Iniciación a las matemáticas para la ingeniería

PID_00270093

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat
Oberta
de Catalunya

10. Continuidad de funciones

Índice

10.1. Límites de funciones

10.1.1. Noción intuitiva de límites

El límite funcional es un concepto relacionado con la tendencia de los valores de una función a medida que varían los valores de la variable y tienden a un valor determinado. El límite de una función en un valor determinado de es x igual a un número al que tiende la función cuando la variable tiende a este valor, aproximándose cada vez más al número objetivo pero no llegando nunca a tomar este valor.

El **límite de una función** en un valor x es igual a un número al que tiende la función cuando la variable tiende a este valor (sin llegar nunca a serlo). Si el límite de una función $f(x)$ en un valor a es igual a b se escribe de este modo:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

También se dice que "*la función $f(x)$ tiene límite b cuando la x tiende a a*". Por ejemplo, si $f(x)$ es una función que cumple que, cuando la x tiende a 3, la función tiende a 1, se escribirá así:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 1$$

Con la notación anterior, puede entenderse que $x \to 3$ es una forma de representar la frase "*x tiende a 3*", que significa que el número x se aproxima infinitamente a 3 pero sin llegar nunca a tomar este valor.

Así, pues, el límite de una función en un valor a da una idea de la tendencia de la función cuando el valor de la x tiende a este valor. Para estudiar el límite de una función en un valor, se puede crear una tabla con diferentes valores de la función cuyo componente x tiende al valor a (pero nunca es a).

Ejemplo. Noción intuitiva de límite.

Si la función es $f(x) = 2x + 1$, y se quiere calcular

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

podemos evaluar unos cuantos puntos que se aproximen a 1 de la manera siguiente:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \longrightarrow & f(0) = 1 \\ 0.1 & \longrightarrow & f(0.1) = 1.2 \\ 0.5 & \longrightarrow & f(0.5) = 2 \\ 0.7 & \longrightarrow & f(0.7) = 2.4 \\ 0.9 & \longrightarrow & f(0.9) = 2.8 \\ 0.99 & \longrightarrow & f(0.99) = 2.98 \end{array}$$

Parece evidente que cuanto más cerca de 1 está la x más cerca de 3 está $f(x)$. Así pues, podemos deducir

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3.$$

Ejemplo. Noción intuitiva de límite.

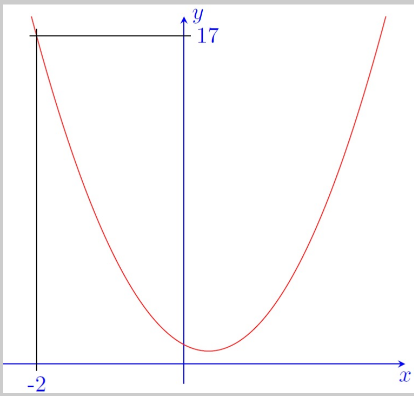
Si $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, podemos intentar calcular el límite de esta función cuando x tiende a -2. Volvemos a evaluar la función en unos cuantos puntos aproximándose a -2 igual que antes:

$$\begin{array}{rcl} -3 & \longrightarrow & f(-3) = 34 \\ -2.9 & \longrightarrow & f(-2.9) = 32.03 \\ -2.5 & \longrightarrow & f(-2.5) = 24.75 \\ -2.3 & \longrightarrow & f(-2.3) = 21.47 \\ -2.1 & \longrightarrow & f(-2.1) = 18.43 \\ -2.01 & \longrightarrow & f(-2.01) = 17.1403 \\ -2.001 & \longrightarrow & f(-2.001) = 17.014003 \end{array}$$

Con la información anterior, es fácil deducir la secuencia de valores de la función que se aproxima a 17. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 17$$

cosa que se puede observar en la gráfica



10.1.2. Concepto y definición

A partir de la noción intuitiva que podemos deducir de los ejemplos anteriores, damos la definición formal del concepto de límite de una función:

El **límite de la función** $f(x)$ cuando x tiende al valor a es b:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

si se cumple que, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, hay un número real $\delta > 0$ de manera que si $0 < |x - a| < \delta$ se cumple $|f(x) - b| < \varepsilon$.

En otras palabras, decimos que **una función** $f(x)$ **tiene límite** b **cuando** x **tiende a** a si, y solo si, dado un intervalo cualquiera centrado en b, hay un intervalo de centro a de manera que todos los punto de este intervalo, excepto el punto a, tienen su imagen en el intervalo de centro b anterior.

En general, no se recurre a la definición de límite para buscar el límite de una función en un punto, sino que se utilizan límites ya conocidos, unas reglas sencillas de cálculo con límites y el uso de tablas de valores con sucesiones cuyo límite sea el valor en el que se quiere buscar el límite.

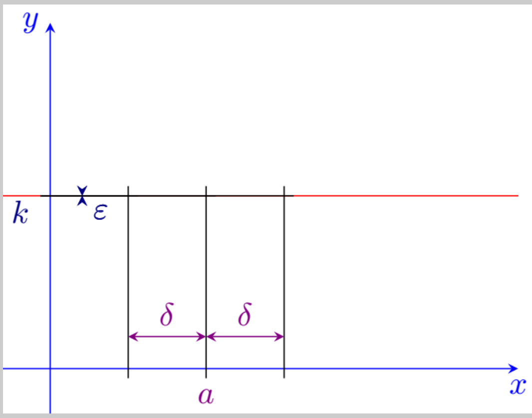
Antes de ver todas estas técnicas, veamos ejemplos sencillos que explican esta definición y la enlazan con la noción intuitiva de límite funcional que hemos discutido antes.

Ejemplo. Límite de una función constante.

Dada la función constante $f(x) = k$, para k un número cualquiera, se cumple

$$\lim_{x \to a} f(x) = k$$

para cualquier valor a.



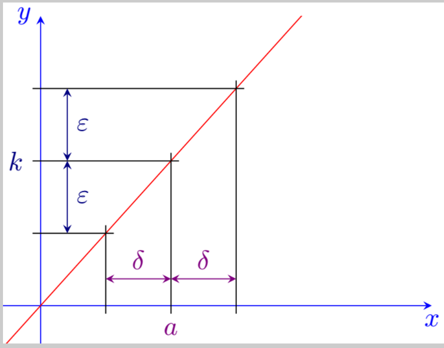
Tomamos un intervalo centrado en k tan pequeño como queramos (en la imagen cogemos $\varepsilon > 0$ tan pequeña que casi parece 0). Consideramos cualquier intervalo centrado en a y le llamamos $(a - \delta, a + \delta)$ para $\delta > 0$ cualquiera. La imagen de cada punto de este intervalo por la función valdrá exactamente k (ya que la función es constante), y por lo tanto cae dentro del intervalo $(k - \varepsilon, k + \varepsilon)$.

