Análisis mediante teoría de colas

PID_00268538

Enric López i Rocafiguera
Pere Barberán

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 5 horas

Universitat Oberta de Catalunya

Enric López Rocafiguera

Ingeniero de Telecomunicaciones, en la especialidad de Comunicaciones por la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación de Barcelona, de la Universidad Politécnica de Cataluña. Profesor de Redes de comunicaciones y Redes de computadores, en las carreras de Ingeniería Técnica de Telecomunicaciones, Ingeniería Técnica Industrial e Ingeniería Técnica Informática en la Escuela Politécnica Superior (EPS) de la Universidad de Vic (UVic). Miembro del grupo de la UVic. Profesor del máster de Tecnologías de la información y la comunicación en la empresa. Ha sido jefe del Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones, y miembro del Consejo de Dirección del EPS de la UVic.

Pere Barberán

Ingeniero de Telecomunicaciones por la Universidad Politécnica de Cataluña. Profesor de la Escuela Universitaria Politécnica de Mataró donde forma parte del Área de Redes y Servicios. De 2005 a 2010 ha sido director del Departamento de Telecomunicaciones y Arquitectura de Computadores. Actualmente responsable del laboratorio de *networking* TCM NetLab en la Fundación Tecnocampus Mataró-Maresme.

La revisión de este recurso de aprendizaje UOC ha sido coordinada por el profesor: Ferran Adelantado Freixer (2019)

Segunda edición: septiembre 2019

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Realización editorial: FUOC

Índice

Introducción

Las redes de comunicaciones están formadas por un conjunto de recursos que pretenden que la información se transmita a través de las mismas de forma eficiente. Estos recursos son limitados y serán compartidos por múltiples usuarios con diferentes necesidades; las cuales dependerán del tipo de datos que los clientes quieran transmitir y del momento en que las quieran transmitir, por lo tanto, el tráfico en las redes variará de forma aleatoria, y hará falta un estudio estadístico de la capacidad que han de tener los diferentes recursos. Habrá momentos en los que los recursos no serán suficientes para poder absorber el tráfico demandado por los usuarios, y habrá que disponer de sistemas de espera.

La teoría de colas es una herramienta matemática muy útil, cuyo fin es poder gestionar correctamente los sistemas de espera y dimensionar correctamente los recursos para dar un determinado servicio. A partir de la teoría de colas, podremos modelar el sistema y obtener la mejor disciplina de servicio para colas con diversos tipos de clientes.

En este módulo didáctico analizaremos diferentes modelos de colas y sus principales características. Empezaremos viendo una introducción a los procesos de Poisson y de Markov, que nos permitirá caracterizar la aleatoriedad de las llegadas al sistema y nos servirá de base para el estudio de los sistemas de espera. Posteriormente, modelaremos el tipo de tráfico y veremos los principales modelos de colas con cola única. Finalizaremos el módulo con una introducción a las redes de colas.

Objetivos

Estos materiales didácticos tienen que permitir alcanzar los siguientes objetivos por parte de los estudiantes:

1. Recordar diversos conceptos estadísticos, como son la función de distribución, la función de densidad de probabilidad, la media y la variancia.

2. Entender los procesos de Poisson y sus propiedades.

3. Entender el concepto de cadena de Markov, obtener la ecuación de futuro y poder representar el diagrama de estados.

4. Conocer las diferentes definiciones asociadas al concepto de tráfico, como son los tipos de tráfico y las probabilidades asociadas.

5. Conocer los principales modelos de colas, la notación y los principales parámetros que los caracterizan.

6. Poder diferenciar los diferentes modelos de colas comparando sus características.

7. Poder analizar una red de colas a partir del teorema de Jackson.

1. Introducción

Las redes se diseñan teniendo en cuenta diferentes variables. Dos de las variables que hay que tener en cuenta en el diseño de una red son el **servicio** y el **coste**. Con el fin de tener controlados estos dos parámetros, tenemos que optimizar el rendimiento del sistema. Una manera de optimizarlo es mediante modelos analíticos basados en la teoría de colas, que nos proporcionan una gran ayuda para poder diseñar redes con un rendimiento elevado.

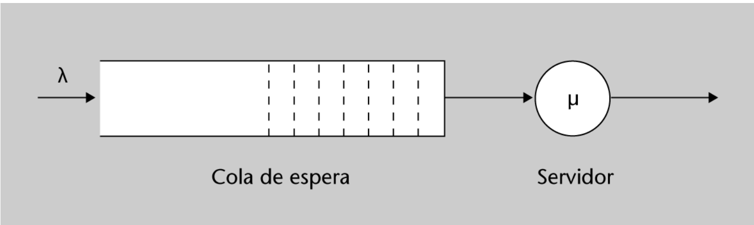
Es muy importante, para poder dimensionar la capacidad de un sistema de transmisión, utilizar unas técnicas que hagan estimaciones del tráfico en función de los diferentes parámetros de entrada, como pueden ser:

- la carga de tráfico,
- el grado de servicio,
- el tipo de tráfico,
- los métodos de muestreo.

Aunque la teoría de colas es matemáticamente bastante compleja, su aplicación al análisis del rendimiento de los sistemas es mucho más sencilla normalmente.

Los sistemas de transmisión los podemos modelar a menudo según un esquema como el de la figura siguiente:

Figura 1. Modelo simplificado de un sistema de espera



Aquí se muestra una fuente generadora de datos y una cola de espera donde se acumularán las unidades de datos esperando a ser atendidas por un servidor. Tanto el proceso de llegada de las unidades al sistema como el proceso de servicio son dos procesos estocásticos. Hay dos parámetros que hay que tener en cuenta: la disciplina con que se generan los datos y la disciplina con que se sirven. El término *disciplina* hace referencia a cuáles son los parámetros estadísticos de estos elementos.

La **disciplina de generación** (o de llegada) de los datos es la estadística de los tiempos de llegada de las unidades de datos. La **disciplina de servicio** trata la estadística de los tiempos que se tarda en servirlas.

Se puede considerar que las unidades llegarán independientemente del estado del sistema, por lo que su comportamiento se podrá analizar conjuntamente como un proceso estocástico discreto en tiempo continuo. El tiempo de servicio de las unidades será impredecible y lo modelaremos también como un proceso estocástico discreto en tiempo continuo, independiente del proceso de llegadas.

Un parámetro que nos definirá el comportamiento de las llegadas y del mecanismo de servicio será el correspondiente a la media de estas estadísticas. Viene caracterizado por λ y μ, respectivamente.

Velocidades medias

- λ es la tasa media o velocidad media de llegadas al sistema.
- μ es la velocidad media de servicio.

Nos podemos encontrar con diferentes posibilidades en función de los valores que tomen λ y μ:

- $\lambda < \mu$, el sistema es estable y la cola no se llenará.
- $\lambda > \mu$, el sistema se saturará y se llenará la cola de espera.
- $\lambda = \mu$, es el límite de estabilidad; se servirán tantos datos como lleguen.

A fin de que la espera no sea muy larga, se intenta que las colas no queden muy ocupadas; eso quiere decir que $\lambda \leq \mu$. Aunque para optimizar el coste, habitualmente se dimensiona el sistema de manera que se considera la posibilidad de una cierta congestión siempre que se garantice un mínimo nivel de calidad del servicio.

Observad que en cualquier sistema que se analice hemos de considerar los siguientes aspectos:

- el modelo de llegada de las unidades de datos al sistema;
- el modelo de servicio de las unidades en el sistema;
- la disciplina de operación de las colas, desde el punto de vista del orden de entrega a los servidores de las unidades almacenadas para que sean atendidas;
- el número de servidores que trabajan en paralelo (cuántas unidades pueden servirse simultáneamente);
- el número de fuentes que generan unidades al sistema.

Principales disciplinas de colas

Las disciplinas de colas más importantes son las siguientes:

- RR: *round robin.*
- FIFO: *first in first out.*
- SIFO: *shortest in first out.*
- LIFO: *last in first out.*

2. Procesos de Poisson

Una de las disciplinas más utilizadas por su simplicidad, propiedades y características generales son los **procesos de Poisson**. Estas características sólo permiten unos análisis más bien simples, que se ajustan a fuentes de datos en general, pero no válidos para los casos en los que tengamos fuentes de datos más o menos complejos, como los multimedia (audio, vídeo, etc.).

Antes de pasar a definir los procesos de Poisson, vamos a ver alguno de los conceptos previos para su desarrollo.

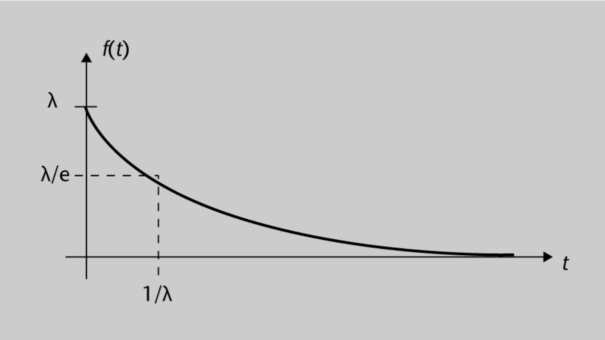
2.1. Distribución exponencial. Sistema sin memoria

Un proceso con estadística exponencial es un proceso aleatorio que tiene una probabilidad distribuida que sigue una función de distribución de tipo exponencial.

Una **función de distribución exponencial** es una función continua que tiene una función de densidad de probabilidad de tipo exponencial. Eso quiere decir que:

$$f(t) = \lambda \,.\, e^{-\lambda t} \quad \text{para } t > 0$$

Figura 2. Representación gráfica de la función de distribución exponencial



Su función de distribución, obtenida de integrar la función de densidad de probabilidad, es:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{para } t > 0$$

A partir de la función de densidad de probabilidad, podemos obtener la media, o esperanza, de esta variable aleatoria:

$$m = E[t] = \int_0^\infty t\lambda . e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

Y la variancia:

$$\sigma^2 = E[t^2] - E^2[t] = \int_0^\infty t^2 \lambda . e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Un sistema con distribución de probabilidad exponencial podemos considerarlo un **sistema sin memoria**.

Vamos a considerar un sistema en un tiempo de observación continuo t, y observamos el estado del sistema en dos instantes de tiempos reales positivos x e y. Diremos que la distribución de probabilidad de t es sin memoria si la probabilidad en cualquier instante no depende de la probabilidad en instantes anteriores. Matemáticamente lo podemos expresar:

Sistema sin memoria

Se trata de un sistema definido con una función de distribución exponencial.

$$P(t > x + y / t > x) = P(t > y)$$

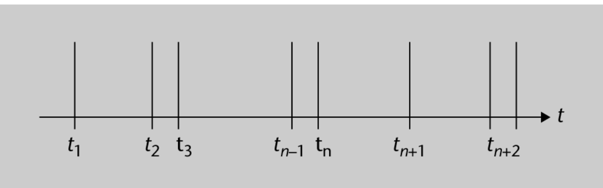
Podemos comprobar que un sistema definido con la función de distribución exponencial es un sistema sin memoria, ya que cumple esta igualdad:

$$P(t > x + y \mid t > x) = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y} = P(t > y)$$

2.2. Definición de un proceso de Poisson

Consideremos un proceso de llegadas aleatorias de forma continua en el tiempo, tal como se muestra en la figura siguiente:

Figura 3. Representación gráfica de la distribución de las llegadas de un proceso



Para definir un proceso de Poisson, consideremos las siguientes hipótesis:

a) Proceso sin memoria, donde cada llegada sea independiente de cuándo se ha producido la anterior.

b) Población infinita, es decir, que el número de fuentes sea tan grande que se pueda considerar que la tasa media de llegada de unidades no depende del tiempo y, por lo tanto, es una constante de valor λ.

c) Estacionario. La probabilidad de que se produzca una llegada es proporcional al tiempo de observación Δt, es decir, es $\lambda \Delta t$.

Teniendo en cuenta estas hipótesis, se puede obtener que la probabilidad de que se produzcan n llegadas en un tiempo *t*, se puede calcular como:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Se puede demostrar fácilmente que esta probabilidad está normalizada. Es decir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$$

Por lo tanto, la probabilidad de que no se produzca ninguna llegada en un tiempo *t* es:

$$P_0(t) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

Este resultado nos permite calcular la probabilidad de tener alguna llegada en el instante de tiempo *t*, que se puede obtener como:

$$P_{n \neq 0}(t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

2.3. Media y variancia

Una vez definida la probabilidad de llegada de unidades al sistema, podemos obtener el número medio de unidades en un intervalo de tiempo *t*, que se puede evaluar según la expresión:

$$E[n(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n.P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n.\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!}$$
$$= e^{-\lambda t}.\lambda t.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t}.\lambda t.e^{\lambda t} = \lambda t$$

Media y variancia

En un proceso de Poisson, la media y variancia toman el mismo valor: λt.

