Iniciación a las matemáticas para la ingeniería

PID_00270096

Mireia Besalú
Joana Villalonga

Universitat
Oberta
de Catalunya

11. Derivación de funciones

Índice

11.1. Derivada de una función en un punto

La derivada de una función en un punto es uno de los conceptos que han revolucionado las matemáticas. No es un concepto sencillo, pero, en cambio, tiene muchísimas aplicaciones. Además, tal como se verá, el proceso de cálculo de derivadas no es excesivamente complicado si se siguen unas reglas concretas.

11.1.1. Definición e interpretación

La **derivada de una función** $f(x)$ **en un punto concreto** x_0 se indica por $f'(x_0)$ y se define mediante el cálculo de este límite:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}}$$

Alternativamente, podemos definir la derivada de la función $f(x)$ en x_0 así:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Las dos definiciones son totalmente equivalentes y pueden utilizarse indistintamente.

Puede ocurrir que este límite no pueda calcularse, y en este caso se dice que la función no es derivable en el punto $x0$. Prácticamente todas las funciones que se han introducido en este curso son derivables en todo su dominio.

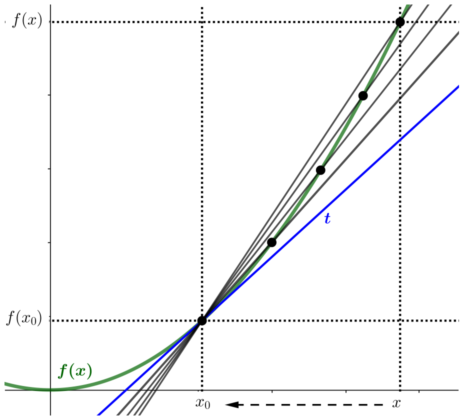
La definición de derivada de una función en un punto está ligada íntimamente a la recta tangente a la función en este punto. Veamos cómo.

La imagen que hay a continuación representa la gráfica de una función $f(x)$ y la recta tangente t a la función en un punto $(x_0, f(x_0))$. También se han trazado otras

¿Qué es la derivada de una función en un punto?
Es igual a un cierto límite que coincide geométricamente con la pendiente de la recta tangente a la función en este punto. La derivada de una función $f(x)$ en un punto x_0 se indica por $f'(x_0)$.

El cálculo diferencial es el término con el que se hace referencia al cálculo de derivadas. Junto al cálculo integral, ha permitido observar las matemáticas desde una nueva perspectiva teórica, además de tener un impacto extraordinario en la descripción y manipulación de la realidad física. El concepto de límite, básico en el cálculo diferencial, se ha tratado desde la antigüedad. Sin embargo no fue hasta el siglo XV cuando se construyó el cálculo diferencial (e integral) que conocemos hoy en día.

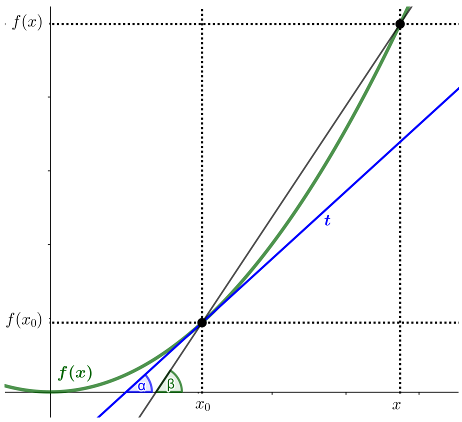
rectas, que pasan por este punto de tangencia $(x_0, f(x_0))$ y otros puntos de la función, $(x, f(x))$, que se van acercando a su punto de tangencia $(x_0, f(x_0))$.



Al analizar esta situación vemos que el cociente

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

representa la relación que hay entre los dos lados de un triángulo cuya hipotenusa es la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x, f(x))$. Además, observamos que este cociente no es más que la tangente del ángulo que forma la recta tangente con el eje X y, por lo tanto, el que determina la pendiente de esta recta, tal como pretende ilustrar esta segunda imagen:



Esto significa que, cuanto más cerca está un punto x de x_0, más cerca está la recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y $(x, f(x))$ de la recta tangente a la función en x_0. Per tant, aquestes rectes coincideixen en el límit. Por lo tanto, estas rectas coinciden en el límite. Esto explica por qué el límite del cociente indicado tiene que ser la pendiente de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ y, de aquí, la coincidencia con la definición de la derivada de la función en el punto x_0.

De acuerdo con esta situación geométrica, esta pendiente no es más que la tangente del ángulo α, ángulo al que tiende el ángulo β a medida que se aproxima a x_0. En definitiva:

$$f'(x_0) = \tan(\alpha)$$

donde α es el ángulo que hay entre el eje X y la recta tangente a la función en el punto x_0.

11.1.2. Cálculo

La derivada de una función en un punto x_0 de su dominio puede calcularse aplicando la definición de derivada de una función en el punto x_0 en cuestión:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

Veamos algunos ejemplos concretos:

Los grandes creadores del cálculo diferencial fueron el inglés Isaac Newton (1642-1727) y el alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). DDe forma diferente e independiente, sistematizaron y generalizaron ideas y procedimientos que habían sido abordados con éxito parcial desde la antigüedad.

Ejemplo. Cálculo de la derivada de una función constante.

Sea la función constante

$$f(x) = 3$$

Calculamos su derivada en el punto $x_0 = 2$ aplicando la definición de derivada de una función en este punto:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(2) - f(x)}{2 - x} = \lim_{x \to 2} \frac{3 - 3}{2 - x} = \lim_{x \to 2} \frac{0}{2 - x} = \lim_{x \to 2} 0 = 0$$

de donde resulta

$$f'(2) = 0$$

De hecho, de acuerdo con este procedimiento, se puede ver que la derivada de esta función, $f(x) = 3$, en cualquier punto x_0 es siempre $f'(x_0) = 0$.

En general, la derivada de una función constante $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ en cualquier punto x_0 es siempre $f'(x_0) = 0$.

Ejemplo. Cálculo de la derivada de una función lineal.

Sea la función lineal

$$f(x) = x$$

Calculamos su derivada en el punto $x = 3$ aplicando la definición de derivada de una función en este punt:

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} = \lim_{x \to 3} \frac{3 - x}{3 - x} = \lim_{x \to 3} 1 = 1$$

de donde resulta

$$f'(3) = 1$$

De hecho, de acuerdo con este procedimiento, se puede ver como la derivada de la función $f(x) = x$ en cualquier punto x_0 es siempre $f'(x_0) = 1$.

Ejemplo. Cálculo de la derivada de una función cuadrática.
Sea la función cuadrática

$$f(x) = x^2$$

Calculamos su derivada en el punto $x = 6$ aplicando la definición de derivada de una función en este punto:

$$f'(6) = \lim_{x\to 6} \frac{f(6) - f(x)}{6 - x} = \lim_{x\to 6} \frac{6^2 - x^2}{6 - x}$$

Sabemos que $6^2 - x^2 = (6 - x)(6 + x)$, y por lo tanto

$$f'(6) = \lim_{x\to 6} \frac{6^2 - x^2}{6 - x} = \lim_{x\to 6} \frac{\cancel{(6 - x)}(6 + x)}{\cancel{(6 - x)}} = \lim_{x\to 6}(6 + x) = 6 + 6 = 12$$

de donde resulta

$$f'(6) = 12$$

De hecho, de acuerdo con este procedimiento, se puede ver como la derivada de esta función, $f(x) = x^2$, en cualquier punto x_0 es siempre $f'(x_0) = 2x_0$.

Ejemplo. Cálculo de la derivada de una función polinómica de grado 3.
Sea la función

$$f(x) = x^3$$

Calculamos su derivada en el punto $x = 4$ aplicando la definición de derivada de una función en este punto:

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{f(4) - f(x)}{4 - x} = \lim_{x\to 4} \frac{4^3 - x^3}{4 - x}$$

Sabemos que $4^3 - x^3 = (4 - x)\left(4^2 + 4x + x^2\right)$, y por lo tanto

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{4^3 - x^3}{4 - x} = \lim_{x\to 4} \frac{(4 - x)\left(4^2 + 4x + x^2\right)}{4 - x} = \lim_{x\to 4}(4^2+4x+x^2) = 3\cdot 4^2 = 48$$

de donde resulta

$$f'(4) = 48$$

De hecho, de acuerdo con este procedimiento, se puede ver como la derivada de esta función, $f(x) = x^3$, en cualquier punto x_0 es siempre $f'(x_0) = 3x_0^2$.

11.2. Derivada de una función

11.2.1. Definición e interpretación

¿Qué es la derivada de una función?
La derivada de una función f es aquella función que asocia a cada valor la derivada de la función f. Esta nueva función se designa por f'. Aunque, teóricamente, se tendría que calcular el límite que conduce a la derivada para cada punto, en la práctica hay una tabla con las funciones derivadas de las principales funciones.

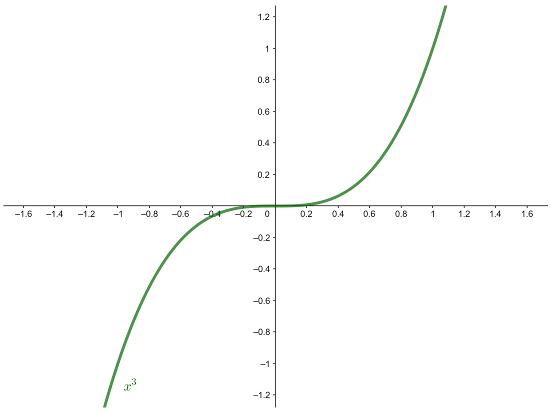
Al calcular la derivada de una función $f(x)$, se obtiene una nueva función en todos los puntos de su dominio.
Esta nueva función se llama **función derivada de** $f(x)$, se designa por $f'(x)$ y hace corresponder a cada punto del dominio el valor de la derivada de la función f en este punto.
El proceso de encontrar la función derivada de una función dada se denomina **derivar la función**.
Parece razonable que, para derivar cualquier función, se tendría que calcular $f'(x)$ para todos los puntos de su dominio. En otras palabras, se tendría que calcular el

límite que define la derivada en cada uno de los puntos de su dominio. Este proceso, pero, es imposible. Ahora bien, el análisis de los límites que determinan la derivada de la función en cualquier punto de su dominio para diferentes funciones (de manera similar a como se ha hecho en el apartado anterior para diferentes monomios) permite determinar una relación directa de las derivadas de las principales funciones conocidas. Esta relación se presenta en formato de tabla, que se muestra a continuación.