Ejemplo. Límite de la función identidad.
Consideramos ahora la función identidad $f(x) = x$. Para cualquier valor a se cumple

$$\lim_{x\to a} f(x) = a.$$

Cogemos cualquier valor $\varepsilon > 0$ y consideramos el intervalo $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$, que no es más que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ porque $f(a) = a$. Ahora tenemos que encontrar un valor $\delta > 0$ que dependa solo de la ε (pero no del valor a) tal que la imagen del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ esté dentro del intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Esto es, considerando que evaluar un intervalo no es más que evaluar todos los puntos que pertenecen,

$$f\left((a-\delta, a+\delta)\right) \subseteq \left(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon\right).$$



En nuestro caso de la función identidad $f(x) = x$, no es más que encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$(a-\delta, a+\delta) \subseteq (a-\varepsilon, a+\varepsilon).$$

Esto se cumple tomando cualquier $\delta \leq \varepsilon$.

10.1.3. Operaciones con límites

El cálculo de límites respeta habitualmente las operaciones básicas: si se suman, restan, multiplican, dividen, y se calcula la potencia del límite de dos funciones, da el límite de operar estas dos funciones. Esto es:

Suma y resta El límite de la suma (o resta) de dos funciones en un punto es igual a la suma (o resta) de límites de estas funciones en el punto en cuestión, es decir,

$$\lim_{x\to a} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

Producto El límite del producto de dos funciones en un punto es igual al producto de límites de estas funciones en el punto en cuestión, es decir,

$$\lim_{x\to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Si observamos las dos primeras propiedades mencionadas, podemos ver que el cálculo del límite de un polinomio en cualquier número no es más que el valor que toma el polinomio en este número particular. Esto se debe a que un polinomio no contiene más que sumas, restas y productos, cuyo límite no es más que la suma, resta y producto de límites. Por lo tanto, solo se tiene que calcular el límite de x, que coincide, como hemos visto en los ejemplos anteriores, con el número al que tiende la x, y operarlo con las operaciones del polinomio.

División El límite del cociente de dos funciones en un punto es igual al cociente de límites de estas funciones en el punto en cuestión siempre que el denominador no sea 0, es decir,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Exponencial El límite del exponencial de una función por otra en un punto es igual al exponencial de límites de estas funciones en el punto en cuestión siempre que ambas funciones no tomen el valor 0 a la vez, es decir,

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

10.1.4. Límites laterales

El **límite lateral izquierdo** de una función $f(x)$ en un punto a es el límite de la función cuando se considera que la variable solo puede tomar valores más pequeños que el punto, esto es, el valor que toma la función cuando nos aproximamos en su punto objetivo desde puntos por la izquierda de este. Este límite se denota por

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=b$$

El **límite lateral derecho** de una función $f(x)$ en un punto a es el límite de la función cuando se considera que la variable solo puede tomar valores mayores que el punto, esto es, el valor que toma la función cuando nos aproximamos en su punto objetivo desde puntos por la derecha de este. Este límite se denota por

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=b$$

En particular, podemos ver que si el límite de una función en un cierto punto existe, coincidirá con los límites laterales cuando estos tengan sentido. El hecho recíproco también es cierto: si los dos límites laterales existen y coinciden con el mismo valor, el límite de la función también existirá y tomará el mismo valor. Aun así, si los dos límites laterales toman valores diferentes, el límite de la función en aquel punto no existe (aunque la función sí que sea definida en aquel punto).

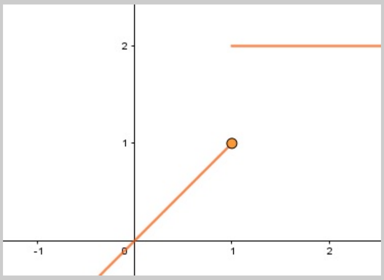
Matemáticamente, esto se puede escribir

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)\text{ existe y vale } b \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=b}$$

Ejemplo. Límites laterales.

Consideramos la función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Observamos que el límite por la izquierda en 1 da

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1,$$

mientras que el límite por la derecha vale

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2.$$

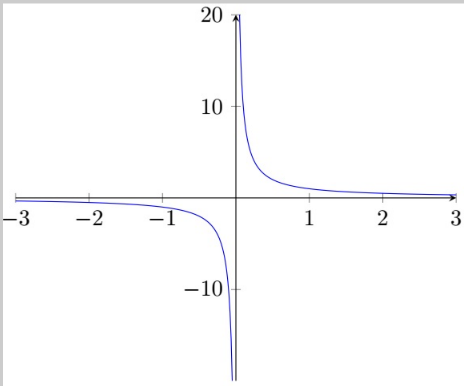
Como los dos límites no coinciden, podemos afirmar que el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to 1$ no existe, a pesar de que la función en este punto es definida y toma valor $f(1) = 1$.

En cambio, si calculamos los límites laterales cuando $x \to 1.5$, podemos ver que los dos existen y valen 2, por lo tanto $\lim_{x \to 1.5} f(x) = 2$ y coincide con el valor $f(1.5)$.

Ejemplo. Límites laterales divergentes.
Consideramos ahora la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y estudiamos sus límites laterales cuando $x \to 0$.

Para calcular el límite lateral por la derecha, tenemos que considerar valores positivos de x que aproximen a 0:

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longrightarrow & f(1) = 1 \\ 0.1 & \longrightarrow & f(0.1) = 10 \\ 0.01 & \longrightarrow & f(0.01) = 100 \\ 0.001 & \longrightarrow & f(0.001) = 1000 \\ 0.0001 & \longrightarrow & f(0.0001) = 10000 \end{array}$$



Es fácil darse cuenta que, cuanto más nos aproximamos al valor 0 por la derecha, más grande es el valor que toma la función, pero esta no se aproxima a ningún número en concreto, sino que crece infinitamente. Por este motivo, diremos que el límite lateral a 0 por la derecha **diverge**:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

De manera similar, se puede comprobar como el límite lateral a 0 por la izquierda también diverge:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

Solo con uno de estos dos hechos ya podemos afirmar que el límite de la función en 0 no existe. Además, al contrario que en el ejemplo anterior, la función no existe en este punto.

10.1.5. Límites al infinito

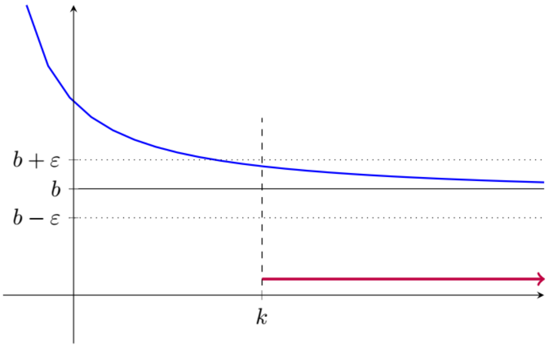
Se dice que el **límite de una función** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** $+\infty$ vale b si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un cierto número k tal que, para $x > k$, $|f(x) - b| < \varepsilon$.
De manera similar, se dice que el **límite de una función** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** $-\infty$ vale b si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un cierto número k tal que, para $x < k$, $|f(x) - b| < \varepsilon$.

El concepto de infinito no se empieza a utilizar asiduamente hasta el siglo XV para designar lo que es mayor que cualquier otra cosa imaginable. Es entonces cuando se empieza a usar como símbolo una curva llamada *lemniscata* ∞.

Estos límites se denotan respectivamente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Intuitivamente, que el punto b sea el límite de la función en significa que la función se acerca más a b cuanto mayor sea el punto x en la que la evaluamos. En particular, todos los números mayores que un cierto número k están muy cerca de b (en el intervalo de radio ε), tal como puede verse en la gráfica:



Para poder hacernos una idea de cuál es el valor de este límite, podemos evaluar la función en números cada vez mayores de manera similar a como lo habíamos hecho antes.

