
Iniciación a las matemáticas para la ingeniería

PID_00270085

Mireia Besalú
Joana Villalonga

6. Funciones

Índice

6.1. Concepto de función	167
6.1.1. Correspondencia entre conjuntos	167
6.1.2. Aplicaciones y funciones	170
6.2. Representación de una función	171
6.2.1. Tabla de una función	171
6.2.2. Expresión de una función	172
6.2.3. Gráfica de una función	174
6.3. Operaciones entre funciones	176
6.3.1. Operaciones básicas	176
6.3.2. Composición de funciones y función inversa	177
6.4. Características de una función	178

6.1. Concepto de función

El concepto de función se estableció hacia el siglo XVIII, a pesar de que anteriormente algunos matemáticos ya trabajaban de manera intuitiva.

En la obra *Introductio in analysin infinitorum*, Leonhard Euler intentó proporcionar por primera vez una definición formal del concepto de función al afirmar:

Una función de cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera por esta cantidad variable y por números o cantidades constantes.


Tal como veremos, esta definición difiere de la actual. De hecho, siete años después de esta afirmación, en el prólogo de las *Institutiones calculi differentialis* el mismo autor ya afirmó:

Algunas cantidades dependen otras si al combinar estas aquellas también cambian. Las primeras se llaman funciones de las segundas. Esta denominación es bastante natural y comprende cada método mediante el cual una cantidad puede ser determinada por otras. Así, si x denota una cantidad variable, todas las cantidades que dependen de x en cualquier forma están determinadas por x y se denominan funciones de x .


Para poder establecer el concepto de función, es necesario recorrer primero a las relaciones que pueden establecerse entre conjuntos. Veamos en qué consisten.

6.1.1. Correspondencia entre conjuntos

Los **conjuntos** que se tratan en matemáticas suelen ser conjuntos de números, como por ejemplo los naturales, los enteros, los racionales o los reales. Los elementos de



El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) es un científico esencial en el desarrollo de las funciones, porque definió el concepto de función. Realizó un estudio sistemático de todas las funciones elementales, incluyendo las derivadas e integrales. No obstante, el concepto de función nació con las primeras relaciones observadas entre dos variables, lo que seguramente surgió al inicio de las matemáticas, en civilizaciones como la babilónica, la egipcia y la china.



Antes de Euler, el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650) mostró en sus trabajos de geometría que tenía una idea muy clara de los conceptos de variable y función. Realizó una clasificación de las curvas algebraicas según sus grados, reconociendo que los puntos de intersección de dos curvas se obtienen resolviendo simultáneamente las ecuaciones que las representan.

estos conjuntos no se pueden listar porque hay una cantidad infinita. Ahora bien, si se considera un conjunto finito de estos números, sí que pueden escribirse. En este caso, los elementos seleccionados se expresan entre claves. Es decir, los elementos de un conjunto finito pueden indicarse en una lista delimitada por claves y separados por comas.

Ejemplo. Representación de un conjunto de números

El conjunto formado por los números naturales 1, 2, 3, 4, 6 y 11 puede denominarse A.

Entonces, el conjunto puede expresarse así:

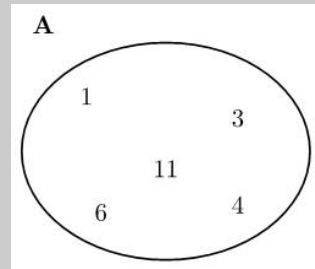
$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 11\}$$

Otra manera de expresar un conjunto de números es de manera gráfica. En este caso, se considera una forma elíptica que contiene los elementos del conjunto y se indica el nombre del conjunto en la parte exterior.

Ejemplo. Representación gráfica de un conjunto.

Denominamos A al conjunto formado por los números naturales 1, 2, 3, 4, 6 y 11.

Este conjunto puede expresarse gráficamente de este modo:

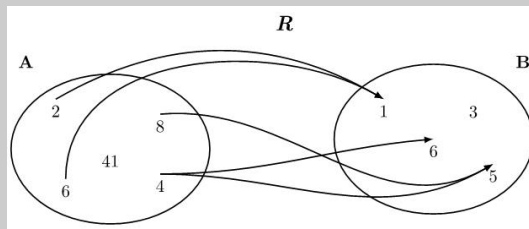


Una **correspondencia entre dos conjuntos**, A y B, es una relación entre ambos conjuntos que hace corresponder elementos del conjunto A con elementos del conjunto B. Gráficamente, este hecho puede representarse mediante flechas que tienen el origen en algún elemento del conjunto A y el final en algún elemento del conjunto B. Una flecha entre un elemento del conjunto A y un elemento del conjunto B indica que el elemento de A está relacionado con el elemento de B.

?
¿Qué es una correspondencia entre conjuntos?
Es una relación entre ambos conjuntos que hace corresponder elementos del segundo a elementos del primero. Una correspondencia puede representarse gráficamente mediante diagramas.

Ejemplo. Correspondencia entre elementos de dos conjuntos.

Sean los conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 41\}$ y $B = \{1, 3, 5, 6\}$. Podemos definir y representar una correspondencia entre A y B , que denominamos R , de la siguiente manera:



Así, la correspondencia R relaciona: el 2 del conjunto A con el 1 del conjunto B , el 8 del conjunto A con el 5 del conjunto B , el 4 del conjunto A con el 5, y el 6 del conjunto B y el 6 del conjunto A con el 1 del conjunto B .

El nombre de la correspondencia, R , se indica para evitar confusiones con otras posibles correspondencias.

De acuerdo con la notación general utilizada:

- El conjunto A se denomina **conjunto de partida**, y el conjunto B **conjunto de llegada**.
- El conjunto de todos los elementos del conjunto de partida de los cuales sale alguna flecha recibe el nombre de **dominio** de la correspondencia R y se escribe **Dom** R . En cambio, el conjunto de todos los elementos del conjunto de llegada a los cuales se dirige alguna flecha se denomina **imagen** o **recorrido** de la correspondencia R y se escribe **Im** R (o también **Rec** R).
- Dado un elemento cualquiera del dominio de una correspondencia, se denomina **imagen del elemento** el conjunto de todos los elementos de la imagen de la correspondencia que reciben una flecha de este elemento. De manera similar, se define la **antiimagen de un elemento** de la imagen de la correspondencia como el conjunto de todos los elementos del dominio de la correspondencia tales que su imagen incluye este elemento, es decir, todos los elementos de los cuales parte una flecha hacia este elemento de la imagen.