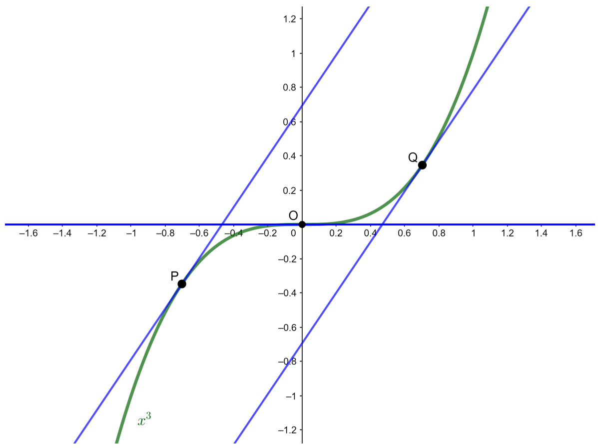
Tabla de funciones derivadas. Las derivadas de las funciones principales son:

Tabla de funciones derivadas		
$f(x)$	$f'(x)$	**Ejemplos**
$k,\ k \in \mathbb{Z}$	0	$f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$
$a \cdot x,\ a \in \mathbb{R}$	a	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $g(x) = -4x \Rightarrow g'(x) = -4$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}$	$n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$	
$a^x,\ a \in \mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln(a)$	$f(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x \cdot \ln(3)$ $g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a(e)$	$f(x) = \log_3(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\log_3(e)$ $g(x) = \ln(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Estudiamos un caso particular: el de la función cúbica $f(x) = x^3$. Empezamos por dibujar la gráfica:



De acuerdo con esto, la derivada de esta función en un punto cualquiera es igual a la pendiente de la recta tangente de la función en el punto. Así lo confirma la imagen que hay a continuación, en la cual se han trazado las tangentes a la función en diferentes puntos de su dominio.



Al observar esta imagen notamos:

(a) La recta tangente en el punto $(0, 0)$ es una recta horizontal (casualmente el mismo eje X) con pendiente 0. Este hecho permite afirmar que la derivada de la función en el 0 es exactamente 0:

$$f'(0) = 0$$

(b) La derivada es la misma para valores con el mismo valor absoluto: las tangentes a la función en los puntos P, de abcisa $x = -0.7$, y Q, de abcisa $x = 0.7$ tienen la misma pendiente, es decir, $f'(-0.7) = f'(0.7)$. Este hecho en particular indica que en este caso la función derivada tiene que ser simétrica respecto al eje de ordenadas.

Analizadas las gráficas de la función $f(x) = x^3$ y las rectas tangentes en algunos puntos de su dominio, comprobamos si estas características se cumplen en la función derivada que obtenemos mediante el uso de la tabla de las derivadas.

Según la tabla, la derivada de la función $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$. Entonces, y como confirmación de lo que hemos observado anteriormente:

(a) $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$;

(b) La función derivada $3x^2$ es una función cuadrática sencilla de estudiar:

- Es siempre positiva y, en particular, cumple
$$f'(-0.7) = 3 \cdot (-0.7)^2 = 3(0.7)^2 = f'(0.7) = 1.47 > 0$$
- Tiene el vértice en el punto $(0,0)$, y esto indica que es simétrica respecto al eje Y y por tanto $f'(x) = f'(-x)$.

11.2.2. Reglas de cálculo

La tabla de derivadas no permite calcular directamente la derivada de un polinomio, por ejemplo. Ahora bien, hay una serie de reglas para la suma y resto, la multiplicación y división, la composición y la potencia de funciones que se derivan de las reglas de cálculo de límites (puesto que la derivada no es más que un límite) y posibilitan calcular la derivada de un gran número de funciones. Veamos qué son estas reglas:

- La **derivada de la suma (y resta)** de dos funciones es igual a la suma (resta) de las derivadas de cada una de las funciones:
$$\boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)}$$

Ejemplo. Derivada de una suma de funciones.
Sean $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$. Tenemos que $f'(x) = 3x^2$ y $g'(x) = 2x$.
Entonces, la derivada de $f(x) + g(x)$ es
$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) = 3x^2 + 2x$$

Ejemplo. Derivada de una resta de funciones.
Sean $f(x) = x^5$ y $g(x) = x^2$. Tenemos que $f'(x) = 5x^4$ y $g'(x) = 2x$.
Entonces, la derivada de $f(x) - g(x)$ es
$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 5x^4 - 2x$$

- La **derivada del producto** de dos funciones es igual a la derivada de la primera función multiplicada por la segunda función sin derivar más el producto de la primera función sin derivar por la derivada de la segunda función.
$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Ejemplo. Derivada de un producto de funciones polinómicas
Consideramos $h(x) = 3x^5$ como el producto de $f(x) = 3$ por $g(x) = x^5$.
La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = 0$ y la derivada de $g(x)$ es $g'(x) = 5x^4$.
Entonces, la derivada de $h(x)$ es
$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 0 \cdot x^5 + 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$$

Deducimos de este ejemplo como la derivada de cualquier monomio es igual al producto del coeficiente por la derivada de su parte literal.

Ejemplo. Derivada de un producto de funciones no polinómicas.
Sean $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = \sin(x)$.
Consideramos la función producto $f(x) \cdot g(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$ su derivada es

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ &= -\sin(x) \cdot \sin(x) + \cos(x) \cdot \cos(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

- La **derivada del cociente** de dos funciones es igual a la derivada de la función del numerador multiplicada por la función del denominador sin derivar menos el producto de la función del numerador sin derivar por la derivada de la función del denominador, todo esto dividido por el cuadrado de la función del denominador sin derivar.

$$\boxed{h'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

Ejemplo. Derivada de un cociente entre funciones.
Consideramos $h(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 4}{2x^3 + x}$ como el cociente entre $f(x) = 3x^2 - 4x + 4$ y $g(x) = 2x^3 + x$. Las derivadas de estas funciones son $f'(x) = 6x - 4$ y $g'(x) = 6x^2 + 1$.
Entonces, la derivada de $h(x)$ es

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{(6x-4) \cdot \left(2x^3 + x\right) - \left(3x^2 - 4x + 4\right) \cdot \left(6x^2 + 1\right)}{\left(2x^3 + x\right)^2} \\ &= \frac{-6x^4 + 16x^3 - 21x^2 - 4}{x^2 \cdot \left(2x^2 + 1\right)^2} \end{aligned}$$

- La **derivada de la composición** de dos funciones se calcula utilizando la **regla de la cadena**, que consiste al multiplicar la derivada de la función que se aplica en primer lugar por la derivada de la segunda función aplicada a la primera.

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

o, equivalentment,

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x)$$

Ejemplo. Derivada de una composición de funciones.
Sean $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = 3x^2 - 1$. Consideramos la función composición $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln\left(3x^2 - 1\right)$.
Calculamos las derivadas $f'(x) = \frac{1}{x}$ y $g'(x) = 6x$.
Entonces, la derivada de $(f \circ g)(x)$ es

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{6x}{3x^2 - 1}$$

- La **derivada de una potencia** de dos funciones se deduce de la regla de la cadena:

  Si f y g son dos funciones, consideramos la función potencia:
  $$h(x) = f(x)^{g(x)}$$
  Entonces, podemos considerar
  $$\ln(h(x)) = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)$$
  De esta manera se ha eliminado el exponente.

  Derivamos los dos miembros de la igualdad usando la regla de la cadena y la regla del producto de funciones. La derivada del término de la izquierda es
  $$(\ln(h(x)))' = \frac{1}{h(x)}\cdot h'(x)$$
  Y la derivada del término de la derecha acontece
  $$(g(x)\cdot\ln(f(x)))' = g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}$$
  De esta manera, si igualamos las dos derivadas,
  $$\frac{1}{h(x)}\cdot h'(x) = g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}$$
  Si aislamos $h'(x)$ a la izquierda, obtenemos finalmente
  $$\boxed{\begin{aligned} h'(x) &= h(x)\cdot\left(g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right) \\ &= f(x)^{g(x)}\cdot\left(g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)\end{aligned}}$$

  Ejemplo. Derivada de una composición de funciones.
  Consideramos $h(x) = x^{\sin(x)}$ como la potencia de $f(x) = x$ elevada a $g(x) = \sin(x)$.
  De acuerdo con la definición de las funcions, f y g, $f'(x) = 1$ y $g'(x) = \cos(x)$.
  Entonces, la derivada de $h(x)$ es
  $$\begin{aligned} h'(x) &= f(x)^{g(x)}\cdot\left(g'(x)\cdot\ln\left(f(x)\right) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right) \\ &= x^{\sin(x)}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right)\end{aligned}$$

Con estas reglas y la mesa de derivadas, se puede derivar una gran cantidad de funciones.

11.3. Aplicaciones de la derivada

Las aplicaciones de la derivada en el estudio de funciones son muy amplias. Comprenden desde el cálculo de ciertos elementos interesantes para trazar las gráficas hasta problemas de maximización o minimización (denominados también, de manera general, problemas de extremos). Entre las muchas aplicaciones importantes que tiene la derivada en el estudio de funciones, destacamos el hecho de identificar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, y los de concavitat y convexitat, imprescindibles a la hora de localizar los extremos (máximos y mínimos) y los puntos de inflexión. Proporcionar esta información es clave para representar gráficamente cualquier función.

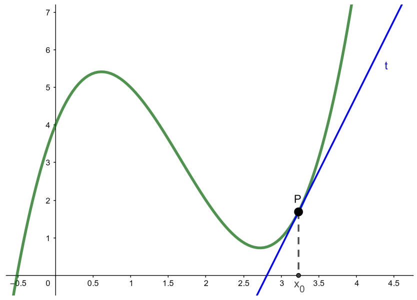
11.3.1. Crecimiento y decrecimiento de una función

¿Qué relación hay entre la derivada de una función y su crecimiento/decrecimiento?
La derivada de la función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en este punto. En consecuencia:
– Si una función es creciente en un punto, la derivada de esta función en el punto es positiva. Además, cuanto más rápidamente crece la función más grande es el valor de la derivada en el punto.
– Si una función es decreciente en un punto, la derivada de esta función en el punto es negativa, y cuanto más rápidamente decrece la función menor es el valor de la derivada en el punto.

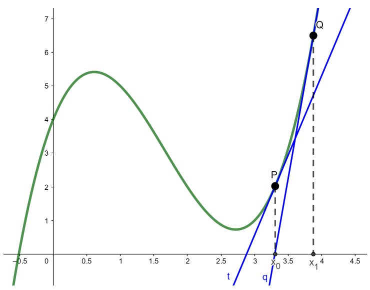
Hemos visto que la derivada de la función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en este punto. Veamos con algunos ejemplos la relación de la derivada con la monotonía de la función, es decir, con su crecimiento y decrecimiento.

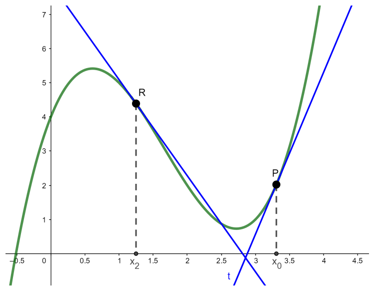
La imagen que hay a continuación muestra la gráfica de una función $f(x)$, en la cual se ha trazado la recta t tangente a la gráfica en el punto P de coordenadas (x_0, y_0).

Que t sea una recta tangente en el punto P quiere decir que es una recta que corta la gráfica de la función en este punto P sin atravesarla, solo apoyándose. La pendiente de esta recta, tal como se ha visto antes, se corresponde con la derivada de la función en este punto.