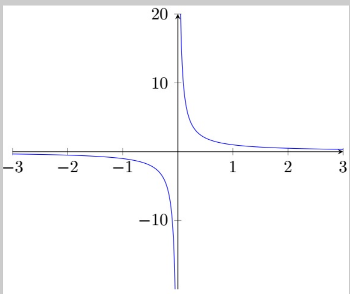
Ejemplo. Cálculo de límites al infinito.
Consideramos de nuevo la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y estudiamos sus límites en el infinito.
Para calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, evaluamos

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longrightarrow & f(1) = 1 \\ 10 & \longrightarrow & f(10) = 0.1 \\ 100 & \longrightarrow & f(100) = 0.01 \\ 1000 & \longrightarrow & f(1000) = 0.001 \\ 10000 & \longrightarrow & f(10000) = 0.0001 \\ 100000 & \longrightarrow & f(100000) = 0.00001 \end{array}$$

de donde podemos deducir

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Para demostrarlo, tenemos que buscar el valor k (en función de ε) tal que, para $x > k$, tenemos $|f(x) - 0| < \varepsilon$. En particular, si cogemos $k \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$, la condición se satisface.



De manera similar podemos comprobar como el límite en $-\infty$ también satisface:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Ejemplo. Cálculo del límite en el infinito de un polinomio.

Calcular el límite de un polinomio en el infinito es una tarea senzilla si analizamos cada uno de los monomios que lo forman por separado.

A medida que x toma valores mayores, el término que crece a más velocidad será siempre aquel que tiene el exponente más grande, y por lo tanto el límite del polinomio cuando $x \to +\infty$ será ∞ con el mismo signo que el coeficiente del monomio de grado superior al polinomio (**término dominante**).

Por ejemplo, $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 - x - 7 = +\infty$, mientras que $\lim_{x\to+\infty} -x^5 + 2x^2 + 7 = -\infty$, ya que los términos de grado inferior crecen hacia ∞ a velocidad más lenta que el término dominante, y por lo tanto, cuando x es bastante grande, restarlos no hace variar prácticamente el valor del polinomio.

Por otro lado, el cálculo del límite de un polinomio cuando $x \to -\infty$ será ∞, pero para saber el signo correspondiente tenemos que separar dos casos:

- Si el grado del término dominante es **par**, el signo será el mismo que en el del coeficiente del del monomio de mayor grado.
- Si el grado del término dominante es **impar**, el signo será opuesto al del coeficiente del monomio de mayor grado, ya que estaremos evaluando números negativos y por lo tanto el signo tendrá que cambiar.

Con los ejemplos anteriores, $\lim_{x\to-\infty} 3x^2-x-7 = -\infty$, y $\lim_{x\to-\infty} -x^5+2x^2+7 = +\infty$.

10.1.6. Reglas básicas de cálculo de límites

A la hora de encontrar límites hay algunas reglas sencillas que pueden deducirse de la definición de límite y que es útil tener presentes para agilizar el cálculo:

$\boxed{k \cdot \infty = \infty, k \neq 0}$ En un producto, si un factor tiende a infinito y el otro tiende a un e 0, el producto tiende a infinito y tiene un signo que resulta del signo del infinito del primer factor multiplicado por el signo del número al que tiende el segundo factor.

Ejemplo. Cálculo de límites de tipo $k \cdot \infty = \infty, k \neq 0$.

- $\lim_{x\to+\infty} (2x^2+1)\cdot\left(4-\frac{1}{x}\right) = [+\infty \cdot 4] = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} 5x\cdot\left(4-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x}\right) = [-\infty \cdot 4] = -\infty$
- $\lim_{x\to0^+} (-3x^2+1)\cdot\frac{1}{x} = [-3\cdot(+\infty)] = -\infty$
- $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^5}\cdot\left(-3-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x}\right) = [-\infty\cdot(-3)] = +\infty$

$\boxed{+\infty + \infty = +\infty, k + \infty = +\infty,\ -\infty - \infty = -\infty, k - \infty = -\infty}$ En una suma, si uno o más sumandos tienden a infinito con el mismo signo, la suma tiende a infinito con el signo correspondiente.

Ejemplo. Cálculo de límites de tipo $k + \infty = \infty$, $+\infty + \infty = +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x} + 2x^2 + 7\right) = [-\infty + 7] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x} + 7 + \frac{2}{x}\right) = [+\infty + 7] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x} + x) = [+\infty + \infty] = +\infty$

$\boxed{\frac{k}{\infty} = 0}$ En un cociente, si el denominador tiende a infinito y el numerador tiende hacia una constante k, el cociente tiende a 0.

Ejemplo. Cálculo de límites de tipo $\frac{k}{\infty} = 0$.

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{6}{x^4 - 3} = \left[\frac{6}{} + \infty\right] = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{5 + 2x}{4 - \frac{6}{x}} = \left[\frac{5}{+\infty}\right] = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{4 - \frac{6}{x}}{2x + 4} = \left[\frac{4}{-\infty}\right] = 0^-$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^4 + 2}{\frac{6}{x^2+8}} = \left[\frac{2}{+\infty}\right] = 0^+$

$\boxed{\frac{k}{0} = \infty, k \neq 0}$ En un cociente, si el numerador tiende a una constante diferente de nador tiende a 0, el cociente tiende a infinito con un signo que resulta del signo para la dirección que se aproxima al 0 del denominador multiplicado por el signo del número al que tiende el numerador.

Ejemplo. Cálculo de límites de tipo $\frac{k}{0} = \infty, k \neq 0$.

- $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{x^2 + 2}{x - 4} = \left[\frac{18}{0^+}\right] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{3x^2 + 1}{x - 2} = \left[\frac{13}{0^-}\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{3x^2 + 1}{(x - 2)^2} = \left[\frac{13}{0^+}\right] = +\infty$

10.1.7. Indeterminaciones

Normalmente, para poder calcular el límite de una función en un punto nos basaremos en las propiedades de cálculo estudiadas previamente. Pero ¿qué ocurre cuando estamos en uno de los casos en los que no podemos aplicarlas porque no funcionan (como por ejemplo cuando el límite del denominador de una fracción vale 0, o cuando tanto la base como el exponente de una potencia valen 0)?

Hay muchos casos en los que el límite de la función en un punto no puede calcularse porque el resultado no es ningún número; ni siquiera es infinito. En estos casos decimos que estamos ante una **indeterminación**, y cada una tiene que resolverse de una manera particular para poder encontrar el valor del límite en aquel punto.

Veamos los diferentes tipos de indeterminaciones:

$\boxed{\text{Indeterminación de tipo } \frac{0}{0}}$ Suele producirse cuando nuestra función es resultado de un cociente de polinomios cuyas funciones tienden a 0 en el punto para el que queremos calcular el límite, y cuando no podemos aplicar por lo tanto la regla para el límite de una división.

Cuando nos encontramos ante esta indeterminación causada por una fracción de polinomios, el problema es producto de que tanto el polinomio del numerador como el del denominador comparten una raíz k. Solo hace falta factorizar ambos polinomios y dividir los factores comunes para resolver la indeterminación.