Como $E[n(t)] = \lambda t$, se puede deducir que λ es la velocidad media de las llegadas por unidad de tiempo, ya que $\lambda = E[n(t)]/t$. Al parámetro λ se le llama **tasa de llegadas.**

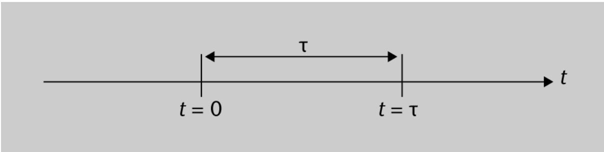
La variancia de las llegadas de un proceso de Poisson se puede calcular como:

$$\sigma^2 = E[n^2(t)] - E^2[n(t)] = E[n(t)(n(t) - 1)] + E[n(t)] - E^2[n(t)] =$$
$$= (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t$$

2.4. Distribución de las llegadas en un proceso de Poisson

La forma en que se distribuirán en el tiempo las llegadas es la función de distribución del proceso. Con el fin de poder calcularla, supondremos un intervalo de tiempo con un origen arbitrario, en cuyo final se produce la llegada de la siguiente unidad.

Figura 4



En este caso, hay una llegada para $t = 0$ y la siguiente se produce para $t = \tau$. No se recibe ninguna unidad en el intervalo de tiempo comprendido en $(0, \tau)$, por lo tanto, la probabilidad de no tener ninguna llegada en el intervalo $(0, t)$ es exactamente la probabilidad de que τ sea mayor que t. Es decir:

$$P(\tau > t) = P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

De aquí que la función de distribución sea:

$$F(t) = P(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Y derivando, obtenemos la función de densidad de probabilidad de tipo exponencial:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda . e^{-\lambda t}$$

A partir de esta función de densidad, tal como hemos visto anteriormente, podemos obtener la media de tiempo entre llegadas y la variancia:

Se ha tratado la función de densidad de probabilidad en el subapartado 2.1 de este módulo didáctico.

$$m = E[t] = \int_0^{\infty} t . \lambda . e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = E[t^2] - E^2[t] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Observamos que, en un proceso de Poisson, la duración media entre dos llegadas consecutivas coincide con su desviación típica σ.

2.5. Propiedades

Las dos propiedades que trataremos en este subapartado son las siguientes:

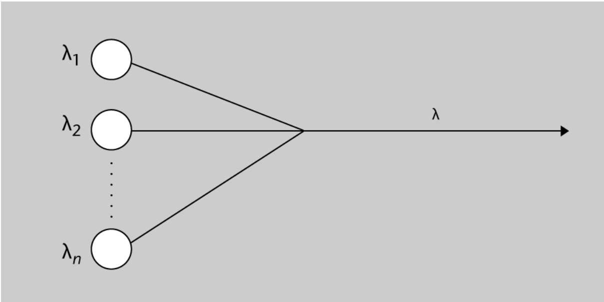
- superposición,
- descomposición.

1) Superposición

Suponemos n fuentes de Poisson independientes con tasas de llegada λ_i. La fuente resultante de la suma de los procesos de Poisson es otro proceso de Poisson con una tasa de llegadas (λ) igual a la suma de las tasas de los procesos.

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

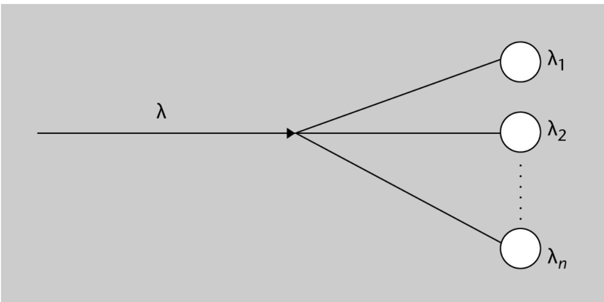
Figura 5. Superposición de procesos de Poisson



2) Descomposición

Suponemos una fuente generadora que sigue un proceso de Poisson con una tasa de llegadas λ. Si descomponemos aleatoriamente este flujo en un conjunto de flujos más pequeños con una probabilidad P_i, los flujos resultantes tendrán una tasa $\lambda_i = \lambda P_i$, que serán también de Poisson.

Figura 6. Descomposición de un proceso de Poisson



3. Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son una herramienta que analiza el comportamiento de determinados tipos de procesos estocásticos; por ejemplo, el número de llamadas que llegan a una central telefónica o el número de compradores que llegan a un mostrador.

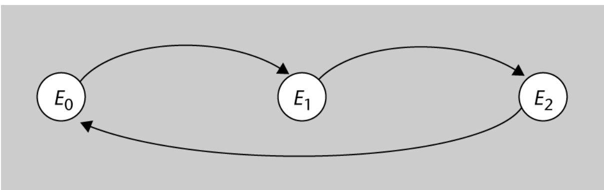
Un sistema puede cambiar su estado desde el estado actual a otro. El sistema estará en uno u otro estado en función de unas probabilidades. A partir de estas probabilidades, se puede calcular un conjunto de parámetros que permitirán caracterizar el sistema.

Consideramos un sistema con diversos estados. Llamamos E_i al estado i en que, por ejemplo, i usuarios están en un instante dado efectuando una llamada telefónica. Si hubiera n circuitos en total para cursar las llamadas, habría que definir desde un estado E_0 hasta un estado E_n (E_0, E_1, E_2, ..., E_n).

Como el sistema es estocástico, no se puede conocer su estado con exactitud, sino que sólo conoceremos la probabilidad asociada a cada estado. Esta probabilidad de estar en cada uno de los estados en el instante t_i se puede escribir como $P_0(t_i)$, $P_1(t_i)$, $P_2(t_i)$, ..., $P_n(t_i)$.

Una cadena de Markov nos representa un sistema que varía su estado a lo largo del tiempo. Cada cambio de estado se llama transición. Una cadena de Markov está formada por un conjunto de estados que se pueden representar gráficamente mediante nodos, enlazados entre ellos mediante arcos o flechas de transición entre unos estados y otros, de forma parecida al diagrama siguiente.

Figura 7. Representación gráfica de una cadena de Markov



En general, la evolución de un sistema puede depender de todos los estados pasados.

Los procesos de Markov tienen como característica que su comportamiento futuro no depende del pasado, sólo depende del estado presente; son procesos sin memoria.

La probabilidad de que $E_m(t_1) = j$ sólo depende del estado anterior del sistema $E_n(t_2) = i$, con $t_2 < t_1$; y lo podemos expresar en forma de probabilidad condicional como:

$$P[E_m(t_1) = j \mid E_n(t_2) = i] = P_{mn}(t_1,t_2) = p_{ij}$$

Los valores p_{ij} se llaman probabilidades de transición del estado i al estado j. Si estas probabilidades son estacionarias, es decir, no dependen del instante t que consideramos, hablaremos de una **cadena de Markov homogénea**.

Probabilidades de transición

Las **probabilidades de transición** nos indican la probabilidad de pasar de un estado al siguiente, y las indicaremos como p_{ij}.

3.1. Cadenas de Markov de tiempo continuo

Los sistemas con cambios de estado en instantes de tiempos indefinidos se llaman **sistemas de tiempo continuo**. Como en los sistemas de comunicación, las llegadas y salidas se producen en instantes de tiempos indeterminados e independientes del tiempo, trataremos las cadenas homogéneas de tiempo continuo.

La probabilidad de estar en cada uno de los n estados se puede escribir pues como $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, ..., $P_n(t)$. Este conjunto de probabilidades de los estados de un sistema se llama **vector de estado**.

Vector de estado

Vector formado por el conjunto de las probabilidades de estar en cada uno de los estados de un sistema.

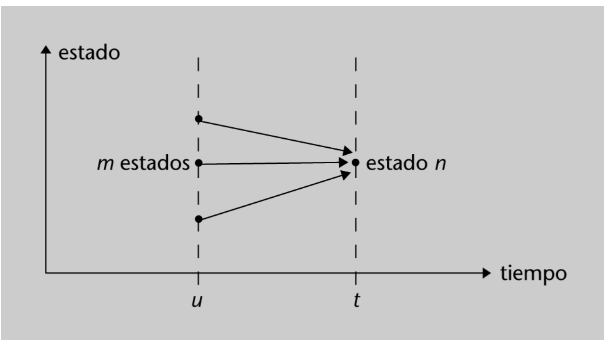
Estas probabilidades cumplirán las propiedades:

$$0 \le P_m(t) \le 1$$
$$\sum_m P_m(t) = 1$$

La probabilidad de estar en el estado n en un instante t se puede descomponer según el conjunto de todos los caminos procedentes de cada uno de los estados anteriores, hasta n. Podemos escribir que:

$$P_n(t) = \sum_m P_m(u) P_{nm}(u,t)$$

Figura 8



Al conjunto de probabilidades de transición entre estados $P_{nm}(u,t)$ lo llamaremos **matriz de transiciones**.

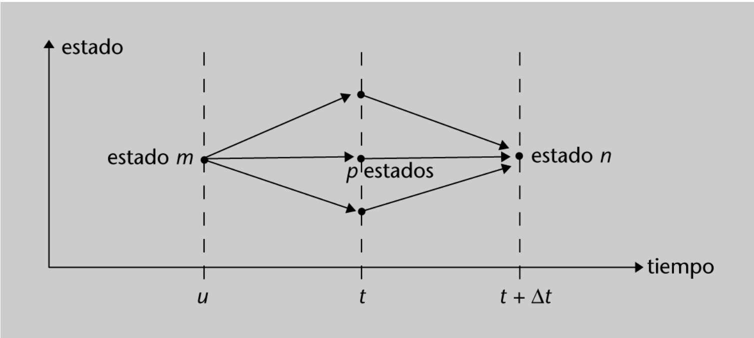
Matriz de transiciones

Es la matriz formada por el conjunto de probabilidades de pasar de un estado a otro.

3.2. Ecuación de futuro

La figura siguiente nos muestra la evolución del sistema desde un estado m en el instante u, hasta un estado n en el instante $t + \Delta t$, pasando por p estados en el instante t.

Figura 9.



Definimos **la ecuación de futuro** (ecuación de Chapman-Kolmogorov) como:

Ecuación de futuro

Es una relación entre las probabilidades de transición de los estados de un proceso.

$$P_{mn}(u,t+\Delta t) = \sum_p P_{mp}(u,t)P_{pn}(t,t+\Delta t)$$

Extrayendo el término $p = n$ del sumatorio y restando $P_{mn}(u,t)$ a toda la expresión:

$$P_{mn}(u,t+\Delta t) - P_{mn}(u,t) = \left[\sum_{p\neq n} P_{mp}(u,t)P_{pn}(t,t+\Delta t)\right] + P_{mn}(u,t)P_{nn}(t,t+\Delta t) - P_{mn}(u,t)$$

Dividiendo por Δt y haciendo el límite cuando $\Delta t \to 0$, esta expresión se convierte en la expresión de la derivada o variación de la probabilidad en el tiempo; con lo que resulta la siguiente ecuación de futuro:

$$\frac{\partial P_{mn}(u,t)}{\partial t} = \left[\sum_{p\neq n} P_{mp}(u,t)q_{pn}(t)\right] + P_{mn}(u,t)q_{nn}(t)$$

Donde $q_{pn}(t)$ se define como la **tasa de transición** entre dos estados, que la podemos considerar como la velocidad a la que el sistema puede pasar de un estado al otro, y $q_{nn}(t)$ es **la tasa de permanencia** en un estado:

$$q_{pn}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P_{pn}(t,t+\Delta t)}{\Delta t}$$

$$q_{nn}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{P_{nn}(t,t+\Delta t)-1}{\Delta t}$$

Si consideramos que en el instante inicial, con tiempo $u = 0$, el sistema está en el estado 0, $P_{0n}(0,t) = P_n(t)$. Entonces, la ecuación de futuro quedará:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \left[\sum_{p \neq n} P_p(t) q_{pn}(t)\right] + P_n(t) q_{nn}(t) = \sum_{p} P_p(t) q_{pn}(t)$$

Si definimos la matriz Q(t) como la formada por el conjunto de velocidades $[q_{pn}(t)]$, y teniendo en cuenta que $P(t)$ es el vector de estado, se puede escribir la siguiente ecuación vectorial:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)Q(t)$$

3.3. Procesos de nacimiento y muerte

Los procesos de nacimiento y muerte son el modelo más adecuado para modelar cambios en el tamaño de la población, pero también para analizar las prestaciones de las redes de comunicaciones; por ejemplo, para caracterizar las llamadas que se están cursando en una central de conmutación, o, los paquetes que hay en un router.

Hasta ahora hemos estudiado las cadenas de Markov, donde desde cualquier estado se puede ir a cualquier otro en el siguiente instante de tiempo.

Un caso particular de los procesos de Markov podría ser haciendo la restricción de que en el siguiente instante de tiempo únicamente se puede pasar a un estado inmediatamente vecino, es decir, desde el estado E_n se puede pasar en los estados E_{n+1}, E_{n-1} o mantenerse en el estado E_n. Esto nos permite definir los procesos de nacimiento (cuando se pasa a un estado superior) y muerte (cuando se pasa a un estado inferior), que constituyen un caso particular de los procesos de Markov.

Procesos de nacimiento y muerte

Estos procesos son un caso particular de procesos de Markov, donde las transiciones sólo se pueden realizar entre estados adyacentes.

En este caso, todas las probabilidades de transición serán nulas excepto: $P_{m,m+1}$, $P_{m,m}$ y $P_{m,m-1}$.