Consideramos ahora un segundo punto de la función f, Q de coordenadas (x_1, y_1), donde trazamos la recta tangente q, tal como muestra la primera de las dos imágenes de debajo. Al comparar la pendiente de esta nueva recta tangente q con la anterior recta t, notamos que esta es superior al de la recta tangente t. Este hecho permite asegurar que la derivada de la función f en x_0 es menor que la derivada de f en x_1. Además, deducimos que en estos dos puntos, P y Q, la derivada tiene que ser positiva, porque si la recta es creciente su pendiente es positiva. De acuerdo con este ejemplo, podemos generalizar diciendo que siempre que la función sea creciente (como en estos dos casos) la derivada será positiva porque la pendiente de la recta tangente lo es (ya que es una recta creciente) y, además, se cumple $0 < f'(x_0) < f'(x_1)$, si $x_0 < x_1$.





Por otro lado, siempre que la función sea decreciente, la derivada será negativa porque la pendiente de la recta tangente lo es (puesto que es una recta decreciente), es decir, $f'(x_2) < 0$. Así se visualiza en el caso de la recta tangente r a la función f en el punto $R = (x_2, y_2)$, que presenta la segunda de las dos imágenes anteriores.

De acuerdo con el que acabamos de observar, podemos concluir:

- Si una función es creciente en un punto, la derivada de esta función en este punto es positiva. Además, cuanto más rápidamente crece la función, más grande es el valor de la derivada en el punto.

- Si una función es decreciente en un punto, la derivada de esta función en este punto es negativa. Además, cuanto más rápidamente decrece la función, menor es el valor de la derivada en el punto.

Ejemplo. La derivada y los intervalos de crecimiento/decrecimiento de una función.

Sea la función

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Su derivada es la función

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

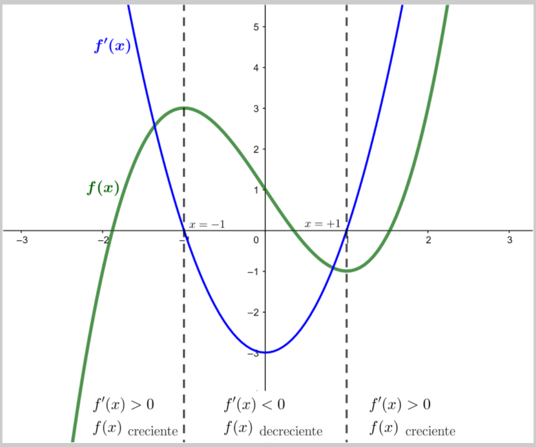
Esta función es positiva en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$ y negativa en el intervalo $(-1, 1)$.

Este hecho permite decir:

$f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$.

$f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-1, 1)$.

Así lo muestra la gráfica de la función $f(x)$:



11.3.2. Máximos y mínimos de una función

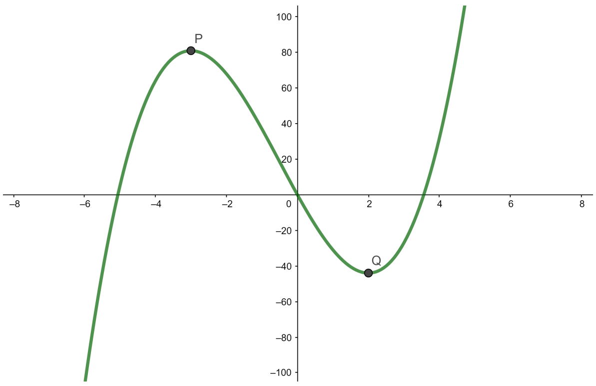
Una de las aplicaciones más importantes de las derivadas es la investigación de puntos extremos (máximos y mínimos) de una función.

Definiciones. Un **máximo** un punto de una función la imagen del cual es más grande o igual que la imagen de cualquiera otro punto que es cercano a este punto. Un **mínimo** es un punto de una función la imagen del cual es menor o igual que la imagen de cualquier punto que sea cercano a este punto. De acuerdo con estas definiciones, dada una función $f(x)$, se escribe

$(x_0, f(x_0))$ máximo de $f(x)$ en el caso que, para todo x de un entorno de x_0, $f(x_0) \geq f(x)$
$(x_0, f(x_0))$ mínimo de $f(x)$ en el caso que, para todo x de un entorno de x_0, $f(x_0) \leq f(x)$

Identificamos estos puntos destacados de una función en un ejemplo concreto. Cogemos, por ejemplo, el de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$. La gráfica de esta función es:

¿Cómo se localizan máximos y mínimos de una función usando la derivada?
Una función $f(x)$, tiene un máximo en un punto x_0 si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$.
Una función tiene un mínimo en x_0 si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$.
También se pueden encontrar máximos y mínimos analizando el signo de la derivada de $f(x)$ en un entorno del punt x_0.



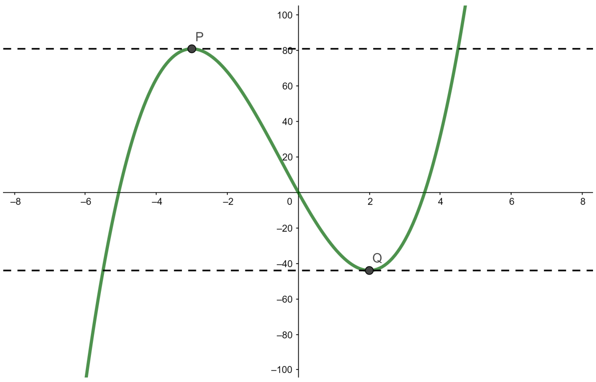
En esta gráfica se han marcado dos punts de la función, P y Q. Estos puntos corresponden respectivamente a un máximo local (o relativo) y a un mínimo local (o relativo) de la función $f(x)$. Usamos el término *local (o relativo)* porque hacemos referencia a un máximo y un mínimo en un entorno de los puntos extremos, pero no a un máximo y un mínimo globales de la función, es decir, en todo su dominio.

En el caso del máximo, P, observamos que la función es creciente antes de llegar al punto, mientras que la función es decreciente después del punto máximo. Así, antes del máximo la derivada de la función ha de ser positiva (si una función es creciente, su derivada es positiva), mientras que después del máximo la derivada de la función ha de ser negativa (si una función es decreciente, su derivada es negativa). Por lo tanto, concluimos que, en el punt máximo la derivada pasa de ser positiva a ser negativa y, por lo tanto, no queda no queda ninguna otra posibilidad que la derivada de la función en el máximo de coordenadas $(x_{max}, f(x_{max}))$ sea exactamente igual a 0, es decir, $f'(x_{max}) = 0$.

En el caso de mínimo, observamos que la función es decreciente antes de llegar en su punto, mientras que la función es creciente después del punto mínimo. Así, antes del mínimo la derivada tiene que ser negativa (si una función es decreciente, su derivada es negativa) y después del mínimo tiene que ser positiva (si una función es creciente, su derivada es positiva). Por lo tanto, en el punto mínimo de coordenadas $(x_{min}, f(x_{min}))$ la derivada pasa de ser negativa a positiva, y no queda otra posibilidad que la derivada de la función en el mínimo sea exactamente igual a 0, es decir, $f'(x_{min}) = 0$.

En definitiva, cuando un punto de una función es un máximo o un mínimo, su derivada en estos puntos se anula, es decir, es exactamente cero.

Este hecho es comprobable visualmente trazando simplemente las tangentes en estos puntos extremos. Recuperamos la gráfica de la función anterior $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en donde, además, trazamos las rectas tangentes a la función en los puntos extremos: en el máximo local P y en el mínimo local Q.



Tanto en el caso del máximo como en el del mínimo, la recta tangente en ellos es horizontal y, por lo tanto, con pendiente nula (es decir, igual a 0), y esto indica que la derivada de la función es 0 en estos puntos.

Ejemplo. Localización de máximos y mínimos de una función (I).
Sea la función

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

Su derivada es

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 36$$

Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$ y obtenemos las soluciones:

$$x = -3 \text{ y } x = 2$$

Esto quiere decir que los extremos de la función están en los puntos $x = -3$ y $x = 2$. Más concretamente, los puntos extremos de la función $f(x)$ son

$$(-3, f(-3)) = (-3, 81) \text{ y } (2, f(2)) = (2, -44)$$

y esto confirma lo que habíamos observado con la gráfica de la función.

Por lo tanto, es posible determinar si un punto es un extremo derivando la función y resolviendo la ecuación que resulta de igualar la derivada a 0. Ahora bien, **¿se puede saber cuando un extremo es un máximo o un mínimo sin tener que estudiar la gráfica de la función?**
Sí. Sólo hay que derivar la función otra vez.
Para calcular la *segunda derivada* de la función, f'', se utilizan las reglas de derivación habituales. Una vez calculada la segunda derivada de la función, hay que estudiar el signo que toma al ser evaluada en el punto x_0 en cuestión. Entonces, la regla para determinar si la función presenta un máximo o mínimo en el punto x_0 de su dominio es la siguiente:

- En $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ el punto $(x_0, f(x_0))$ es un máximo de la función f.
- En $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$ el punto $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo de la función f.
- En $f''(x_0) = 0$ no se puede decir nada sobre si se trata de un máximo o un mínimo.

Ejemplo. Localización de máximos y mínimos de una función (II).

Dada la función anterior

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

La derivada de la función f es

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$$

Los puntos en donde la derivada se anula son

$$x = -3 \text{ y } x = 2$$

Derivamos la derivada de la función para obtener la segunda derivada de la función:

$$f''(x) = 12x + 6$$

Estudiamos el caso $x_0 = -3$:

$$f''(-3) = 12 \cdot (-3) + 6 = -30 < 0$$

Por lo tanto, el punto $(-3, f(-3)) = (-3, 81)$ es un máximo de la función, y esto confirma lo que se ha observado con la gráfica de la función.

Estudiamos el caso $x_0 = 2$:

$$f''(2) = 12 \cdot 2 + 6 = 30 > 0$$

Por lo tanto, el punto $(2, f(2)) = (2, -44)$ es un mínimo de la función, y esto confirma lo que se ha observado con la gráfica de la función.

Otra manera para saber si una función f presenta un máximo o un mínimo en un punto $(x_0, f(x_0))$ es estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en un entorno de x_0. Así, tenemos:

- En $f'(x_0) = 0$ y si la derivada en este punto pasa de ser negativa a positiva, y por lo tanto la función pasa de decreciente a creciente, $(x_0, f(x_0))$ es un máximo.

- En $f'(x_0) = 0$ y si la derivada en este punto pasa de ser positiva a negativa, y por lo tanto la función pasa de creciente a decreciente, $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo.

Ejemplo. Localización de máximos y mínimos de una función (III).

Dada la función anterior $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ y su derivada $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$, vemos que los puntos en que se anula la derivada son

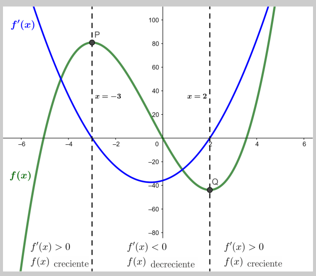
$$x = -3 \text{ y } x = 2$$

Evaluamos la función derivada en puntos cercanos a $x = -3$ y $x = 2$ y notamos:

- $f'(x) > 0$ en $x < -3$ y $f'(x) < 0$ en $x > -3$. Por lo tanto, $x = -3$ es un máximo.