Ejemplo. Indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$.

Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ el límite en 2 es una indeterminación, ya que en la fracción

$$\frac{\lim_{x\to 2} x^2 - 4}{\lim_{x\to 2} x - 2}$$

los límites del numerador y el denominador valen 0.

Las raíces del numerador son $x = \pm 2$, mientras que el numerador solo se anula en $x = 2$. Por lo tanto, la raíz $x = 2$ es una raíz común a los dos polinomios, y

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{1} = 4.$$

$\boxed{\text{Indeterminación de tipo } \frac{\infty}{\infty}}$ Se trata de límites en que la función es una fracción el numerador y denominador de la cual tienden a ∞ (independientemente del signo del infinito). El numerador y denominador de la fracción son a menudo polinomios (es el caso que encontraremos a menudo en este curso).

En este caso escribimos $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ y buscamos el término dominante de cada polinomio (el término de grado superior), y dividimos cada uno de los dos polinomios entre el término dominante, de forma que casi todos los términos de cada polinomio quedarán convertidos en límites del tipo $\dfrac{k}{\infty}$, que ya sabemos que se anulan. Los únicos términos que no se anularán son los del mismo grado que el término dominante, en los que se cancelan las variables y quedan solo sus coeficientes.

Supongamos de momento que el numerador se escribe $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, con $a_i \in \mathbb{R}$ los coeficientes del polinomio, y el denominador $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, también con $b_i \in \mathbb{R}$.

Supongamos, además, que $p(x)$ es de grado superior a $q(x)$ $\boxed{n > m}$, y el término dominante es x^n. Entonces, si dividimos $p(x)$ y $q(x)$ entre el término dominante x^n queda

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{x^n} &= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{x^n} \\ &= \frac{a_n x^n}{x^n} + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{x^n} + \ldots + \frac{a_1 x}{x^n} + \frac{a_0}{x^n} \\ &= a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^n} \end{aligned}$$

y, similarmente,

$$\frac{q(x)}{x^n} = \frac{b_m}{x^{n-m}} + \ldots \frac{b_1}{x^n}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{x^n} &= a_n \\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{q(x)}{x^n} &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, el límite queda

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{p(x)}{x^n}}{\frac{q(x)}{x^n}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{0} = \boxed{\infty}$$

El límite será ∞ y, para saber el signo, tendremos que separar el caso $+\infty$ del caso $-\infty$, fijarnos en el signo de los coeficientes de los términos dominantes y si los términos dominantes son de grado par o impar.

Similarmente, si el grado de $q(x)$ fuera superior al de $p(x)$ $\boxed{m > n}$, dividiríamos el numerador y el denominador por x^m, obteniendo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{x^m} &= 0 \\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{q(x)}{x^m} &= b_m \end{aligned}$$

Y, por lo tanto,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{p(x)}{x^m}}{\frac{q(x)}{x^m}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{0}{b_m} = \boxed{0}$$

Finalmente, si el grado de $q(x)$ fuera igual al grado de $p(x)$ $\boxed{n = m}$, el límite anterior quedaría

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{p(x)}{x^n}}{\frac{q(x)}{x^n}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} = \boxed{\frac{a_n}{b_m}}$$

y en este caso el resultado del límite sería el cociente entre los coeficientes de los términos dominantes.

Ejemplo. Indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2}{2x^2+7x-5}.$$

Si intentamos calcular directamente el límite, obtenemos una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

Observamos como tanto el numerador como el denominador tienen grado 2, de manera que tendremos que dividir los dos polinomios por x^2:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2}{2x^2+7x-5} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2-2}{x^2}}{\frac{2x^2+7x-5}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 3-\frac{2}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}} \\
&= \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Y esto no es más que la fracción entre los coeficientes de los términos dominantes de los dos polinomios.

$\boxed{\text{Indeterminación de tipo } 0\cdot\infty}$ Esta situación siempre se da en límites del tipo

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x),$$

donde uno de los límites de las funciones vale 0 y el otro ∞ (independientemente de su signo).

Vemos que el producto podemos reescribirlo así:

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

de manera que la nostra indeterminació s'ha convertit en una del tipus $\dfrac{\infty}{\infty}$, que ja sabem resoldre.

$\boxed{\text{Indeterminación de tipo } \infty-\infty}$ Esta indeterminación es habitual en diferencias de n estos casos tiene que multiplicarse y dividir la función por su conjugada (la misma expresión cambiando la resta por una suma) y usar la igualdad notable $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$.

Ejemplo. Indeterminación de tipo $\infty - \infty$.

Calculamos el límite para $x \to +\infty$ de la función $f(x) = \sqrt{x^2+x} - (x+1)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - (x+1) &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - (x+1) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x} + (x+1)}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - (x+1)\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+x} + (x+1)\right)}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x - \left(x^2+2x+1\right)}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x-1}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)}
\end{aligned}$$

Este límite es una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, donde el numerador es un polinomio de grado 1 y el denominador también tiene como término dominante de grado 1 (puesto que el exponente de x^2 se anula en cierto modo con la raíz cuadrada). Así, para resolver esta nueva indeterminación tendremos que dividir numerador y denominador por x:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - (x+1) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-x-1}{x}}{\frac{(\sqrt{x^2+x}+(x+1))}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 + \frac{1}{x}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} -1-\frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 + \frac{1}{x}} \\
&= \frac{-1-0}{\sqrt{1+0}+1+0} = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Indeterminación de tipo } 1^{\infty}}$ Es una indeterminación que se da cuando tenemos una función exponencial en la que la base tiende a 1 y el exponente a ∞.

Esto es, si tenemos nuestra función escrita como $f(x)^{g(x)}$ on $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ da lugar a este tipo de indeterminación.

Se soluciona mediante el cambio

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}.$$

Ejemplo. Indeterminación de tipo 1^{∞}.

Calculamos $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+2}\right)^{x}$, y da lugar a una indeterminación del tipo 1^{∞}. Por lo tanto, operamos

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+2}-1\right)\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x+2}=\frac{3}{2},$$

yaa que es una indeterminación de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ con los polinomios del numerador y denominador del mismo grado.
Por lo tanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+2}\right)^{x}=e^{\frac{3}{2}}.$$

10.2. Continuidades

10.2.1. Función continua en un punto

Se dice que una función $f(x)$ es **continua en un punto** x_0 si se puede evaluar en este punto y su valor coincide con el límite de la función cuando x tiende a x_0, es decir,

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Intuitivamente, esto quiere decir que el valor que toma la función en el punto x_0 es exactamente aquel al que nos aproximamos a medida que evaluamos puntos cada vez más cercanos a x_0. Dicho con otras palabras, cuando dibujamos la gráfica de la función, no da ningún salto y podemos reseguirla toda sin levantar el bolígrafo del papel.

Ejemplo. Consideramos el ejemplo que ya hemos estudiado previamente,

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\le 1\\ 2 & \text{si } x>1\end{cases}$$

y estudiemos la continuidad en $x=1$.
En este caso, como hemos visto, los límites laterales de la función no coinciden, y por lo tanto el límite de la función en $x=1$ no existe. Como que no existe, no puede ser igual al valor de la función en el punto $f(1)=1$, y la función es discontinua en este punto.

