Iniciación a las matemáticas para la ingeniería

PID_00270089

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat
Oberta
de Catalunya

9. Funciones exponencial y logarítmica

Índice

9.1. La función exponencial

9.1.1. Definición y ejemplo

La **función exponencial** de base a se define a partir de las potencias de números. En general, si a es un número positivo, la función exponencial de base a se define como a^x.

¿Qué es una función exponencial? Una función exponencial se define a partir de las potencias de los números. Su expresión tiene la forma a^x , con $a > 0$. Dom(a^x) = $\mathbb{R}$ e Im (a^x) = $\mathbb{R}^+$. Son funciones siempre crecientes para $a > 1$, decrecientes para $a < 1$. No tienen ni máximos ni mínimos.

Ejemplo. Función exponencial de base 3.

$$g(x) = 3^x$$

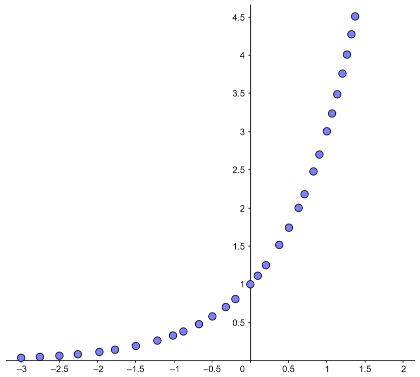
Entonces,
$g(0) = 3^0 = 1$, $g(1) = 3^1 = 3$, $g(2) = 3^2 = 9$, $g(-1) = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$...

Una de las funciones exponenciales esenciales es la que tiene como base el número irracional e, cuyos primeros decimales son 2.71828182845904523 . . . En este caso, la función se denomina simplemente exponencial, sin especificar la base, y se escribe $\exp(x)$ o simplemente e^x.

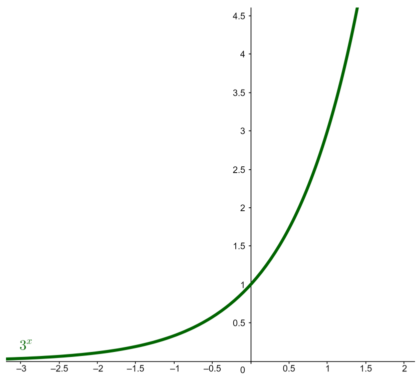
9.1.2. Gráfica

Podemos deducir la forma general de la gráfica de cualquier función exponencial a partir de un ejemplo concreto.

Al representar la gráfica de una tabla de una función exponencial, por ejemplo, $g(x) = 3^x$ en el dominio $[-3, 2]$, se obtiene una gráfica de puntos con este aspecto:



De la representación anterior, no es complicado deducir que la gráfica de la función exponencial de base 3 en el dominio $[-3, 2]$ se convierte en la siguiente:



A partir de la gráfica se observa como cualquier valor de la función es siempre positivo, es decir, que la función siempre es positiva. Además, se observa que la gráfica pasa por el punto $(0, 1)$. Estas son dos propiedades de todas las funciones exponenciales, porque la potencia de un número cualquiera es siempre un número positivo y porque cualquier número elevado a 0 es siempre 1. En particular, pues, la gráfica de una función exponencial siempre queda por encima del eje X.

9.1.3. Propiedades

De acuerdo con los hechos observados anteriormente, se cumplen ciertas propiedades para todas las funciones exponenciales. Si escribimos $y = a^x$, con $a > 0$ estas propiedades son:

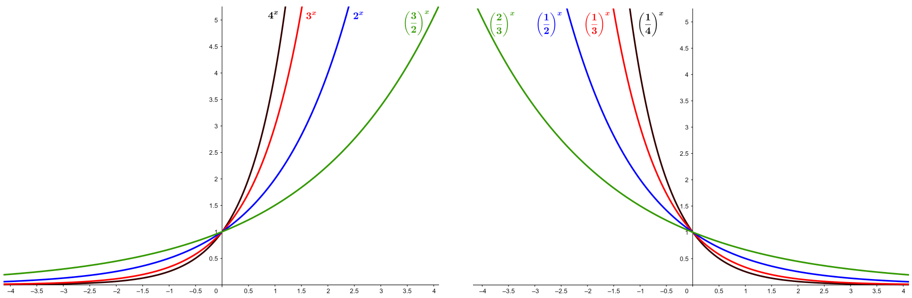
- El dominio de cualquier función exponencial son todos los reales: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.
- La imagen de cualquier función exponencial de base $a \neq 1$ es $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.
- La gráfica de una función exponencial siempre pasa por el punto $(0, 1)$.
- Si la base a es mayor que 1 $(a > 1)$:

- ◦ Si $x_1 < x_2$, $a^{x_1} < a^{x_2}$, es decir, la función crece al aumentar la variable. En definitiva, la función es creciente. Además, el crecimiento es mayor cuanto mayor es la base.
- ◦ Cuanto menor es el valor de la variable x, más se acerca a 0 el valor de la imagen y, a pesar de que no se llega a alcanzar nunca este valor.

- Si la base a es menor que 1 $(a < 1)$:
  - ◦ Si $x_1 < x_2$, $a^{x_1} > a^{x_2}$, es decir, la función decrece al aumentar la variable. En definitiva, la función es decreciente. Además, el decrecimiento es mayor cuanto menor es la base. base.
  - ◦ Cuanto mayor es el valor de la variable x, más se acerca a 0 el valor de la imagen y, a pesar de que no llega nunca a alcanzar este valor.

- Si la base es 1 $(a = 1)$: la función es constante, puesto que $1^x = \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{x} = 1$.

Estas propiedades se observan en las gráficas de cualquier función exponencial. Identifiquémoslas en las siguientes:



La imagen de la izquierda muestra las gráficas de 4^x, 3^x, 2^x y $\left(\frac{3}{2}\right)^x$. Observad que, por ser la base mayor que 1, son funciones crecientes, con un crecimiento mayor cuanto mayor es la base. Además, notamos que, cuanto más a la izquierda de, $x = -1$, por ejemplo, el valor de las funciones se aproxima muy rápidamente 0, pero sin alcanzar este valor.

