multiplicar el primer polinomio por el elemento de grado menor del segundo polinomio (+2 en este caso) y colocamos los resultados de cada término debajo de la columna de los términos del mismo grado:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 2x^4 & -7x^3 & & +5x & -8 \\
\cdot & & & x^2 & -7x & +2 \\
\hline
 & 4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16
\end{array}$$

3) Acabada y ordenada esta primera multiplicación, seguimos multiplicando los términos del primer polinomio por el segundo término más pequeño del segundo polinomio ($-7x$ en este caso) y, como antes, colocamos los resultados en la línea siguiente de forma que los términos de igual grado estén en columna.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & 2x^4 & -7x^3 & & +5x & -8 \\
\cdot & & & x^2 & -7x & +2 \\
\hline
 & 4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16 \\
-14x^5 & +49x^4 & & -35x^2 & +56x &
\end{array}$$

4) Seguimos haciendo lo mismo con el resto de los elementos del primer polinomio.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 2x^4 & -7x^3 & & +5x & -8 \\
\cdot & & & & x^2 & -7x & +2 \\
\hline
 & & 4x^4 & -14x^3 & & +10x & -16 \\
 & -14x^5 & +49x^4 & & -35x^2 & +56x & \\
2x^6 & -7x^5 & & +5x^3 & -8x^2 & &
\end{array}$$

5) Finalmente, sumamos término a término los resultados obtenidos.

Ejemplo. Producto de dos polinomios.

$$\left(2x^4 - 7x^3 + 5x - 8\right) \cdot \left(x^2 - 7x + 2\right)$$

		$2x^4$	$-7x^3$		$+5x$	-8
	$\cdot$			x^2	$-7x$	$+2$
		$4x^4$	$-14x^3$		$+10x$	-16
	$-14x^5$	$+49x^4$		$-35x^2$	$+56x$	
$2x^6$	$-7x^5$		$+5x^3$	$-8x^2$		
$2x^6$	$-21x^5$	$+53x^4$	$-9x^3$	$-43x^2$	$+66x$	-16

Cociente de polinomios El algoritmo de la división entre polinomios es un proceso muy parecido a la división entre números, con el cambio de las cifras de un número por los términos de un polinomio. De acuerdo con esta similitud, para dividir dos polinomios se tiene que empezar dividiendo el término de mayor grado del polinomio dividendo entre el término de mayor grado del polinomio divisor. El resultado se sitúa en el lugar del cociente. A continuación, se multiplica este término del cociente por el divisor y este producto se resta del dividendo.

¿Cómo se dividen dos polinomios?
De manera similar a la división entre números, para dividir dos polinomios se tiene que empezar dividiendo el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor. El resultado se sitúa en el lugar del cociente, se multiplica este término del cociente por el divisor y se resta este producto del dividendo. Y así sucesivamente con el resto de los términos del dividendo hasta llegar a su término independiente.

Veámoslo con un ejemplo: dividimos el polinomio $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48$ entre el polinomio $2x^2 - 3x + 4$

1) El primer paso consiste en dividir el término de mayor grado del dividendo, $6x^4$ en este caso, entre el término de mayor grado del divisor, $2x^2$, de forma que queda una división entre monomios.

$$\frac{6x^4}{2x^2} = 3x^{4-2} = 3x^2$$

2) A continuación, se multiplica el divisor por el monomio obtenido,

$$\left(2x^2 - 3x + 4\right) \cdot 3x^2 = 6x^4 - 9x^3 + 12x^2$$

y se resta del dividendo. De acuerdo con este proceso, se escribe

$$\begin{array}{llll|l}
6x^4 & -27x^3 & +15x^2 & -48 & 2x^2 - 3x + 4 \\ \cline{5-5}
-6x^4 & +9x^3 & -12x^2 & & 3x^2 \\ \cline{1-3}
0 & -18x^3 & +3x^2 & &
\end{array}$$

3) Hecha la resta, se baja el término siguiente del dividendo, en este caso 0 (dado que no hay término de primer grado), y se divide, siguiendo el procedimiento anterior, entre lo que ha quedado como dividendo y el divisor.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -27x^3 & +15x^2 & & -48 & 2x^2-3x+4 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & +9x^3 & -12x^2 & & & 3x^2-9x \\ \cline{1-3}
0 & -18x^3 & +3x^2 & & & \\
 & +18x^3 & -27x^2 & +36x & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & -24x^2 & +36x & -48 &
\end{array}
$$

4) Se sigue este procedimiento sucesivamente hasta bajar el último elemento del polinomio dividendo. En el caso del ejemplo, la división completa se escribiría de la manera siguiente:

Ejemplo. Cociente de polinomios con resto 0:

$$\left(6x^4-27x^3+15x^2-48\right)\div\left(2x^2-3x+4\right)$$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -27x^3 & +15x^2 & & -48 & 2x^2-3x+4 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & +9x^3 & -12x^2 & & & 3x^2-9x-12 \\ \cline{1-3}
0 & -18x^3 & +3x^2 & (0x) & & \\
 & +18x^3 & -27x^2 & +36x & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & -24x^2 & +36x & -48 & \\
 & & +24x^2 & -36x & +48 & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

En este caso, diremos que la división es exacta porque el residuo es 0. Si el residuo es 0, se cumple

$$\frac{6x^4-27x^3+15x^2-48}{2x^2-3x+4}=3x^2-9x-12$$

En casos como este, cuando el residuo de la división es 0, se dice que el polinomio dividendo, en este caso $6x^4-27x^3+15x^2-48$, es divisible entre el polinomio divisor, $2x^2-3x+4$ en este caso, y, de forma equivalente, que el polinomio dividendo, $2x^2-3x+4$, es múltiple del polinomio divisor, $6x^4-27x^3+15x^2-48$.