Se dice que una función es **continua** cuando lo es en todos los puntos de su dominio.

10.2.2. Discontinuidades de una función

Una función que no es continua en un punto particular puede serlo por diferentes causas. Puede ser que la función no esté definida en aquel punto particular, pero que los límites laterales sí que existan; puede ser que los límites laterales no coincidan (y por lo tanto que el límite en aquel punto no esté definido); puede ser que el límite de la función en el punto no exista (ya sea porque los límites laterales no coinciden o porque diverjan) y que la función tampoco esté definida, etc.

Seguidamente estudiaremos tres casos de discontinuidad de funciones, que son los que encontraremos más habitualmente.

Discontinuidad evitable Este tipo de discontinuidad se da cuando la función no está definida en el punto x_0 pero los límites laterales existen y coinciden. Es decir,

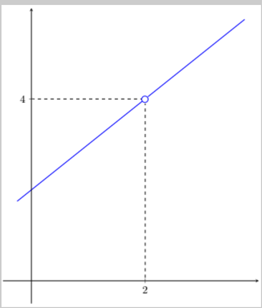
$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x), \text{ pero } \nexists f(x_0).}$$

Se usa el término *discontinuidad evitable* porque es una discontinuidad que puede evitarse si redefinimos la función para que sea continua, como cuando el valor en el punto problemático es igual al límite de la función en aquel punto, es decir, considerando la función $\widetilde{f}$ definida por

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Ejemplo. Discontinuidad evitable.

Consideramos $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$. Tal como hemos estudiado previamente, esta función no está definida en el punto $x = 2$, pero el límite cuando x tiende a 2 sí que existe, y vale 4. Por lo tanto, estamos ante una discontinuidad evitable en $x = 2$.



Entonces, consideremos la función

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

La función $\widetilde{f}(x)$ es idèntica en casi todos los puntos a la función $f(x)$, salvo en el punto $x = 2$, donde $f(x)$ no está definida pero $\widetilde{f}(x)$ sí que lo está. El límite de $\widetilde{f}(x)$ en $x \to 2$ coincide con su valor en el punto, y por lo tanto la función es continua en este punto.

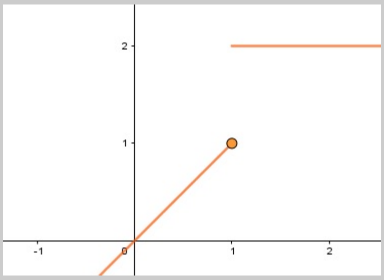
Discontinuidad de salto Es el caso en el que los dos límites laterales de la función existen pero no toman el mismo valor, independientemente de si la función está definida en aquel punto o no. Es decir,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)}$$

Ejemplo. Discontinuidad de salto.
Sea $f(x)$ la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Antes hemos comprobado que el límite por la izquierda de la función en $x \to 1$ vale 1 y por la derecha vale 2, y por lo tanto la función tiene una discontinuidad de salto en $x = 1$.

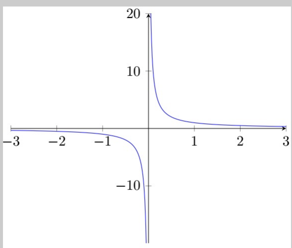


Discontinuidad asintótica Esta discontinuidad es una versión extrema del caso anterior, en el que al menos uno de los dos límites laterales diverge. Esto es,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty.}$$

Podría visualizarse en cierto modo como una discontinuidad de salto infinito.

Ejemplo. Discontinuidad asintótica.
Consideramos la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



Si calculamos los límites laterales en 0 de esta función, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

Los dos límites divergen, y por lo tanto tenemos una discontinuidad asintótica.

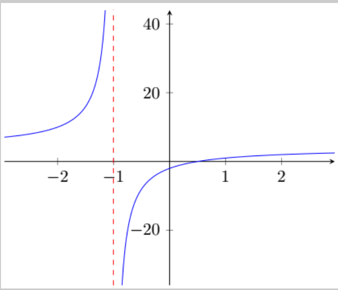
10.2.3. Asíntotas

Una **asíntota** es una recta a la que se aproxima la función sin llegar nunca a tocarla porque x tiende a un cierto número a (o a los infinitos).

Según su inclinación, las asíntotas pueden ser verticales, horizontales u oblicuas.

Asíntotas verticales Se dan en un punto k del eje X cuando al menos uno de los límites laterales en este punto tiende a $\pm\infty$, es decir, cuando en la función tiene una discontinuidad asintótica en k. En este caso, la recta de ecuación $\boxed{x = k}$ es la asíntota vertical.

Ejemplo. Asíntota vertical.
La función $f(x) = 3 + \dfrac{x-5}{x+1}$ tiene una discontinuidad asintótica en $x = -1$, y, por lo tanto, la recta que tiene por ecuación $x = -1$ es la asíntota vertical (en rojo en la imagen).

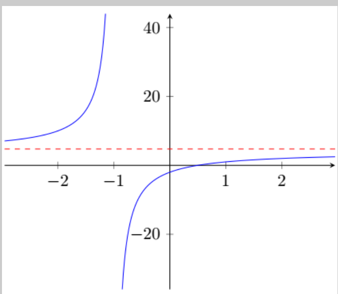


Asíntotas horizontales Se dan cuando existe el límite en alguno de los infinitos. Para $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$, la recta de ecuación $\boxed{y = k}$ es la asíntota horizontal (ídem con el límite con $-\infty$). Una función puede tener hasta dos asíntotas horizontales si los dos límites a $\pm\infty$ existen y toman valores diferentes.

Ejemplo. Asíntota horizontal.
Tomamos de nuevo la función $f(x) = 3 + \dfrac{x-5}{x+1}$ y calculamos los límites:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= 3\\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= 3\end{aligned}$$

En este caso particular los dos límites existen y tienden al mismo valor, 3. Por lo tanto, la recta de ecuación $y = 3$ será la única asíntota horizontal de la función (en rojo en la imagen).



$\boxed{\textbf{Asíntotas oblicuas}}$ Una asíntota oblicua es una recta de ecuación $y = ax + b$ a cuya función se aproxima a medida que x tiende a $\pm\infty$. Para encontrar la ecuación de la recta, tenemos que encontrar los coeficientes a, b tales que

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Igual que las asíntotas horizontales, una función puede tener hasta dos asíntotas oblicuas: una para el límite en $+\infty$ y otra para el límite en $-\infty$.

Las asíntotas oblicuas suelen darse a menudo en funciones cocientes de polinomios $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ en los que el grado del numerador $p(x)$ supera en 1 el grado del denominador $q(x)$. En este caso particular, la ecuación de la asíntota es producto del cociente de la división de polinomios que define la función $f(x)$:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resta}}{\text{divisor}}$$

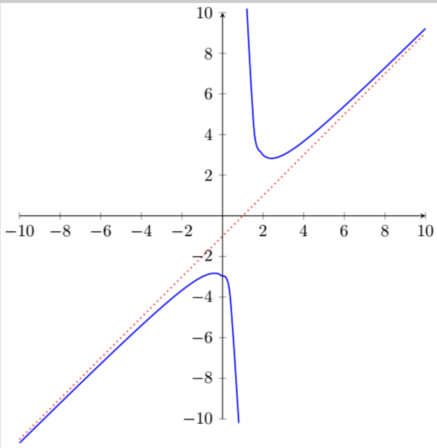
Y, al calcular el límite cuando x tiende a infinito, el último término tiende a 0 y queda solo el cociente (que es de grado 1 por ser la diferencia entre los grados de los polinomios), que será la ecuación de la asíntota.