La imagen de la derecha muestra las gráficas de $\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $\left(\frac{2}{3}\right)^x$. Observad que, por ser la base menor que 1, son funciones decrecientes, con un decrecimiento mayor cuanto menor es la base. Además, notad que, cuanto más a la derecha de $x = 1$, por ejemplo, el valor de las funciones se aproxima muy rápidamente a 0, pero sin lograr este valor.

Finalmente, observad que las gráficas de 4^x, 3^x, 2^x y $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ y las gráficas de $\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ son simétricas respecto al eje Y. Este hecho es debido a

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$$

La función exponencial es una de las funciones más importantes por sus aplicaciones, puesto que es capaz de describir una gran variedad de fenómenos, especialmente los de crecimiento. Por eso es habitual que estas funciones también se denominen *funciones de crecimiento*. En particular, se aplican a hechos tan importantes como el crecimiento de una población de bacterias en un laboratorio, el crecimiento demográfico del número de animales, la manera como decrece la materia radiactiva (crecimiento negativo), la razón por la que un obrero aprende un cierto proceso o la velocidad con que una enfermedad contagiosa se disemina con el tiempo. Las funciones exponenciales también son útiles para calcular el interés obtenido en una cuenta bancaria, puesto que describen el aumento monetario a un interés compuesto.

9.2. El logaritmo

9.2.1. Definición

El **logaritmo de base** a, con $a > 0$, de un número real positivo x, se calcula de la siguiente manera:

$$\log_a x = \log_a(x) = y \text{ si } x = a^y$$

Por ejemplo, el logaritmo de base 2 de 8 es igual a 3 porque $2^3 = 8$. Entonces, podemos escribir

$$\log_2 8 = \log_2(8) = 3, \text{ porque } 2^3 = 8$$

En general, pues, se escribe $\log_a$ para indicar precisamente esta operación: el logaritmo de base a.

El origen del concepto de logaritmo está en un problema de matemática aplicada: la necesidad de simplificar la tarea de los calculadores, excesivamente complicada cuando se trataba de realizar multiplicaciones, divisiones e, incluso, potencias o extracciones de raíces en problemas relacionados inicialmente con la agrimensura y la astronomía, especialmente cuando tenía que aplicarse la navegación. Arquímedes ya tenía una idea fundamental que generaría los logaritmos. Pero no fue hasta John Napier (siglo XV) que se aprovechó la idea lanzada por Arquímedes. Los logaritmos fueron de gran ayuda para el nacimiento de la física matemática a finales del siglo XV.

Ejemplo. Logaritmos de bases

- Logaritmo de base 3 de 81: $\log_3(81) = 4$ porque $3^4 = 81$.
- Logaritmo de base 5 de 25: $\log_5(25) = 2$ porque $5^2 = 25$.
- Logaritmo de base 7 de 49: $\log_7(49) = 2$ porque $7^2 = 49$.

9.2.2. Propiedades

Las propiedades del logaritmo derivan de las propiedades de las potencias, debido a la relación que hay entre ambas operaciones. Así, para un logaritmo de base a, $\log_a$, se cumplen las propiedades siguientes sea cuál sea el valor de $a > 0$:

1) $\log_a(a) = 1$ y $\log_a(1) = 0$

2) El logaritmo del producto es igual a la suma de logaritmos:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

puesto que

$$a^{\log_a(x\cdot y)} = x \cdot y = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}$$

3) El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a\left(x^y\right) = y \cdot \log_a(x)$$

puesto que

$$a^{\log_a(x^y)} = x^y = \left(a^{\log_a(x)}\right)^y = a^{y\cdot\log_a(x)}$$

4) El logaritmo de un cociente es el logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

puesto que

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x \cdot y^{-1}\right) = \log_a(x) + \log_a\left(y^{-1}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

5) Es posible relacionar dos logaritmos de bases diferentes, a y b, con esta fórmula:

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

puesto que si denominamos $y = \log_a(x)$ y $z = \log_b(x)$, entonces $x = a^y = b^z$.
Además, dado que $b = a^{\log_a(b)}$ podemos escribir $a^x = \left(a^{\log_a(b)}\right)^y = a^{y \cdot \log_a(b)}$.
Por lo tanto,

$$\log_a(x) = y = z \cdot \log_a(b) = \log_b(x) \cdot \log_a(b)$$

de donde se deduce la propiedad enunciada.

9.3. La función logarítmica

9.3.1. Definición y ejemplos

La **función logarítmica de base** a, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es la función inversa de la función exponencial de base a. Es decir,

$$y = \log_a(x) \text{ si } x = a^y$$

Dado que la función se define a partir de las propiedades del logaritmo, también se denomina directamente **función logaritmo**.

Hay dos casos particulares en la notación de esta función:

- Cuando la base es el número irracional e, se habla de logaritmo *neperiano* y se escribe ln. Es decir, se entiende $\ln = \log_e$.
- Cuando la base es el número 10, se habla simplemente de logaritmo, sin especificar la base, y se suele escribir simplemente log. Es decir, se entiende $\log = \log_{10}$.

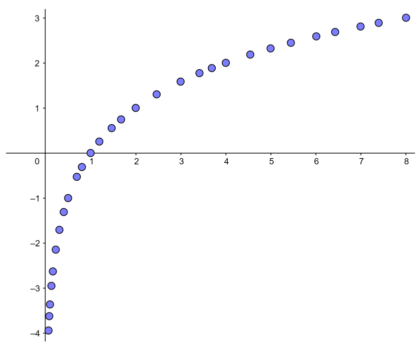
¿Qué es una función logarítmica?
Una función logarítmica de base a es la función inversa de una función exponencial de base a. Su expresión es de la forma $\log_a(x)$, donde $a > 0$. Dom $(\log_a(x)) = \mathbb{R}^+$ e Im$(\log_a(x)) = \mathbb{R}$. Son funciones siempre crecientes para $a > 1$ y decrecientes para $a < 1$. No tienen ni máximos ni mínimos.