Así pues, la ecuación de futuro en un proceso de nacimiento y muerte queda reducida a la siguiente expresión:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t) q_{n-1,n}(t) + P_{n+1}(t) q_{n+1,n}(t) + P_n(t) q_{nn}(t)$$

Se define la **tasa de nacimiento** como:

$$q_{n-1,n}(t) = \lambda_{n-1}(t)$$

Y la **tasa de muerte** como:

$$q_{n+1,n}(t) = \mu_{n+1}(t)$$

Se puede demostrar fácilmente que:

$$\sum_{n} q_{pn}(t) = 0$$

De la ecuación anterior, si aislamos $q_{nn}(t)$:

$$q_{nn}(t) = -[q_{n+1,n}(t) + q_{n-1,n}(t)] = -[\lambda_n(t) + \mu_n(t)]$$

Entonces, sustituyendo la ecuación de futuro, nos quedará como un sistema de ecuaciones diferenciales:

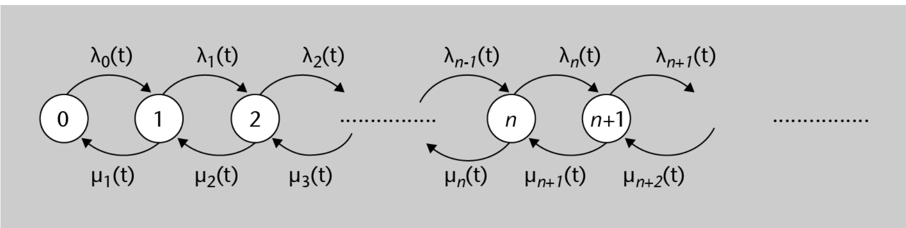
$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu_{n+1}(t)P_{n+1}(t) + \lambda_{n-1}(t)P_{n-1}(t) - \left[\lambda_n(t) + \mu_n(t)\right]P_n(t) \quad , \quad n > 0$$
$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1(t)P_1(t) - \lambda_0(t)P_0(t) \quad , \quad n = 0$$

Para su resolución, tendremos en cuenta que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$$

Gráficamente, una cadena de Markov de tiempo continuo para procesos de nacimiento y muerte se puede representar:

Figura 10



3.4. Procesos de nacimiento y muerte en régimen permanente

Habitualmente, no nos interesará el régimen transitorio de un sistema, sino que nos interesará su régimen permanente. Supondremos que el sistema ha evolucionado suficientemente para que las probabilidades de estado ya no dependan del tiempo y, por lo tanto, no dependan del estado inicial. Las variaciones de las probabilidades (por lo tanto, las derivadas respecto del tiempo) pasan a ser nulas.

En el caso de los procesos de nacimiento y muerte en régimen permanente, el sistema de ecuaciones queda reducido a:

$$0 = \mu_{n+1}P_{n+1} + \lambda_{n-1}P_{n-1} - [\lambda_n + \mu_n]P_n \ , \ n > 0$$

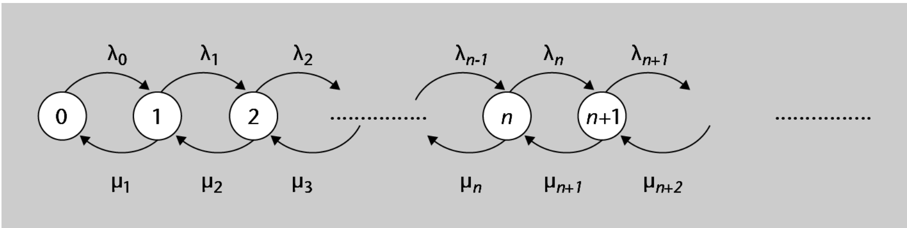
$$0 = \mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0 \ , \ n > 0$$

Régimen permanente

En un sistema en régimen permanente, las probabilidades de estado se mantienen constantes.

Gráficamente, el proceso de nacimiento y muerte en régimen permanente se puede representar:

Figura 11



3.5. Probabilidades de estado de los procesos de nacimiento y muerte

Con el fin de obtener las probabilidades de estado, podemos resolver las ecuaciones empezando desde el estado 0 hasta llegar al estado n para obtener una expresión general:

a) Para $n = 0$:

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

b) Para $n = 1$:

$$\mu_2 P_2 = -\lambda_0 P_0 + [\lambda_1 + \mu_1] P_1 = -\lambda_0 P_0 + [\lambda_1 + \mu_1] \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0$$

Siguiendo la iteración, para cualquier valor de n, fácilmente se puede deducir que:

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} P_0 = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

Donde P_0 se puede obtener sustituyendo P_n en la expresión:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

De donde obtenemos que:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}$$

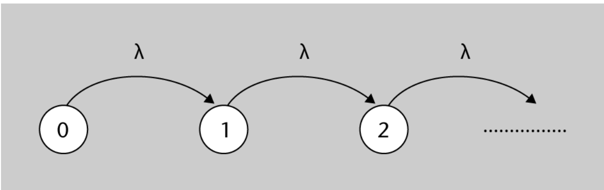
Teniendo en cuenta que P_0 es la probabilidad de que no haya ninguna unidad en el sistema, observamos que el valor (1 - P_0) es la probabilidad de que haya alguna unidad en el sistema.

Como la probabilidad de servicio de los sistemas de nacimiento y muerte no depende de la cantidad de servicio recibido, las probabilidades de estado de este tipo de sistemas no dependerán de la disciplina de gestión de cola. Por eso utilizaremos en muchos casos, como ejemplo, la disciplina FIFO, debido a que es la más sencilla.

Ejemplo de proceso de nacimiento puro

Consideremos un proceso donde no se puede pasar a un estado anterior, por lo tanto que no hay muertes ($\mu = 0$). Si suponemos que la velocidad de nacimiento es constante (población infinita), podemos representar su cadena de Markov:

Figura 12



Donde λ es la velocidad de nacimiento.

Entonces, su ecuación de futuro es:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t) \quad , \quad n > 0$$
$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \quad , \quad n = 0$$

De la segunda ecuación podemos obtener que:

$$P_0(t) = C \,.\, e^{-\lambda t}$$

Sabiendo que, en el instante inicial, el sistema está en el estado 0, entonces:

$$P_0(t) = 1 \;\Rightarrow P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

De aquí, mediante la ecuación de futuro, podemos obtener $P_1(t)$:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - \lambda P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda P_1(t)$$
$$P_1(t) = \lambda t . e^{-\lambda t}$$

Podemos ir utilizando recursivamente la ecuación de futuro para obtener una expresión general de la probabilidad donde el sistema esté en un estado n.

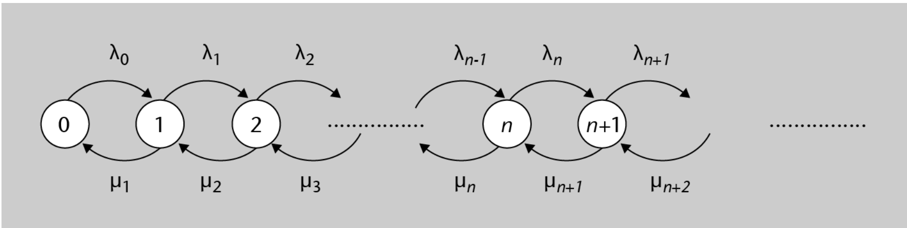
$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} . e^{-\lambda t}$$

4. Conceptos de tráfico

A partir de un sistema de nacimiento y muerte en régimen permanente como el que hemos visto en el apartado anterior, definiremos diferentes conceptos referentes al tráfico.

Supondremos unas tasas o velocidades de nacimiento: λ_0, λ_1, λ_2.., λ_n... y unas tasas de muerte: μ_0, μ_1, μ_2.., μ_n..., tal como muestra la figura siguiente:

Figura 13



Hemos obtenido que la probabilidad de que el sistema esté en un estado *n* venga dada por la expresión:

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} P_0 = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

4.1. Número de unidades

Mediante este sistema podemos calcular el número medio esperado de unidades ofrecidas y servidas, es decir, el número de unidades que han llegado al sistema y el número de unidades que han finalizado en un cierto intervalo de tiempo *T*.

El **número de unidades ofrecidas** lo calcularemos a partir del producto de los nacimientos en cada estado por la probabilidad de estar en este estado y por el intervalo *T*:

$$N_O = \left(\sum_n \lambda_n P_n \right) T$$

El **número de unidades servidas** (cursadas) lo calcularemos a partir de las muertes en cada estado multiplicadas por la probabilidad de estar en este estado y por el intervalo *T*:

$$N_C = \left(\sum_n \mu_n P_n \right) T$$

Hemos de tener en cuenta que el número de unidades ofrecidas no coincidirá con el número de unidades cursadas, ya que se perderán las unidades que encuentren los servidores y la cola (si hay) llenos, es decir, las unidades perdidas.

4.2. Tipo de tráfio

La **intensidad de tráfico**, o simplemente tráfico, es una unidad de medida de la ocupación de un determinado recurso por unidad de tiempo. Se puede obtener del cociente entre el tiempo de ocupación respecto al tiempo de observación. Es una magnitud sin dimensiones que habitualmente se expresa en **Erlangs**.

Erlang

Un Erlang (Er) se define como el tiempo en que un recurso está ocupado durante la hora cargada. Su nombre, Erlang, es debido al ingeniero danés A. K. Erlang, creador de la ingeniería de tráfico y la teoría de colas.

Para calcular el **tráfico cursado** y, por lo tanto, la cantidad de unidades servidas con éxito, es necesario tener en cuenta las unidades servidas por unidad de tiempo y la duración media de las unidades que hay que servir (1/μ):

Parámetros para medir el tráfico

La hora cargada (HC) es el periodo de una hora del día en que el tráfico es más elevado. De la definición de Erlang podemos deducir que la intensidad de tráfico de un recurso, como máximo, puede llegar a valer la unidad (1 Er = 60 minutos de tráfico en un circuito en la HC). El tráfico de un Erlang correspondería a un único recurso utilizado continuamente, o bien, a dos canales utilizados en un 50%.

$$A_C = \frac{\sum_n \mu_n P_n}{\mu}$$

El **tráfico ofrecido** y, por lo tanto, lo que llega al sistema se pueden calcular de forma similar a partir de las unidades ofrecidas:

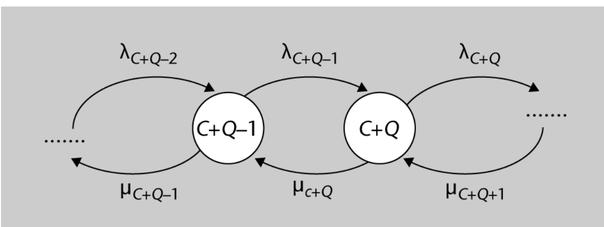
$$A_O = \frac{\sum_n \lambda_n P_n}{\mu}$$

El tráfico ofrecido sería el que se habría cursado si el sistema hubiera podido absorberlo todo, lo que no suele ocurrir nunca. Hay unas llamadas que se pierden en el primer intento por la limitación del sistema. Estas llamadas forman el **tráfico perdido:**

$$A_p = \mathrm{A}_O - A_c$$

Si suponemos que el sistema puede servir C unidades simultáneamente y tiene una cola de espera de Q unidades, se empezarán a perder unidades cuando se encuentren llenos los C servidores y la cola. El tráfico perdido corresponderá, pues, al estado $C + Q$ del proceso.

Figura 14



Se podrá calcular como:

$$A_P = \left(\lambda_{C+Q} P_{C+Q}\right) \frac{1}{\mu}$$

4.3. Grado de servicio

El **grado de servicio** (GoS) es un parámetro que se utiliza para medir la calidad del servicio, y se calcula como el cociente entre el número de unidades perdidas y el número de unidades ofrecidas.

En este punto definiremos los principales conceptos para evaluar el grado de servicio o calidad del servicio. Este concepto va directamente asociado a la probabilidad de bloqueo.

La **probabilidad de bloqueo** de un sistema es la probabilidad de que una unidad no se pueda servir porque todos los servidores se encuentran ocupados, debido a que la capacidad (*K*) del sistema es limitada.

$$PB = \sum_{k=C}^{C+Q} P_k$$

La **probabilidad de pérdida** de un sistema equivale a la parte de las unidades ofrecidas al sistema que se pierden por encontrar el sistema lleno.

$$PP = \frac{N_O - N_C}{N_O} = 1 - \frac{\sum_k \mu_k P_k}{\sum_k \lambda_k P_k}$$

La **probabilidad de espera** o demora de un sistema es la parte de unidades ofrecidas al sistema que, sin perderse, se tienen que esperar a ser servidas porque el sistema está ocupado.

$$PD = \frac{\sum_{k=C}^{C+Q-1} \lambda_k P_k}{\sum_k \lambda_k P_k}$$

La **probabilidad de servicio inmediato** es la probabilidad de que la unidad se sirva inmediatamente y, por lo tanto, de que no se pierda ni se tenga que esperar.

$$PSI = 1 - (PP + PD)$$

5. Modelos de colas

Como hemos comentado anteriormente, existen unos modelos matemáticos que nos interpretan diferentes fenómenos que se pueden producir, como son las llegadas a una centralita telefónica o a un router, y que nos permiten obtener expresiones que nos relacionan un conjunto de probabilidades con unas condiciones de llegadas, número de servidores y tipo de cola, entre otros.