Otra manera de expresarlo es decir que el polinomio dividendo, $6x^4-27x^3+15x^2-48$, se descompone en los polinomios divisor, $2x^2-3x+4$, y cociente, $3x^2-9x-12$. Esto significa que el polinomio dividendo, $6x^4-27x^3+15x^2-48$, es producto de los polinomios divisor, $2x^2-3x+4$, y cociente, $3x^2-9x-12$, de la división. En definitiva,

$$6x^4-27x^3+15x^2-48=\left(2x^2-3x+4\right)\cdot\left(3x^2-9x-12\right)$$

Tal como ocurre también en las divisiones entre expresiones numéricas, es posible que el residuo de un cociente entre polinomios no sea 0, como por ejemplo al dividir el polinomio $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 + 3x - 48$ entre el polinomio $2x^2 - 3x + 4$

Ejemplo. Cociente de polinomios con resto diferente de 0.

$$(6x^4 - 27x^3 + 15x^2 + 3x - 48) \div (2x^2 - 3x + 4)$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -27x^3 & +15x^2 & +3x & -48 & 2x^2 - 3x + 4 \\ \cline{6-6}
-6x^4 & +9x^3 & -12x^2 & & & 3x^2 - 9x - 12 \\ \cline{1-3}
0 & -18x^3 & +3x^2 & +3x & & \\
 & +18x^3 & -27x^2 & +36x & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & -24x^2 & +39x & -48 & \\
 & & +24x^2 & -36x & +48 & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & +3x & 0 &
\end{array}$$

En este segundo ejemplo, el polinomio dividendo no es múltiple del polinomio divisor.

En casos en que el polinomio dividendo no es múltiple del polinomio divisor, hecha la división, también puede expresarse la descomposición del polinomio dividendo como el producto de los polinomios divisor y cociente, más el polinomio residuo, del mismo modo que se hace con las expresiones numéricas. Es decir, que la fórmula aprendida en la división de números, en la que el dividendo (D) es igual al divisor (d) por el cociente más el residuo (r), también se aplica a la división de polinomios.

$$\boxed{D = d \cdot q + r}$$

Así, en el ejemplo, visto que el dividendo es $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 + 3x - 48$, el divisor es $2x^2 - 3x + 4$, el cociente es $3x^2 - 9x - 12$ y el resto es $3x$, resulta

$$6x^4 - 27x^3 + 15x^2 + 3x - 48 = \left(2x^2 - 3x + 4\right) \cdot \left(3x^2 - 9x - 12\right) + 3x$$

Fracciones algebraicas Una **fracción algebraica** es simplemente una fracción entre polinomios.

¿Qué es una fracción algebraica? Es una fracción entre polinomios. Las fracciones algebraicas pueden simplificarse y operarse (con suma, resta, multiplicación y división). Se define el término de las fracciones algebraicas equivalentes de manera similar a las fracciones numéricas.

Del mismo modo que se han definido fracciones numéricas equivalentes, también se pueden definir las **fracciones algebraicas equivalentes**. Concretamente,

si $a(x)$, $b(x)$, $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, diremos que las fracciones algebraicas $\dfrac{a(x)}{b(x)}$ y $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ son equivalentes si el producto cruzado entre numeradores y denominadores es igual. Es decir,

$$\boxed{\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ si } a(x)\cdot q(x) = b(x)\cdot p(x)}$$

Ejemplo. Fracciones algebraicas equivalentes.

$$\frac{2x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6} = \frac{2x^2 - 2}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$$

porque

$$\left(2x^3 - 4x^2 - 2x + 4\right)\cdot\left(x^3 + 3x^2 + x + 3\right) = \left(x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6\right)\cdot\left(2x^2 - 2\right)$$
$$= 2x^6 + 2x^5 - 12x^4 - 2x^2 - 2x + 12$$

Como en el caso de los números fraccionarios, las fracciones algebraicas verifican estas propiedades:

- Al multiplicar numerador y denominador por un mismo polinomio, la fracción resultante es equivalente a la inicial.
- Al dividir de manera exacta numerador y denominador por un mismo polinomio, la fracción resultante es equivalente a la inicial. Este proceso se denomina simplificación.

Ejemplo. Simplificar fracciones algebraicas.
Dada la fracción algebraica

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^2 + x - 6}$$

notamos que numerador y denominador se pueden descomponer como producto de otros polinomios de menor grado.