John Napier (de ahí el calificativo de neperiano) nació en 1550. En 1614 publicó *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, donde relaciona una progresión geométrica con una progresión aritmética. La primera es la progresión de las distancias recorridas con velocidades proporcionales a sí mismas, y la segunda, la progresión de las distancias recorridas con velocidad constante, donde estas distancias son los "logaritmos" de las primeras. La obra comprende una tabla de logaritmos de senos, con los ángulos que varían de minuto en minuto. En 1619 apareció una segunda obra, *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, en la que el autor explica cómo calcular los logaritmos.

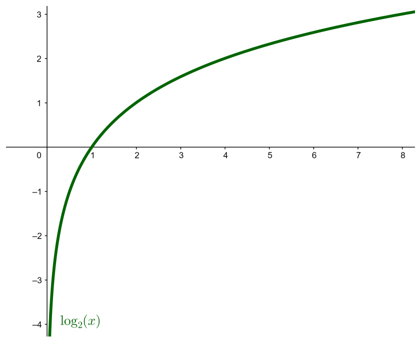
9.3.2. Gráfica

Podemos deducir la forma general de la gráfica de cualquier función logarítmica a partir de un ejemplo concreto.

Al representar gráficamente una tabla de una función logaritmo, por ejemplo, la de base 2 en el dominio $[0, 8]$, se obtiene una gráfica de puntos como esta:



A partir de esta gráfica puede deducirse la gráfica de la función. Así, en este caso, la gráfica de la función logaritmo de base 2 en el dominio $[0, 8]$ resulta



En la gráfica se observa que la función se define únicamente para valores positivos, pero su imagen abarca todos los valores reales. Además, observamos que la gráfica de la función pasa por el punto $(1, 0)$. Esto ocurre en todas las funciones logarítmicas debido a que el logaritmo se define a partir de las potencias de los números. En particular, observad que la gráfica de una función logarítmica siempre queda a la derecha del eje Y.

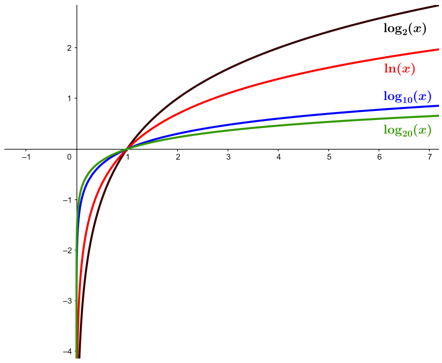
9.3.3. Propiedades

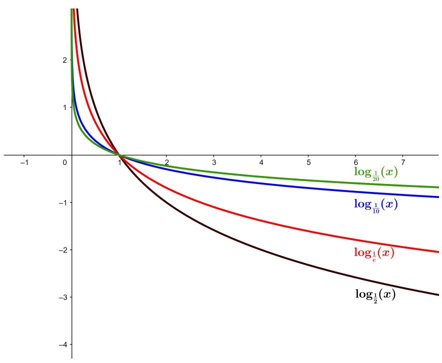
De acuerdo con los hechos observados anteriormente, se cumplen ciertas propiedades para las funciones logarítmicas. Si escribimos $y = \log_a(x)$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, estas propiedades son las siguientes:

- El dominio de cualquier función logarítmica de base a es igual a $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, puesto que corresponde a la imagen de la función exponencial de base a.
- La imagen de cualquier función logarítmica de base a es igual a todos los números reales: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, puesto que es el dominio de la función exponencial de base a.
- La gráfica de cualquier función logarítmica siempre pasa por el punto $(1, 0)$.
- Si la base a es mayor que 1 $(a > 1)$:
  - Si $x_1 < x_2$, entonces $\log_a(x_1) < \log_a(x_2)$, es decir, la función crece al aumentar la variable. En definitiva, la función es creciente. Además, no hay límite para el crecimiento de la función: cuando el valor de variable $x$aumenta, la imagen y también aumenta. Este crecimiento es mayor cuanto menor es la base.
  - Cuanto más cerca de 0 está la variable x, menor es el valor de la imagen y; por eso se dice que la función $\log_a(x)$ tiende a $-\infty$ cuando la x tiende a 0.
- Si la base a es menor que 1 $(a < 1)$:
  - Si $x_1 < x_2$, entonces $\log_a(x_1) > \log_a(x_2)$, es decir, la función decrece al aumentar la variable. En definitiva, la función es decreciente. Además, no hay límite para el decrecimiento de la función. Este decrecimiento es mayor cuanto mayor es la base.

- Cuanto mayor es el valor de la variable x, más se acerca el valor de la imagen y a 0, a pesar de que nunca llega a alcanzarlo.

Estas propiedades se observan en las gráficas de cualquier función logarítmica. Identifiquémoslas en las siguientes gráficas:





La imagen de la izquierda muestra las gráficas de las funciones $\log_2(x)$, $\ln(x)$, $\log(x)$, $\log_{20}(x)$. Recordemos que $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano (de base e), y $\log(x)$ (sin indicar la base) hace referencia al logaritmo de base 10. Observemos que, son funciones crecientes porque la base es mayor que 1, con un crecimiento mayor cuanto menor es la base. Además, vemos que cuanto más a la izquierda de $x = 1$, por ejemplo, el valor de las funciones decrece muy rápidamente, sin límite concreto.
La imagen de la derecha muestra las gráficas de las funciones logarítmicas de bases inversas a las anteriores, es decir, de bases $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{e}$, $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{20}$. Observad que son funciones decrecientes porque la base es menor que 1, con un decrecimiento mayor cuanto mayor es la base. Además, cuanto más a la izquierda de $x = 1$, por ejemplo, el valor de las funciones crece rápidamente, sin límite concreto.
Finalmente, vemos que las gráficas $\log_a(x)$ y $\log_{\frac{1}{a}}(x)$ son simétricas respecto al eje X. Esto es así porque

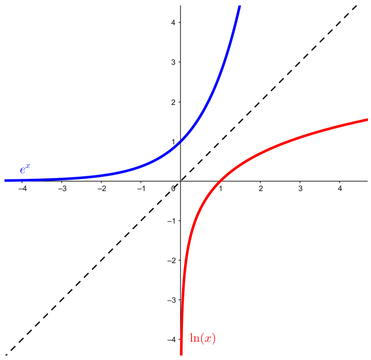
$$\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x)$$

Las funciones logarítmicas son importantes para estudiar fenómenos físicos, por ejemplo, la descomposición radiactiva.