- $f'(x) < 2$ en $x < 2$ y $f'(x) > 0$ en $x > 2$. Por lo tanto, $x = 2$ es un mínimo.

Esto se puede observar en la imagen con los gráficos de la función $f(x)$ y su derivada:



Problemas de extremos. De acuerdo con las definiciones dadas, una de las aplicaciones de la derivada es la resolución de problemas de maximización y minimización.

En este sentido, se dice que un problema es de máximos o mínimos, o de maximización o minimización, o en general un **problema de extremos**, cuando se quiere resolver una situación en la que una determinada magnitud, digámosle M, depende de otra magnitud, digámosle x, de manera que $M = f(x)$, y se ha de encontrar un máximo o un mínimo de M.

En el caso de un problema de máximos, se trata de encontrar un máximo de $f(x)$ y, por lo tanto, se ha de buscar un punto x_0 tal que cumpla a la vez $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$. En cambio, en el caso de un problema de mínimos, se trata de encontrar un mínimo de $f(x)$ y, por lo tanto, un punto x_0 tal que cumpla a la vez $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$.

En el apartado de problemas resueltos hay algunos ejemplos de estos tipos de problemas resueltos a paso para ilustrar cómo se puede proceder en estos casos.

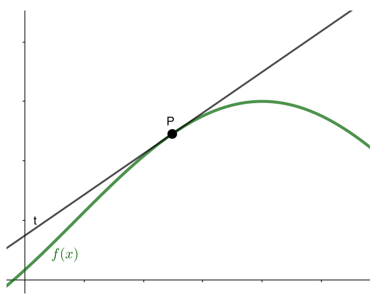
11.3.3. Concavidad y convexidad de una función

En los apartados anteriores se ha hablado de la relación que hay entre la derivada de una función y su monotonía, es decir, de los puntos del dominio en que la función es creciente, constando o decreciente. En este apartado se hablará de la aplicación de la derivación para estudiar la curvatura de una función, es decir, de los puntos del dominio, en que una función es cóncava o convexa.

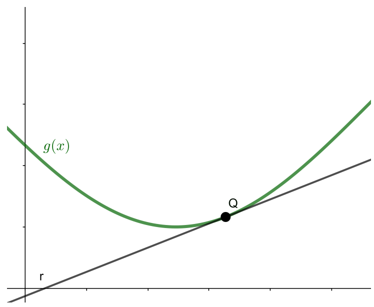
¿Qué relación hay entre la derivación y la concavidad y convexidad de una función?
Cuando una función cerca de un punto es menor que la recta tangente en este punto, se llama que la función es cóncava, mientras que cuando la función es mayor que la recta tangente, se llama que la función es convexa. Una función es cóncava en aquellos puntos en que su derivada segunda es negativa, mientras que una función es convexa en aquellos puntos en que su derivada segunda es positiva.

Las imágenes que hay a continuación representan un fragmento de las gráficas de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. En cada una se ha marcado un punto concreto. En estos puntos se ha trazado la recta tangente a la función correspondiente.

Funció còncava



Funció convexa

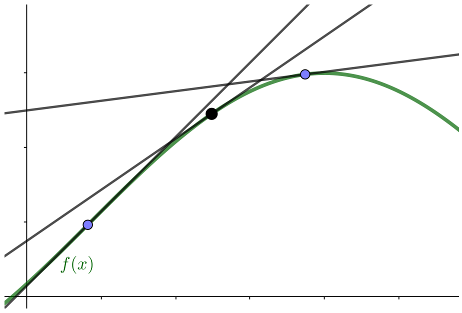


En ambos casos, la tangente trazada es en un punto en que la función es creciente. Asimismo, notamos que la situación resultante no es la misma.

En el caso de la función f, la tangente en el punto P está por encima de la función. Por lo tanto, vemos que cerca del punto P la función f toma valores más pequeños que los que toma la tangente, y se dice que la función es **cóncava**. Per en el caso de la función g la tangente en el punto Q está por debajo de la función. Por lo tanto, la función g toma valores más grandes que la tangente, y se dice que es **convexa**.

Para conocer en qué puntos de su dominio una función es cóncava y en qué puntos es convexa, es esencial estudiar la segunda derivada de la función, tal como veremos con algunos ejemplos.

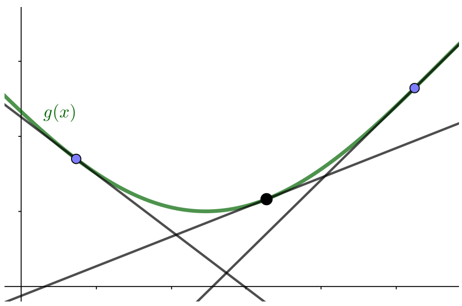
La imagen que hay a continuación recupera la gráfica de la función $f(x)$ anterior que, de acuerdo con las descripciones dadas, es una función cóncava. Junto con la función, encontramos dibujada la recta tangente en diferentes puntos de su dominio:



Podemos observar que la pendiente de la recta tangente disminuye a medida que la variable x toma valores más grandes. Como sabemos, la pendiente de la recta tangente a una función no es otra cosa que la derivada de la función. Por lo tanto, deducimos que cuando la función es cóncava, la derivada de la función derivada disminuye a medida que aumenta la variable x. Esto quiere decir que cuando la función es cóncava, la función derivada es una función decreciente. A su vez, si la función derivada es decreciente, su derivada (es decir, la derivada segunda de la función original) tiene que ser negativa. Por lo tanto:

> *una **función es cóncava** en aquellos puntos en que su derivada segunda es negativa.*

De manera similar, deducimos la relación entre la derivada segunda de una función y su convexidad. La imagen que hay a continuación muestra la gráfica de la función $g(x)$ que, de acuerdo con la descripción anterior, es una función convexa. Junto con la función, se ha trazado la recta tangente en diferentes puntos de su dominio.



Podemos observar que la pendiente de la recta tangente aumenta a medida que la variable x toma valores más grandes. Tal como se ha recordado antes, la pendiente de la recta tangente a una función no es otra cosa que la derivada de la función. Por lo tanto, deducimos que cuando la función es convexa, la derivada de la función derivada aumenta a medida que aumenta la variable x. Esto quiere decir que cuando la función es convexa, la función derivada es una función creciente. A su vez, si la función derivada es creciente, la derivada segunda de la función original tiene que ser positiva. Por lo tanto:

> *una **función es convexa** en aquellos puntos en que su derivada segunda es positiva.*

Analizamos ahora estos hechos con algún ejemplo concreto.

Ejemplo. Estudio de la concavidad y convexidad de una función.
Sea la función

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

Su derivada es

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$$

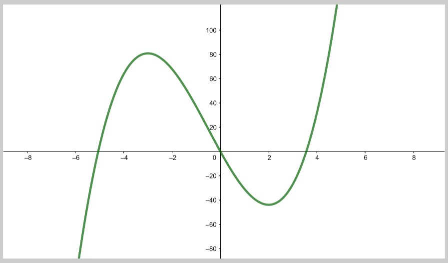
Y la segunda derivada es

$$f''(x) = 12x + 6$$

Notamos:

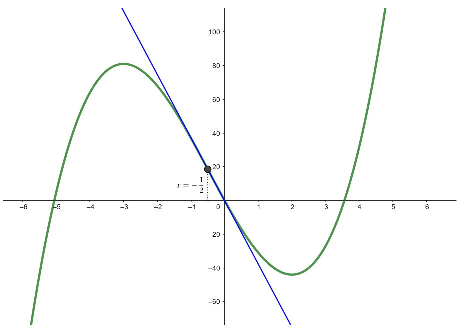
- La función derivada segunda es negativa $f''(x) < 0$ para $x < -\frac{1}{2}$.
  Por lo tanto, $f(x)$ tiene que ser cóncava en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.
- La función derivada segunda es positiva $f''(x) > 0$ para $x > -\frac{1}{2}$.
  Por lo tanto, $f(x)$ tiene que ser convexa en $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Al observar la gráfica de la función,



comprobamos que es así: la función es cóncava en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y es convexa en $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Ahora bien, qué pasa en el punto que cambia la curvatura de una función, como es el punto $x = -\frac{1}{2}$ en el caso de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ del ejemplo?
Si derivamos la función $f(x)$ dos veces, observamos que en $x = -\frac{1}{2}$, la segunda derivada de la función se anula:



$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = 0$$

Por lo tanto, de acuerdo con las descripciones anteriores, no podemos decir que en este punto del dominio $x = -\frac{1}{2}$ la función f sea cóncava o convexa. Ahora bien, si estudiamos el comportamiento de la tangente en un entorno de este punto $x = -\frac{1}{2}$ notamos que a su izquierda la función es cóncava, mientras que a la derecha la función es convexa. En otras palabras, a la izquierda de $x = -\frac{1}{2}$ la tangente es más grande que la función, mientras que a su derecha la función es más pequeña que la tangente. Se trata de un punto donde la función pasa de ser cóncava a convexa. Los puntos en que la función cambia de curvatura se denominan **puntos de inflexión**.

Tal com veremos, una de las características de los puntos de inflexión es que la segunda derivada de la función se anula. Esto se debe al hecho que los puntos de inflexión son aquellos puntos en donde la derivada de la función tiene algún máximo o mínimo. Si recuperamos el ejemplo anterior, solo hay que darse cuenta que cuando nos acercamos al punto de inflexión $x = -\frac{1}{2}$ la función f cada vez decrece más rápidamente, pero al pasar este punto la función empieza a decrecer más lentamente. En general, al acercarnos a un punto de inflexión la función cada vez crece (o decrece) más rápidamente, pero al sobrepasar el punto de inflexión la función empieza a crecer (o decrecer) más lentamente. Estos hechos indican justamente que donde hay un punto de inflexión la derivada de la función tiene un extremo. Por eso mismo, podemos encontrar los puntos de inflexión buscando ceros de la segunda derivada de la función.

Tal como acabamos de decir, si una función tiene un punto de inflexión en un punto x_0, la segunda derivada es $f''(x_0) = 0$. Ahora bien, que la segunda derivada sea cero en un punto no es condición suficiente para que en este punto haya un punto de inflexión. Nos tenemos que asegurar que la curvatura de la función cambia. Por eso, se puede estudiar el comportamiento de la función a izquierda y derecha del punto o bien considerar las derivadas de orden superior a f''. En este caso, se ha de tener en cuenta:

- Si la primera derivada (por encima de f'') que no se anula es de orden par, el punto no es de inflexión.
- Si la primera derivada (por encima de f'') que no se anula es de orden impar, el punto es de inflexión.

En definitiva, para encontrar los intervalos de concavitat y convexitat de una función, hay que encontrar en primer lugar los valores x de su dominio donde la segunda derivada de la función se anula (es decir, resolver $f''(x) = 0$) y los valores $\widetilde{x}$ en donde esta segunda derivada no existe, y estudiar posteriormente el signo de la segunda derivada en ellos. En particular, si la segunda derivada cambia de signo en un entorno de x, el punto $(x, f(x))$ es un punto de inflexión de la función $f(x)$.