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x-2)\cdot\left(x^2 + 4\right)$$
$$x^2 + x - 6 = (x-2)\cdot(x+3)$$

Como que numerador y denominador tienen factores comunes, $(x-2)$, resulta

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^2 + x - 6} = \frac{(x-2)\cdot\left(x^2+4\right)}{(x-2)\cdot(x+3)} = \frac{x^2+4}{x+3}$$

Las fracciones algebraicas también pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse. Los procedimientos son los mismos que en el caso de las fracciones numéricas:

- **Producto y cociente de fracciones algebraicas.** Para hacer la multiplicación y división de fracciones algebraicas se siguen las mismas reglas que para multiplicar y dividir fracciones numéricas.
  La fracción producto es aquella que tiene como numerador el producto de numeradores y como denominador el producto de denominadores, es decir, aquella en la que se multiplican linealmente numeradores y denominadores.

La fracción cociente es aquella que como numerador tiene el producto del primero numerador por el segundo denominador, y como denominador el producto del primer denominador por el segundo numerador, es decir, aquella en la que se multiplican numeradores y denominadores en cruz.

Ejemplo. Producto y cociente de fracciones algebraicas.

Producto

$$\frac{3x-2}{2x^2+3}\cdot\frac{7x+1}{2x+2}=\frac{(3x-2)\cdot(7x+1)}{(2x^2+3)\cdot(2x+2)}=\frac{21x^2-11x-2}{4x^3+4x^2+6x+6}$$

Cociente

$$\frac{3x-2}{2x^2+3}:\frac{7x+1}{2x+2}=\frac{(3x-2)\cdot(2x+2)}{(2x^2+3)\cdot(7x+1)}=\frac{6x^2+2x-4}{14x^3+2x^2+21x+3}$$

- **Suma y resta de fracciones algebraicas.** Para sumar (o restar) dos fracciones algebraicas, se sigue el mismo procedimiento que para sumar (o restar) fracciones numéricas. Por eso conviene diferenciar si tienen el mismo denominador o no.

  ◦ Si las fracciones algebraicas tienen el mismo denominador, se suman (o restan) los numeradores y se deja el mismo denominador.

  Ejemplo. Resta (o suma) de fracciones algebraicas de igual denominador.

  $$\frac{3x-2}{4x^2-x+1}-\frac{2x+6}{4x^2-x+1}=\frac{(3x-2)-(2x+6)}{4x^2-x+1}=\frac{x-8}{4x^2-x+1}$$

  ◦ Si las fracciones algebraicas tienen denominador diferente, hace falta ante todo transformarlas en fracciones equivalentes con el mismo denominador, como en el caso de las fracciones numéricas. Para hacerlo, se calcula el MCM (mínimo común múltiplo) de los polinomios que son en el denominador. Una vez encontradas las fracciones equivalentes con el mismo denominador, se suman de la manera anterior: se suman (o restan) los numeradores y se deja el mismo denominador.

  Veámoslo con este ejemplo. Queremos sumar

  $$\frac{3x-4}{x^2+5x+6}+\frac{5x-2}{x^2+3x+2}$$

  1) Buscamos el MCM de los denominadores.

  $$x^2+5x+6=(x+2)\cdot(x+3)$$
  $$x^2+3x+2=(x+1)\cdot(x+2)$$

  Por lo tanto,

  $$\mathsf{mcm}\left(x^2+5x+6,x^2+3x+2\right)=(x+1)(x+2)(x+3)=x^3+6x^2+11x+6$$

  2) Una vez encontrado el MCM, reescribimos las fracciones algebraicas originales por sus equivalentes de igual denominador.

$$\frac{3x-4}{x^2+5x+6} = \frac{(3x-4)}{(x+2)(x+3)} = \frac{(3x-4)(x+1)}{(x+2)(x+3)(x+1)} = \frac{3x^2-x-4}{x^3+6x^2+11x+6}$$

$$\frac{5x-2}{x^2+3x+2} = \frac{(5x-2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{(5x-2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+1)} = \frac{5x^2+13x-6}{x^3+6x^2+11x+6}$$

3) Finalmente, sumamos los numeradores y mantenemos el denominador común

Ejemplo. Suma de fracciones algebraicas de diferente denominador.

$$\frac{3x-4}{x^2+5x+6}+\frac{5x-2}{x^2+3x+2} = \frac{3x^2-x-4}{x^3+6x^2+11x+6}+\frac{5x^2+13x-6}{x^3+6x^2+11x+6} = \frac{8x^2+12x-10}{x^3+6x^2+11x+6}$$

4.2.3. Regla de Ruffini

La regla **de Ruffini** es un procedimiento que permite hacer de manera sencilla la división entre dos polinomios cuando el divisor es un polinomio de grado 1 tal que su coeficiente de grado 1 es también 1 y el término independiente es un número entero. Esta regla utiliza solamente los coeficientes de los polinomios implicados.

¿Qué dice la regla de Ruffini? La regla de Ruffini es una manera sencilla y rápida de hacer la división entre dos polinomios cuando el divisor es un polinomio de grado 1 con coeficiente de grado 1 igual a 1 y el término independiente un número entero. Esta regla permite hacer la división utilizando únicamente los coeficientes de ambos polinomios.