9.4. Relación entre las gráficas exponencial y logarítmica

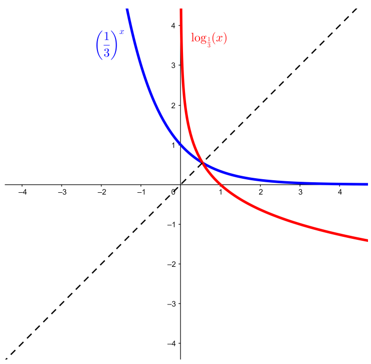
Hay una relación estrecha entre las gráficas de una función exponencial y de una función logarítmica de la misma base, a causa de la definición del logaritmo a partir de las potencias de números. Las deducimos a partir de algún ejemplo concreto.

Consideremos, por ejemplo, las gráficas de la función logaritmo neperiano, $\ln(x)$, y de la función exponencial, e^x, y comparémoslas. Recordad que la gráfica de cualquier función se interpreta de izquierda a derecha y tiene que analizarse con precaución porque siempre es aproximada y es posible no interpretarla correctamente.



Al representar las dos gráficas correspondientes a $\ln(x)$ ye^x conjuntamente, en el dominio $[-4,4]$, por ejemplo, observamos que ambas funciones son simétricas respecto a la recta $y = x$. Es decir, que si se dobla el papel con las dos funciones por la recta $y = x$, ambas curvas coinciden después del plegado.

Esto también ocurre si las funciones tienen la base menor que 1. Por ejemplo, las funciones exponencial y logarítmica de base $\frac{1}{3}$: $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ y $\log_{\frac{1}{3}}(x)$ en el dominio $[-4,4]$:



Como hemos anticipado, puede observarse que las funciones son también simétricas respecto a la recta $y = x$.

Esto no solo es aplicable a estas funciones. De manera general, se tiene que si dos funciones cualesquiera son inversas una de la otra, sus gráficas cumplen esta propiedad: son simétricas respecto a la recta $y = x$. Esto es fácil de explicar, ya que la inversa de una función intercambia los papeles de la x y la y. Por lo tanto, la función inversa ha de tener la misma forma que la función original, salvo que los ejes X y Y tienen que intercambiarse.

9.5. Ecuaciones exponencial y logarítmica

Ecuación exponencial. Es una ecuación con funciones exponenciales.
Resolver este tipo de ecuaciones no es fácil en general, y no hay ninguna fórmula de resolución general. Lo que conviene en estos casos es agrupar al máximo y convenientemente las potencias que así lo permitan para intentar sustituir la ecuación exponencial por una ecuación lineal o cuadrática. Por eso es fundamental identificar y aplicar las propiedades de las potencias. A continuación hay algunos ejemplos de esto.

¿Qué es una ecuación exponencial?
Es una ecuación con funciones exponenciales. Para resolver una ecuación exponencial, conviene agrupar al máximo las potencias para poder sustituir la ecuación exponencial por una ecuación lineal o cuadrática. Del mismo modo, pueden resolverse sistemas de ecuaciones exponenciales.

Un primer ejemplo de ecuación exponencial de resolución sencilla debido a la igualdad entre las bases podría ser este:

Ejemplo. Resolución de ecuación exponencial (1).

$$2^{x+1} = 2^2$$

Dado que las bases son iguales, los exponentes tienen que ser iguales:

$$x + 1 = 2 \Rightarrow x = 2 - 1 = 1$$

Efectivamente, $2^{1+1} = 2^2$.

Asimismo, la resolución de ecuaciones exponenciales puede ser más compleja, como por ejemplo la siguiente:

Ejemplo. Resolución de ecuación exponencial (2).

$$7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$$

Se tiene que intentar sacar 7^x como factor común aplicando las propiedades de las potencias:

$$7^x \cdot (1 + 7 + 7^2) = 2793$$

Operemamos los elementos entre paréntesis:

$$7^x \cdot 57 = 2793$$

de donde resulta

$$7^x = \frac{2793}{57} = 49 = 7^2$$

y, por lo tanto,

$$x = 2$$

Esto puede complicarse más. Es el caso de una ecuación como esta:

Ejemplo. Resolución de ecuación exponencial (3).

$$5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$$

Se tiene que intentar eliminar el denominador. Multiplicamos toda la expresión por 5^{x-2}:

$$5^{x-1} \cdot 5^{x-2} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3$$

Operamos y pasamos todos los términos a la izquierda:

$$5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$$

Reescribimos:

$$5 \cdot 5^{2x-4} - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$$

Agrupamos términos de manera conveniente:

$$5 \cdot \left(5^{(5x-2)}\right)^2 - 2 \cdot 5^{x-2} - 3 = 0$$

Obtenemos así una ecuación de segundo grado con incógnita 5^{x-2}. Denominamos $z = 5^{x-2}$ e intentamos resolver la ecuación:

$$5z^2 - 2z - 3 = 0$$

Aplicamos la fórmula para las ecuaciones de segundo grado y obtenemos

$$z = 1 \text{ y } z = -\frac{3}{5}$$

Comprobamos si las soluciones obtenidas cumplen la ecuación original:

$z = -\frac{3}{5}$ no es posible porque se tendría que cumplir $z = 5^{x-2} = -\frac{3}{5}$, que no es posible porque $5x - 2$ no puede ser negativo.