Ejemplo. Asíntota oblicua para un cociente de polinomios.

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$. Cuando calculamos la división de polinomios nos queda

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1} = \boxed{x - 1} + \frac{2}{x - 1},$$

donde $x - 1$ es el cociente y 2 el resto de la división. Por lo tanto, la asíntota tiene por ecuación $x - 1$ (en rojo en la imagen), y vemos que es la misma asíntota para los dos límites.



En el caso general, en el que $f(x)$ no tiene que ser necesariamente un cociente de polinomios, tiene que usarse la definición de asíntota oblicua directamente para encontrar la ecuación de la recta.

Si una función tiene asíntota horizontal en uno de los límites, en aquel límite no podrá tener asíntota oblicua. Fijaos que una asíntota horizontal es un caso particular de asíntota oblicua en $a = 0$.

Hay una asíntota oblicua si, y solo si, se cumple

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \infty\\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= a\\ \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax] &= b\end{aligned}$$

donde a, b son números reales y $y = ax + b$ es la ecuación de la asíntota.

Ejemplo. Asíntota oblicua usando las condiciones necesarias y suficientes.

Sea $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$. Calculamos los límites de antes para comprobar que tiene asíntota oblicua. Primeramente, comprobamos que el límite al infinito diverge,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+3}{x-1} = +\infty$$

ya que el numerador es de grado superior al denominador. Para encontrar el coeficiente a, calculamos el cociente entre x,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2-2x+3}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^2-x} = 1$$

ya que tanto el numerador como el denominador son ahora polinomios de grado 2, y la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$ se resuelve como fracción de los términos dominantes de los dos polinomios. Finalmente, sustituimos el valor $a = 1$ encontrado al tercer límite para encontrar b,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-2x+3}{x-1}-x\right] &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-2x+3}{x-1}-\frac{x(x-1)}{x-1}\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-2x+3}{x-1}-\frac{x^2-x)}{x-1}\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x+3}{x-1} = -1\end{aligned}$$

de donde tenemos $b = -1$, y por lo tanto la ecuación de la asíntota oblicua es

$$y = x - 1.$$

Resumen

Continuidad de funciones

Definición límite. El **límite de una función** en un valor x es igual a un número al que tiende la función cuando la variable tiende a este valor (sin llegar nunca a serlo). Si el límite de una función $f(x)$ en un valor a es igual a b, se escribe de este modo:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

La definición formal del concepto de límite de una función es:

> El **límite de la función** $f(x)$ cuando x tiende al valor a es b,
> $$\lim_{x\to a} f(x) = b$$
> si se cumple que, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, hay un número real $\delta > 0$ de manera que si $0 < |x-a| < \delta$ se cumple $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Operaciones con límites

Suma y resta El límite de la suma (o resta) de dos funciones en un punto es igual a la suma (o resta) de límites de estas funciones en el punto en cuestión, es decir,

$$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

Producto El límite del producto de dos funciones en un punto es igual al producto de límites de estas funciones en el punto en cuestión, es decir,

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

División El límite del cociente de dos funciones en un punto es igual al cociente de límites de estas funciones en el punto en cuestión siempre que el denominador no sea 0, es decir,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Exponencial El límite del exponencial de una función por otra en un punto es igual al exponencial de límite de estas funciones en el punto en cuestión siempre que ambas funciones no tomen el valor 0 a la vez, es decir,

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

Límites laterales. El **límite lateral por la izquierda (la derecha)** de una función $f(x)$ en un punto a es el límite de la función cuando se considera que la variable solo puede tomar valores menores (o mayores) que el punto, esto es, el valor que toma la función cuando nos aproximamos a su punto objetivo desde puntos por la izquierda (o por la derecha) de este. Este límite se denota por

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b \qquad (\lim_{x\to a^+} f(x) = b)$$

En particular, podemos ver que si el límite de una función en un cierto punto existe, coincidirá con los límites laterales cuando estos tengan sentido. El hecho recíproco también es cierto: si los dos límites laterales existen y coinciden con el mismo valor, el límite de la función también existirá y tomará el mismo valor. Aun así, si los dos límites laterales toman valores diferentes, el límite de la función en aquel punto no existe (aunque la función sí esté definida en aquel punto).

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) \text{ existe y vale } b \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = b}$$

Límites al infinito

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = b$$

Se dice que el **límite de una función** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** $+\infty$ vale b si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un cierto número k tal que si $x > k$ entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$.
De manera similar, se dice que el **límite de una función** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** $-\infty$ vale b si, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un cierto número k tal que si $x < k$ entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Reglas de cálculo

$\boxed{k \cdot \infty = \infty, k \neq 0}$ En un producto, si un factor tiende a infinito y el otro tiende a un ende a infinito, y tiene un signo que resulta del signo del infinito del primer factor multiplicado por el signo del número al que tiende el segundo factor.

$\boxed{\infty + \infty = \infty, k + \infty = \infty}$ En una suma, si uno o más sumandos tienden a infinito con el mismo signo, la suma tinde a infinito con el signo correspondiente.

$\boxed{\frac{k}{\infty} = 0}$ En un cociente, si el denominador tiende a infinito y el numerador tiende hacia una constante k, el cociente tiende a 0.

$\boxed{\frac{k}{0} = \infty, k \neq 0}$ En un cociente, si el numerador tiende a una constante diferente de 0 y el denominador tiende a 0, el cociente tiende a infinito, y tiene un signo que del signo de para qué dirección se aproxima el 0 del denominador multiplicado por el signo del número al cual tiende el numerador.

Indeterminaciones

$\boxed{\frac{0}{0}}$ Esta indeterminación suele darse cuando la función es resultado de un cociente de polinomios, en que las dos tienden a 0 en el punto para el que queremos calcular el límite, y por lo tanto no podemos aplicar la regla para el límite de una división. Para resolverla normalmente, basta con factorizar ambos polinomios y dividir los factores comunes.

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ Se trata de límites en los que la función es una fracción cuyo numerador y denominador tienden a ∞ (independientemente del signo del infinito). En este caso, si n es el grado del término dominante del polinomio del numerador y m el del denominador tenemos

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\begin{cases}0 & \text{si} \quad m>n\\ \infty & \text{si} \quad m<n\\ \dfrac{a_n}{b_n} & \text{si} \quad m=n\end{cases}$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de los términos dominantes de $p(x)$ y $q(x)$ respectivamente y el signo de ∞ para $m<n$ se tendrá que estudiar en cada caso.

$\boxed{0\cdot\infty}$ Esta situación simpre se da en límites del tipo

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x),$$

donde uno de los límites de las funciones vale 0 y el otro ∞ (independientemente de su signo).
Vemos que podemos reescribir el producto como

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

de modo que nuestra indeterminación se ha convertido en una del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que ya sabemos resolver.