11.3.4. Representación gráfica de una función

Para trazar la gráfica de una función, es necesario conocer diferentes aspectos de la función, como el dominio o los cortes con los ejes. Entre estos aspectos también hay que requieren el cálculo de derivadas, como la *monotonía* (crecimiento y decrecimiento de la función), la *existencia de extremos* (máximos y mínimos de la función) o la *curvatura* (concavidad y convexidad de la función). A continuación veremos con más detalle cuáles son estos aspectos útiles y más importantes para el trazado (aproximado) de la gráfica de una función. Los ejemplificaremos con el estudio de la función racional

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Los aspectos más importantes para la representación aproximada de una función son:

¿Qué información hay que saber para representar la gráfica de una función?
La información básica que se tiene que buscar para representar una función es: dominio, puntos de corte con los ejes, posibles simetrías, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y comportamiento asintótico. Vemos que el cálculo de derivadas acontece una herramienta vital para determinar estas informaciones.

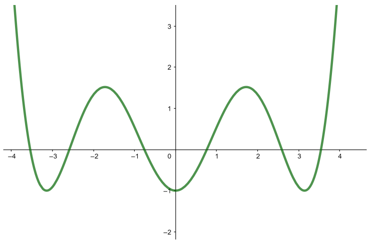
- **Dominio**. Los puntos en donde la función está bien definida.

La función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ es una función racional. Por lo tanto, está bien definida para todos los puntos que no anulen el denominador. Esto quiere decir que su dominio son todos los x tales que $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \{-1, 1\}$. Por lo tanto, Dom $(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

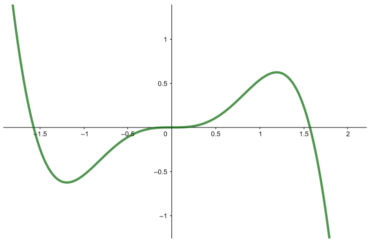
- **Puntos de corte con los ejes**. Los puntos de la gráfica de la función del tipo $(0, f(0))$ y $(x, 0)$.

Eje Y: $x = 0$: $f(0) = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow$ punt $P(0,0)$
Eje X: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Por lo tanto, hay un único punto de corte con los ejes, que es el punto $P(0,0)$.

- **Simetría**. Determinar si se da alguna de las condiciones siguientes:
  - Se dice que una función $f(x)$ es par o **simétrica respecto del eje X** si se cumple $f(-x) = f(x)$.



  - Se dice que una función $f(x)$ es impar o **simétrica respect del origen** si se cumple $f(-x) = -f(x)$.



Justo es decir que una función puede ser que no sea ni simétrica respecto del eje X ni simétrica respecto del origen.

La funció de l'exemple és simètrica respecte de l'origen, ja que

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$$

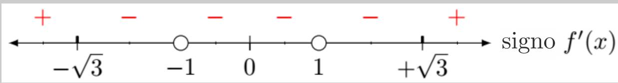
- **Intervalos de crecimiento y decrecimiento**. Los intervalos del dominio donde la función crece, es constante o decrece. Se pueden determinar encontrando los puntos donde se anulan la derivada de la función y estudiando el signo que toma la derivada en ellos.

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$$

Para ver en qué puntos la derivada de la función es positiva o negativa, basta con estudiar el signo del numerador, ya que el denominador es siempre positivo por ser un cuadrado.

Calculamos los puntos en donde se anula el numerador. Teniendo en cuenta $x^4 - 3x^2 = x^2(x^2-3)$, obtenemos los puntos $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$. Para estudiar el signo de la derivada, también tenemos que tener en cuenta los puntos en donde no está definida. En este caso, $x = \pm 1$.

Así, pues, todos estos puntos nos dividen el domini en seis intervalos en donde la función toma valores negativos y positivos. Veamos el signo de los seis intervalos definidos en la imagen siguiente:



Por lo tanto, tenemos

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3}, +\infty)$

$f(x)$ es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\sqrt{3})$.

- **Extremos: máximos y mínimos**. Los puntos en que la función logra los valores máximos y mínimos. Se pueden encontrar estudiando el comportamiento de la función en un entorno de los puntos donde se anula la derivada de la función.

La derivada de la función f

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

se anula en

$$x = 0,\ x = -\sqrt{3} \text{ y } x = \sqrt{3}$$

Al estudiar el comportamiento de la función en estos puntos, notamos:

- En $x = 0$: $0 \in (-1, 1)$ que es un intervalo en donde la función es creciente. Por lo tanto, en $x = 0$ no hay ni máximo ni mínimo.
- En $x = -\sqrt{3}$: teniendo en cuenta los intervalos de crecimiento y decrecimiento, vemos que en este punto la función pasa de ser creciente a decreciente y por lo tanto hay un máximo. El máximo es $\left(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})\right) = \left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.
- En $x = \sqrt{3}$: a partir de los intervalos de crecimiento y decrecimiento vemos que la función pasa de decreciente a creciente en este punto. Por lo tanto, en $x = \sqrt{3}$ hay un mínimo y el punto máximo es $\left(+\sqrt{3}, f(+\sqrt{3})\right) = \left(+\sqrt{3}, +\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

- **Concavidad, convexidad y puntos de inflexión**. Los intervalos del dominio donde la función es cóncava o convexa y los puntos de inflexión. Se pueden determinar encontrando los puntos donde se anula la segunda derivada de la función y donde esta derivada no está definida y, a continuación, estudiando el signo de la segunda derivada en ellos.

Buscamos los punto en donde se anula la segunda derivada de la función y en donde no está definida:

$$f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = 0$$

La única raíz del numerador es $x = 0$. Para el denominador, las raíces son $x = \pm 1$.

Hay que estudiar el signo de la $f''(x)$ en las zonas que determinan estos puntos, y por lo tanto en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(+1, +\infty)$. Y tenemos:

- $f''(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -1)$ y $x \in (0, +1)$. Por lo tanto, $f(x)$ es convexa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
- $f''(x) < 0$ para $x \in (-1, 0)$ y $x \in (+1, +\infty)$. Por lo tanto, $f(x)$ es cóncava en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.
- $f''(0) = 0$ y en $x = 0$ la función f pasa de cóncava a convexa. Por lo tanto, en $x = 0$ hay un punto de inflexión $(0, f(0)) = (0, 0)$.

- **Asíntotas**. Rectas (verticales, horizontales u oblicuas) a las cuales se aproxima la curva de la gráfica de la función. Para las verticales, se tienen que estudiar los límites en los puntos que no pertenecen al dominio y, para las horizontales, los límites cuando x tiende a $\pm\infty$. Las asíntotas oblicuas se suelen encontrar en funciones racionales en las cuales el polinomio del numerador es de un grado superior al del polinomio denominador.

- $\boxed{\text{Asíntotas verticales}}$ Se tienen que estudiar los límites en los puntos que no pertenecen al dominio, que son $x = -1$ y $x = +1$:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +1^+} f(x) = +\infty$$

  Por lo tanto, las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.
- $\boxed{\text{Asíntotas horizontales}}$ No tiene, ya que los límites de la función cuando x tiende $\pm\infty$ son ambos infinitos y no tienden a ningún valor concreto.
- $\boxed{\text{Asíntotas oblicuas}}$ $f(x)$ es una función racional tal que el grado de su polinomio numerador (3) es de un grado superior al de su polinomio denominador (2). Podemos encontrar la expresión de esta recta, que tiene que ser de la forma $y = mx + n$, calculando los límites correspondientes:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x \cdot (x^2 - 1)} = 1$$
$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{(x^2 - 1)} - x \right) = 0$$

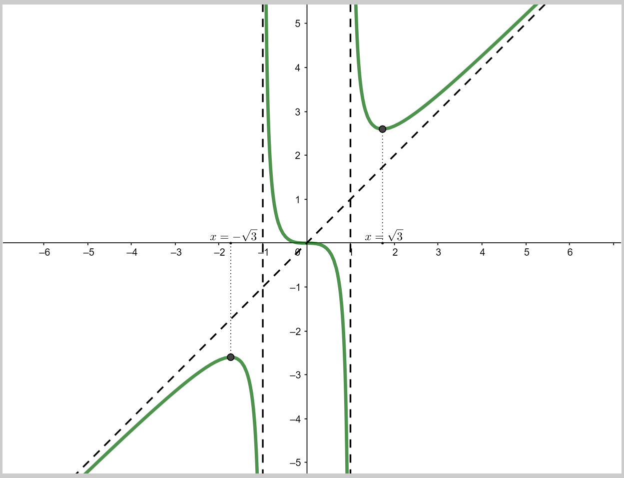
  Por lo tanto, la recta $y = x$ es una asíntota oblicua de la función $f(x)$. Lo comprobamos así:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0 \text{ y } \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$$

- **Gráfica de la función**. Una vez identificados todos estos elementos, es posible la gráfica siguiente.

Gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$



Resumen

Derivación de funciones

Derivada de una función en un punto

Definición. La derivada de una función f en un punto x_0 se indica por $f'(x_0)$ y se define por este límite:

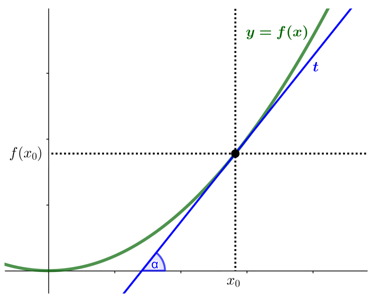
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}}$$

Si este límite no existe, se dice que la función $f(x)$ no es derivable en x_0.

Interpretación. La derivada de una función $f(x)$ en un punto x_0 de su dominio coincide con la pendiente de la recta tangente de la función en este punto. Es decir,

$$f'(x_0) = \tan(\alpha)$$

donde α es el ángulo que hay entre el eje X y la recta tangente a la función en el punto x_0.



Derivada de una función

Definición. La derivada de una función f es aquella función que asocia a cada punto x del dominio la derivada de esta función. La función derivada se designa por $f'(x)$.

Tabla de derivadas. Las principales derivadas de funciones son:

Tabla de derivadas		
$f(x)$	$f'(x)$	**Ejemplos**
$k,\ k \in \mathbb{Z}$	0	$f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$
$a \cdot x,\ a \in \mathbb{R}$	a	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $g(x) = -4x \Rightarrow g'(x) = -4$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}$	$n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$	
$a^x,\ a \in \mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln(a)$	$f(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x \cdot \ln(3)$ $g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$
$\log_a(x)$	$\dfrac{1}{x} \cdot \log_a(e)$	$f(x) = \log_3(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\log_3(e)$ $g(x) = \ln(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$
$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

Reglas de cálculo

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones, la derivada de la suma (o resta) de las dos funciones es

$$\boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)}$$

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones, la derivada del producto de las dos funciones es

$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones, la derivada del cociente de las dos funciones es

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones, la derivada de la composición de las dos funciones es

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones, para derivar la potencia de f elevada a g, $h(x) = f(x)^{g(x)}$ hay que extraer en primer lugar el ln de esta función:

$$\ln(h(x)) = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x) \cdot \ln(f(x))$$

Después se deriva esta segunda función aplicando la regla de la cadena:

$$\boxed{h'(x) = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)}$$

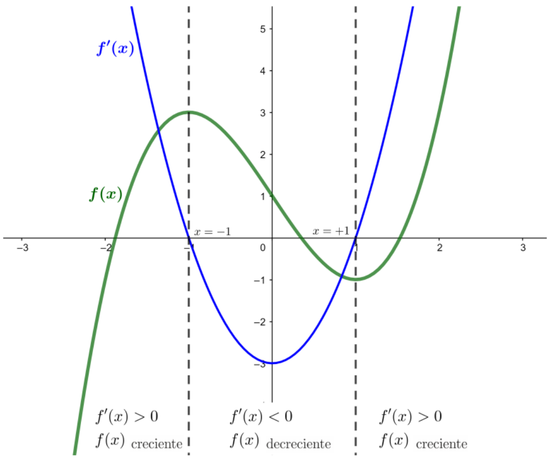
Crecimiento y decrecimiento

Definiciones

- **Función creciente**. Si una función f es creciente en un punto x_0, su derivada en este punto x_0 es positiva: $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en x_0.
  Además, cuanto más rápidamente crece la función, más grande es el valor de la derivada en el punto.