$z = 1$ proporciona solución:

$$z = 5^{x-2} = 1 = 5^0 \Rightarrow 5^{x-2} = 5^0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Del mismo modo, también pueden resolverse sistemas de ecuaciones exponenciales convirtiéndolos en sistemas de ecuaciones lineales al manipular convenientemente las potencias. Este es un ejemplo:

Ejemplo. Resolución de sistema de ecuaciones exponenciales.

$$\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases}$$

Reescribimos la primera ecuación de manera conveniente:

$$5^x = 5^y \cdot 5^4 \Rightarrow 5^{x-y} = 5^4$$

Reescribimos también la segunda ecuación de manera conveniente:

$$2^x \cdot 2^y = 2^8 \Rightarrow 2^{x+y} = 2^8$$

El sistema original queda reducido a un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Al resolver este sistema, por ejemplo, por reducción, obtenemos la solución

$$(x, y) = (6, 2)$$

Finalmente, comprobamos que la solución obtenida satisface al sistema original.

cuación logarítmica. Es una ecuación donde aparecen funciones logarítmicas. Resolver este tipo de ecuaciones no es fácil en general, y no hay ninguna fórmula general de resolución. Lo que conviene en estos casos es agrupar al máximo y convenientemente los logaritmos que lo permitan para intentar sustituir la ecuación logarítmica por una ecuación lineal o cuadrática. Para ello, es fundamental identificar y aplicar las propiedades de los logaritmos. Veámoslo con la resolución de algunos ejemplos.

Un ejemplo para resolver podría ser la siguiente ecuación:

¿Qué es una ecuación logarítmica?
Es una ecuación con funciones logarítmicas. Para resolver una ecuación logarítmica, conviene agrupar al máximo los logaritmos para poder sustituir la ecuación logarítmica por una ecuación lineal o cuadrática. Del mismo modo, pueden resolverse sistemas de ecuaciones logarítmicas.

Ejemplo. Resolución de ecuación logarítmica.

$$2\log(x) - \log(x-16) = 2$$

Reescribimos el término de la izquierda, ya que $2\log(x) = \log\left(x^2\right)$:

$$\log\left(x^2\right) - \log(x-16) = 2$$

Aplicamos la propiedad del logaritmo del cociente, $\log\left(x^2\right) - \log(x-16) = \log\left(\frac{x^2}{x-16}\right)$:

$$\log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) = 2$$

Reescribimos el término de la derecha, ya que $2 = \log(100)$:

$$\log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) = \log(100)$$

de donde resulta

$$\frac{x^2}{x-16} = 100$$

Ordenamos los términos:

$$x^2 - 100x + 1600 = 0$$

y se trata de resolver una ecuación de segundo grado.

Aplicamos la fórmula de resolución para las ecuaciones de segundo grado y obtenemos

$$x = 20 \text{ y } x = 80$$

Para acabar, comprobamos si estas también verifican la ecuación logarítmica inicial. En este caso, al sustituir los valores en la ecuación original, comprobamos que ambas son solución.

También pueden resolverse sistemas de ecuaciones logarítmicas procediendo de manera similar, es decir, intentando siempre agrupar los logaritmos que lo permitan para convertir las ecuaciones iniciales en ecuaciones lineales o cuadráticas. Un ejemplo para resolver de sistema de ecuaciones logarítmicas podría ser el siguiente:

Ejemplo. Resolución de sistema de ecuaciones logarítmicas.

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ \log(x) + \log(y) = 3 \end{cases}$$

La primera ecuacion ya es lineal, y por lo tanto nos centramos en intentar transformar la segunda en una ecuación lineal.

Reescribimos la segunda ecuación teniendo en cuenta el logaritmo de un producto: $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$ y que $\log(1000) = 3$:

$$\log(x \cdot y) = \log(1000)$$

Esta ecuación se reduce $x \cdot y = 1000$, y por lo tanto, se trata de resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ x \cdot y = 1000 \end{cases}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, obtenemos dos alternativas:

$$(x, y) = (40, 25) \text{ o bien } (x, y) = (25, 40)$$

Finalmente, comprobamos las posibles soluciones obtenidas en el sistema original.

Resumen

Funciones exponenciales y logarítmicas

Funciones exponenciales

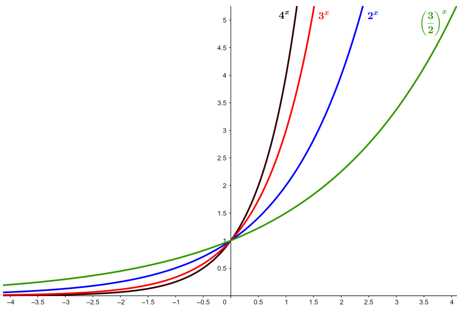
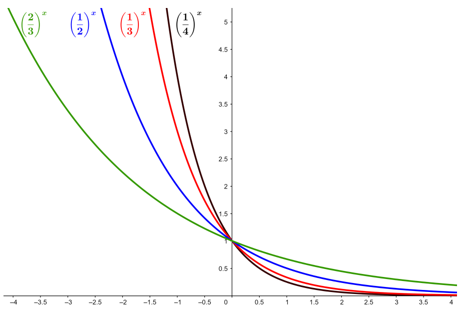
Definición. Una función exponencial de base $a > 0$ es la que se define a partir de las potencias de los números.

Expresión. $y = a^x$, con $a > 0$.
Una de las funciones exponenciales más importantes es la de base $e \cong 2.71828182845904523$.
Su expresión es $y = e^x$.

Propiedades.

- Dominio: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Imagen: $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$
- No tienen ni máximos ni mínimos.
- Pasan por el punto $(0, 1)$.

Gráficas.

$a > 1$	$a < 1$
Función creciente	Función decreciente
Cuando x tiende a $-\infty$, la función tiende a 0.	Cuando x tiende a $-\infty$, la función tiende a $+\infty$.
Cuando x tiende a $+\infty$, la función tiende a $+\infty$.	Cuando x tiende a $+\infty$, la función tiende a 0.
	