$\boxed{\infty-\infty}$ Esta indeterminación es habitual en diferencias de funciones que contienen n estos casos tiene que multiplicarse y dividirse la función por su conjugada (la misma expresión cambiando la resta por una suma) y usar la igualdad notable $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$\boxed{1^\infty}$ Es una indeterminación que se da cuando tenemos una función exponencial en la que la base tiende hacia 1 y el exponente hacia ∞.

Esto es, si tenemos nuestra función escrita como $f(x)^{g(x)}$ para $\lim_{x\to a} f(x)=1$ y $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ da lugar a este tipo de indeterminación.

Se soluciona mediante el cambio

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}.$$

Definición función continua. Se dice que una función $f(x)$ es **continua en un punto** x_0 si la función se puede evaluar en este punto y su valor coincide con el límite de la función cuando x tiende a x_0, es decir,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Se dice que una función es **continua** cuando es continua en todos los puntos de su dominio.

Tipos de discontinuidades

Discontinuidad evitable Este tipo de discontinuidad se da cuando la función no está definida en el punto x_0, pero los límites laterales sí que existen y coinciden. Es decir,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x),\ \text{però } \nexists f(x0).}$$

Discontinuidad de salto Es el caso cuando los dos límites laterales de la función existen pero no toman el mismo valor, independientemente de si la función está definida en aquel punto o no. Es decir,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)}$$

Discontinuidad asintótica Esta discontinuidad es una versión extrema del caso anterior, en que al menos uno de los dos límites laterales diverge. Esto es,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \ \text{o} \ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty.}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Se dan en un punto k del eje X cuando al menos uno de los límites laterales en este punto tiende a $\pm\infty$, es decir, cuando en la función tiene una discontinuidad asintótica en k. En este caso, la recta de ecuación $\boxed{x = k}$ es la asíntota vertical.

Asíntotas horizontales Se dan cuando existe el límite en alguno de los infinitos. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$, la recta de ecuación $\boxed{y = k}$ es la asíntota horizontal (ídem con el límite con $-\infty$). Una función puede tener hasta dos asíntotas horizontales si los dos límites a $\pm\infty$ existen y toman valores diferentes.

Asíntotas oblicuas Si, y solo si, se cumple

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \infty \\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= a \\ \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] &= b \end{aligned}$$

donde a, b son números reales y $y = ax + b$ es la ecuación de la asíntota.

Ejercicios resueltos

1. **Calculad los siguientes límites, si existen, paso a paso:**

(a) $\lim_{x\to 3} x^3 - 2x^2 + 1$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{2x^3 - 4x}{3x - 5}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x} - (x+1)\right]$

(d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{2x^3 + x^2 - 9}$

(e) $\lim_{x\to 2} \frac{-19}{(x-2)^3}$

(f) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}$

(g) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(h) $\lim_{x\to a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$

(i) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x + 1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

(j) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} - x\right)$

Solución:

(a) En este primer límite basta con sustituir el valor de x que es 3 en la función de la cual calculamos el límite, así obtenemos que el límite es 10.

(b) Igual que hemos hecho en el caso anterior, si sustituimos las x de la función por 0 obtenemos que el límite es 0.

(c) En este caso, en principio da indeterminación $\infty - \infty$, y por lo tanto lo que haremos será multiplicar por el conjugado:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x} - (x+1)\right] &= \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{\left(\sqrt{x^2+x} - (x+1)\right)\left(\sqrt{x^2+x} + (x+1)\right)}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)}\right] \\
&= \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^2 + x - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)}\right] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{-x-1}{\sqrt{x^2+x} + (x+1)}\right] \\
&= \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{\frac{-x-1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} + \frac{(x+1)}{x}}\right] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{-1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 + \frac{1}{x}}\right] = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

(d) Vemos que es el cociente de dos polinomios del mismo grado, y por lo tanto,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 1}{2x^3 + x^2 - 9} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^3 - x^2 + 1}{x^3}}{\frac{2x^3 + x^2 - 9}{x^3}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{9}{x^3}} = \frac{1}{2}$$

(e) Observamos que en este caso, si sustituimos los valores de x por 0, nos queda $\frac{-19}{0}$, y por lo tanto tenemos que trabajar un poco más este límite para ver cuánto vale en caso de que exista. Nos fijamos en los límites laterales

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{-19}{(x-2)^3} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-19}{(x-2)^3} = +\infty$$

Dado que los dos límites laterales son diferentes, el límite no existe.

(f) Vemos que este límite da 1^∞, que sabemos que es una indeterminación y, por lo tanto, si lo escribimos apropiadamente tenemos

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e$$

(g) En este caso, cuando sustituimos las x por 2 observamos que el resultado es $\frac{0}{0}$ y, por lo tanto, una indeterminación. Intentamos simplificarlo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}=4$$

(h) En este caso, cuando sustituimos las x por a observamos que el resultado es $\frac{0}{0}$i, por lo tanto, una indeterminación. Intentamos simplificarlo:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)}{(x^2+ax+a^2)}=\frac{a-1}{3a^2}$$

El único valor conflictivo es $a=0$ porque anula el denominador. Estudiamos, pues, este caso por separado.

Si $a=0$, el límite inicial es $\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2}$ y, por lo tanto, como el denominador es siempre positivo y de grado mayor que el numerador, tenemos que este límite es $-\infty$ independientemente que x sea mayor o menor que 0.

(i) Observamos que se trata de una indeterminación del tipo 1^∞, y por lo tanto calculamos $(f(x)-1)g(x)$, donde $f(x)$ es la función que tiende a 1 y $g(x)$ la que va a infinito

$$(f(x)-1)g(x)=\left(\frac{x^2+x+1}{2x+1}-1\right)\frac{1}{x-1}=\frac{x^2-x}{2x+1}\frac{1}{x-1}=\frac{x\cancel{(x-1)}}{(2x+1)\cancel{(x-1)}}\xrightarrow{x\to 1}\frac{1}{3}$$

Por lo tanto, el límite que buscamos es $e^{\frac{1}{3}}$.

(j) Observamos que se trata de una indeterminación del tipo $\infty-\infty$, y por lo tanto intentaremos operar las dos funciones para poder resolverla.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+1}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+1-x^2+3x}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-3}=0$$

2. **Indicad los puntos en los que estas funciones no son continuas y el tipo de discontinuidad que presentan. Razonad la respuesta.**

(a) $f(x)=\dfrac{x+3}{x}$

(b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \textbf{si } x\neq 0\\ 1 & \textbf{si } x=0\end{cases}$

(c) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$

Solución:

(a) Observamos que esta función presenta una discontinuidad cuando el denominador se anula, y por lo tanto para $x=0$. Y, además, si calculamos los límites laterales en este punto, tenemos

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+3}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{x+3}{x}=-\infty$$

Por lo tanto, en $x=0$ tenemos una discontinuidad asintótica.

(b) En este caso, similar al anterior, la función presenta una discontinuidad cuando el denominador se anula, por lo tanto para $x=0$. Y, además, si calculamos los límites laterales en este punto, tenemos

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+3}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{x+3}{x}=-\infty$$

Pero a diferencia del anterior, en $x=0$ tenemos definida la imagen, y por lo tanto es un caso especial de discontinuidad asintótica.