Ejemplo. Elementos de una correspondencia entre dos conjuntos.

Consideramos el ejemplo de la correspondencia anterior, R que relaciona los conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 41\}$ y $B = \{1, 3, 5, 6\}$. Entonces:

- El dominio de la correspondencia es el conjunto $\text{Dom}R = \{2, 6, 4, 8\}$ y la imagen de la correspondencia es $\text{Im}R = \{1, 5, 6\}$.
- La imagen del 2 es el conjunto $\{1\}$, la imagen del 8 es el conjunto $\{5\}$, la imagen del 4 es el conjunto $\{5, 6\}$ y la imagen del 6 es el conjunto $\{1\}$.
- La antiimagen del 1 es el conjunto $\{2, 6\}$, la del 5 es $\{4, 8\}$ y la del 6 es $\{4\}$.

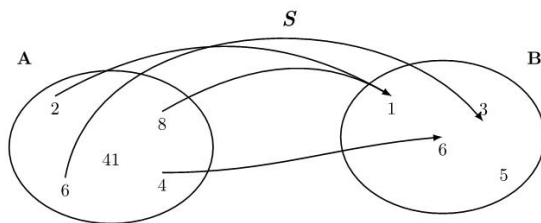
Para establecer la definición de función, es necesario estudiar un tipo muy concreto de correspondencias, aquellas en las que todos los elementos del dominio tienen un único elemento en su imagen. Esto se trata en el siguiente apartado.

6.1.2. Aplicaciones y funciones

Una **aplicación** es una correspondencia que cumple la siguiente condición:

Todos los elementos de su dominio tienen un único elemento en su imagen.

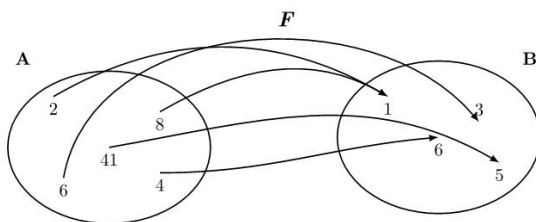
Dicho de otro modo, en la representación de una aplicación, de cualquier elemento del dominio tiene que salir una única flecha. Así, pues, en el ejemplo de la aplicación anterior R , la correspondencia no es una aplicación porque del elemento 4 salen dos flechas, lo que indica que la imagen del 4 está formada por más de un elemento. En cambio, la correspondencia S siguiente entre los mismos conjuntos sí que lo es porque en una aplicación no hay ningún elemento de A que tenga más de una imagen.



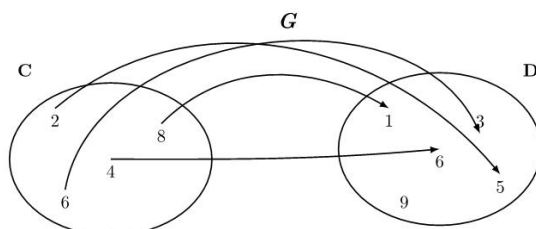
En este caso, el dominio de S es $\text{Dom}S = \{2, 4, 6, 8\}$, y la imagen de la correspondencia es $\text{Im}S = \{1, 3, 6\}$. De cualquier elemento del dominio parte una única flecha, es decir, su imagen consiste en un solo elemento y, por lo tanto, se trata de una aplicación.

Las aplicaciones pueden clasificarse de acuerdo con su imagen. Así, se dice que una aplicación es:

- **Exhaustiva**, cuando la imagen de la aplicación coincide con el conjunto de llegada. Por ejemplo, la aplicación F es exhaustiva.



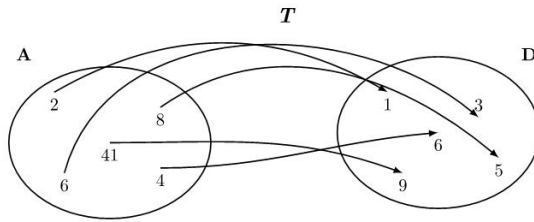
- **Inyectiva**, cuando cada elemento de la imagen de la aplicación solo tiene una única antiimagen. Por ejemplo, la aplicación G es inyectiva.



¿Qué es una aplicación?

Para que una correspondencia entre conjuntos sea una aplicación, se tiene que cumplir que todos los elementos de su dominio tengan un único elemento en su imagen. Es decir, en la representación de una aplicación, de cualquier elemento del dominio tiene que salir una única flecha.

- **Biyectiva**, cuando la aplicación es exhaustiva e inyectiva a la vez, es decir, cuando cada elemento del conjunto de llegada tiene una única antiimagen. Por ejemplo, la aplicación T es biyectiva.



Hay que remarcar que esta clasificación no abarca todas las aplicaciones. Basta con estudiar la aplicación S para darse cuenta. La aplicación S no es inyectiva, dado que el elemento 1 tiene dos antiimágenes, ni exhaustiva, puesto que el elemento 5 no pertenece a la imagen. Por lo tanto, tampoco es biyectiva.

Cuando una aplicación se define entre conjuntos numéricos, se denomina función. Muchas situaciones reales pueden explicarse como la relación entre dos magnitudes en forma de función. Por ejemplo, la temperatura en un lugar concreto y la hora del día son dos magnitudes relacionadas entre sí, puesto que en cada momento del día corresponde una temperatura concreta. Así, la temperatura es una función del tiempo. De este modo, se podrían escribir las horas de un día en un conjunto, las temperaturas en otro, y una flecha podría unir cada elemento del primer conjunto (las horas) con un único elemento del segundo conjunto (la temperatura en esta hora).

6.2. Representación de una función

La relación que se establece mediante una función puede representarse de varias maneras. Veámoslas.

6.2.1. Tabla de una función

Una manera sencilla de expresar una función consiste en poner los elementos de los conjuntos que intervienen en una **tabla de valores**. En la primera columna de la tabla suelen escribirse los valores del dominio de la función, y en la segunda columna los valores de las imágenes correspondientes, tal como se ve a continuación.