Las gráaficas de a^x y $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$, para $a > 0$ cualquiera, son simétricas respecto al eje Y.	

Logaritmo

Definición. El logaritmo de base a, con $a > 0$, de un número real x es

$$\log_a(x) = y \text{ si } x = a^y$$

Propiedades.

1) $\log_a(a) = 1$ y $\log_a(1) = 0$.

2) El logaritmo del producto es igual a la suma de logaritmos:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

3) El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_a \left(x^y\right) = y \cdot \log_a(x)$$

4) El logaritmo de un cociente es el logaritmo del numerador mmenos el logaritmo del denominador:

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

5) Es posible relacionar dos logaritmos de diferentes bases, a y b, con esta fórmula:

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Funciones logarítmicas

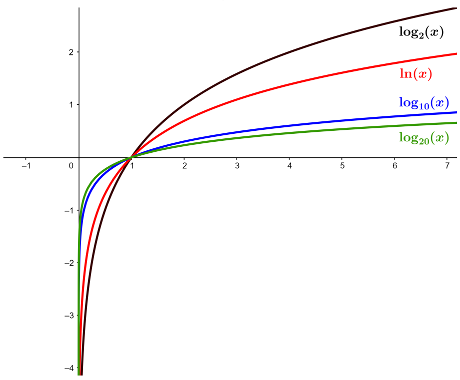
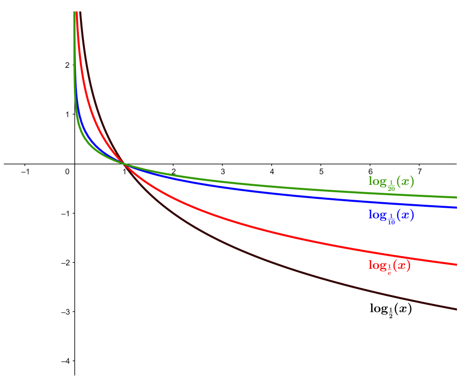
Definición. La función logarítmica de base a, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es la función inversa de la función exponencial de base a.

Expresión. $y = \log_a(x)$ si $x = a^y$.
Una de las funciones logarítmicas más importantes es la de base $e \cong 2.71828182845904523$.
Su expresión es $y = \ln(x)$.
Cuando la base de la función logaritmo es el número 10, se expresa simplemente $y = \log(x)$.

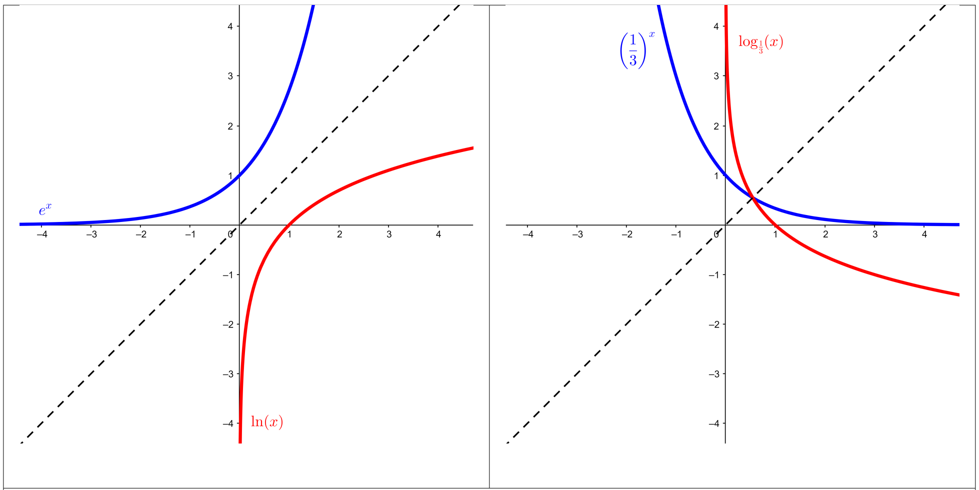
Propiedades

- Dominio: $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$
- Imagen: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- No tienen ni máximos ni mínimos.
- Pasan por el punto $(1, 0)$.

Gráficas

<table>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$a < 1$</td></tr>
<tr><td>Función creciente
Cuando x tiende a 0, la función tiende a $-\infty$.
Cuando x tiende a $+\infty$, la función tiende a $+\infty$.

</td><td>Función decreciente
Cuando x tiende a 0, la función tiende a $+\infty$.
Cuando x tiende a $+\infty$, la función tiende a $-\infty$.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Las gráficas de $\log_a$ y $\log_{\frac{1}{a}}$, para $a > 0$ cualquiera, son simétricas respecto al eje X.</td></tr>
</table>

Gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas



Las gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas de la misma base son simétricas respecte de la recta $y = x$.

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Ecuación exponencial. Es una ecuación que incluye funciones exponenciales. Para resolver una ecuación exponencial, tienen que agruparse al máximo y de manera conveniente las potencias para sustituir la ecuación exponencial por una ecuación lineal o cuadrática.

Del mismo modo, pueden resolverse sistemas de ecuaciones exponenciales convirtiéndolos en sistemas de ecuaciones lineales. Esto se hace manipulando convenientemente las potencias.

Ejemplo de ecuación	*Ejemplo de sistema*
$7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$ $7^x + 7 \cdot 7^x + 7^2 \cdot 7^x = 2793$ $7^x \cdot \left(1 + 7 + 7^2\right) = 2793$ $7^x \cdot 57 = 2793$ $7^x = \dfrac{2793}{57} = 49$ $7^x = 7^2$ de donde resulta $x = 2$ que también verifica la ecuación original.	$\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases}$ $5^x = 5^y \cdot 625 \Rightarrow 5^x = 5^y \cdot 5^4 \Rightarrow 5^{x-y} = 5^4$ $2^x \cdot 2^y = 256 \Rightarrow 2^x \cdot 2^y = 2^8 \Rightarrow 2^{x+y} = 2^8$ por lo tanto, se trata de resolver $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$ de donde resultan $x = 6$ y $y = 2$ que también verifican el sistema original.