- **Funció decreciente**. Si una función f es decreciente en un punto x_0, su derivada en este punto x_0 es negativa: $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en x_0.
  Además, cuanto más rápidament decrece la función, más pequeño es el valor de la derivada en el punto.

Ejemplo



Localización de extremos

Los extremos de una función son los puntos máximos y puntos mínimos que presenta la función.

Definición de extremos. Distinguimos dos tipos de extremos:

- Un **máximo** de una función f es un punto de la función la imagen del cual es más grande o igual que la imagen de cualquier otro punto que es cercano al punto:
  $$(x_0, f(x_0)) \text{ máximo de } f(x) \text{ si } \forall x \text{ de un entorno de } x_0 : f(x_0) \geq f(x)$$

- Un **mínimo** es un punto de la función la imagen del cual es menor o igual que la imagen de cualquier otro punto que es cercano al punto:
  $$(x_0, f(x_0)) \text{ mínimo de } f(x) \text{ si } \forall x \text{ de un entorno de } x_0 : f(x_0) \leq f(x)$$

Búsqueda de extremos. Hay dos formas de encontrar los máximos y mínimos de $f(x)$:

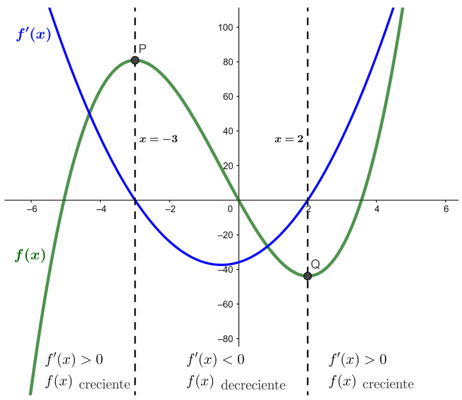
- Encontrar la primera y segunda derivadas de la función. Entonces:
  $$(x_0, f(x_0)) \text{ máximo de } f(x) \text{ si } f'(x_0) = 0 \text{ y } f''(x_0) < 0$$
  $$(x_0, f(x_0)) \text{ mínimo de } f(x) \text{ si } f'(x_0) = 0 \text{ y } f''(x_0) > 0$$

- Encontrar la primera derivada y estudiar el comportamiento de la función. Entonces:

$(x_0, f(x_0))$ es máximo de $f(x)$ en $f'(x_0) = 0$, y la derivada en este punto pasa de ser positiva a negativa.

$(x_0, f(x_0)$ es mínimo de $f(x)$ en $f'(x_0) = 0$, y la derivada en este punto pasa de ser negativa a positiva.

Ejemplo



Problema de extremos. Se piede resolver una situación en la cual una cierta magnitud M depende de otra magnitud x de manera que $M = f(x)$, y se ha de encontrar el máximo o el mínimo de esta función M. Se distinguen dos casos:

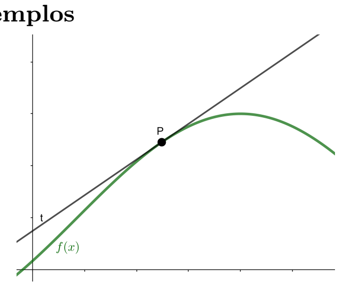
- En el caso de un problema de máximos, se trata de encontrar un máximo de $f(x)$ y, por lo tanto, se tiene que buscar un punto x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ y, a la vez, $f''(x_0) < 0$.
- En el caso de un problema de mínimos, se trata de encontrar un mínimo de $f(x)$ y, por lo tanto, se tiene que buscar punto x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ y, a la vez, $f''(x_0) > 0$.

Concavidad y convexidad

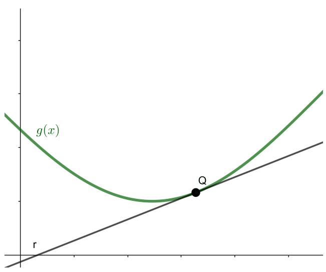
Definiciones

- Una función $f(x)$ es **convexa** en un punto (x_0, y_0) cuando el valor de esta función es más grande que el valor de la tangente de la función en un entorno de este punto. En este caso, $f''(x_0) > 0$.
- Una función f es **cóncava** en un punto (x_0, y_0) cuando el valor de esta función es más pequeño que el valor de la tangente de la función en un entorno de este punto. En este caso, $f''(x_0) < 0$.
- Un **punto de inflexión** de una función f es un punto en el que la función cambia su curvatura, es decir, pasa de ser cóncava a convexa, o viceversa. En este caso, $f''(x_0) = 0$.

Ejemplos



Función cóncava

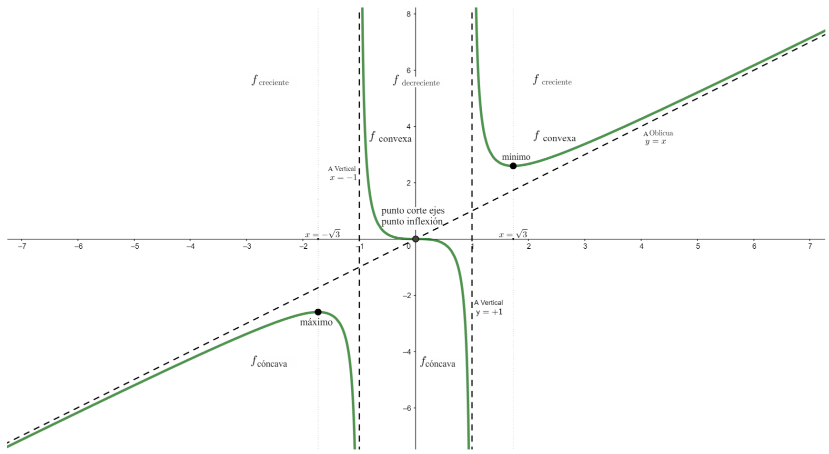


Función convexa

Representación gráfica de una función

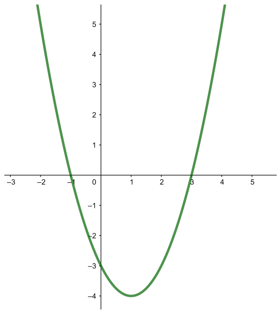
Para representar gráficamente una función, hay que conocer cierta información. Ilustramos esta información imprescindible con un ejemplo concreto:

Descripción de los elementos para representar gráficamente una función $f(x)$.	**Ejemplo**. Representar gráficamente $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$
Dominio	
Puntos del eje X donde $f(x)$ está definida.	Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
Puntos de corte con los ejes	
Puntos del tipo $(0, f(0))$ y $(x, 0)$.	Un único punto de corte, el $(0, 0)$
Simetría	
Una función f es par o simétrica respect del eje Y cuando $f(-x) = f(x)$. Una función f es simétrica respecto del origen cuando $f(-x) = -f(x)$.	Es simétrica respecto del origen: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$
Intervalos de crecimiento y decrecimiento	
Signo de la derivada de la función: • $f(x)$ es creciente en $f'(x) > 0$. • $f(x)$ es decreciente en $f'(x) < 0$.	Es creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (-1, 1) \cup \left(1, \sqrt{3}\right)$
Extremos: máximos y mínimos	
Cuando se anula la derivada de la función, • x_0 máximo de f si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$. • x_0 mínimo de f si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$.	$\left(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})\right) = \left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ es máximo. $\left(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})\right) = \left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ es mínimo.
Puntos de inflexión	
Cuando se anula la segunda derivada de la función, x_0 punto de inflexión en $f''(x_0) = 0$ y f'' cambia de signo en un entorno de x_0.	$(0, f(0)) = (0, 0)$ es un punto de inflexión
Intervalos de concavidad y convexidad	
Signo de la segunda derivada de la función: • $f(x)$ convexa si $f''(x) > 0$ • $f(x)$ cóncava si $f''(x) < 0$	Es cóncava en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$. Es convexa en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$.
Comportamiento asintótico	
Estudio de la existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas de la función.	$x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales y $y = x$ es una asíntota oblicua
Gráfica	



Ejercicios resueltos

1. **La imagen muestra la gráfica de la derivada, $f'(x)$, de una función, $f(x)$.**



Contestad razonadamente estas preguntas sobre la función $f(x)$:

(a) A $x = 0$: ¿es $f(x)$ creciente o decreciente?

(b) A $x = 3.5$: ¿es $f(x)$ creciente o decreciente?

(c) ¿Tiene $f(x)$ algún mínimo?

(d) ¿Tiene $f(x)$ algún máximo?

(e) Determinad los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

(a) A $x = 0$: la derivada es negativa, y por lo tanto $f(x)$ es decreciente en este punt.

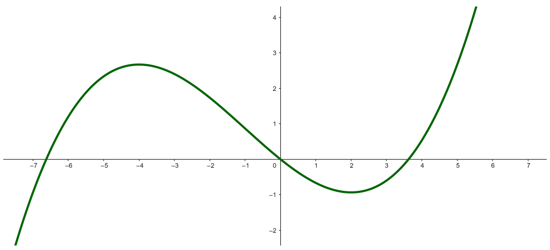
(b) A $x = 3.5$: la derivada es positiva, y por lo tanto $f(x)$ es creciente en este punt.

(c) Sí, en el punto $x = 3$, porque la derivada pasa de ser negativa a positiva.

(d) Sí, en el punto $x = -1$, porque la derivada pasa de ser positiva a negativa.

(e) La función $f(x)$ es decreciente en $[-1, 3]$ porque la derivada es negativa en este intervalo, y $f(x)$ es creciente en el resto del dominio, es decir, en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, porque es en donde la derivada es positiva.

2. **La gráfica de una función $f(x)$ es**



Contestad razonadamente estas preguntas sobre la función derivada $f'(x)$:

(a) ¿Cuál es el signo de la derivada, $f'(x)$, en $x = 3$? ¿Y en $x = -0.5$?

(b) ¿Hay algún punto en el que la derivada, $f'(x)$, se anule?

(c) Determinad el signo de la derivada, $f'(x)$, en todos los puntos del dominio de la función.

Solución:

(a) En $x = 3$ la función derivada $f'(x)$ es positiva porque la función $f(x)$ es creciente en este punto.
En $x = -0.5$ la función derivada $f'(x)$ es negativa porque la función $f(x)$ es decreciente en este punto.