Ejemplo. Tabla de una función.

La función F definida anteriormente se puede expresar mediante esta tabla:

Dom F	Im F
2	1
4	6
6	3
8	1
41	5

¿Qué es una tabla de una función?
 Es una tabla con dos columnas. La primera contiene valores del dominio de la función y la segunda los valores correspondientes de su imagen. Cuando el dominio o la imagen son conjuntos demasiado grandes, una tabla de la función solo contiene algunos de los valores de la función.

Evidentemente, no siempre es posible construir una tabla con todos los elementos del dominio de la función, porque el dominio y la imagen pueden ser conjuntos demasiado grandes (incluso infinitos). En este caso, puede construirse una tabla con algunos valores del dominio y sus imágenes correspondientes.

Por ejemplo, consideramos la función temperatura de un lugar concreto que en cada momento de un día asocia la temperatura en este instante. Los valores posibles para los instantes de un día van desde las 0 horas hasta las 24 horas, es decir, todo el intervalo de números reales $[0, 24)$. No es posible escribir todos los instantes del día, y por eso solo se eligen algunos que sean representativos. En particular, se pueden tomar muestras de la temperatura cada minuto, o cada cierto número de minutos. Para no extendernos demasiado, la tabla del margen presenta, por ejemplo, solo las temperaturas correspondientes a cada 2 horas. Esta correspondencia es una función porque a cada instante de tiempo solo puede asociarse una única temperatura. En la tabla tampoco pueden considerarse todos los valores de la función, sino solo algunos, porque tanto el dominio como la imagen de la función contienen demasiados valores para listarlos en una tabla. En casos como estos se eligen normalmente solo algunos valores del dominio, distribuidos uniformemente por todo el dominio, tal como se muestra con el ejemplo.

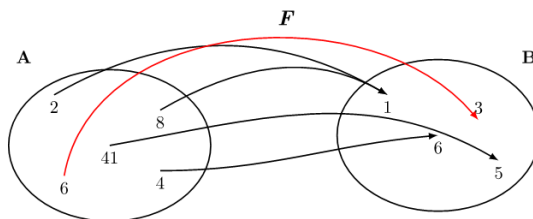
Ejemplo

Dom F	Im F
Instante (hora)	Temperatura (°C)
0:00	5
2:00	7
4:00	8
6:00	12
8:00	13
10:00	18
12:00	23
14:00	25
16:00	26
18:00	24
20:00	22
22:00	15

Tabla de una función instante-temperatura

6.2.2. Expresión de una función

La función siguiente F hace corresponder al valor 6 del dominio de la función el valor 3 de la imagen. También puede decirse que la imagen del 6 por la función F es el 3, o incluso que la función evaluada en el 6 da como resultado el 3.



Esta manera de expresarlo es larga e incómoda si queremos dar la imagen de otros valores del dominio. Para evitar este problema, se usa una forma más breve de dar la imagen de un elemento del dominio: se escribe el nombre de la función y a continuación, entre paréntesis, el valor del dominio del que se quiere calcular la imagen. Seguidamente, se escribe el signo igual y, finalmente, el valor de la imagen correspondiente.

?
¿Qué es la expresión de una función?
 Es una expresión algebraica con una variable que permite encontrar la imagen de cualquier elemento del dominio de la función. Para hacerlo, tiene que sustituirse la variable de la expresión por el valor del dominio. El valor numérico resultante de esta expresión es el valor de la imagen de este elemento del dominio.

Ejemplo. Expresión de una función. Notación.

En el caso de la función F , se escribe

$$F(6) = 3$$

y se lee “F de 6 es igual a 3”, que significa que la imagen del valor 6 del dominio es el valor 3 en el caso de la función F .

Del mismo modo, si se observa el diagrama anterior de la función F ,

- la imagen de 2 es 1; por tanto, $F(2) = 1$
- la imagen de 4 es 6; por tanto, $F(4) = 6$
- la imagen de 8 es 1; por tanto, $F(8) = 1$
- la imagen de 41 es 5; por tanto, $F(41) = 5$

En muchos casos no puede proporcionarse una lista completa de las imágenes de todos los valores del dominio de una función. Por ejemplo, en el caso de la función, llamémosla g , a cada número real hace corresponder el mismo número al cuadrado. En este caso no puede darse una lista completa porque el dominio es un conjunto infinito (todos los números reales). Algunos de estos valores tienen las imágenes siguientes:

- la imagen de 0 es $0^2 = 0$; por lo tanto, $g(0) = 0^2 \Rightarrow g(0) = 0$
- la imagen de 5 es $5^2 = 25$; por lo tanto, $g(5) = 5^2 \Rightarrow g(5) = 25$
- la imagen de -1 es $(-1)^2 = 1$; por lo tanto, $g(1) = 1^2 \Rightarrow g(-1) = 1$
- la imagen de -2 es $(-2)^2 = 4$; por lo tanto, $g(-2) = (-2)^2 \Rightarrow g(-2) = 4$

Tal como vemos, esta lista no se acaba nunca porque no es posible escribir todos los números reales. Tenemos que buscar una manera de expresar la función que pueda dar la imagen de cualquier número del dominio sin tener que escribirlos todos. Habitualmente, se da una regla algebraica que permita calcular la imagen para cualquier elemento del dominio. Por ejemplo, en el caso de la función g es $g(x) = x^2$.

Esta expresión, llamada **expresión algebraica de la función**, indica que para cualquier número del dominio, representado por la letra x , el valor de la función es igual al cuadrado de este valor. En definitiva, esto indica que, para encontrar el valor de la función para un elemento cualquiera del dominio, en la expresión algebraica de la función tiene que sustituirse el valor de la letra x por el valor del número en cuestión y hacer las operaciones que indique la expresión.

Ejemplo. Expresión algebraica de una función.

La expresión algebraica de una función es

$$g(x) = x^2$$

Entonces, el valor de la función g para el valor del dominio 4 es

$$g(4) = 4^2 = 16$$

lo que indica que la imagen del 4 por la función g es igual.