5.1. Parámetros de un modelo de colas

Los principales parámetros que tenemos que fijar para poder realizar un modelo de cola, como podría ser el de un router, son los siguientes:

a) Modelo de llegadas. Supondremos las unidades que aparecen aleatoriamente en el tiempo (lo cual se puede hacer si el número de fuentes es grande). Supondremos en todos los casos que es un proceso de Poisson con una tasa λ.

b) Modelo de servicio. Viene dado por el tiempo de servicio o por el número de unidades servidas por unidad de tiempo. Habitualmente, supondremos un tiempo de servicio aleatorio, de distribución exponencial de media $1/\mu$. En algunos casos supondremos el tiempo de servicio constante.

c) Disciplina de cola. El método más sencillo es el FIFO: el primero que llega será el primero en ser servido.

d) Capacidad del sistema. Es el número máximo de clientes que puede haber en el sistema (finito o infinito). Cuando llega una unidad y se encuentra el sistema lleno, ésta se pierde.

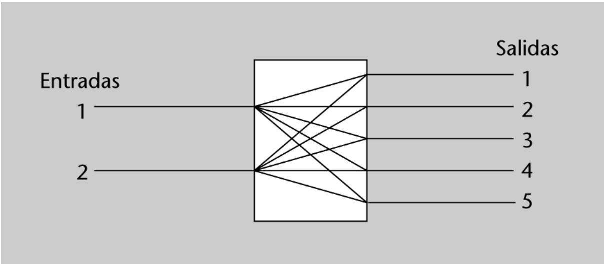
e) Número de servidores. Es la cantidad de servidores que pueden atender llamadas simultáneamente. Puede tener una cola cada uno de ellos, o bien compartir una sola cola.

f) Población. El origen de las llamadas que llegan es lo que se conoce por población, que normalmente podemos suponer como infinita. Eso implica que la tasa de llegadas podemos suponerla constante. Si consideramos la población finita, el tráfico que llegará se irá reduciendo a medida que vayan llegando llamadas al sistema, ya que el número de posibles llamadas se irá reduciendo. Habitualmente, se utiliza la suposición de población infinita.

g) Tratamiento en caso de ocupación. Podemos tener retención de llamadas, con lo cual hará falta otro intento al recibir señal de congestión. Otra posibilidad es la liberación de llamadas, donde se esperará un tiempo para volver a enviar lo que constituirá otra llamada. Un tercer caso es un sistema de espera, que supone que la llamada entrará en una cola de espera.

h) Accesibilidad. Es el número de salidas que puede tener una cierta entrada. Puede ser completa; por lo tanto, cualquier entrada tiene acceso a cualquier salida, o bien limitada, y, por lo tanto, no todas las salidas libres se pueden conectar a las entradas.

Figura 15. Sistema con accesibilidad completa



A partir de aquí, podremos obtener la información necesaria en lo referente a las unidades que hay en el sistema, los tiempos y las probabilidades.

5.2. Número de servidores

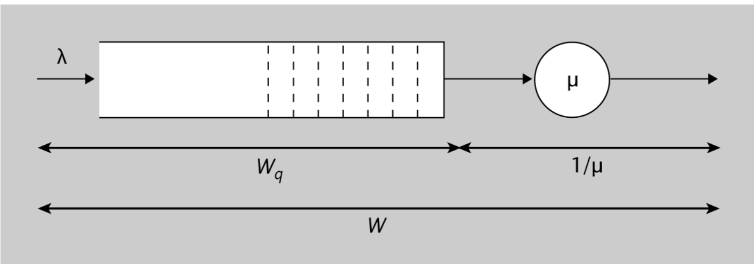
En este subapartado veremos los siguientes casos:

- colas de un solo servidor,
- colas multiservidor.

1) Colas de un solo servidor

El modelo de colas de un solo servidor es el más sencillo. Se trata de un servidor que ofrece servicio a las unidades que le llegan. Las unidades de una cierta población llegan al sistema para ser servidas; si el servidor está vacío, pasan a ser servidas automáticamente, y, si no, pasan a una cola de espera.

Figura 16. Modelo de colas con un solo servidor



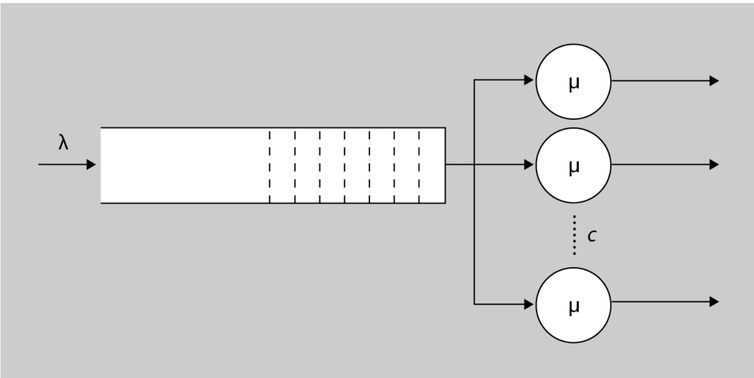
Las unidades llegan al sistema con una tasa de llegada λ (unidades medias/segundo). En cualquier momento habrá un cierto número de unidades esperando en la cola para ser servidas. El tiempo medio de espera de una unidad en la cola lo llamamos W_q. El servidor atenderá a las unidades con un tiempo medio de servicio de valor $1/\mu$, por lo tanto, el tiempo medio que estará una unidad en el sistema será W, que se obtendrá de sumar el tiempo de espera en la cola y el tiempo de servicio.

Si la cola es infinita, nunca se perderá ninguna unidad; sin embargo, si la cola sólo permite un número finito de unidades, cuando esté llena, las unidades que vayan llegando se perderán.

2) Colas multiservidor

El modelo de un servidor se puede generalizar fácilmente en el caso de que tengamos múltiples servidores compartiendo una cola común. Si suponemos que los servidores son idénticos, cuando una unidad llega al sistema se sirve de cualquiera de los servidores que esté libre. Cuando todos los servidores están llenos, las unidades que llegan se empiezan a almacenar en la cola, a la espera de que un servidor esté libre y puedan ser servidas con una determinada disciplina de servicio.

Figura 17. Modelo de colas multiservidor



Las características habituales de una cola multiservidor son las mismas que para una única cola: población infinita, cola infinita y servicio de tipo FIFO.

5.3. Tratamiento en caso de congestión

Según cómo actúe el sistema ante la llegada de unidades cuando el sistema está congestionado, podemos hablar de los siguientes sistemas.

a) Sistemas con pérdidas

- **LCC**: cuando el sistema está congestionado (todos los servidores se encuentran ocupados) señaliza su entrada indicando que está ocupado y lo obliga a reintentar la comunicación al cabo de un rato. Cualquier usuario puede reintentar la comunicación. Es el sistema que utilizan las centrales de conmutación en Europa.

LCC es la sigla de *lost calls cleared.*

- **LCH**: cuando una llamada es bloqueada, señaliza al usuario que reintenta la llamada sin espera. Es el sistema que utilizan las centrales de conmutación en Norteamérica.

LCH es la sigla de *lost calls held.*

b) Sistema de espera (LCD): en este caso, cuando el sistema está congestionado, no avisa a la fuente de que el sistema está ocupado de forma inmediata, sino que espera en un sistema de colas un tiempo, hasta que algún servidor esté disponible. En este caso, un parámetro importante es el tiempo de espera en función de la carga de tráfico.

LCD es la sigla de *lost calls delayed.*

c) Sistema con reintento (LCR): Cuando una entrada queda bloqueada, el sistema va haciendo reintentos hasta que la llamada se sirve. Es un modelo derivado del modelo LCC.

LCR es la sigla de *lost calls retried.*

En general, todos los routers utilizan un sistema de pérdidas. De todas maneras, en routers modernos se utiliza el concepto de sistema de espera en determinadas partes.

5.4. Modelos de tráfico

En esta tabla hemos comparado algunos de los modelos de tráfico. Los más utilizados son los de Erlang B, Erlang B extendido y Erlang C.

Tabla comparativa de algunos modelos de tráfico

Modelo de tráfico	Población	Modelo de llegadas	Tratamiento en caso de bloqueo	Modelo de servicio
Poisson	Infinita	Aleatorio	Pérdidas LCH	Exponencial
Erlang B	Infinita	Aleatorio	Pérdidas LCC	Exponencial
Erlang B extendido	Infinita	Aleatorio	Reintento	Exponencial
Erlang C	Infinita	Aleatorio	Retardo	Exponencial
Engset	Finita	Variaciones suaves	Pérdidas LCC	Exponencial
Pollaczek-Cronmellin	Infinita	Aleatorio	Retardo	Constante
Binomial	Finita	Aleatorio	Pérdidas LCH	Exponencial
Retardo	Finita	Aleatorio	Retardo	Exponencial

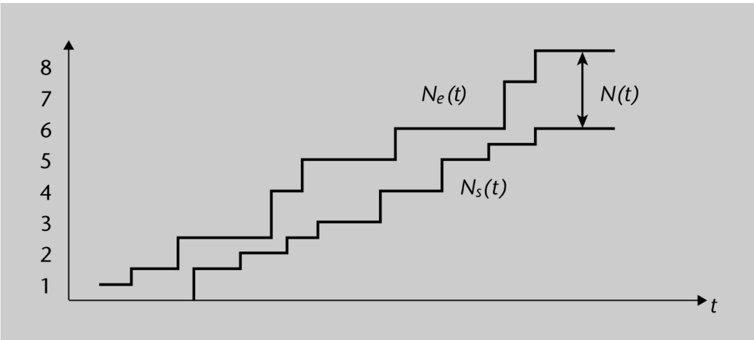
6. Relaciones entre colas. Fórmula de Little

La fórmula de Little es una expresión que se utiliza en los sistemas de espera que nos relacionan los tiempos medios de permanencia en la cola de espera con el número medio de unidades que hay en el sistema.

Sean:

- $N_e(t)$: número de unidades que han llegado al sistema en el instante t.
- $N_s(t)$: número de unidades que se han servido en el instante t.
- $N(t) = Ne(t) - N_s(t)$: número de unidades en el sistema en cada instante t.

Figura 18. Relación entre procesos estocásticos



Valor medio de entradas al sistema (tasa de llegada):

$$\lambda(t) = \frac{N_e(t)}{t}$$

Número medio de unidades en el sistema:

$$\overline{L(t)} = \frac{1}{t}\int_0^t N(\tau)\,d\tau$$

Tiempo medio de permanencia en el sistema:

$$\overline{W(t)} = \frac{\int_0^t N(\tau)\,d\tau}{N_e(t)}$$

Entonces, obtenemos la relación entre estos parámetros:

$$\overline{L(t)} = \lambda(t)\overline{W(t)}$$

Y de aquí resulta, suponiendo ergodicidad y que estamos en régimen permanente, la **fórmula de Little**, que nos dice que el número medio de unidades presentes en el sistema es igual al valor medio de unidades aceptadas, multiplicado por el tiempo medio de permanencia en él:

La fórmula de Little

Relaciona el tiempo medio de permanencia en el sistema y la velocidad de llegada λ con el número medio de unidades en el sistema.

$$L = \lambda W$$

- L: número medio de unidades en el sistema.
- W: tiempo medio de espera en el sistema.

Esta expresión es muy general y aplicable a todos los modelos de colas. La expresión, teniendo en cuenta sólo la cola y dejando de lado los servidores:

$$L_q = \lambda W_q$$

- L_q: número medio de unidades en la cola.
- W_q: tiempo medio de espera en la cola.

7. Notación de Kendall y modelos de colas

La **notación de Kendall** es una notación abreviada que se ha desarrollado para resumir las principales suposiciones que se hacen a la hora de desarrollar un modelo de colas.

La notación de Kendall

Esta notación se ha desarrollado específicamente para describir los sistemas de espera. Se llama notación de Kendall en honor a David Kendall.

Esta notación sigue el formato: *A* / *B* / *c* / *K* / *N* / Z.

Estas variables caracterizan los siguientes elementos de las colas de espera:

a) *A*: distribución de tiempo entre las llegadas de las unidades. Hace referencia al parámetro λ. En general puede ser:

- M: exponencial (Markov), con estadística de Poisson;
- D: determinista, tiempo entre llegadas constante;
- U: uniforme;
- G: generalista, sin especificar;
- H_k: hiperexponencial de *k* niveles;
- E: Erlang.

b) *B*: distribución de tiempo de servicio de las unidades. Depende de la estadística del servicio ofrecido, y la notación es la misma que en el parámetro anterior.

c) *c*: número de servidores que atienden en la misma cola. Los suponemos todos ellos con la misma capacidad.

d) *K*: número máximo de unidades que puede haber al mismo tiempo en el sistema, que está directamente relacionado con el tamaño de la cola. Por defecto, este parámetro indica un valor infinito.

e) *N*: número de unidades que pueden llegar, también llamado población. Por defecto, este parámetro es infinito e independiente del estado del sistema.

f) *Z*: disciplina de cola utilizada (FIFO, LIFO, SIRO u otros). Por defecto, la disciplina de cola es FIFO.

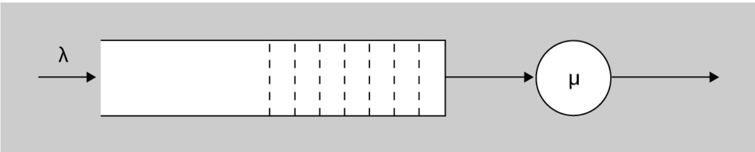
Cuando alguno de los parámetros no se especifica, se supone su valor por defecto. Por ejemplo, una cola $M/M/1/\infty$ modela un sistema de colas con estadística de Poisson (Markov), por lo tanto, con tiempo entre llegadas exponencial, tiempo de servicio también de tipo exponencial, con un único servidor y capacidad ∞. Es equivalente a escribir M/M/1.