El algoritmo es el siguiente:

1) En primer lugar, se sitúan los coeficientes del dividendo, de mayor a menor (y poniendo 0 si es necesario en los términos que no existan), en la parte superior. Se dibujan dos segmentos perpendiculares formando una cruz en la parte inferior de la figura y se sitúa el término independiente del divisor, cambiado de signo, entre los dos segmentos.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & -4 & 5 & -1 \\ +2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

2) Una vez colocados los coeficientes de los términos de los polinomios, se baja el primer coeficiente, se multiplica por el término independiente cambiado de signo y se sitúa el resultado bajo el coeficiente siguiente:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & -4 & 5 & -1 \\ +2 & & \underbrace{10}_{+2\cdot 5} & & \\ \hline & 5 & & & \end{array}$$

3) Se suman los dos números de la misma columna y se multiplica el resultado obtenido por el término independiente cambiado de signo.

$$\begin{array}{c|cccc} & 5 & -4 & 5 & -1 \\ +2 & & 10 & \underbrace{12}_{+2\cdot 6} & \\ \hline & 5 & 6 & & \end{array}$$

4) Procediendo del mismo modo, la división por Ruffini de $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ entre $x - 2$ se expresa de este modo:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 5 & -4 & 5 & -1 \\ +2 & & 10 & 12 & \underbrace{34}_{+2\cdot 17} \\ \hline & 5 & 6 & 17 & 33 \end{array}$$

5) Finalmente, a partir de la última fila de números, se puede extraer el cociente y el residuo. El residuo es el último número obtenido de las restas, 33 en este caso, mientras que el cociente de la división es un polinomio cuyos coeficientes son la resta de los números de esta fila, de mayor a menor grado. En este ejemplo, pues, el cociente es $5x^2 + 6x + 17$. Tal como se observa, ha bajado un grado respecto al polinomio inicial.

Con esto se concluye

$$5x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = \left(5x^2 + 6x + 17\right) \cdot (x - 2) + 33$$

4.2.4. Productos notables

En matemáticas, se utiliza el término **identidad** para hacer referencia a cualquier igualdad entre dos expresiones matemáticas (y, por lo tanto, sean numéricas o algebraicas) que se cumple para cualquier valor de sus variables.

Con el término **producto notable** se hace referencia a ciertas multiplicaciones entre expresiones algebraicas. En particular, cada producto notable corresponde a una fórmula de descomposición del producto que es producto de las propiedades entre las operaciones que intervienen.

Recordemos aquí los principales productos notables que ya vimos en el tema sobre números.

Productos notables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Productos de dos expresiones algebraicas, con variables a y b:

- **Cuadrado de una suma** $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
- **Cuadrado de una diferencia** $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
- **Suma por diferencia** $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Producto de tres expresiones algebraicas, con variables a, b y c:

- **Cubo de una suma** $(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- **Cubo de una diferencia** $(a-b)^3 = (a-b)\cdot(a-b)\cdot(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Ejemplo. Productos notables entre polinomios.

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3 + (3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$
$$\left(4x^2+5\right)\cdot\left(4x^2-5\right) = \left(4x^2\right)^2 - (5)^2 = 16x^4 - 25$$

4.3. Descomposición de polinomios

4.3.1. Teorema del residuo

Para encontrar el residuo de una división de polinomios cuando el divisor es un polinomio de grado 1 con el coeficiente de grado 1 igual a 1, se puede recurrir al valor numérico del dividendo. El teorema del residuo permite calcular este residuo, puesto que el residuo de una división de este tipo es igual al valor numérico de este polinomio cuando su variable es igual al término independiente del divisor, cambiado de signo. Esta propiedad es la que se conoce como teorema del residuo, y se expresa matemáticamente de la manera siguiente:

El valor numérico de un polinomio es el resultado de sustituir la variable del polinomio por un número. Si el valor numérico de un polinomio es 0 para cierto número, es dice que este número es una raíz (o cero) del polinomio. Un polinomio con raíces puede descomponerse en polinomios de grado menor. Todo polinomio tiene un número de raíces que no supera el grado..

Teorema del residuo. Si $p(x)$ es un polinomio y a un número real,

el residuo de la división de $p(x)$ entre $x-a$ es $p(a)$.

Esto nos dice que, por ejemplo, el residuo de la división de $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ entre $x-2$ es igual al valor numérico de $p(x)$ cuando la x es igual a 2, es decir, que el residuo es $p(2)$.

Calculamos $p(2) = 5\cdot 23 - 4\cdot 22 + 5\cdot 2 - 1 = 33$, y comprobamos, mediante Ruffini (del apartado de la regla de Ruffini), que 33 es efectivamente el residuo de la división.