(b) Sí, en los puntos $x = -4$ y $x = 2$, porque se encuentran, respectivamente, un máximo y un mínimo locales de la función $f(x)$.

(c) La derivada $f'(x)$ es negativa en $(-4, 2)$ porque la función es decreciente en este intervalo. La derivada $f'(x)$ es positiva en $(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$ porque la función es creciente en estos intervalos.

3. **Para cada una de estas tres funciones,**

$$f(x) = \frac{8x^2}{4 - x^2} \qquad g(x) = \frac{2x}{\ln(x)} \qquad h(x) = x^3 - 3x + 2$$

determinad:

(a) el dominio de cada una,

(b) los puntos de corte con los ejes,

(c) los correspondientes máximos y mínimos,

(d) los puntos de inflexión,

(e) los intervalos de crecimiento y decrecimiento,

(f) los intervalos de concavidad y convexidad,

(g) las asíntotas,

(h) su gráfica.

Soluciones:

Estudio de la primera función:

$$f(x) = \frac{8x^2}{4 - x^2}$$

(a) Por ser $f(x)$ una función racional, su dominio consta de todos los números excepto aquellos que anulan el polinomio del denominador:

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \{-2, +2\}$$

Por lo tanto, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\} = (0, -2) \cup (2, +\infty)$.

(b) Cortes con los ejes:

Eje Y: $f(0) = \dfrac{0}{4-0} = 0 \Rightarrow$ el punto $(0, 0)$.

Eje X: $f(x) = \dfrac{8x^2}{4 - x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ el punto $(0, 0)$.

(c) Para encontrar los máximos y mínimos, derivamos la función y la igualamos a 0:

$$f'(x) = \frac{16x \cdot \left(4 - x^2\right) - 8x^2 \cdot (-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{64x}{(4 - x^2)^2} = 0$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos una única posibilidad:

$$x = 0$$

Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{192x^2 + 256}{(4 - x^2)^3}$$

Al evaluar la segunda derivada en $x = 0$, obtenemos que es positiva,

$$f''(0) = 4 > 0$$

lo cual informa que se trata de un mínimo.

Por lo tanto, $f(x)$ presenta únicamente un mínimo, que es el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$.

(d) No hay ningún otro punto de inflexión porque no encontramos ningún punto x_0 que cumpla $f''(x_0) = 0$.

(e) Hay cuatro intervalos de crecimiento o decrecimiento, separados por los límites del dominio y por el mínimo. Estudiamos el comportamiento de la función en cada uno de estos cuatro intervalos evaluando la derivada en un punto interior en cada uno:

- De $-\infty$ a -2: $f(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- De -2 a 0: $f(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- De 0 a 2: $f(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- De 2 a $+\infty$: $f(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

(f) Para determinar los intervalos de concavidad y convexidad, basta con estudiar el signo de la segunda derivada de la función entre los límites del dominio únicamente, dado que no hay ningún punto de inflexión (en donde $f''(x) = 0$):

- De $-\infty$ a -2: $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava
- De -2 a $+2$: $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa.
- De $+2$ a $+\infty$: $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava.

(g) Tiene tres asíntotas: dos verticales y una horizontal:

- Asíntotas verticales: se tienen que estudiar los límites en los puntos que no pertenecen al dominio, que son $x = -2$ y $x = +2$:

  $$\lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$$
  $$\lim_{x\to+2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+2^+} f(x) = +\infty$$

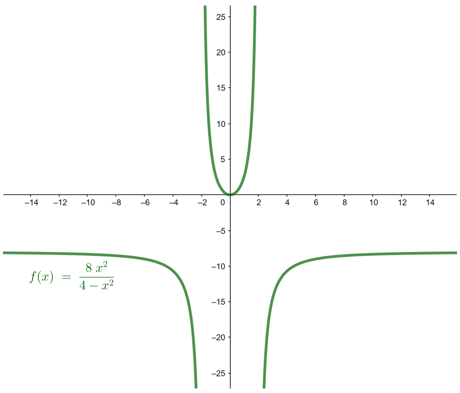
  Por lo tanto, las rectas $x = -2$ y $x = +2$ son asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales: se tienen que estudiar los límites de la función cuando x tiende $-\infty$ y $+\infty$:

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -8 = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

  Por lo tanto, la recta $y = -8$ es una asíntota horizontal de la función f

(h) La gráfica de la función f es



Estudio de la segunda función:

$$g(x) = \frac{2x}{\ln(x)}$$

(a) Dominio:
Por ser $g(x)$ una función con un logaritmo en el denominador, la función está bien definida para todos los números mayores de 0 (ya que el logaritmo solo está definido para números positivos), excepto aquellos que anulan el denominador:

$$\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

(b) Cortes con los ejes:
Eje Y: $g(0)$ no se puede calcular, ya que $x = 0$ no pertenece al dominio. Por lo tanto, no hay.
Eje X: $g(x) = \dfrac{2x}{\ln(x)} = 0 \Rightarrow\ 0$, pero $x = 0$ no pertenece al dominio. Por lo tanto, no hay.

(c) Para encontrar los Â´máximos y mínimos, derivamos la función y la igualamos a 0:

$$g'(x) = \frac{2\ln(x) - 2}{\ln^2(x)}$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos una única posibilidad:

$$x = e$$

Calculamos la segunda derivada:

$$g''(x) = -\frac{2 \cdot \ln(x) - 4}{x \cdot \ln^3(x)}$$

Al evaluar la segunda derivada en $x = e$, obtenemos que es positiva,

$$\frac{2}{e} > 0$$

lo cual informa que se trata de un mínimo.
Por lo tanto, $g(x)$ presenta únicamente un mínimo, que es el punto $(e, g(e)) = (e, 2e)$.

(d) Para encontrar los puntos de inflexión, igualamos la segunda derivada a 0 y resolvemos la ecuación resultante:

$$g''(x) = -\frac{2 \cdot \ln(x) - 4}{x \cdot \ln^3(x)} = 0 \Rightarrow x = e^2$$

Además,

$$g'''(x) = \frac{2 \cdot \ln^2(x) - 12}{x^2 \cdot \ln^4(x)}$$

de donde resulta

$$g'''(e^2) \neq 0$$

Por lo tanto, $\big(e^2, g(e^2)\big) = (e^2, e^2)$ es un punto de inflexión de g.

(e) Hay tres intervalos de crecimiento o decrecimiento, separados por los límites del dominio y por el mínimo. Estudiamos el comportamiento de la función en cada uno de estos tres intervalos evaluando la derivada en un punto interior en cada uno:

- De 0 a 1: $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ es decreciente
- De 1 a e: $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ es decreciente
- De e a $+\infty$: $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ es creciente

(f) Para determinar los intervalos de concavidad y convexidad, se tiene que estudiar la segundaa derivada de la función entre los límites del dominio y el punto de inflexión:

- De 0 a 1: $g''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava.
- De 1 a e^2: $g''(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ es convexa.
- De e^2 a $+\infty$: $g''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava.

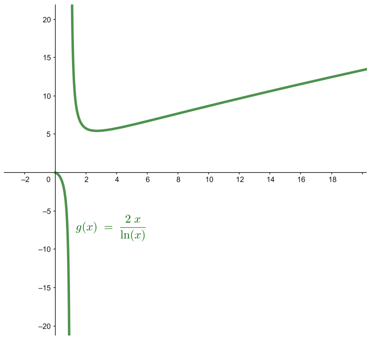
(g) Tiene una asíntota únicamente, que es vertical:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

Por lo tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función g.
Además, notamos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

(h) La gráfica de la función g es



Estudio de la tercera función:

$$h(x) = x^3 - 3x + 2$$

(a) Para ser $h(x)$ una función polinómica, su dominio consta de todos los números reales. Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$.

(b) Cortes con los ejes:
Eje Y: $h(0) = 0^3 - 3\cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow$ el punto $(0,2)$.
Eje X: $h(x) = x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ y $x = 1 \Rightarrow$ los puntos $Q(-2,0)$ y $(1,0)$.

(c) Para encontrar los máximos y mínimos, derivamos la función y la igualamos a 0:

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos dos posibilidades: $x = -1$ y $x = +1$.
Calculamos la segunda derivada:

$$h''(x) = 6x$$

La evaluamos en $x = -1$ y $x = +1$ y obtenemos:

$$h''(-1) = 6\cdot(-1) = -6 < 0 \text{ y } h''(+1) = 6\cdot 1 = 6 > 0$$

Por lo tanto, h tiene un máximo en $(-1, h(-1)) = (-1,4)$ y un mínimo en $(1, h(1)) = (1,0)$.

(d) Para encontrar los puntos de inflexión, igualamos la segunda derivada a 0 y resolvemos la ecuación resultante:

$$h''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Además, $h'''(x) = 6 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, el punto $(0, h(0)) = (0,2)$ es un punto de inflexión de h.

(e) Hay tres intervalos de crecimiento o decrecimiento, separados por los extremos encontrados (el máximo y el mínimo). Estudiamos el comportamiento de la función en cada uno de estos tres intervalos evaluando la derivada en un punto interior en cada uno de ellos:

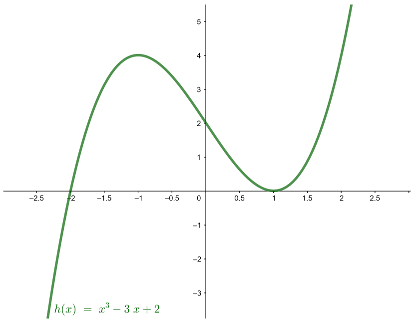
- De $-\infty$ a -1: $h'(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ es creciente
- De -1 a 1: $h'(x) < 0 \Rightarrow h(x)$ es decreciente
- De 1 a $+\infty$: $h'(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ es creciente

(f) Para determinar los intervalos de concavidad y convexidad, solo hay que estudiar la segunda derivada de la función antes y después del punto de inflexión (puesto que el dominio son todos los reales):

- De $-\infty$ a 0: $h''(x) < 0 \Rightarrow h(x)$ es cóncava.
- De 0 a $+\infty$: $h''(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ es convexa.