Otro ejemplo es el modelo de cola M/D/1. En este sistema, las llegadas siguen una estadística de Poisson; el servicio es determinista, con un único servidor. Igual que en el ejemplo anterior, la cola es de longitud ∞. Los servicios deterministas se caracterizan por el tiempo de servicio constante. Un tipo de redes que operan de esta manera son las que se basan en la tecnología ATM.

7.1. Modelo M/M/1

Es la forma abreviada del modelo M/M/1∞/∞/FIFO. Consideramos al modelo con una tasa de llegadas λ y una tasa de servicio μ. Cada estado representa el número de unidades en la cola de espera.

Figura 19. Modelo M/M/1

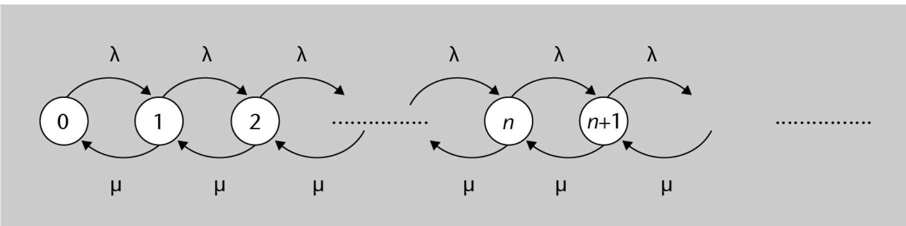


El primer paso en el estudio de un sistema es la representación de la cadena de Markov asociada. A partir de ella, y mediante un estudio a través de flujos o utilizando directamente las expresiones que ya hemos obtenido para las probabilidades de estado, realizaremos el estudio estadístico.

Como las llegadas se producen con una tasa λ, ésta será la tasa de nacimientos independientemente del número de unidades que haya en el sistema. Con respecto a las tasas de muerte, el servidor siempre sirve a una tasa μ, independientemente del estado de la cola.

La representación de la cadena queda así:

Figura 20



1) Probabilidades de estado

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas en el subapartado 3.5 y considerando que las tasas son constantes, $\lambda_i = \lambda$ para $\forall i$, i $\mu_i = \mu$ para $\forall i$.

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Suponiendo que $\lambda < \mu$, tenemos que:

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}} = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{1+\frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}} = 1-\lambda/\mu$$

Por lo tanto,

$$P_n = \left(1-\lambda/\mu\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Como el factor de utilización del servidor es $\rho = \lambda/\mu$, podemos escribir la probabilidad de estado:

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n$$

Factor de utilización

El factor de utilización ρ es la probabilidad de que el servidor esté ocupado.

2) Número medio de unidades en el sistema

Este valor se puede obtener mediante un simple cálculo estadístico, teniendo en cuenta que cada estado indica el número de unidades en el sistema. Por lo tanto, en el estado 0 hay cero unidades, en el estado 1 hay una unidad, etc.

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n.P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

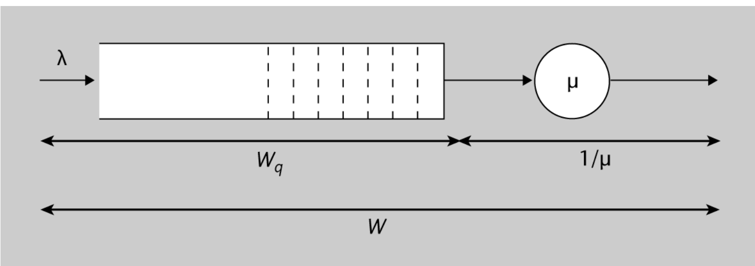
3) Tiempo medio de permanencia en el sistema

Para el cálculo del tiempo medio de permanencia, es decir, el tiempo de espera en la cola más el tiempo de servicio, sólo hay que utilizar la fórmula de Little:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Notad que este resultado contiene tanto el tiempo de espera en cola como el tiempo de servicio:

Figura 21



Por lo tanto, el tiempo medio de espera en la cola será el tiempo de permanencia en el sistema menos el tiempo de servicio:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{1/\mu}{1 - \lambda/\mu} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda/\mu}{\mu\left(1 - \lambda/\mu\right)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

Y aplicando otra vez la fórmula de Little, obtenemos el número medio de unidades en la cola:

$$L_q = W_q.\lambda = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^2}{1 - \lambda/\mu} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Ejemplo numérico

Suponemos un sistema modelado mediante M/M/1 en el cual la unidad mínima de llegada son paquetes de información de tamaño fijo de 100 bytes. La tasa de llegada es de λ = 8 paquetes/s, y la tasa de servicio, de μ = 10 paquetes/s.

Probabilidad de que el sistema esté desocupado:

$$P_0 = 1 - \lambda/\mu = 1 - 8/10 = 0{,}2$$

Probabilidad de tener n paquetes en el sistema:

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n = (1 - 0{,}8)(0{,}8)^n = 0{,}2 \cdot 0{,}8^n$$

Número medio de paquetes en el sistema:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}8}{1-0{,}8} = 4 \text{ paquetes}$$

Tiempo medio de permanencia en el sistema de un paquete:

$$W = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{10(1-0{,}8)} = 0{,}5 \text{ segundos}$$

El tiempo que un paquete habrá pasado por término medio en la cola:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{0{,}8}{10(1-0{,}8)} = 0{,}4 \text{ segundos}$$

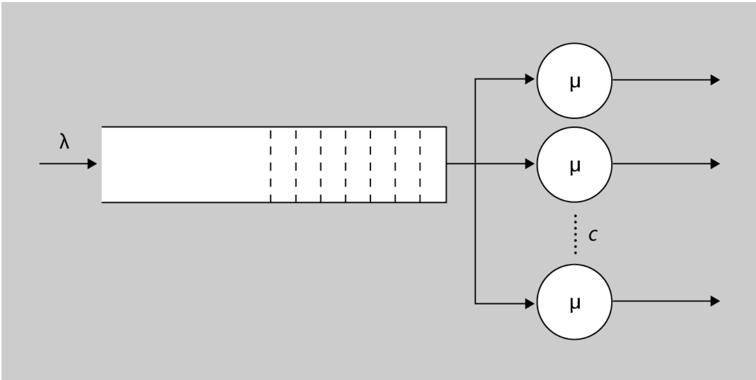
Número medio de paquetes en la cola:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(0{,}8)^2}{1-0{,}8} = 3{,}2 \quad \text{paquetes}$$

7.2. Modelo M/M/c. Erlang C

Este es un sistema con un número finito de c servidores con una cola infinita. Igual que para el sistema anterior, consideramos una población infinita con una tasa de llegadas λ y una tasa de servicio μ en cada servidor. Las llamadas llegan según un modelo aleatorio exponencial. Las llamadas que no se puedan servir pasarán a la cola de espera. Cada estado representa el número de unidades en el sistema.

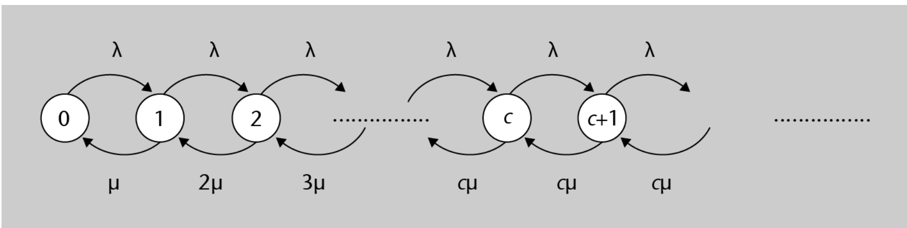
Figura 22. Modelo M/M/c



En consecuencia, puede haber hasta c unidades atendidas simultáneamente y un número ilimitado de unidades esperando en la cola. Las c primeras unidades serán atendidas por los c servidores. La primera unidad que irá a la cola será la unidad $c + 1$.

Así pues, cuando el estado del sistema sea superior a c, todos los c servidores estarán activos, y, por lo tanto, la tasa de servicio para los estados superiores a c será constante, de valor $c\mu$. Por otra parte, las llegadas se producen con una tasa λ, independientemente del número de unidades en el sistema.

Figura 23



1) Probabilidades de estado

Utilizando las expresiones correspondientes y considerando en este caso que las tasas son: $\lambda_i = \lambda$ por $\forall i$, $\mu_i = i \cdot \mu$ para $i \leq c$, y $\mu_i = c \cdot \mu$ para $i > c$. En este caso, hará falta que $\lambda < c \cdot \mu$ a fin de que el sistema sea estable.

Definiremos la intensidad de tráfico A y el factor de utilización ρ como:

$$A = \frac{\lambda}{\mu} \quad , \qquad \rho = \frac{\lambda}{c.\mu}$$

Entonces, obtendremos:

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & 0 \le n \le c-1 \\ \dfrac{c^c}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^n P_0 & n \ge c \end{cases}$$

De donde podríamos obtener P_0:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^c}{c!(1-\rho)}}$$

Esta expresión de P_0 es válida siempre que se cumpla que $A < c$. De forma equivalente se puede expresar como $\rho < 1$. Se trata de la condición de estabilidad que garantiza que el tráfico ofrecido es menor que el número de recursos disponibles.

2) Probabilidad de bloqueo

La probabilidad de que una llegada quede bloqueada y tenga que esperar en la cola corresponderá a la posibilidad de que los c servidores estén ocupados y, por lo tanto, a la probabilidad de que el sistema esté en un estado c o superior. Se puede expresar mediante la expresión de Erlang C:

$$P_B = C(c,A) = \sum_{n=c}^{\infty} P_n = 1 - \sum_{n=0}^{c-1} P_n = 1 - P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{A^n}{n!} = 1 - \frac{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{A^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^c}{c!(1-\rho)}}$$

Entonces:

$$C(c,A) = \frac{\frac{A^c}{c!}}{(1-\rho)\sum_{n=0}^{c-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^c}{c!}} = \frac{\frac{A^c}{c!}}{(1-\rho)} P_0$$

Esta probabilidad se puede calcular fácilmente con las calculadoras en línea, o bien, en las tablas que tenéis en el anexo.

http://www.erlang.com/calculator

3) Número medio de unidades en la cola

El número medio de clientes en la cola lo podemos calcular como:

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c) P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n P_{n+c} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{c^c}{c!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{n+c} .P_0 = \frac{A^c}{c!} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$
$$= \frac{A^c}{c!} P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho . C(c,A)}{1-\rho}$$

4) Tiempo medio de permanencia en la cola

Para el cálculo del tiempo medio de permanencia en la cola, sólo hay que utilizar la fórmula de Little:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{\rho . C(c,A)}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{C(c,A)}{c\mu(1-\rho)}$$

Ejemplo numérico

Suponemos un sistema de atención en línea. Cada operador dispone de un terminal y puede servir al cliente típico en cinco minutos, con una duración aleatoria distribuida exponencialmente. Las llamadas llegan aleatoriamente, y el sistema permite acumular las llamadas que no pueden ser atendidas inmediatamente. Cuando la actividad es máxima, se pueden llegar a atender 36 llamadas por hora. La probabilidad de que una llamada encuentre todos los operadores ocupados no puede superar el 0,1.

Vamos a calcular cuántos operadores son necesarios para cumplir las condiciones.

Tasa de llegadas (máxima):

$$\lambda = 36 \text{ llamadas/hora} = 0{,}6 \text{ llamadas/ minuto}$$

Tasa de servicio de un operador:

$$\mu = 1/5 = 0{,}2 \text{ llamadas/minuto}$$

Intensidad de tráfico:

$$A = \lambda/\mu = 3 \text{ Erlangs}$$

Para que el sistema sea estable, el factor de utilización tiene que cumplir:

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} < 1$$

Aislando c, obtenemos que $c > 3$; por lo tanto, hacen falta, como mínimo, cuatro servidores.

La primera condición de diseño nos dice que:

$$\sum_{n=c}^{\infty} P_n = C(c,3) \leq 0{,}1$$

Observando la tabla del Anexo, vemos que para tener un tráfico de 3 Erlangs, con una probabilidad del 10%, nos hacen falta, como mínimo, seis servidores; por lo tanto, $c \geq 6$.

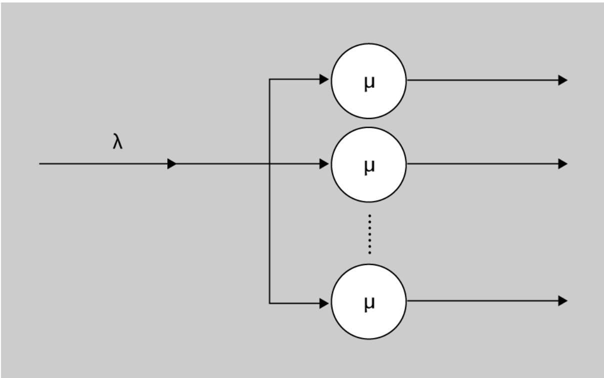
Por lo tanto, se necesitan seis operadores para dar este servicio.

7.3. Modelo M/M/∞

Este modelo es un caso particular del modelo anterior, M/M/c, donde no hay tiempo de espera ni rechazo de unidades, ya que el sistema siempre dispone de recursos libres.