La letra que se usa para la expresión algebraica de una función recibe el nombre de variable **independiente** o, simplemente, variable. Muchas veces, los valores que toma la función se expresan con otra letra, que suele ser la y , llamada **variable dependiente**, justamente porque depende del valor de la x , la variable independiente.

6.2.3. Gráfica de una función

Si f es una función cualquiera, las parejas de números x y $f(x)$ que están en una tabla de la función pueden interpretarse como pares ordenados $(x, y) = (x, f(x))$, es decir, puntos del plan cartesiano. Esta identificación hace posible representar cualquiera de los puntos de una función.

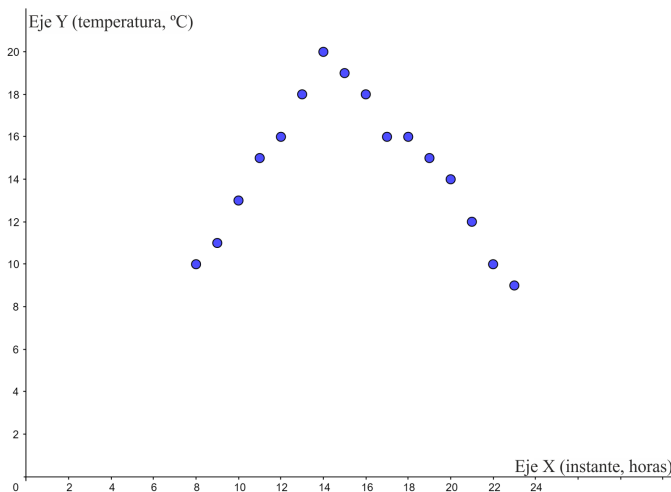
Recordad que para representar el plan cartesiano se toman dos rectas perpendiculares, que se denominan **eje X** o **eje de abscisas**, y **eje Y** o **eje de ordenadas**, y que se cruzan en el punto $(0, 0)$. Este punto recibe el nombre de **origen de coordenadas** o, simplemente, **origen**. De este modo, es posible determinar cualquier punto del plano con dos números reales ordenados, x e y . El primero recibe el nombre de coordenada x o abscisa, y el segundo el de coordenada y u ordenada del punto.

Visto como se determina un plan cartesiano, veamos con un ejemplo concreto cómo se pueden representarse cualquiera de los puntos $(x, f(x))$ de la gráfica de una función.

Supongamos que t es una función que da la temperatura de una ciudad cada hora, desde las ocho de la mañana hasta las once de la noche. La tabla de valores del margen proporciona datos relativos a esta función. De acuerdo con esta tabla, los puntos correspondientes a la función t , que tienen la forma $(x, t(x))$, se pueden expresar así:

- $(8, 10), (9, 11), (10, 13), (11, 15), (12, 16), (13, 18), (14, 20), (15, 19),$
- $(16, 18), (17, 16), (18, 16), (19, 15), (20, 14), (21, 12), (22, 10), (23, 9).$

Entonces, la representación gráfica de todos estos puntos en el plano cartesiano es la gráfica de puntos siguiente:



Observad que en este caso no se ha dibujado la parte negativa de los ejes por comodidad, ya que no hay puntos con coordenadas negativas.

¿Qué es la gráfica de una función f ?
 Es el conjunto de todos los pares de puntos (x, y) del plano cartesiano que coinciden con los valores de esta función. La coordenada x es un valor del dominio, y la coordenada $y = f(x)$, el valor correspondiente de la imagen. Para dibujar la gráfica de una función, basta con dibujar en el plano los puntos que se describen en una tabla de la función de la manera $(x, f(x))$.

!
 El sistema de coordenadas cartesianas se utiliza para poder determinar de manera inequívoca todo punto P del plano con dos números reales ordenados, x e y . El primero recibe el nombre coordenada x o abscisa, y el segundo el de coordenada y u ordenada del punto. Así se puede identificar $P(x, y)$. Los sistemas de coordenadas cartesianas se extienden de manera análoga al espacio de tres dimensiones y a espacios de dimensiones superiores.

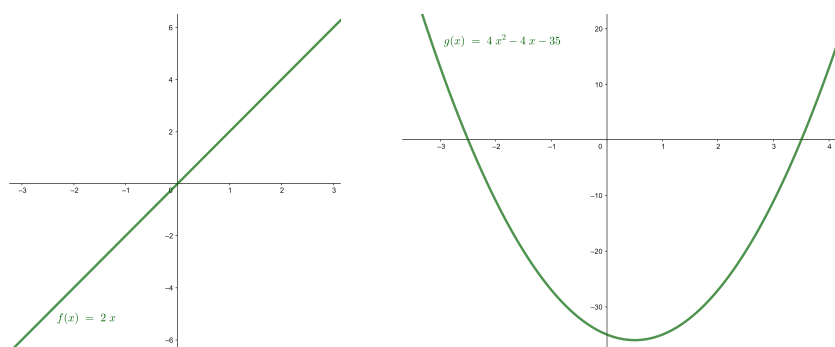
Ejemplo

x (hora)	$t(x)$ (°C)
08:00	10
09:00	11
10:00	13
11:00	15
12:00	16
13:00	18
14:00	20
15:00	19
16:00	18
17:00	16
18:00	16
19:00	15
20:00	14
21:00	12
22:00	10
23:00	9

Tabla instante-temperatura

La representación de todos los puntos de la forma $(x, f(x))$ se denomina **gráfica de una función**. Observad que, si una función tiene por dominio todo el conjunto de números reales, es imposible representar toda la gráfica (porque no cabría en una hoja de papel). En este caso, tendremos que conformarnos con la representación de una parte de esta gráfica, y es costumbre seguir denominándola gráfica de la función pero indicando el intervalo del dominio que representamos.