Igualmente, el residuo de la división de $q(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - x - 1$ entre $x+1$ es igual al valor numérico de $q(x)$ cuando la x es igual a -1, es decir,

$$q(-1) = 3\cdot(-1)5 - 4\cdot(-1)3 + 2\cdot(-1)2 - (-1) - 1 = 3$$

De este modo, pues, es fácil encontrar si un polinomio es divisible por otro de grado 1 con coeficiente de grado 1 igual a 1: si el valor numérico del polinomio cuando x es igual al término independiente del divisor, cambiado de signo, es igual a 0, se puede asegurar que es divisible. En caso contrario no lo será.

Por ejemplo, $p(x) = x^2 - 1$ es divisible entre $x+1$, puesto que $p(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$. Es fácil comprobarlo, porque la división es exacta.

$$\frac{x^2-1}{x+1} = x-1.$$

En este caso, pues, podemos decir que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

En definitiva, observemos que el teorema del residuo ayuda a descomponer un polinomio en términos de grado 1 cuando esto es posible.

4.3.2. Raíces y descomposición de un polinomio

Se dice que un número a es una **raíz** o cero de un polinomio $p(x)$ si se cumple $p(a) = 0$, es decir, si al sustituir la variable por el valor a se anula el valor numérico del polinomio.

Ejemplo. Raíces de un polinomio.
1 y -1 son raíces (o ceros) del polinomio $p(x) = x^2 - 1$ porque el valor del polinomio es 0 al sustituir la variable x por estos valores.

$$\begin{aligned} p(1) &= 1^2 - 1 = 0 \\ p(-1) &= (-1)^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

La descomposición **de un polinomio**, de manera parecida a la descomposición de un número, es su expresión como producto de polinomios de menor grado, denominados factores. A la hora de descomponer un polinomio, lo más deseable seria obtener la descomposición como un producto de polinomios de grado 1. En caso de que esto fuera posible y que, por lo tanto, pudiera descomponerse completamente todo polinomio de grado n, $p(x)$, en factores de grado 1, tendríamos una expresión del tipo

$$p(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot ... \cdot (x - r_n)$$

donde r_1, r_2, ..., r_n son las raíces del polinomio y a un número real. Pero esto no siempre es posible. Pero de esta descomposición máxima en factores reales se deduce que un polinomio de grado n puede tener n raíces reales como máximo. Pero este hecho no puede preverse *a priori*. Asimismo, cuando los coeficientes del polinomio son enteros, no es complicado encontrar la descomposición del polinomio, ya que las únicas raíces enteras que puede tener tienen que ser valores divisores del término independiente del polinomio en cuestión.

Utilizando el teorema del residuo, es fácil observar que si a es una raíz del polinomio $p(x)$, $p(x)$ puede descomponerse de la manera siguiente:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - a)$$

donde $q(x)$ es un polinomio de un grado menor que $p(x)$.
En el ejemplo, $p(x) = x^2 - 1$, $p(x)$ se descompone en el producto de dos monomios $p(x) = (x-1)(x-(-1)) = (x-1)(x+1)$. Observemos que el polinomio tiene efectivamente un número de raíces igual a su grado como máximo.

La descomposición de un polinomio permite calcular el MCM (mínimo común múltiplo) y el MCD (máximo común divisor) de dos o más polinomios de manera parecida al cálculo del MCM y el MCD de diferentes números.

Ejemplo. Cálculo del MCM y el MCD de dos polinomios.

- $\boxed{\text{MCD}}\left(x^2-1,\, x^2-2x+1\right) = x-1$
- $\boxed{\text{MCM}}\left(x^2-1,\, x^2-2x+1\right) = (x-1)^2\,(x+1) = x^3-x^2-x+1$

ya que $x^2-1=(x-1)(x+1)$ y $x^2-2x+1=(x-1)^2$.

Por **factorización de un polinomio**, $p(x)$, se entiende el proceso de expresar este polinomio como producto de polinomios irreducibles. Se dice que un polinomio es irreducible (o primero) si sus únicos divisores son los triviales, es decir, los polinomios constantes y los que resultan de multiplicar $p(x)$ por una constante. Si no, se habla de polinomio compuesto. Así, si consideramos polinomios con coeficientes reales, los polinomios irreducibles o primeros son todos los polinomios de grado y los polinomios de segundo grado con discriminante negativo.

No hay una única manera de factorizar un polinomio. De acuerdo con su naturaleza, podemos aplicar diferentes propiedades, entre las que pueden destacarse:

- Quitar factores comunes: $6x^3-3x^2=3x^2\cdot(2x-1)$
- Aplicar productos notables: $x^2-16=(x+4)\cdot(x-4)$
- Resolver la ecuación asociada al polinomio. Por ejemplo, dado el polinomio de segundo grado, $p(x) = x^2-4x-12$, se trata de encontrar las soluciones de la ecuación de segundo grado asociada al polinomio: $x^2+4x-12=0$. Al aplicar la fórmula de la ecuación de segundo grado, se obtienen las soluciones $x=2$ y $x=-6$ de modo que las raíces del polinomio son exactamente 2 y -6. Por lo tanto, $p(x)=(x-2)\cdot(x+6)$.
- Aplicar la regla de Ruffini. Si $p(x)=x^3+2x^2-9x-18$, las posibles raíces enteras son los divisores del término independiente, en este caso 18. Efectuamos las divisiones por Ruffini y obtenemos los factores: $(x-3)$, $(x+3)$ y $(x+2)$. Por lo tanto, $p(x)=(x-3)\cdot(x+3)\cdot(x+2)$.