Consideraremos pues, al igual que en el caso anterior, una tasa de llegadas λ y una tasa de servicio μ para cada servidor. A partir de la notación de Kendall, podemos observar que este sistema es multiservidor con infinitos servidores; por lo tanto, nunca habrá ninguna unidad en la cola de espera, ya que siempre habrá un servidor libre para atender a la unidad que llegue. Este sistema no necesita ninguna cola, pues se trata, simplemente, de un conjunto de servidores atendiendo a todas las unidades recibidas.

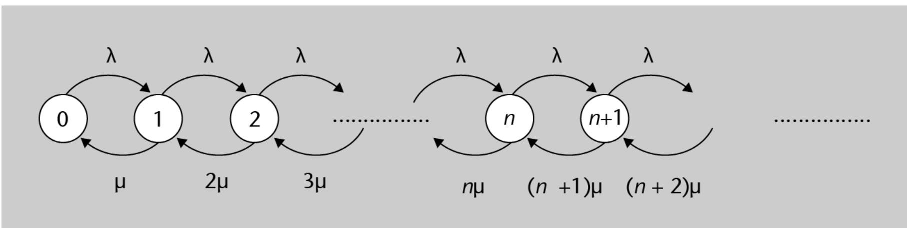
Figura 24. Modelo M/M/∞



Para representar la cadena de Markov asociada, las llegadas se producen con una tasa λ independientemente del número de unidades en el sistema (la tasa de nacimientos). Con respecto a las tasas de muerte, el hecho de que siempre haya un servidor esperando que una unidad acabe de llegar hace que la tasa de servicio sea igual al número de unidades atendidas simultáneamente por el valor de un único servidor, que es μ. Es decir, si hay una unidad en el sistema, se sirve a una tasa μ. Si hubiera dos, la tasa sería 2μ. Si hubiera *n*, la tasa sería *n*μ.

La cadena de Markov será:

Figura 25



1) Probabilidades de estado

Utilizando las expresiones correspondientes, tal como hemos hecho en el subapartado anterior, y considerando en este caso que las tasas son: $\lambda_i = \lambda$ para $\forall i$, i $\mu_i = i.\mu$ para $\forall i$.

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}$$

De donde podríamos obtener P_0, teniendo en cuenta que $\lambda < \mu$, ya que siempre tendremos servidores libres,

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}} = e^{-\lambda/\mu}$$

Por lo tanto,

$$P_n = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{n!} e^{-\lambda/\mu} \quad , \quad n \geq 0$$

Podemos observar que n sigue una distribución de Poisson con parámetro λ/μ.

2) Número medio de servidores ocupados

De los resultados obtenidos por los procesos de Poisson podemos deducir que:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{\lambda}{\mu}$$

3) Tiempo medio de permanencia

En este caso, como no hay cola, $W_q = 0$ y $L_q = 0$. Por lo tanto, el tiempo medio de permanencia en el sistema es igual al tiempo medio de servicio, es decir, que:

$$W = \frac{1}{\mu}$$

Y su distribución en el tiempo es igual a la distribución del tiempo de servicio, por lo tanto, exponencial de media $1/\mu$.

Ejemplo numérico

Suponemos que a una central telefónica llegan llamadas de forma aleatoria con una tasa de llegadas de 140 llamadas/h. Las llamadas tienen una duración media de tres minutos. Suponiendo que hay muchas líneas para atender las llamadas, ¿cuál será el número medio de líneas utilizándose?

Supondremos el modelo $M/M/\infty$ con una tasa de llegadas de:

λ = 140 llamadas/hora = 2,33 llamadas/minuto

La tasa de servicio es:

μ = 1/3 llamadas/minuto

Entonces, el número de líneas utilizado de media es:

$L = \lambda/\mu = 2{,}33 \cdot 3 = 7$ líneas

Por lo tanto, el número de líneas sigue una distribución de Poisson de parámetro 7.

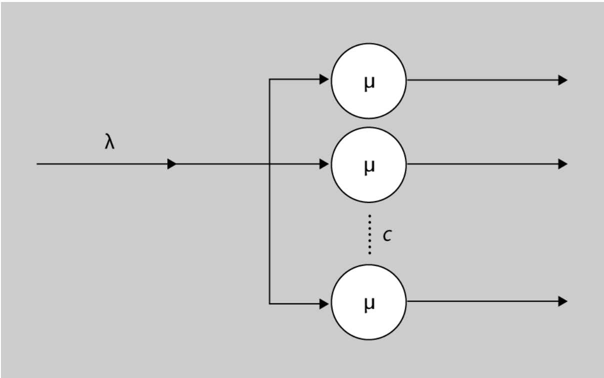
7.4. Modelo M/M/c/c. Erlang B

Este es un modelo de colas exponencial con un número limitado de servidores y con pérdidas. Consideramos otra vez que el número de fuentes es infinito y, por lo tanto, tenemos una tasa de llegadas constante λ y una tasa de servicio μ en cada servidor. Las llegadas llegan aleatoriamente. Cada estado representa el número de unidades en la cola de espera. En este caso, el sistema sólo tiene c servidores con un número máximo de unidades en el sistema de c elementos. Por lo tanto, no hay cola de espera, y las unidades que se encuentren los servidores ocupados se perderán sin tener la posibilidad de ser almacenadas.

El modelo M/M/c/c

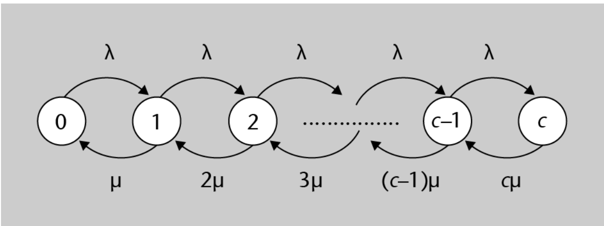
A este modelo se le llama modelo con pérdidas LCC, y es el que utilizan las centrales telefónicas.

Figura 26. Modelo M/M/*c*/*c*



En este caso sólo hay c estados posibles.

Figura 27



1) Probabilidades de estado

Considerando en este caso que las tasas son $\lambda_i = \lambda$ para $i \in [0, c\text{-}1]$, $\mu_i = i \,.\, \mu$ para $i \in [1, c]$, y teniendo en cuenta que la **intensidad de tráfico** está definida como:

$$A = \frac{\lambda}{\mu}$$

Entonces, obtendremos:

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \dfrac{1}{n!} A^n P_0 & n \le c \\ 0 & n > c \end{cases}$$

De donde P_0:

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c}A^n\frac{1}{n!}}$$

Esta distribución también se llama distribución de Poisson truncada.

2) Probabilidad de bloqueo

Corresponde a la probabilidad de que los c servidores estén ocupados. En este caso, el sistema no tiene cola de espera, y cuando los servidores estén ocupados, la entrada no se podrá servir y se perderá. Corresponde a la probabilidad de que el sistema esté en un estado c, y se puede expresar mediante la expresión de Erlang B:

http://www.erlang.com/calculator

$$P_B = B(c,A) = P_c = \frac{\frac{1}{c!}A^c}{\sum_{n=0}^{c}A^n\frac{1}{n!}}$$

3) Número medio de servidores ocupados

De los resultados obtenidos por los procesos de Poisson podemos deducir que:

$$L = \sum_{n=1}^{c}nP_n = P_0\sum_{n=1}^{c}n\frac{A^n}{n!} = P_0\sum_{n=1}^{c}\frac{A^n}{(n-1)!} = P_0A\sum_{n=0}^{c-1}\frac{A^n}{n!} = A\left(1-B(c,A)\right)$$

4) Tasa de entrada al sistema

Se obtiene de las llegadas al sistema que se pueden servir y no se pierden,

$$\lambda_a = \lambda(1 - \mathrm{B}(c,A))$$

5) Tiempo medio de permanencia

Como no hay cola de espera, $W_q = L_q = 0$. Aplicando la fórmula de Little, podemos calcular el tiempo medio de permanencia en el sistema:

$$W = \frac{L}{\lambda_a} = \frac{A\left(1-B(c,A)\right)}{\lambda\left(1-B(c,A)\right)} = \frac{\lambda/\mu}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Con una distribución del tiempo de servicio:

$$\mathrm{W}(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

Este modelo es el que se adecua a los circuitos de una central telefónica, ya que si las llamadas no se pueden servir debido a que la central está ocupada, la llamada se pierde, y se tiene que volver a generar una llamada nueva. Es el modelo que se utiliza para dimensionar sistemas de conmutación de circuitos.

Ejemplo numérico

Una empresa instala un sistema de comunicación interno entre sus dos sedes. Las llamadas reciben una señal de ocupado cuando todas las líneas están ocupadas. Sabemos que el sistema genera llamadas aleatoriamente, según un proceso de Poisson con una tasa de 105 llamadas/hora y que las llamadas tardan cuatro minutos por término medio a ser servidas.

Pretendemos instalar las líneas necesarias para asegurar que la probabilidad de recibir la señal de ocupado sea inferior al 0,005.

a) ¿Cuántas líneas hacen falta?

Podemos obtener las tasas de llegada y de servicio:

λ = 105 llamadas/hora = 1,75 llamadas/minuto
μ = 1/4 llamadas/minuto

Entonces, la intensidad de tráfico es:

$A = \lambda/\mu = 1{,}75 \cdot 4 = 7$ Erlangs

Por lo tanto, a partir de las tablas de Erlang B del *anexo* (con B = 0,5%), tenemos que obtener el valor mínimo de c que cumpla la desigualdad:

$\mathrm{B}(c,7) \leq 0{,}005$

El resultado será que $c \geq 15$ líneas.

b) ¿Cuántas líneas son necesarias si la probabilidad de recibir la señal de congestión es de 0,01?

$\mathrm{B}(c,7) \leq 0{,}01$

El resultado será que $c \geq 14$ líneas; sólo una menos que en el caso anterior.

c) ¿Cuál será la probabilidad de recibir la señal de congestión con sólo diez líneas?

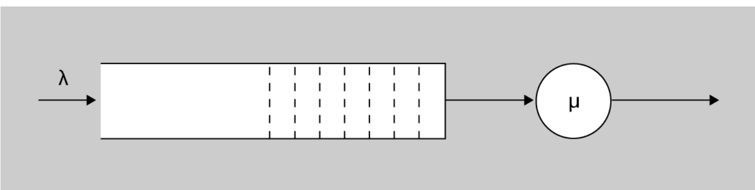
Con el calculador de Erlang obtenemos que:

$B(10,7) \leq 0{,}079$

7.5. Modelo M/G/1

Consideramos una población infinita con las llegadas de Poisson con una tasa λ y sin ninguna disciplina de servicio concreta (genérica), con un único servidor y una cola infinita.

Figura 28



Con el fin de poder hacer el estudio de este modelo genérico, tenemos que conocer la media y la variancia de la distribución de probabilidad de los tiempos de servicio, m = $1/\mu$ y σ^2, respectivamente.

1) Número medio de unidades

La fórmula de Pollaczek-Khinchine nos indica el número medio de unidades en la cola:

Pollaczek-Khinchine
http://en.wikipedia.org/wiki/Pollaczek%E2%80%93Khinchine_formula

$$L_q = \frac{\lambda^2.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} \qquad \text{con} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

El número medio de unidades en el sistema será:

$$L = \rho + \frac{\lambda^2.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

2) Tiempo medio de permanencia

Aplicando la fórmula de Little, podemos obtener la media del tiempo que una unidad tiene que esperar en la cola para ser servida:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda.\sigma^2 + \rho/\mu}{2(1-\rho)}$$

De forma análoga, el tiempo de permanencia en el sistema será el tiempo de espera más el tiempo de servicio:

$$W = \frac{1}{\mu} + W_q = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

Este modelo general se puede particularizar para diferentes disciplinas de servicio.

a) Disciplina de servicio exponencial (M/M/1)

En caso de que la disciplina de servicio sea exponencial con tiempo medio de servicio $1/\mu$, correspondería al caso M/M/1 que hemos visto anteriormente. Como:

$$m = \frac{1}{\mu} \quad , \qquad \sigma^2 = \frac{1}{\mu^2}$$

Entonces, el número medio de unidades es:

$$L_q = \frac{\lambda^2.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$L = \rho + \frac{\lambda^2.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Y los tiempos medios de permanencia serán:

$$W_q = \frac{\lambda.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

b) Disciplina de servicio determinista (M/D/1)

Si la disciplina de servicio es determinista, el tiempo de servicio siempre es el mismo para todas las llegadas y de valor $1/\mu$ con una variancia nula. Como en este caso:

$$m = \frac{1}{\mu} \quad , \qquad \sigma^2 = 0$$

Entonces, las fórmulas de Pollaczek-Khinchine nos permitirán calcular el número medio de unidades:

$$L_q = \frac{\lambda^2.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$L = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho(2-\rho)}{2(1-\rho)}$$

Y los tiempos medios de permanencia:

$$W_q = \frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)} = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}$$

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)} = \frac{2-\rho}{2\mu(1-\rho)}$$

c) Disciplina de servicio de Erlang ($M/E_k/1$)

En este caso, la disciplina de servicio es de Erlang de parámetro *k*. La distribución de Erlang tiene una función de densidad de probabilidad:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Los valores de la media y variancia vienen dados por las expresiones:

$$m = \frac{1}{k\mu}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{k\mu^2}$$

Podemos aplicar las fórmulas de Pollaczek-Khinchine con $\sigma^2 = 1/k\mu^2$ y calcular las unidades que hay en la cola y los tiempos de permanencia:

$$L_q = \frac{\lambda^2.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1+k}{2k}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1+k}{2k}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Podemos observar que el número de unidades en las colas en los tres métodos cumple que:

$$L_q(\mathrm{M/D/1}) < L_q(\mathrm{M/E_k/1}) < L_q(\mathrm{M/M/1})$$

8. Redes de colas

Una **red de colas** es un conjunto de nodos interconectados por medio de caminos. Cada uno de estos nodos está formado por un sistema de colas con unos o más servidores. Estas colas están conectadas con líneas que operan de forma asíncrona y concurrente, es decir, no hay sincronismo entre entradas y salidas, y actúan simultáneamente.