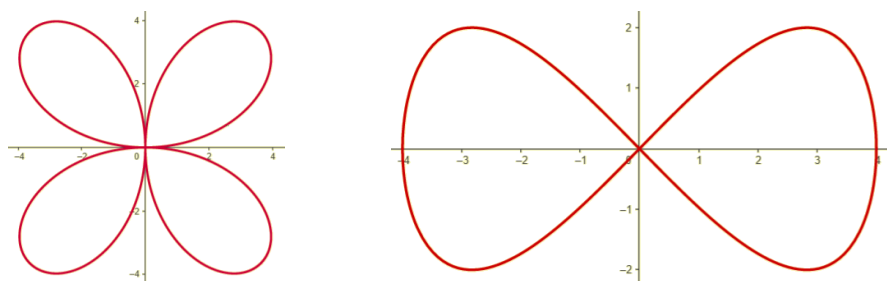
A continuación, pueden observarse las representaciones gráficas de dos funciones concretas en intervalos concretos, que se estudiarán detenidamente en temas posteriores. A la izquierda se presenta la función $f(x) = 2x$ en los puntos de dominio en el intervalo $[-3, 3]$. A la derecha se observa la función $g(x) = 4x^2 - 4x - 35$ en el intervalo $[-3, 4]$.



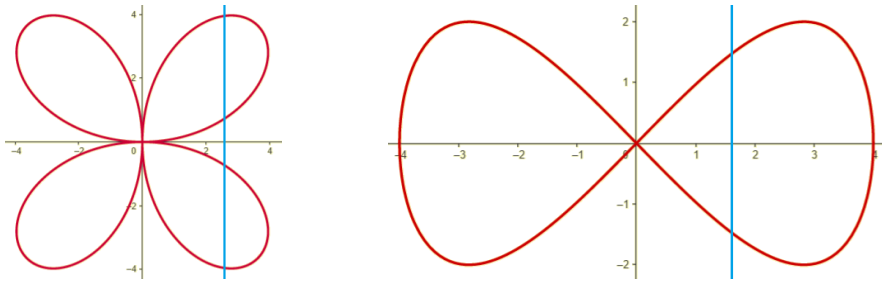
En estos casos observamos que al representarse todos los puntos de un intervalo determinado, los puntos de la gráfica están tan próximos que forman una línea continua, que en el caso particular de la izquierda es recta y en el caso de la derecha curva.

De hecho, en general, todas las funciones cuyo dominio son los números reales tienen esta característica: su gráfica aparece como una línea continua o como varias líneas continuas.

Hay que destacar que la gráfica de una función no puede tener una forma como las que se presentan a continuación, ya que en ambos casos hay valores en el eje X en las que su imagen no es un único valor.



Este hecho puede comprobarse trazando cualquier recta vertical en las gráficas, tal como muestra la imagen siguiente. Si una recta vertical corta varios puntos de la gráfica que se estudia, se puede asegurar que la gráfica no es de una función porque el valor determinado de x por esta recta tiene como mínimo más de una imagen, hecho imposible en una función.



6.3. Operaciones entre funciones

6.3.1. Operaciones básicas

Entre funciones diferentes cualesquiera, pueden realizarse ciertas operaciones. Estas operaciones son las que se exponen a continuación:

Suma (o resta) de funciones La suma (o resta) de dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, se designa por $f \pm g$ y se calcula de la siguiente manera:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

Esta suma puede calcularse siempre que x esté en el dominio de las dos funciones que se suman.

Por ejemplo, la suma de las funciones $f(x) = 3x$ y $g(x) = 4x^2 - 1$ es

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 4x^2 - 1 = 4x^2 + 3x - 1$$

La suma (o resta) de funciones tiene las siguientes propiedades:

- **Conmutativa:** $f \pm g = g \pm f$
- **Asociativa:** $f \pm (g \pm h) = f \pm (g \pm h)$
- Hay un elemento, denominado **función cero**, que es el elemento neutro de la suma de funciones, de modo que cualquier función sumada con este elemento no varía. Esta función es $z(x) = 0$.
- Para cada función $f(x)$, hay la función **opuesta** $-f(x)$ que, sumada a la función original, resulta la función cero.

Producto de funciones El producto de dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, se designa por $f \cdot g$ y se calcula de la siguiente manera:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Este producto puede calcularse siempre que la variable x esté en el dominio de las funciones que se multiplican.

Por ejemplo, el producto de las funciones $f(x) = 3x$ y $g(x) = 4x^2 - 1$ es

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 3x \cdot (4x^2 - 1) = 12x^3 - 3x$$

El producto de funciones tiene las siguientes propiedades:

- **Conmutativa:** $f \cdot g = g \cdot f$
- **Asociativa:** $f \cdot (g \cdot h) = f \cdot (g \cdot h)$
- Hay un elemento, llamado **función unidad**, que es el neutro del producto de funciones, de modo que cualquier función multiplicada por este elemento no varía. Esta función es $u(x) = 1$.

Operar con funciones.
Las operaciones esenciales con funciones son la suma, la resta, la multiplicación, la división y la potenciación. En todos los casos, el dominio de la función resultante es la intersección de los dominios de las funciones con las que se opera. En el caso de la división, además, no pertenecen al dominio aquellos puntos que anulen el denominador. Otra operación importante entre funciones es la potenciación. En el caso de la potenciación, no pertenecen al dominio todos los puntos que anulan a la vez la base y el exponente.

Cociente de funciones El cociente de dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, se designa por $\frac{f}{g}$ y se calcula de la siguiente manera:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Este cociente puede calcularse siempre que la variable x esté en el dominio de las funciones que se consideran y, además, la función del denominador $g(x)$ no sea la función 0.

Por ejemplo, el cociente de las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x + 1$ es

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$$

Potencia de funciones La potencia de una función $f(x)$ por otra función $g(x)$ se designa por f^g y se calcula de la siguiente manera:

$$(f^g)(x) = f(x)^{g(x)}$$

Esta potencia puede calcularse siempre que la variable, x , esté en el dominio de ambas funciones, f y g , y que ninguna de las dos funciones se anulen.

Por ejemplo, la potencia de la función $f(x) = 4x^2 - 1$ por $g(x) = 3x$ es

$$(f^g)(x) = f(x)^{g(x)} = (4x^2 - 1)^{3x}$$

6.3.2. Composición de funciones y función inversa

Dadas dos funciones, f y g , puede definirse la **composición de la función f con la función g** . Esta composición se designa por $g \circ f$ y se calcula de la manera siguiente:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Para poder calcular la composición de la función f con la función g en un punto a , es necesario que $f(a)$ pertenezca al dominio de g .

Ejemplo. Composición de dos funciones.

Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$, pueden definirse las composiciones de funciones:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = 2 \cdot (x^2) = 2x^2 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x) = (2x)^2 = 4x^2\end{aligned}$$

Con este ejemplo puede observarse que la composición de funciones *no es conmutativa*. Es decir, $g \circ f$ no suele ser igual a $f \circ g$. En otras palabras, no es lo mismo la composición de f con g que la composición de g con f .

A partir del concepto de composición de funciones, puede definirse el concepto de función **inversa** de otra función. Si f es una función, se dice que g es la función inversa de f si se cumplen a la vez las dos condiciones siguientes:

- $(g \circ f)(x) = x$ para todo x que pertenece al dominio de f
- $(f \circ g)(x) = x$ para todo x que pertenece al dominio de g

Por lo tanto, estas condiciones implican que el dominio de la función f es igual a la imagen de la función g , es decir, que $\text{Dom} f = \text{Im} g$. Esto significa que si f es una

?
¿Qué son la composición de funciones y la inversa de una función?

La composición de una función f con una función g es otra función, $g \circ f$, tal que a cada elemento del dominio hace corresponder $g(f(x))$. Se dice que f y g **inversas una de la otra** si $(g \circ f)(x) = x$ y $(f \circ g)(x) = x$. La función inversa de f se denota por f^{-1} .

función tal que $f(3) = 5$, tiene que cumplirse $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(5) = 3$. Es decir, si la imagen del 3 por la función f es 5, la imagen del 5 por la función g es 3. Y esto tiene que cumplirse para cualquier valor de f .

De manera general, se dice que una función g es la inversa de f si se cumple que si $f(x) = y$ entonces $g(y) = x$. En caso de ser así, la función inversa de f se denota por f^{-1} y, en particular, si $y = f(x)$, se escribe $x = f^{-1}(y)$.

Este hecho demuestra que una propiedad importante, que puede demostrarse, es que si una función tiene inversa entonces ambas funciones, la función original y su inversa, son biyectivas.

Ejemplo. Funciones inversas.

Son pares de funciones inversas

$$f(x) = x + a \text{ y } f^{-1}(y) = y - a, \text{ con } a \in \mathbb{R} \text{ un parámetro cualquiera}$$

$$f(x) = a - x \text{ y } f^{-1}(y) = a - y, \text{ con } a \in \mathbb{R} \text{ un parámetro cualquiera}$$

$$f(x) = a \cdot x \text{ y } f^{-1}(y) = \frac{y}{a}, \text{ con } a \in \mathbb{R} \text{ un parámetro cualquiera y } a \neq 0$$

6.4. Características de una función

Las funciones se clasifican en tipos diferentes según como se utiliza la variable independiente. En particular, cada uno de estos tipos de funciones presenta un dominio, una imagen y una forma gráfica específica. En este sentido, puede hablarse de familias de funciones: polinómicas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas...

Ejemplo. Tipos de funciones.

$$f(x) = 5x^2 - x - 2 \text{ es una función polinómica.}$$

$$g(x) = \sin(x) \text{ es una función trigonométrica.}$$

$$h(x) = 3^x \text{ es una función exponencial.}$$

Cuando las funciones son tan específicas, es posible determinar ciertas características de su forma en particular. Además de su dominio y recorrido, estas características principales son las intersecciones de la función con los ejes coordenados, la determinación de posibles simetrías, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, la existencia de puntos extremos, los intervalos de concavidad o convexidad, la existencia de puntos de inflexión y su comportamiento asintótico.

Los temas que siguen presentan las principales familias de funciones, que no solo es preciso conocer, sino también saber identificar y representar gráficamente. Con el estudio de estas familias de funciones, se introducen los términos que hacen referencia a los rasgos característicos de cualquier función. Se presentan estos rasgos y se explicita cómo pueden determinarse para cada una de las familias de funciones que se estudian.

Resumen

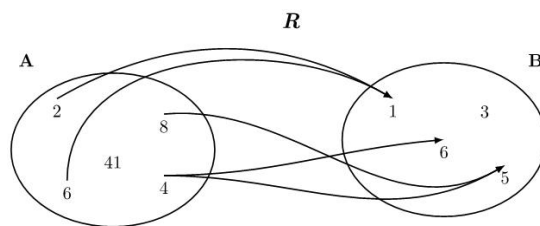
Concepto de función

Correspondencias entre conjuntos

Definición. Una **correspondencia** entre dos conjuntos es una relación entre ambos conjuntos que hace corresponder a elementos del primer conjunto elementos del segundo conjunto.

Representación. Gráficamente, las correspondencias entre conjuntos se representan con diagramas. Los conjuntos se representan con formas ovaladas y las correspondencias que se establecen entre ellos con flechas que relacionan los elementos que contienen estas formas.

Ejemplo y elementos. En una correspondencia como la que muestra la imagen, se identifican:



- El **nombre** de la correspondencia: R .
- El **conjunto de partida**: $A = \{2, 4, 6, 8, 41\}$.
- El **conjunto de llegada**: $B = \{1, 3, 5, 6\}$.
- El **dominio** de R : $\text{Dom}R = \{2, 4, 6, 8\}$.
- La **imagen** de R : $\text{Im}R = \{1, 5, 6\}$.
- La **imagen** de elementos concretos:
 - La imagen del elemento 2 es el elemento 1.
 - La imagen del elemento 4 son los elementos 5 y 6.
- La **antiimagen** de elementos concretos:
 - La antiimagen del elemento 6 es el elemento 4.
 - La antiimagen del elemento 1 son los elementos 2 y 6.

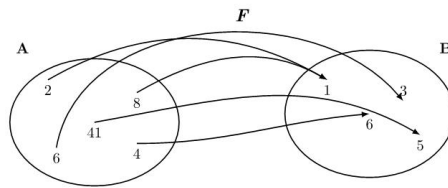
Aplicaciones y funciones

Ejemplos y definición.

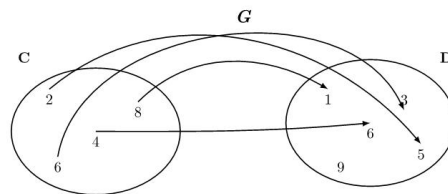
Se denomina **aplicación** a toda correspondencia en que cada elemento tiene una única imagen. Cuando una aplicación es definida entre conjuntos numéricos, se denomina **función**.