Resumen

Los polinomios

Definición Un polinomio es una expresión algebraica con una única letra, llamada variable.

Por ejemplo, $9x^6 - 3x^4 + x - 6$ es un polinomio de variable x.

Elementos

- **Término:** cada uno de los sumandos.
  Términos del ejemplo: $9x^6$, $-3x^4$, x, -6
- **Grado de un término:** exponente de la variable en este término.
  En el ejemplo, grado de $9x^6$*: 6, grado de* $-3x^4$*:* 4
- **Grado de un polinomio:** grado mayor del polinomio.
  En el ejemplo, grado del polinomio: 6
- **Término independiente:** el término de grado 0 (el que no tiene variable).
  En el ejemplo, término independiente: -6
- **Coeficiente de un término:** nombre que multiplica la variable.
  En el ejemplo, coeficiente de $9x^6$*:* 9*, coeficiente de* x*:* 1

Operaciones básicas

- Suma

$$\begin{array}{cccccc} & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\ + & 5x^4 & -2x^3 & -5x^2 & -3x & +16 \\ \hline & 5x^4 & & -8x^2 & +x & +10 \end{array}$$

- Resta

$$\begin{array}{cccccc} & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\ - & (5x^4 & -2x^3 & -5x^2 & -3x & +16) \\ \hline & -5x^4 & +4x^3 & +2x^2 & +7x & -22 \end{array}$$

- Producto

		$2x^4$	$-7x^3$		$+5x$	-8
	$\cdot$			x^2	$-7x$	$+2$
	$4x^4$	$-14x^3$		$+10x$	-16	
$-14x^5$	$+49x^4$		$+35x^2$	$+56x$	-16	
$2x^6$	$-7x^5$		$+5x^3$	$-8x^2$		
$2x^6$	$-21x^5$	$+53x^4$	$-9x^3$	$-43x^2$	$+66x$	-16

- Cociente

$6x^4$	$-27x^3$	$+15x^2$		-48	$2x^2-3x+4$
$-6x^4$	$+9x^3$	$-12x^2$			$3x^2-9x-12$
0	$-18x^3$	$+3x^2$			
	$+18x^3$	$-27x^2$	$+36x$		
	0	$-24x^2$	$+36x$	-48	
		$+24x^2$	$-36x$	$+48$	
		0	0	0	

Fracciones algebraicas

- Una fracción algebraica es una fracción entre polinomios.
- Equivalencia de fracciones algebraicas:

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{si} \qquad a(x)\cdot q(x) = b(x)\cdot p(x)$$

- Para sumar y restar, primeramente tienen que reducirse al mismo denominador utilizando el MCM de la descomposición de los denominadores. Si el denominador es el mismo, pueden sumarse los numeradores directamente.
- Para multiplicar y dividir, se siguen las mismas reglas que la multiplicación y división de números fraccionarios: se multiplica en línea para el producto, y se multiplica en cruz para el cociente.

Raíces y descomposición Sea $p(x)$ un polinomio cualquiera, y a un número real. Entonces, se define:

- **Valor numérico de un polinomio.** $p(a)$ es el valor numérico del polinomio $p(x)$ cuando $x = a$
  Ejemplo: si $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$, $p(1) = 5\cdot 13 - 4\cdot 12 + 5\cdot 1 - 1 = 5$. *Por lo tanto,* 5 *es el valor numérico de* $p(x)$ *en* $x = 1$ *y escribimos* $p(1) = 5$.

- **Raíz de un polinomio.** a es una raíz del polinomio $p(x)$ si $p(a) = 0$. En este caso, se verifica que $p(x) = q(x) \cdot (x - a)$, donde $q(x)$ es un polinomio de grado menor que $p(x)$.
Ejemplo: si $p(x) = x^2 - 1$, 1 *es una raíz de* $p(x)$ *porque* $p(1) = 0$. *En este caso* $p(x) = (x + 1)(x - 1)$.

- **Teorema del residuo.** El residuo del cociente entre el polinomio $p(x)$ y $x - a$ es $p(a)$.
Ejemplo: si $p(x) = x^2 - 1$, *el residuo del cociente de* $p(x)$ *entre* $x - 3$ *es* $p(3) = 8$.

- **Descomposición de un polinomio.** Proceso que consiste en expresar el polinomio en forma de producto otros polinomios de menor grado.
Ejemplo:
$$6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48 = \left(2x^2 - 3x + 4\right)\left(3x^2 - 9x - 12\right)$$
Esto significa que el polinomio $6x^4 - 27x^3 + 15x^2 - 48$ *se descompone en el producto de los polinomios* $2x^2 - 3x + 4$ *y* $3x^2 - 9x - 12$.