Las colas pueden estar conectadas entre ellas en serie o en tándem, donde el tráfico saliente de una cola es el tráfico entrante de la siguiente; pero también nos podemos encontrar con bifurcaciones y fusiones de tráfico donde se divide el flujo de tráfico o se unen diversos flujos de tráfico. Ejemplos de redes de colas son las redes de ordenadores, las líneas de producción en una fábrica, el tráfico de vehículos en una ciudad...

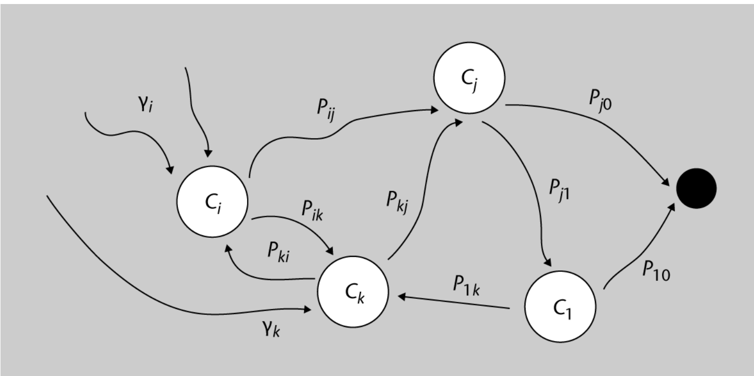
Podemos diferenciar dos tipos de redes de colas:

a) Cerradas. Los flujos ni entran ni salen del sistema, por lo tanto, continúan circulando por el interior del sistema indefinidamente. El número de unidades se mantiene constante, ya que no se puede identificar un inicio y un final.

b) Abiertas. Cada flujo entra en el sistema por un punto en un momento dado y, después de pasar por unas o más colas, sale del sistema. No podemos considerar el número de unidades constante. Pueden ser:

- Acíclicas: un flujo nunca puede volver a la misma cola.
- Cíclicas: hay bucles en la red.

Figura 29. Red de colas



Parámetros de una red de colas:

- Las colas se representan mediante N nodos conectados mediante caminos.
- El nodo i da servicio con distribución exponencial, con una tasa de servicio μ_i.

- Las unidades que llegan al sistema desde el exterior a un nodo i llegan con una distribución de Poisson con una tasa γ_i.

- Una vez se ha servido una unidad en un nodo, pasa al nodo siguiente con una probabilidad fija o sale del sistema. La probabilidad de ir del nodo y al nodo j ($j \neq i$) será $P_{ij} > 0$..

- La probabilidad de salir del sistema es:

$$q_i = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} P_{ij}$$

- La probabilidad de que una unidad abandone el sistema desde un nodo i es P_{i0}.

8.1. Redes en serie

La estructura de red más simple es la de las redes en serie, que son las que cumplen:

$$\gamma_i = \begin{cases} \lambda, & i = 1 \\ 0, & i \geq 2 \end{cases}$$

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i+1, \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ 1, & i = N, \quad j = 0 \\ 0, & resta \end{cases}$$

Las unidades entran por el nodo 1 y salen por el nodo N después de pasar por cada uno de los nodos.

Teorema de Burke

La salida de una cola del tipo M/M/1, M/M/c o M/M/∞, con una tasa de llegadas λ es un proceso de Poisson con tasa λ. En cualquier instante de tiempo t, el número de unidades que hay en el sistema es independiente de las salidas que ha habido antes de este instante. Podríamos decir que el sistema es reversible.

Según el teorema de Burke, para un sistema de colas M/M/c/∞, si la capacidad de las colas es infinita, podemos estudiar cada una de ellas por separado; por lo tanto, la serie estará formada por N colas independientes. La probabilidad de que en un instante haya n_1 unidades en la cola 1, n_2 unidades en la cola 2 ... y n_N unidades en la cola N es:

$$P(n) = \prod_{i=1}^{N} P_i(n_i)$$

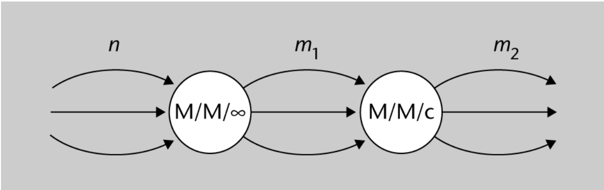
Ejemplo numérico

Queremos estudiar un supermercado en hora punta. Suponemos que los clientes llegan de forma aleatoria con una tasa de llegadas λ = 40 clientes/hora. El tiempo que pasan en el supermercado sigue una distribución de tipo exponencial de una media de 45 minutos. Las cajas atienden exponencialmente con una tasa de cuatro clientes/minuto por término medio.

a) ¿Cuántas cajas hacen falta?

Podemos modelar el sistema como dos colas en serie. Según el teorema de Burke, la segunda cola es del tipo M/M/c, con una tasa de entradas λ = 40 clientes/hora y una tasa de salidas con μ = 4 clientes/minuto

Figura 30



Se tiene que cumplir que:

$$\frac{\lambda}{c_m \mu} < 1 \qquad , \qquad c_m > \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{60/4} = 2{,}67 \approx 3 \text{ cajas}$$

b) Si finalmente se pone una caja más que el número mínimo, ¿cuál es el tiempo que se tarda en hacer la compra?

En el primer sistema M/M/∞ (supermercado), según el subapartado 7.3, tendremos que:

$$L_1 = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{4/3} = 30 \text{ clientes comprando por término medio}$$

$$W_1 = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{4/3} = 45 \text{ minutos por término medio}$$

Según el subapartado 7.2, lo que modela las cajas en la segunda cola es:

$$A = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{15} = 2{,}67 \quad , \quad \rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{40}{4.15} = 0{,}67$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^c}{c!(1-\rho)}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3} \frac{(2{,}67)^n}{n!} + \frac{(2{,}67)^4}{4!(1-0{,}67)}} = 0{,}057$$

Los tiempos medios de espera en la cola son:

$$L_q = \frac{A^c}{c!} P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{(2{,}67)^4}{4!} 0{,}057 \frac{0{,}67}{(1-0{,}67)^2} = 0{,}74 \text{ clientes}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0{,}74}{40} = 0{,}018h = 1{,}1\text{min}.$$

Entonces, podemos calcular los valores medios en el segundo sistema:

$$W_2 = \frac{1}{\mu} + W_q = 0{,}086 = 5{,}14 \text{ minutos de media}$$

$$L_2 = \lambda W_2 = 3{,}44 \text{ clientes de media}$$

Sumando obtenemos los valores medios de clientes en el supermercado y el tiempo medio de duración de la compra:

$$W = W_1 + W_2 = 50{,}14 \text{ minutos de media}$$

$$L = L_1 + L_2 = 33{,}44 \text{ clientes de media}$$

8.2. Redes de Jackson abiertas

Con el fin de hacer el análisis de una red abierta, nos podemos basar en el teorema de Jackson para redes abiertas.

El teorema se basa en los siguientes supuestos:

- Los N nodos tienen servicio exponencial con tasa de servicio μ_i.
- Las unidades que llegan del exterior a un nodo y tienen distribución de Poisson con una tasa γ_i.
- La probabilidad de ir del nodo i al nodo j ($j \neq i$) es $P_{ij} > 0$, y la de abandonar el sistema es P_{i0}.

El teorema de Jackson nos dice que, en una red de colas con las condiciones anteriores, cada nodo es un sistema independiente con entrada de Poisson; cada nodo se puede analizar por separado del resto utilizando un modelo M/M/1 o M/M/c, y los resultados se pueden combinar estadísticamente.

Por lo tanto, como el flujo total de entrada a un nodo j tiene que ser igual al que sale, tendremos las **ecuaciones de tráfico**:

$$\lambda_j = \gamma_j + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_{ij}$$

Para que el sistema no se sature, hará falta que se cumpla la condición siguiente para cada nodo i (c_i, número de servidores en el nodo i):

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{c_i \mu_i} < 1 \qquad , \qquad \lambda_i < c_i \mu_i$$

La resolución de este sistema de N ecuaciones lineales nos permitirá obtener las tasas de llegada en cada uno de los N nodos, λ_i.

Entonces, el teorema de Jackson nos dice que, en estado estacionario, la distribución del número de unidades en cada nodo es:

$$P(n) = \prod_{i=1}^{N} P_i(n_i)$$

Donde $P_i(n_i)$ es la probabilidad de que haya n_i clientes en el nodo i, calculada según los modelos M/M/c.

Si hay sólo un servidor (c=1), los resultados son:

$$P(n)=\prod_{i=1}^{N}(1-\rho_i)\rho_i^{ni}=(1-\rho_1)\rho_1^{n1}(1-\rho_2)\rho_2^{n2}\ldots(1-\rho_N)\rho_N^{nN}$$

Es decir, en estado estacionario, en un instante de tiempo cualquiera, el estado del nodo i (n_i) es independiente del resto de los nodos. El comportamiento de las colas no es de Poisson, pero, en valor medio se puede considerar cada cola como M/M/c independiente.

Además, podemos obtener los siguientes parámetros de análisis de la red:

a) La tasa de entrada en la red es la suma de las tasas de llegada desde el exterior a cada uno de los nodos:

$$\lambda_{red}=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i$$

b) El número medio de unidades en la red será la suma de los números medios de unidades en cada uno de los N nodos:

$$L_{red}=\sum_{i=1}^{N}\mu_i$$

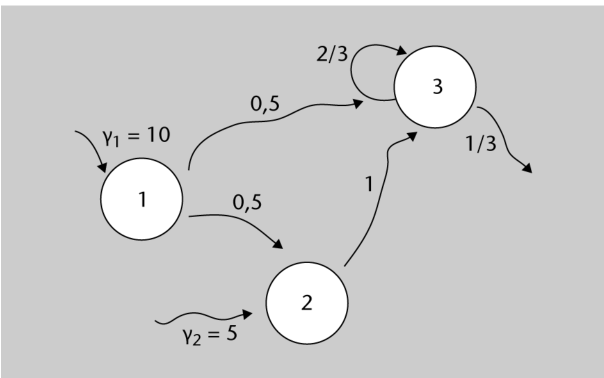
El tiempo medio de permanencia en el sistema es el tiempo medio que pasa desde que una unidad entra en la red hasta que sale:

$$W_{red}=\frac{L_{red}}{\lambda_{red}}$$

Ejemplo de red abierta

Analizaremos el caso de una red formada por tres sistemas de colas, tal como se muestra en la figura. Los servidores tienen una tasa de servicio μ = 12.

Figura 31



a) Indicad el número de servidores en cada cola.

Calcularemos la tasa de llegadas a cada nodo:

$$\lambda_1 = \gamma_1 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_{ij} = \gamma_1 = 10$$
$$\lambda_2 = \gamma_2 + \lambda_1 P_{12} = 5 + 0,5\lambda_1$$
$$\lambda_3 = \lambda_1 P_{13} + \lambda_2 P_{23} + \lambda_3 P_{33} = 0,5\lambda_1 + \lambda_2 + 0,67\lambda_3$$

Entonces,

$$\lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 10, \quad \lambda_3 = 45$$

Según la condición de estabilidad:

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{c_1\mu} < 1 \quad , \quad \rho_1 = \frac{10}{c_1 12} < 1 \quad , \quad c_1 = 1$$
$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{c_2\mu} < 1 \quad , \quad \rho_2 = \frac{10}{c_2 12} < 1 \quad , \quad c_2 = 1$$
$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{c_3\mu} < 1 \quad , \quad \rho_3 = \frac{45}{c_3 12} < 1 \quad , \quad c_3 = 4$$

Tiene que haber un servidor en el sistema 1 y en el sistema 2, y hasta cuatro servidores en el sistema 3.

b) Calculad el tiempo de espera en cada nodo.

En los nodos 1 y 2 las colas son del tipo M/M/1, el número medio de unidades y el tiempo medio de permanencia es:

$$L_1 = L_2 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = 5 \quad , \quad W_1 = W_2 = \frac{L_1}{\lambda_1} = 0,5$$

En el nodo 3 la cola es del tipo M/M/4. En este caso:

$$A = \frac{\lambda_3}{\mu} = \frac{45}{12} = 3,75 \quad , \quad \rho = \frac{\lambda_3}{c_3\mu} = 0,94$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^c}{c!(1-\rho)}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3} \frac{(3,75)^n}{n!} + \frac{(3,75)^4}{4!(1-0,94)}} = 0,0063$$

Entonces, el número medio de unidades y el tiempo medio de permanencia son:

$$L_q = \frac{A^c}{c!} P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{(3,75)^4}{4!} 0,0063 \frac{0,94}{(1-0,94)^2} = 13,55$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{13,55}{45} = 0,3$$

8.3. Redes de Jackson cerradas

El teorema de Jackson para las redes cerradas se basa en los siguientes supuestos:

- La red de colas consta de N nodos, todos y cada uno de ellos con servicio exponencial independiente con tasa de servicio μ_i.