Tipos de aplicaciones. Se distinguen tres tipos de aplicaciones según su imagen:

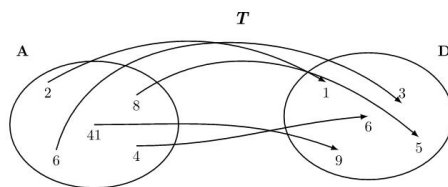
- **Exhaustivas:** aplicaciones en las que su imagen coincide con el conjunto de llegada.



- **Inyectivas:** aplicaciones en las que cada elemento de la imagen solo tiene una única antiimagen.



- **Biyectivas:** aplicaciones exhaustivas e inyectivas al mismo tiempo.



Representación de funciones

Hay diferentes maneras de representar una función.

Tabla de una función. Es una tabla de valores con dos columnas. La columna de la izquierda contiene valores del dominio de la función y la columna de la derecha contiene los valores correspondientes de su imagen.

Ejemplo: tabla de la función F anterior.

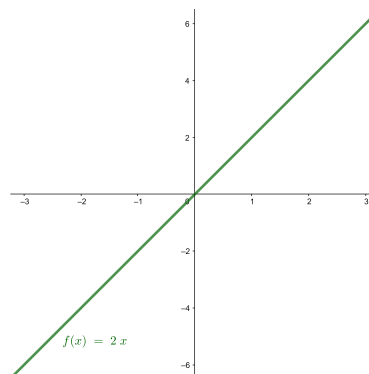
Dom F	Im F
2	1
4	6
6	3
8	1
41	5

Expresión de una función. Es una expresión algebraica con una variable que permite encontrar la imagen de cualquier elemento del dominio de la función. Para determinar la imagen, tiene que sustituir la variable de la expresión por el valor del dominio que este toma, y operar de acuerdo con la expresión dada.

Ejemplo: Si la función g es aquella que hace corresponder a un número el mismo número al cuadrado, su expresión tiene que ser $g(x) = x^2$. Entonces, la imagen de 4 por la función g es 16, porque $g(4) = 4^2 = 16$.

Gráfica de una función. Es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plan cartesiano en el que sus coordenadas coinciden con los valores del dominio y las imágenes correspondientes de esta función. En este caso, la primera coordenada, x , corresponde a un valor del dominio, y la segunda coordenada, $y = f(x)$, denota el valor correspondiente de la imagen. Para dibujar la gráfica de una función, tienen que dibujarse todos los puntos contenidos en la tabla de la función.

Ejemplo: la gráfica de la función $f(x) = 2x$ cuando el dominio es el intervalo $[-3, 3]$:



Operaciones con funciones

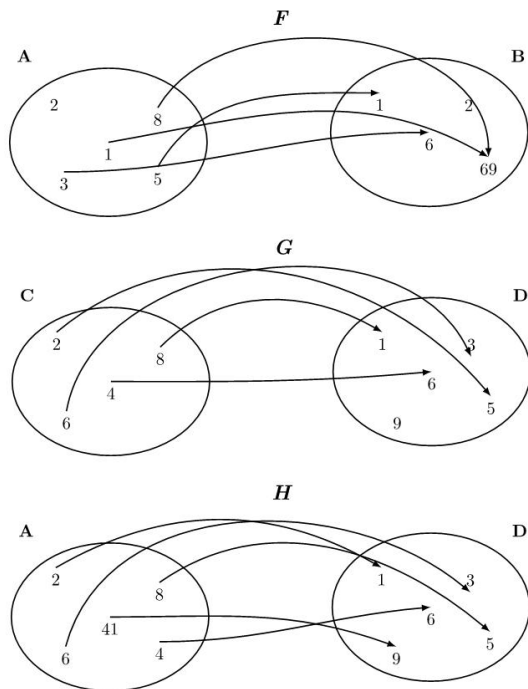
Si f y g son dos funciones, pueden definirse las siguientes operaciones:

- **Suma (o resta)** de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Se designa por $f \pm g$ y se calcula $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$. Esta suma puede calcularse siempre que x esté en el dominio de ambas funciones, f y g .
- **Producto** de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Se designa por $f \cdot g$ y se calcula $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Este producto puede calcularse siempre que x esté en el dominio de ambas funciones, f y g .
- **Cociente** de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Se designa por $\frac{f}{g}$ y se calcula $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Este cociente puede calcularse siempre que x se encuentre en el dominio de ambas funciones, f y g , y además, $g(x)$ no sea 0.
- **Potencia** de las funciones $f(x)$ y $g(x)$: se designa por f^g y se calcula como $(f^g)(x) = f(x)^{g(x)}$. Esta potencia puede calcularse siempre que x esté en el dominio de ambas funciones, $f(x)$ y $g(x)$ no sean 0.

- **Composición** de la función f con la función g . Es otra función, que se designa por $g \circ f$, que cumple $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Esta nueva función puede calcularse siempre que $f(x)$ esté en el dominio de la función que se aplica en segundo lugar, g .
- **Inversa** de una función. Las funciones f y g son inversas una de la otra si $(g \circ f)(x) = x$ y $(f \circ g)(x) = x$ a la vez. Si hay inversa, ambas funciones son biyectivas. La función inversa de f se denota por f^{-1} .

Ejercicios resueltos

1. Indicad si estas correspondencias son funciones. En caso afirmativo, realizad la tabla de valores de cada una e indicad si son biyectivas, exhaustivas o inyectivas.



Solución:

Todas las correspondencias son funciones porque cada elemento del conjunto de salida solo tiene una imagen. Sus tablas de valores son:

x	$F(x)$
1	69
3	6
5	1
8	69

x	$G(x)$
2	5
4	6
6	3
8	1

x	$H(x)$
2	1
4	6
6	3
8	5
41	9

Entonces, podemos decir:

- F no es ni inyectiva ni exhaustiva.
- G es inyectiva porque cada elemento de la imagen tiene solo una única antiimagen.
- H es biyectiva porque es inyectiva (cada elemento de la imagen tiene solo una única antiimagen) y también es exhaustiva (la imagen coincide con el conjunto de llegada).