- **Regla de Ruffini.** Algoritmo que permite dividir un polinomio entre otro de grado 1 con coeficiente de grado 1 igual a 1. Es útil para descomponer polinomios.
Ejemplo, dividir $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ *entre* $x - 2$*:*

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 5 & -4 & 5 & -1 \\ +2 & & 10 & 12 & 34 \\ \hline & 5 & 6 & 17 & 33 \end{array}$$

Resultado: $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = \left(5x^2 + 6x + 17\right)(x - 2) + 33$.

Ejercicios resueltos

1. **¿Qué valor numérico toma el polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 8x - 24$ cuando $x = -2$? ¿Y qué valor numérico toma cuando $x = 3$? ¿Este polinomio es divisible por $x+2$? ¿Y por $x-3$? Razona la respuesta.**

Solución:

Para encontrar el valor numérico de un polinomio, hay que sustituir la variable del polinomio por el valor que queremos que tome esta. Así:

- Si $x = -2$ $\quad p(-2) = (-2)^3 - 3\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) - 24 = -8 - 12 - 16 - 24 = -60$
- Si $x = 3$ $\quad p(3) = (3)^3 - 3\cdot(3)^2 + 8\cdot(3) - 24 = 27 - 27 + 24 - 24 = 0$

Por el teorema del residuo, sabemos que si es un polinomio y un número real, el residuo de la división de $p(x)$ entre $x - a$ es $p(a)$. Por lo tanto, por los cálculos anteriores, sabemos que

- $p(-2) = -60$ es el residuo de la división $p(x)$ entre $x + 2$
- $p(3) = 0$ es el residuo de la división $p(x)$ entre $x - 3$

Por otro lado, se dice que un polinomio es divisible por un segundo polinomio cuando, al dividir este primer polinomio entre el segundo, el residuo es 0. Por lo tanto, visto cuál es el residuo en cada caso, podemos afirmar que el polinomio $x^3 - 3x^2 + 8x - 24$ es divisible por $x - 3$ pero que no es divisible por $x + 2$.

2. **Calcula el valor de m para que los cocientes tengan residuo 0:**

(a) $(x^3 - 4x^2 - 19x + m) \div (x - 7)$

(b) $(mx^4 - 6x^3 - 5x^2 + 19x - 12) \div (x - 3)$

Solución:

Para estudiar los residuos de estos cocientes, podemos aplicar el algoritmo de la división entre polinomios. Sin embargo, teniendo en cuenta que los polinomios cocientes son polinomios de grado 1, con coeficiente de grado 1 igual a 1, podemos estudiar los residuos obtenidos aplicando también el método de Ruffini. Estudiemos, pues, el primer caso aplicando el método de Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & +1 & -4 & -19 & m \\ +7 & & +7 & +21 & +14 \\ \hline & +1 & +3 & +2 & 14+m \end{array}$$

y puesto que queremos que $14 + m = 0 \Leftrightarrow m = -14$
Por lo tanto, el residuo de $(x^3 - 4x^2 - 19x + m) \div (x - 7)$ será 0 cuando $m = -14$.

Por el teorema del residuo, sabemos que si $p(x)$ es un polinomio y a un número real, el residuo de la división de $p(x)$ entre $x-a$ es $p(a)$. Aplicamos, pues, este teorema para estudiar el residuo del segundo cociente, donde $p(x) = mx^4 - 6x^3 - 5x^2 + 19x - 12$ y $x - a = x - 3$, es decir, con $a = 3$

$$p(3) = m\cdot(3)^4 - 6\cdot(3)^3 - 5\cdot(3)^2 + 19\cdot(3) - 12 = 81m - 162 - 45 + 57 - 12 = 81m - 162$$

y puesto que queremos que $81m - 162 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{162}{81} = 2$
Por lo tanto, el residuo de $p(x)$ entre $x - 3$ será 0 cuando $m = 2$.

3. **Encuentra el MCM y el MCD de los polinomios $p(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 13x + 10$ y $q(x) = x^2 + 6x + 5$.**

Solución:

Para poder determinar el MCM y el MCD de dos polinomios es preciso, en primer lugar, encontrar la factorización.
Factorizamos el primer polinomio, $p(x)$ mediante la regla de Ruffini. Para ello, estudiaremos primero cuáles son los divisores de su término independiente, puesto que serán los candidatos a ser las raíces. Los divisores de 10 son $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$. Encontrados los divisores, aplicamos Ruffini hasta llegar a un polinomio irreducible.

	+1	+5	−3	−13	+10
+1		+1	+6	+36	-10
	+1	+6	+3	−10	0
+1		+1	+7	+10	
	+1	+7	+10	0	
-2		−2	−10		
	+1	+5	0		
-5		−5			
	+1	0			

A partir de Ruffini concluimos que el polinomio $p(x)$ tiene cuatro raíces reales, una de las cuales es doble. Estas son la doble raíz +1, y las raíces simples −2 y −5. Por lo tanto, la factorización del polinomio es

$$x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 13x + 10 = 1 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x+5)$$

Para factorizar el segundo polinomio, $q(x)$ consideraremos la ecuación de segundo grado asociada a él, $x^2 + 6x + 5 = 0$ y la resolveremos aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado.