Ecuación logarítmica. Es una ecuación con funciones logarítmicas. Para resolver una ecuación logarítmica, tienen que agruparse al máximo y de manera conveniente los logaritmos para sustituir la ecuación logarítmica por una ecuación lineal o cuadrática.

Del mismo modo, pueden resolverse sistemas de ecuaciones logarítmicas convirtiéndolos en sistemas de ecuaciones lineales. Esto se hace manipulando convenientemente los logaritmos.

Ejemplo de ecuación	*Ejemplo de sistema*
$$2\log(x)-\log(x-16)=2$$ $$\log\left(x^2\right)-\log(x-16)=2$$ $$\log\left(\frac{x^2}{x-16}\right)=\log(100)$$ $$\frac{x^2}{x-16}=100$$ $$x^2-100x+1600=0$$ de donde resultan $x=20$ y $x=80$ que también verifican el sistema original.	$$\begin{cases} x+y=65 \\ \log(x)+\log(y)=3 \end{cases}$$ $\log(x)+\log(y)=3 \Rightarrow \log(x\cdot y)=3=\log(1000)$ por lo tanto, se trata de resolver $$\begin{cases} x+y=65 \\ x\cdot y=1000 \end{cases}$$ de donde resultan $x=40$ y $y=25$ o bien $x=25$ y $y=40$ que también verifican el sistema original.

Ejercicios resueltos

1. **Encontrad una función exponencial del tipo $f(x) = a^x$ que cumpla $f(6) = 64$.**

Solución:
Tiene que cumplirse $f(6) = a^6 = 64$. Sabemos $2^6 = 64$. Entonces, una posibilidad es considerar $a = 2$. Por lo tanto, una función exponencial que cumple la condición que se pide es $f(x) = 2^x$.

2. **Determinad cuál de estas funciones son crecientes y cuáles decrecientes, y ordenadlas de mayor crecimiento a mayor decrecimiento. Justificad la respuesta.**

$$f(x) = 11^x, g(x) = 13^x, h(x) = 0.1^x, t(x) = 0.3^x$$

Solución:

$f(x) = 11^x$ y $g(x) = 13^x$ son crecientes, porque son funciones exponenciales y su base es mayor que 1.

$h(x) = 0.1^x$ y $t(x) = 0.3^x$ son decrecientes, porque son funciones exponenciales y su base es menor que 1.

Para ordenar estas funciones exponenciales de mayor crecimiento a mayor decrecimiento, hay que tener en cuenta que si la base es mayor que 1, el crecimiento de la función es mayor cuanto mayor es la base. En cambio, si la base es menor que 1, el decrecimiento de la función es mayor cuanto menor es la base. Por lo tanto, el orden tiene que ser este:

$$g(x) = 13^x, f(x) = 11^x, t(x) = 0.3^x \text{ y } h(x) = 0.1^x$$

3. **Calculad estos logaritmos sin usar la calculadora:**

(a) $\log_2(32)$

(b) $\log_9(81)$

(c) $\log_5\left(5^3\right)$

(d) $\log_3\left(\sqrt{243}\right)$

Solución:
Para encontrar el valor de estos logaritmos, hay que hacer tres cosas.
En primer lugar, conocer el valor de algunas potencias básicas, por ejemplo:

$$32 = 2^5, 81 = 9^2 \text{ y } 243 = 3^5$$

En segundo lugar, aplicar la suma de logaritmos para el logaritmo de un producto, en particular

$$\log_a(x^n) = \log_a(\underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{n } veces}) = \underbrace{\log_a(x) + \ldots \log_a(x)}_{\text{n } veces} = n \cdot \log_a(x)$$

Finalmente, recordar que $\log_a(a) = 1$.
De acuerdo con esto, se tiene:

(a) $\log_2(32) = \log_2(2^5) = 5 \cdot \log_2(2) = 5 \cdot 1 = 5$

(b) $\log_9(81) = \log_9(9^2) = 2 \cdot \log_9(9) = 2 \cdot 1 = 2$

(c) $\log_5(5^3) = 3 \cdot \log_5(5) = 3 \cdot 1 = 3$

(d) $\log_3\left(\sqrt{243}\right) = \log_3\left(243^{\frac{1}{2}}\right) = \log_3\left(3^5\right)^{\frac{1}{2}} = \log_3\left(3^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{5}{2} \cdot \log_3(3) = \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$

4. **Encontrad una función logarítmica del tipo $f(x) = \log_a(x)$ $\log_a(x)$ que cumpla $f(125) = 3$.**

Solución:
Tiene que cumplirse $f(125) = \log_a(125) = \log_a\left(5^3\right) = 3$. Dada la definición y las propiedades de la función logaritmo, resulta

$$3 = \log_a\left(5^3\right) = 3 \cdot \log_a(5) \Rightarrow 1 = \log_a(5)$$

que solo es posible si $a = 5$. Por lo tanto, la función logarítmica que tiene que considerarse es $f(x) = \log_5(x)$.

5. **Determinad cuál de estas funciones son crecientes y cuáles decrecientes, y ordenadlas de mayor crecimiento a mayor decrecimiento. Justificad la respuesta.**

$$f(x) = \log_3(x), g(x) = \log_{0.2}(x), h(x) = \log_{13}(x), t(x) = \log_{0.1}(x)$$

Solución:

$f(x) = \log_3(x)$ y $h(x) = \log_{13}(x)$ son crecientes, porque son funciones logarítmicas y su base es mayor que 1.

$g(x) = \log_{0.2}(x)$ y $t(x) = \log_{0.1}(x)$ son decrecientes, porque son funciones logarítmica y su base es menor que 1.