2. Determina el dominio y, si hay, los puntos de corte con los ejes de estas funciones:

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

(b) $g(x) = \frac{1}{x}$

(c) $h(x) = 3$

(d) $a(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

(e) $b(x) = \sqrt{x + 1}$

(f) $c(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(g) $d(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$

Solución:

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Dominio: Toda la recta real, porque se trata de un polinomio.

Puntos de corte:

- Eje Y: Si $x = 0$, $f(x) = f(0) = 1$. Por lo tanto, el punto $(0, 1)$.
- Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Por lo tanto, el punto $(1, 0)$

(b) $g(x) = \frac{1}{x}$

Dominio: Dominio: Toda la recta real excepto los valores que anulen el denominador, es decir, todos menos el 0 ($x \neq 0$). Por lo tanto, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Puntos de corte:

- Eje Y: Si $x = 0$, $g(0)$ no existe porque $x = 0$ no es del dominio de la función. Por lo tanto, no existen puntos de corte con el eje Y.
- Eje X: No existe ningún x que cumpla $g(x) = 0$. Por lo tanto, no hay puntos de corte con el eje X.

(c) $h(x) = 3$

El dominio es toda la recta real, porque cualquier número tiene la imagen igual a 3.

Puntos de corte:

- Eje Y: Si $x = 0 \Rightarrow h(x) = 3$. Por lo tanto, el punto $(0, 3)$.
- Eje X: Dado que $h(x)$ tiene que ser siempre 3, no puede ser nunca 0. Por lo tanto, no hay puntos de corte con el eje X.

(d) $a(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

Dominio: Toda la recta real, excepto aquellos valores que anulen el denominador. Los valores que anulen el denominador son: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$. Por lo tanto, el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Puntos de corte:

- Eje Y: Si $x = 0 \Rightarrow a(0) = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, el punto $(0, -\frac{1}{2})$.
- Eje X: Si $a(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \{1, -1\}$. Por lo tanto, los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

(e) $b(x) = \sqrt{x + 1}$

Dominio: El interior de la raíz no puede ser negativo. Esto quiere decir que, necesariamente, $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$. Por lo tanto, el dominio es el intervalo $[-1, +\infty)$.

Puntos de corte:

- Eje Y: Si $x = 0 \Rightarrow b(0) = 1$. Por lo tanto, el punto $(0, 1)$.
- Eje X: Si $b(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Por lo tanto, el punto $(-1, 0)$.

(f) $c(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Dominio: El interior de la raíz no puede ser negativo. Esto quiere decir que, necesariamente, $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1$. Por lo tanto, el dominio es producto de la unión de los intervalos $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Puntos de corte son:

- Eje Y: Si $x = 0$, $c(0)$ no existe porque $x = 0$ no es del dominio de la función. Por lo tanto, no hay puntos de corte con el eje Y.
- Eje X: Si $h(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \{-1, 1\}$. Por lo tanto, los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

(g) $d(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$

Dominio: En este caso se tienen que cumplir dos condiciones:

- El interior de la raíz no puede ser negativo. Esto quiere decir que $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow |x| \geq 2$.
- El denominador no se puede anular. Esto quiere decir que $x + 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5$

Por lo tanto, el dominio es producto de la unión de las tres condiciones: $((-\infty, -2] \cup [2, \infty)) \setminus \{-5\} = (-\infty, -5) \cup (-5, -2] \cup [2, \infty)$

Puntos de corte:

- Eje Y: Si $x = 0$, $d(0)$ no existe porque $x = 0$ no es del dominio de la función. Por lo tanto, no hay puntos de corte con el eje Y.
- Eje X: Si $d(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \{-2, 2\}$. Por lo tanto, los puntos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

Ejercicios para practicar con las soluciones

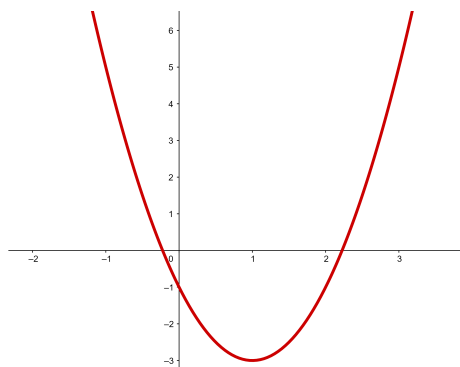
3. Indicad la expresión de una función que tenga esta tabla:

x	$f(x)$
-2	5
0	1
2	5
4	17
5	26
6	37

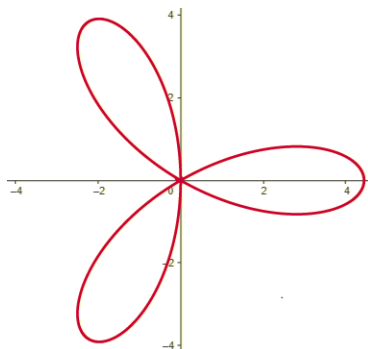
4. Encontrad las imágenes de la función $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ para los valores 0, 1 y -3.

5. Indicad si estas gráficas corresponden a una función:

Gráfica 1:



Gráfica 2:



6. Dadas las funciones: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 3x + 1$ y $h(x) = e^x$. Determinad las composiciones de las funciones siguientes:

- $(f \circ g)(x)$
- $(g \circ f)(x)$
- $(f \circ h)(x)$
- $(h \circ g \circ f)(x)$

Soluciones:

3. $f(x) = x^2 + 1$

4. Para encontrar las imágenes de los valores pedidos, tiene que sustituirse la variable de la expresión por el valor dado y, posteriormente, operar de acuerdo con la expresión numérica resultante:

- $f(0) = 1$
- $f(1) = 2$
- $f(-3) = 34$

5. La primera gráfica sí que corresponde a una función, pero la segunda no porque hay valores que tienen más de una antiimagen, por ejemplo, $x = 0$ donde $f(0) = \{-1, 1\}$.

6. Las funciones composición resultantes son:

- $(f \circ g)(x) = 18x^2 + 3x$
- $(g \circ f)(x) = 6x^2 - 9x + 4$
- $(f \circ h)(x) = 2(e^x)^2 - 3e^x + 1$
- $(h \circ g \circ f)(x) = e^{6x^2 - 9x + 4}$