(c) Como en los casos anteriores, vemos en qué puntos se anula el denominador. Vemos que es para $x=1$. Calculamos ahora el límite en este punto para ver qué tipo de discontinuidad tenemos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}x=1$$

Como que el límite existe, vemos que la discontinuidad es evitable.

3. **Considerad la función**

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2+x}{8x^3+3x}$$

¿Qué valor hay que asignar a $f(0)$ para que la función f sea continua en $x=0$? Explicadlo.

Solución:

Antes de estudiar el punto $x = 0$, veamos cuáles son los puntos de discontinuidad (si hay) de la función. Para hacerlo, analizamos en qué puntos se anula al denominador.

$$8x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(8x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Por lo tanto, esta función solo tiene una discontinuidad en $x = 0$. Estudiamos el límite y vemos que es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, y por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{8x^3 + 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x^2 - 2x + 1)}{\cancel{x}(8x^2 + 3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x + 1}{8x^2 + 3} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, si tomamos $f(0) = \frac{1}{3}$, la función será continua.

4. **Calculad el dominio como unión de intervalos de continuidad, estudiad el comportamiento de la función en los extremos del dominio (asíntotas) y los tipos de discontinuidades que presentan las siguientes funciones:**

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$

(b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 + x^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{e^{1/x} + 1}$

(d) $f(x) = \dfrac{6 + e^{1/x}}{2 + e^{1/x}}$

Solución:

(a) Vemos que el denominador de esta función se anula para $x = -2$ y $x = 3$, y por lo tanto el dominio será

$$\text{Dom}f = (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$$

Por lo tanto, ahora tenemos que estudiar los límites en $x = -2$, $x = 3$ y $\pm\infty$ para saber qué tipos de discontinuidades tenemos y qué asíntotas tiene la función.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^- \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1^+ \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x\cancel{(x-3)}}{(x+2)\cancel{(x-3)}} = \frac{3}{5}$$

Por lo tanto, podemos concluir que esta función tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$, una asíntota vertical en $x = -2$ y una asíntota horizontal en $y = 1$.

(b) Vemos que el denominador de esta función se anula para $x = 0$ y $x = -1$, y por lo tanto el dominio será

$$\text{Dom}f = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

Por lo tanto, ahora tenemos que estudiar los límites en $x = -1$, $x = 0$ y $\pm\infty$ para saber qué tipos de discontinuidades tenemos y qué asíntotas tiene la función:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

Por lo tanto, podemos concluir que esta función tiene dos asíntotas verticales: una en $x = 0$ y otra en $x = -1$. También tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

(c) Vemos que el dominio de esta función es $\text{Dom}f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Ahora tenemos que estudiar los límites en $x = 0$ y $\pm\infty$ para saber qué tipos de discontinuidades tenemos y qué asíntotas tiene la función

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \left[\frac{0}{1}\right] = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \left[\frac{0}{+\infty}\right] = 0$$

Por lo tanto, esta función presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$ y no tiene asíntotas.

(d) Como en el caso de la función anterior, vemos que el dominio de esta función es $\text{Dom}f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Ahora tenemos que estudiar los límites en $x = 0$ y $\pm\infty$ para saber qué tipos de discontinuidades tenemos y qué asíntotas tiene la función.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{6+1}{2+1} = \frac{7}{3} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{6+0}{2+0} = 3 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\frac{6}{e^{1/x}} + 1}{\frac{2}{e^{1/x}} + 1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

Por lo tanto, esta función presenta una discontinuidad de salto en $x = 0$ y tiene una asíntota horizontal en $y = \frac{7}{3}$.

5. **Estudiad el dominio y la continuidad de la función**

$$f(x) = \frac{x^3 - ax^2}{x^2 - 9}$$

en función del parámetro a, un número real positivo.

Solución:
En primer lugar observamos que el denominador de la función se anula para $x = 3$ y $x = -3$. Así, pues, el dominio de esta función es $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Ahora tenemos que estudiar los límites en estos dos puntos para ver la continuidad.
Empezamos por $x = -3$ y miramos los límites laterales

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$$

ya que el numerador tiende a $9(-3-a)$ (un valor negativo) y el denominador a 0 con valores positivos.

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$$

ya que el numerador tiende a $9(-3-a)$ (un valor negativo) y el denominador a 0 con valores negativos. Por lo tanto, en $x = -3$ tenemos una discontinuidad asintótica para cualquier valor de a.

Ahora miramos qué pasa con $x = 3$. Y, de hecho, si estudiamos los límites laterales, nos encontraremos la misma situación que en el punto anterior exceptuando el caso $a = 3$. Si $a = 3$, tendremos

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - ax^2}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 \cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, si $a \neq 3$ tenemos una discontinuidad asintótica en $x = 3$, pero si $a = 3$, la discontinuidad será evitable.

Ejercicios para practicar con las soluciones

6. **Calculad los siguientes límites:**

(a) $\lim_{x\to 3}(x^2-2)$

(b) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+1}$

(c) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-2x^2-x+2}$

(d) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-5x+3}{8x^3-2x^2+6}$

(e) $\lim_{x\to 1}2e^{\frac{1}{(x-1)^2}}$

(f) $\lim_{x\to +\infty}x^2-3$

(g) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{1}{4x}$

(h) $\lim_{x\to \infty}x-\sqrt{x^2-3x}$

7. **Considerad la siguiente función:**

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^3+3x^2-4}$$

(a) **Encontrad el límite de la función cuando x tiende a estos valores:** 0, 1, -2, $+\infty$, $-\infty$**.**

(b) **Estudiad la continuidad de esta función e indicad si presenta discontinuidades y de qué tipo.**

8. **Calculad el límite de la siguiente función cuando x tiende a 3:**

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & \textbf{si} \quad x<3\\ 2x & \textbf{si} \quad x>3\end{cases}$$

9. **¿Para qué valor de $p\in\mathbb{R}$ será continua la función $f(x)$ siguiente?**

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-px+3 & \textbf{si} \quad x\geq 1\\ 2x+3 & \textbf{si} \quad x<1\end{cases}$$

10. **Encontrad las asíntotas horizontales de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$, las asíntotas verticales de $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$ y las asíntotas oblicuas de $h(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-3}$.**

Soluciones:

6. (a) 7
   (b) 0
   (c) $\dfrac{-3}{2}$
   (d) $\dfrac{1}{4}$
   (e) $+\infty$
   (f) $+\infty$
   (g) 0
   (h) $\dfrac{3}{2}$
7. (a) $\lim_{x\to 0}f(x)=-\dfrac{3}{4}$, $\lim_{x\to 1}f(x)=-\dfrac{2}{9}$, $\lim_{x\to -2}f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to \pm\infty}f(x)=0$.
   (b) Esta función es continua excepto en $x=1$ (discontinuidad evitable) y $x=-2$ (discontinuidad asintótica).
8. Calculamos los dos límites laterales y vemos que los dos son 6. Por lo tanto, el límite cuando x tiende a 3 es 6.
9. $p=0$
10. $y=2$ es una asíntota horizontal de $f(x)$, $x=2$ es una asíntota vertical de $g(x)$ y $y=x+1$ es una asíntota oblicua de $h(x)$.