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 4}{2} = -3 \pm 2 = \{-5, -1\}$$

Encontradas las soluciones de la ecuación asociada, podemos afirmar que las raíces del polinomio $q(x)$ son −5 y −1 y que factoriza, por lo tanto, $q(x)$ en

$$x^2 + 6x + 5 = (x+1) \cdot (x+5)$$

Encontrada la factorización de los dos polinomios, podemos calcular rápidamente su MCM y su MCD de acuerdo con la definición de MCM y MCD.

- $\text{MCD}\big(x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 13x + 10,\ x^2 + 6x + 5\big) = x + 5$
- $\text{MCM}\big(x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 13x + 10,\ x^2 + 6x + 5\big) = (x+5)(x-1)^2(x+2)(x+1)$

4. **Determina para qué valor o valores de m puede simplificarse la siguiente fracción algebraica:**

$$\frac{x^3 - 5x^2 + mx - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

Solución: Para poder simplificar una expresión algebraica, hace falta que el numerador y el denominador de la fracción tengan factores comunes. Por lo tanto, conviene estudiar la factorización de los dos polinomios. En este caso, dado que el polinomio denominador no depende de m, nos interesa empezar por su factorización. Al tratarse de un polinomio de segundo grado, encontraremos su factorización resolviendo la ecuación de segundo grado asociada a él:

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado aplicando la fórmula conocida.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 = \{-1, 3\}$$

Resuelta la ecuación, vemos que el polinomio denominador tiene dos raíces reales diferentes −1 y 3 y que, por lo tanto, factoriza en $(x+1) \cdot (x-3)$.

Para poder simplificar la fracción algebraica, será preciso que el numerador también factoricen en alguno de estos factores, lo que implica que $x = -1$ o $x = 3$ son raíces del polinomio numerador.

Por el teorema del residuo, sabemos que si $p(x)$ es un polinomio y a un número real, el residuo de la división de $p(x)$ entre $x - a$ es $p(a)$. Por otro lado, también sabemos que si el valor numérico de un polinomio es 0 para un cierto número, se dice que este número es una raíz (o cero) del polinomio.

Por lo tanto, se trata de ver por qué valores de m las raíces del polinomio denominador son también raíces del polinomio numerador. Para ello, calcularemos el valor numérico del polinomio numerador en las raíces del polinomio denominador para intentar encontrar por qué m se anula el valor numérico encontrado:

- si $x = -1$ $\quad (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) - 3 = -1 - 5 - m - 3 = -m - 9$ y $-9 - m = 0 \Leftrightarrow m = -9$
- si $x = +3$ $\quad (+3)^3 - 5 \cdot (+3)^2 + m \cdot (+3) - 3 = 27 - 45 + 3m - 3 = 3m - 21$ y $3m - 21 = \Leftrightarrow m = +7$

Por lo tanto, la fracción algebraica dada podrá simplificarse cuando $m = -9$ o $m = 7$.

Ejercicios para practicar con las soluciones

5. **Encuentra el cociente y el residuo de las siguientes divisiones siguientes:**
(a) $(x^3 + 5x^2 - 8) \div (x^2 + 4)$
(b) $(x^5 - x^3 - x) \div (x^3 + 2x)$
(c) $(x^7 + 5x^6 - 3x^4 + 15x^3 + 7x^2 - 10x) \div (x^4 + 3x)$
(d) $(2x^5 - 12x^4 - 3x^3 + 34x^2 - 19) \div (2x^2 - 3)$

6. **Utiliza la regla de Ruffini para encontrar el cociente y el residuo de las siguientes divisiones:**
(a) $(x^5 + 3x - 4) \div (x + 2)$
(b) $(x^4 - 6x) \div (x - 3)$
(c) $(x^7 - 2x^5 + x^3) \div (x - 2)$
(d) $(x^4 + 6x^3 - 2x - 5) \div (x - 1)$

7. **Deduce (sin hacerlas y sin aplicar la regla de Ruffini) el residuo de las siguientes divisiones:**
(a) $(x^4 - x^3 - x^2 + 3) \div (x - 2)$
(b) $(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1) \div (x - 1)$
(c) $(x^3 - 6x^2 + 3x + 2) \div (x - 5)$
(d) $(x^3 - 2x + 4) \div (x + 3)$
(e) ¿Qué has usado para encontrar estos residuos?

Soluciones:

5. (a) $q(x) = x + 5$ y $r(x) = -4x - 28$
(b) $q(x) = x^2 - 3$ y $r(x) = 5x$
(c) $q(x) = x^3 + 5x^2 - 6$ y $r(x) = 7x^2 + 8x$
(d) $q(x) = x^3 - 6x^2 + 8$ y $r(x) = 5$

6. (a) $q(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 19$ y $r(x) = -42$
(b) $q(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 21$ y $r(x) = 63$
(c) $q(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 18x + 36$ y $r(x) = 72$
(d) $q(x) = x^3 + 7x^2 + 7x + 5$ y $r(x) = 0$

7. (a) $r = 7$
(b) $r = 6$
(c) $r = -8$
(d) $r = -17$
(e) El teorema del residuo.