(g) Esta función no tiene ninguna asíntota

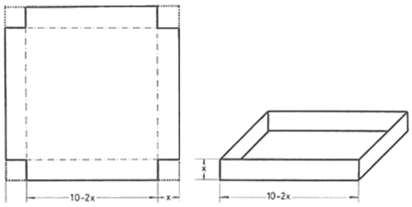
(h) La gráfica de la función h es



4. **Con una pieza de cartulina de 10 dm de lado se quiere construir una caja recortando piezas cuadradas de lado x en cada vértice del cuadrado. ¿Qué valor se ha de dar a x para que el volumen de la caja sea el máximo?**

Solución

Empezamos para representar gráficamente la situación que describe el enunciado del problema:



Notamos que el volumen de la caja se corresponde con el volumen de un prisma rectangular. Su valor se puede encontrar multiplicando anchura por longitud y por altura. Si sabemos, además, que la cartulina tiene 10 dm de lado, el volumen del prisma es producto de la expresión

$$V(x) = (10 - 2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$

Así, queda claro que el volumen de la caja depende del valor de x. Encontrada la función con qué trabajar, se trata de encontrar un máximo en el intervalo$(0, 5)$ por simetría, puesto que el corte en los extremos no puede superar 5 dm. En particular, notamos que el volumen de la caja, tanto en 0 como en 5, es igual a 0:

$$V(0) = V(5) = 0$$

Veamos, pues, si podemos encontrar el máximo en el interior de este intervalo. Por eso, trataremos de encontrar un punto, $x_0 \in (0, 5)$, que cumpla las condiciones de máximo, es decir, que cumpla a la vez

$$V'(x_0) = 0 \text{ y } V''(x_0) < 0$$

Encontramos la derivada de la función y la igualamos a 0:

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 4 \cdot (3x^2 - 20x + 25) = 0$$

Resolvemos la ecuación obtenida aplicando la fórmula de resolución para ecuaciones de segundo grado y encontramos que se anulan en dos puntos:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} = \left\{5, \frac{5}{3}\right\}$$

El primer valor, $x = 5$, no está dentro del intervalo $(0, 5)$ considerado, y por lo tanto solo podemos considerar el segundo resultado: $x = \frac{5}{3}$. Para saber si en este punto hay un máximo o un mínimo de la función, tenemos que calcular la segunda derivada de la función y evaluarla en este punto:

$$V''(x) = 24x - 80 \text{ y } V''\left(\frac{5}{3}\right) = 24 \cdot \frac{5}{3} - 80 = -40 < 0$$

Por lo tanto, podemos concluir que en $x = \frac{5}{3} \approx 1.66$ hay un máximo de la función.

Esto quiere decir que, para que la nueva caja tenga el volumen máximo posible, se tendrán que recortar cuadrados de aproximadamente 1.66 dm de lado. Entonces, el volumen de la caja resultante, que será máaximo, será

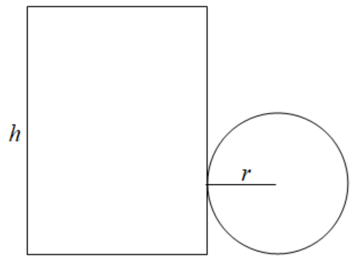
$$V\left(\frac{5}{3}\right) = \left(10 - 2 \cdot \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} = \left(\frac{20}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{2000}{27} \approx 74.07 \text{ dm}^3$$

5. **Se quieren construir potes cilíndricos (como los de las bebidas refrescantes) de 500 $\mathbf{cm^3}$ de volumen. ¿Qué dimensiones (altura y diámetro de la base) se tienen que dar a un envase de estas características para que necesite la mínima cantidad de material?**

Solución

Distinguimos dos posibilidades en función de si el bote, que tiene que ser cilíndrico, tiene una una o dos tapes.

Primer caso: pote con una tapa. Si consideramos que el pote, que es cilíndrico, tiene una única tapa, el desarrollo plano que le corresponde es



Entonces, el material necesario para construirla tiene que tener una superficie de

$$S = 2\pi r h + \pi r^2$$

El enunciado impone que el volumen del pote tiene que ser 500 cm^3, y por lo tanto se ha de cumplir

$$\pi r^2 h = 500$$

de donde, aislando h en función de r, resulta

$$h = \frac{500}{\pi r^2}$$

Por lo tanto, la función S a estudiar, que dependerá del radio r, acontece

$$S(r) = 2\pi r \cdot \left(\frac{500}{\pi r^2}\right) + \pi r^2 = \frac{1000}{r} + \pi r^2$$

Así, se trata de encontrar un valor para r de manera que haga mńimo el valor de $S(r)$. Por esto, sabemos que si r_0 es el valor mínimo de esta función, se cumple

$$S'(r_0) = 0 \text{ y } S''(r_0) > 0$$

Calculamos, pues, $S'(r)$ e igualamos a 0:

$$S'(r) = -\frac{1000}{r^2} + 2\pi r = 0$$
$$2\pi r = \frac{1000}{r^2}$$
$$2\pi r^3 = 1000$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}}$$
$$r = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} \approx 5.42$$

Por lo tanto, el radio tendría que medir aproximadamente 5,42 cm.
Encontrado el valor candidato a extremo, comprobamos si se trata realmente de un mínimo de la función y, por lo tanto, hace mínimo el valor de la función:

$$S''(r) = \frac{3000}{r^3} + 2\pi \text{ y } S''(5.42) \approx 18.85 > 0$$

Confirmamos así que al tomar $r \approx 5.42$ cm, la función superficie $S(r)$ toma un valor mínimo, que es igual a $S(5.42) \approx 276.8$ cm^2 aproximadamente.

Segundo caso: pote con dos tapas. Si se interpreta que el pote cilíndrico tiene, como las latas de refrescos, dos tapas y no solamente una, la función superficie tiene que incluir la superficie de la otra tapa. Entonces, hay que trabajar con la función

$$S(r) = 2\pi r h + 2\left(\pi r^2\right)$$

Al imponer la condición que el volumen tiene que ser 500 cm^3, la función en función del radio r acontece

$$S(r) = \frac{1000}{r} + 2\pi r^2$$

Entonces,

$$S'(r) = -\frac{1000}{r^2} + 4\pi r = 0$$

de donde resulta

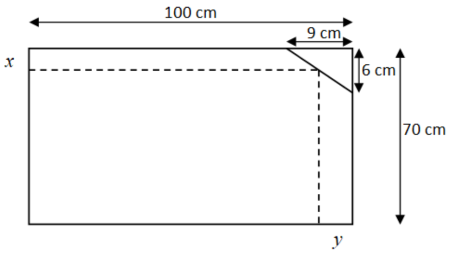
$$4\pi r = \frac{1000}{r^2}$$
$$r^3 = \frac{1000}{4\pi}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{4\pi}}$$
$$r = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \approx 4.3$$

Por lo tanto, el radio tendría que medir aproximadamente 4,3 cm.
Encontrado el valor candidato a extremo, comprobamos si se trata realmente de un mínimo de la función y, por lo tanto, hace mínimo el valor de la función:

$$S''(r) = \frac{3000}{r^3} + 4\pi \text{ y } S''(4.3) \approx 37.7 > 0$$

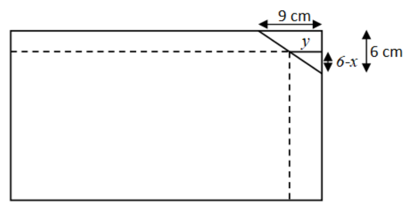
Confirmamos así que al tomar $r \approx 4.3$ la función superficie $S(r)$ toma un valor mínimo, que es igual a $S(4.3) \approx 348.73$ cm^2 aproximadament.

6. **Al trasladar un espejo de 70×100 cm se ha roto por uno de los vèrtices. El pedazo roto es un triángulo rectángulo de 6×9 cm de lado, tal como se ve en la figura. Calcula por dónde se tiene que cortar el espejo para obtener otro espejo que también sea rectangular y que tenga el área más grande posible.**



Solución

Se trata de un problema de maximización, puesto que se presenta una situación en que tenemos que maximizar ciertas dimensiones de un objeto que podemos medir. En este caso, en particular, el área de un rectángulo correspondiente a un espejo.
Para resolver el problema, rehacemos gráficamente la situación planteada. Si nos fijamos bien en esta representación,



notamos que se trata de escoger las medidas x e y de manera que el área del rectángulo punteado, que representa el nuevo rectángulo, sea la máxima posible.
De acuerdo con esta imagen, el área del nuevo espejo es producto de la expresión:

$$(100 - y) \cdot (70 - x)$$

Ahora bien, como que la expresión es producto de dos variables, se hace necesario en primer lugar determinar una de las incógnitas en función de la otra. Ponemos, por ejemplo, y en función de x. Este cambio se puede hacer gracias a las razones de semejanza entre triángulos. En particular, en este caso se tiene que cumplir

$$\frac{y}{6 - x} = \frac{9}{6}$$

de donde podemos aislar y en función de x y, por lo tanto, podemos considerar

$$y \Longrightarrow \frac{3}{2} \cdot (6 - x)$$

Por lo tanto, al sustituir y en función de x, la función área a maximitzar acontece

$$f(x) = \left(100 - \frac{3}{2} \cdot (6 - x)\right)(70 - x)$$

$$f(x) = 6370 + 14x - \frac{3}{2}x^2$$

Ahora buscamos su derivada para encontrar un máximo. Por esto, calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = 14 - 3x$$

La igualamos a 0 y resolvemos la ecuación resultante:

$$14 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{14}{3}$$

Por lo tanto, el valor candidato es $x = \frac{14}{3} \approx 4.67$ cm.
Como que

$$f''(x) = -3 < 0, \ \forall x$$

nos encontramos, como buscábamos, ante un máximo.
De acuerdo con este valor de x, el valor correspondiente de y resulta

$$y = \frac{3}{2} \cdot \left(6 - \frac{14}{3}\right) = 2$$

Por lo tanto, y de acuerdo con la imagen considerada, las medidas que harán máxima el área del nuevo espejo serán: $100 - 2 = 98$ cm de largo por $70 - \frac{14}{3} = \frac{196}{3} \approx 65.33$ cm de ancho. Es decir, que se tendría que recortar el espejo de manera que tuviera 98 cm de largo y aproximadamente 65.33 cm de ancho. Entonces, el àrea de este nuevo rectángulo recortado, que será máxima, será de $98 \cdot \frac{196}{3} = 6402.7$ cm^2.

Ejercicios para practicar con las soluciones

7. **Dada la función a trozos siguiente,**

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & \textbf{si } x < -1 \\ 1 & \textbf{si } -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{3}{4-x} & \textbf{si } x > 1 \end{cases}$$

estudia su derivabilidad y escribe la expresión de la función derivada $f'(x)$.

8. **Calcula las derivadas de estas funciones:**

(a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

(b) $g(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$

(c) $h(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$

(d) $r(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{\ln(x)}$

(e) $b(x) = e^{3x^2 - x - 1}$

9. **Encuentra las asíntotas de las funciones siguientes:**

$$f(x) = x \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^- 1}}$$

Soluciones

7. La expresión de la función derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x \in (-\infty, -1) \\ 0 & \text{si } x \in (-1, +1) \\ \dfrac{3}{(4-x)^2} & \text{si } x \in (1, +\infty) \setminus \{4\} \end{cases}$$

La función es derivable en todo su dominio menos en los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ porque en ellos no existe el límite que define la derivada de una función en un punto (los límites por la izquierda y la derecha son diferentes).

8. Las derivadas, simplificadas al máximo, de las funciones son:

(a) $f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$

(b) $g'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

(c) $h'(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}}$

(d) $t'(x) = \dfrac{2e^{2x+1} \cdot \ln(x) - \frac{e^{2x+1}}{x}}{\ln^2(x)}$

(e) $b'(x) = (6x - 1)\, e^{3x^2 - x - 1}$

9. Las asíntotas son:
En el caso de $f(x)$: una asíntota vertical en $x = 1$ y una asíntota oblicua en $y = x + 1$.
En el caso de $g(x)$: dos asíntotas verticales: $x = -1$ y $x = +1$ y una asíntota oblicua en $y = x$.