Para ordenar estas funciones logarítmicas de mayor crecimiento a mayor decrecimiento, hay que tener en cuenta que si la base es mayor que 1, el crecimiento de la función es mayor cuanto menor es la base. En cambio, si la base es menor que 1, el decrecimiento de la función es mayor cuanto mayor es la base. Por lo tanto, el orden tiene que ser este:

$$f(x) = \log_3(x), h(x) = \log_{13}(x), t(x) = \log_{0.1}(x) \text{ y } g(x) = \log_{0.2}(x)$$

6. **Encontrad el valor de x que cumpla estas igualdades:**

(a) $\log_4(x) = 4$

(b) $\log_x(27) = x$

(c) $\log_{\frac{1}{2}}(4) = x$

(d) $\log_3\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{3}{2}$

Solución:
Para resolver estas igualdades, hay que aplicar la definición del logaritmo, es decir,

$$y = \log_a(x) \text{ si } x = a^y$$

De acuerdo con esta definición, tenemos:

(a) $4 = \log_4(x)$ si $x = 4^4 = 256 \Rightarrow x = 256$

(b) $\log_x(27) = x$ si $27 = x^x \Rightarrow x = 3$

(c) $\log_{\frac{1}{2}}(4) = x$ si $4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2^x} \Rightarrow x = -2$, ja que $4 = 2^2$

(d) $\log_3\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{3}{2}$ si$\sqrt{x} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^3} \Rightarrow x = 3^3 = 27$

7. **Resolved estas ecuaciones:**

- $3^{2x} - 5 \cdot 3^x = 36$
- $2\log(10x) - \log(12 - 4x) = 2$

Solución:

$3^{2x} - 5 \cdot 3^x = 36$	$\log\left(100x^2\right) - \log(12 - 4x) = \log\left(10^2\right)$
Por la propiedad de una potencia de una potencia, reescribimos $$(3^x)^2 - 5 \cdot 3^x = 36$$ Agrupamos de manera conveniente: $$(3^x)^2 - 5 \cdot 3^x - 36 = 0$$ Tomamos $t = 3^x$ y sustituimos en la ecuación: $$t^2 - 5t - 36 = 0$$ Se trata de una ecuación de segundo grado. Podemos resolverla aplicando la fórmula, y obtenemos las soluciones $$t = -4,\ t = 9$$ Deshacemos el cambio para encontrar los valores de x: $3^x = t = -4 = -2^2$ no es posible por ser -2^2 un valor negativo. $3^x = t = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2$. Sustituimos $x = 2$ en la ecuación original y comprobamos que sí es solución: $$3^{2\cdot 2} - 5 \cdot 3^2 = 81 - 45 = 36$$	Por la propiedad del cociente de logaritmos, $$\log\left(\frac{100x^2}{12 - 4x}\right) = \log(10^2)$$ Por lo tanto, $$\frac{100x^2}{12 - 4x} = 100$$ Simplificamos: $$\frac{x^2}{12 - 4x} = 1$$ Operamos: $$x^2 = 12 - 4x$$ Y ordenamos términos: $$x^2 + 4x - 12 = 0$$ Resolvemos aplicando la fórmula por ecuaciones de segundo grado y obtenemos las soluciones $$x = -6 \text{ y } x = 2$$ Finalmente, sustituimos los valores encontrados en la ecuación original y comprobamos que ambos son solución.

8. **Resolved estas ecuaciones:**

- $\ln(x) + \ln(x - 1) = 0$
- $\log(x) - \log\left(x^2\right) = \log(7)$

Solución:

$\ln(x) + \ln(x-1) = 0$	$\log(x) - \log\left(x^2\right) = \log(7)$
Aplicamos la propiedad del producto de logaritmos: $$\ln\left(x \cdot (x-1)\right) = 0$$ Aplicamos el exponencial y tenemos en cuenta que $e^0 = 1$: $$x \cdot (x-1) = 1$$ Operamos: $$x^2 - x - 1 = 0$$ Resolvemos la ecuación de segundo grado y obtenemos $$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$ Finalmente, comprobamos si las soluciones obtenidas satisfacen la ecuación original.	Aplicamos la propiedad del cociente de potencias: $$\log\left(\frac{x}{x^2}\right) = \log(7)$$ Por lo tanto, se trata de resolver $$\frac{x}{x^2} = 7$$ Ordenamos términos: $$7x^2 - x = 0$$ Y operamos: $$x \cdot (7x-1) = 0$$ de donde resulta $$x = 0, x = \frac{1}{7}$$ Finalmente, comprobamos las posibles soluciones en la ecuación original: $x = 0$ no es posible; en cambio, sí que es solución el valor $x = \frac{1}{7}$

Ejercicios para practicar con las soluciones

9. **Encontrad las funciones inversas de** $f(x) = e^{3x}$ **y** $g(x) = \ln(4x+3)$**.**

10. **Resolved las ecuaciones siguientes:**

(a) $2^{x-1} = 2^6$

(b) $5^{x+3} = \dfrac{1}{5}$

(c) $3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} = -27$

(d) $\log_5(4x) = 2 \; x = \frac{25}{4}$

(e) $\log_9(x+1) + \log_9(9 \cdot (x+1)) = 2$

(f) $3\log_2(x) - 2\log_4(x) = 2$

11. **Una sustancia se desintegra siguiendo la función**

$$D(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{5}}$$

donde D **es la cantidad (en gramos) de sustancia que hay al cabo de** t **años. ¿Qué cantidad de sustancia tendrá de aquí a 15 años?**

12. **Para predecir el crecimiento de la población de una ciudad, se utiliza la función**

$$P(t) = P_0 \cdot e^{0.03t}$$

donde P_0 **representa la población inicial y** t **representa el tiempo (en años). Si la población actual de la ciudad es 50.000 habitantes, ¿cuánto tiempo (en años) tendrá que pasar para que la población se duplique?**

Soluciones:

9. $f^{-1}(x) = \ln\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$

$g^{-1}(x) = \dfrac{e^x - 3}{4}$

10. (a) $x = 5$

(b) $x = -4$

(c) $x = 1, x = 2$

(d) $x = 2$

(e) $x = 2$

11. 12.5 gramos.

12. Cerca de 23.1 años