- El número de unidades que hay en el sistema es constante, de valor *M*.
- No hay entradas ni salidas, por lo tanto, $\gamma_i = 0$ y $P_{i0 = 0}$.
- Una vez se ha servido una unidad en un nodo, pasa al nodo siguiente con una probabilidad fija. La probabilidad de ir del nodo *i* al nodo *j* ($i \neq y$) será P_{ij}.
- Cada nodo se comporta como una cola con un modelo M/M/c.

Como el flujo total de entrada a un nodo tiene que ser igual al flujo total de salida del nodo, tendremos que las ecuaciones de tráfico en este caso son:

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_{ij}$$

Estas *N* ecuaciones forman un sistema lineal indeterminado con un grado de libertad, que resolveremos para encontrar las tasas de llegada relativas a cada nodo, λ_i. Para resolverlo supondremos, por ejemplo, que $\lambda_1 = 1$.

Mediante el análisis del valor medio (MVA), podemos resolver el sistema de ecuaciones y calcular los siguientes parámetros del sistema con M unidades:

Análisis del valor medio

Este análisis es una forma simplificada de analizar las redes cerradas.

- $L_i(M)$: número medio de unidades en el nodo *i*.
- $W_i(M)$: tiempo medio de permanencia en el nodo *i*.
- $\lambda_i(M)$: tasa real de llegadas/salidas en el nodo *i*.

Es un algoritmo iterativo que va calculando $L_i(m)$, $W_i(m)$ para los diferentes valores crecientes de *m*, a partir de $m = 0$. Obtendremos:

$$W_j(m) = \frac{1}{\mu_j} + \frac{L_j(m-1)}{c_j \mu_j}, \qquad 1 \le j \le N, 1 \le m \le M$$

$$L_j(m) = m \frac{\lambda_j W_j(m)}{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i W_i(m)}, \qquad 1 \le j \le N, 1 \le m \le M$$

Aplicando la fórmula de Little obtendremos:

$$\lambda_j(m) = \frac{L_j(m)}{W_j(m)}, \qquad 1 \le j \le N, 1 \le m \le M$$

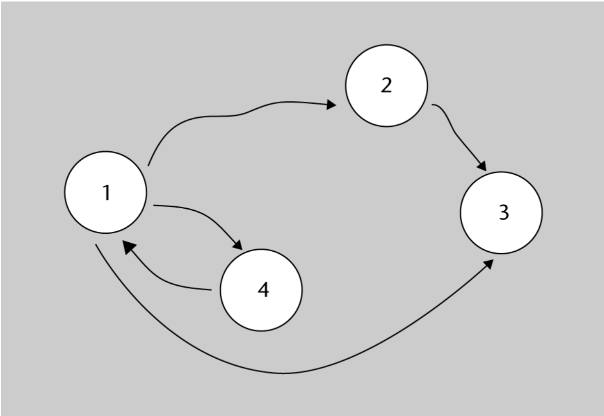
Teniendo en cuenta que inicialmente:

$$L_j(0) = 0 \qquad 1 \le j \le N$$

Ejemplo de red cerrada

Analizaremos el caso de una red formada por cuatro sistemas de colas, tal como muestra la figura. Hay un servidor por nodo, con una tasa de servicio $\mu = 5$. Las probabilidades de transición entre nodos son: $P_{12} = 0{,}3$; $P_{14} = 0{,}7$; $P_{23} = 1$; $P_{31} = 1$; $P_{41} = 1$.

Figura 32



Calcularemos la tasa de llegadas en cada nodo a partir de las ecuaciones de tráfico:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_{ij} = \lambda_3 P_{31} + \lambda_4 P_{41} \\
\lambda_2 &= \lambda_1 P_{12} \\
\lambda_3 &= \lambda_2 P_{23} \\
\lambda_4 &= \lambda_1 P_{14}
\end{aligned}$$

Suponiendo $\lambda_1 = 1$, obtenemos:

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 0{,}3; \quad \lambda_3 = 0{,}3; \quad \lambda_4 = 0{,}7$$

Si consideramos que inicialmente no hay unidades en el nodo j:

$$L_j(0) = 0 \qquad\qquad 1 \le \mathrm{j} \le N$$

Entonces, mediante las expresiones siguientes podemos calcular las unidades y el tiempo de permanencia iterativamente para los diferentes valores de m:

$$W_j(m) = \frac{1 + L_j(m-1)}{5}, \qquad 1 \le j \le 4,\ 1 \le m \le M$$

$$L_1(m) = m \frac{W_1(m)}{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i W_i(m)}, \qquad 1 \le m \le M$$

$$L_2(m) = m \frac{0{,}3.W_2(m)}{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i W_i(m)}, \qquad 1 \le m \le M$$

$$L_3(m) = m \frac{0{,}3.W_3(m)}{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i W_i(m)}, \qquad 1 \le m \le M$$

$$L_4(m) = m \frac{0{,}7.W_4(m)}{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i W_i(m)}, \qquad 1 \le m \le M$$

Los valores de $L_i(m)$ tienen que ir estabilizándose a medida que aumenta el valor de m. Si el valor $L_i(m)$ continúa creciendo para un cierto valor i, diremos que en el nodo i hay un cuello de botella.

Resumen

En este módulo hemos analizado los diferentes modelos de colas y sus principales características.

Hemos empezado definiendo los principales conceptos utilizados en el análisis de colas y hemos definido las diferentes disciplinas de servicio. Para análisis simples, una de las principales disciplinas son los procesos de Poisson.

Seguidamente hemos estudiado los procesos de Poisson como procesos con estadística exponencial y sin memoria, lo que nos ha permitido modelar el proceso de llegadas en un sistema de espera considerando una población infinita.

También hemos estudiado las cadenas de Markov y su uso para el análisis de sistemas a partir de los diferentes estados en que se pueden encontrar y de las probabilidades de estar en cada uno de estos estados. Un caso particular son los procesos de nacimiento y muerte como modelo para caracterizar las redes de comunicaciones.

A partir de aquí hemos definido diferentes modelos matemáticos que nos permiten caracterizar los modelos de colas y obtener los parámetros principales. Concretamente hemos estudiado los modelos de cola única:

- M/M/1, con un solo servidor.
- M/M/c, modelo con un número finito de servidores.
- M/M/∞, con infinitos servidores, por lo tanto, sin espera.
- M/M/c/c, con un número limitado de servidores y sin espera.
- M/G/1, modelo con disciplina de servicio genérica con un único servidor.

Finalmente, como muchos sistemas están formados por la interconexión de diferentes sistemas de colas, hemos definido y analizado las redes de colas, y hemos visto que, según el teorema de Jackson, cada nodo se puede analizar como un sistema independiente por separado utilizando los modelos de colas anteriores.

Actividades

1. Los usuarios llegan a la biblioteca, de acuerdo con un proceso de Poisson, con una media de llegadas de 200 personas por hora. Cada usuario está en la biblioteca durante 24 minutos por término medio. Suponiendo que el tiempo durante el que un usuario está en la biblioteca está exponencialmente distribuido y es independiente de los otros usuarios, ¿cuántos usuarios hay en la biblioteca por término medio?

2. Consideramos una cola del tipo M/M/1 finita de N estados. ¿Cuáles son los valores necesarios de N para los siguientes casos?

a) ρ= 0,5 con $P_B = 10^{-3}$ y $PB = 10^{-6}$.

b) ρ= 0,8 con $P_B = 10^{-3}$ y $PB = 10^{-6}$.

3. Suponemos que a un centro de proceso le llegan unidades, según un proceso de Poisson, con una tasa de una unidad cada doce minutos. Los tiempos de servicio los supondremos exponenciales, con tasa de servicio cada ocho minutos. Calculad L y W.

4. El cajero de una gasolinera trabaja en un único mostrador. Las llegadas siguen una distribución de Poisson, con una media de diez por hora. Cada usuario es atendido de uno en uno, y el tiempo de servicio sigue una distribución exponencial de cuatro minutos como media.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se forme una cola?

b) ¿Cuál es la longitud media de la cola?

c) ¿Cuál es el tiempo medio que un cliente necesita para ser atendido?

d) ¿Cuál es el tiempo medio que un cliente pasa en la cola esperando a que lo atiendan?

5. Una empresa de distribución de productos alimenticios tiene una centralita telefónica con tres líneas. La empresa tiene un pico de llamadas durante tres horas, en las que algunos clientes no pueden ponerse en contacto con la empresa debido al tráfico que llega (sabemos que si el cliente encuentra las líneas ocupadas, no se le puede retener). La empresa estima que el 60% de las llamadas que no ha atendido hacen el pedido a otra empresa. Durante las horas punta, las llamadas siguen una distribución de Poisson, con una media de veinte llamadas por hora, y cada telefonista atiende durante seis minutos cada llamada (distribución exponencial). El beneficio medio de una venta es de 210 euros.

a) ¿Cuánto dinero pierde la empresa diariamente debido a las llamadas no respondidas?

b) Si cada trabajador cuesta a la empresa 24 euros/hora y un trabajador tiene que trabajar ocho horas al día, ¿cuál es el número óptimo de trabajadores? Las horas punta siempre son a la misma hora. La centralita está abierta durante dieciséis horas, y la puede atender sólo un trabajador cuando no son horas punta. Se asume que el coste de añadir una línea puede llegar a ser algo negligente.

Ejercicios de autoevaluación

1. Una impresora recibe trabajos para imprimir de una fuente de Poisson, con tasa de seis trabajos/segundo. Suponemos que el 10% del tráfico total generado por la fuente aleatoriamente va a la impresora. Responded:

a) ¿Cuál es el tiempo medio entre las llegadas de dos trabajos consecutivos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo trabajo tarde más de medio minuto en llegar?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que llegue más de un trabajo a la impresora en un minuto?

2. El servicio telefónico de resolución de incidencias de una empresa eléctrica tiene siete operadores. Cada uno de ellos tarda una media de doce minutos en resolver cada incidencia. Entre una incidencia y la siguiente pasan dos minutos por término medio. Además, todos los operadores pueden resolver cualquier tipo de incidencia. El tiempo medio desde que un cliente llama para indicar la incidencia hasta que la incidencia se resuelve es de treinta minutos.

a) Indica razonadamente si el sistema es estable.

b) ¿Cuál es el número medio de operadores ocupados?

c) ¿Cuál es el tiempo medio que un cliente espera hasta que es atendido?

d) ¿Cuál es el número medio de clientes en el sistema?

e) ¿Cuál es el número medio de clientes que esperan?

f) Asumiendo que los tiempos entre llegadas de clientes y los tiempos de servicio son variables aleatorias exponenciales, representad el diagrama de transición entre estados.

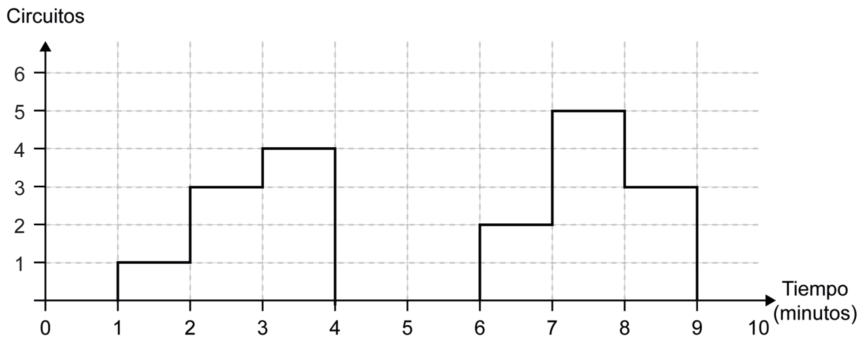
3. En un centro de cálculo llegan clientes, según un proceso de Poisson, con tasa de cinco clientes/hora. Sabiendo que éstos consumen un tiempo de procesador aleatorio con distribución exponencial de unos diez minutos como media y que la disciplina de atención es FIFO, se pide:

a) ¿Cuál es el número medio de clientes en el sistema y el número medio de clientes a los que se están sirviendo?

b) Si en la sala de espera hay cuatro sillas, ¿cuál es la probabilidad de que un usuario que llega tenga que esperarse de pie?

c) Calculad el tiempo medio total de estancia en el centro de un usuario.

4. Durante 9 minutos se observa la ocupación de un grupo de circuitos y se obtienen los resultados siguientes:



a) ¿Cuál es la tasa media de llamadas cursadas?

b) ¿Cuál es el volumen de tráfico cursado?

c) ¿Cuál es el tiempo de media de servicio por llamada?

d) ¿Cuál es el tráfico de media que cursa un servidor (recurso simple)?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que el recurso esté vacío?

f) ¿Cuál es la probabilidad de que el recurso tenga dos llamadas?

5. La tasa de llegada de paquetes a un conmutador es de 1.000 por hora. Hay un solo servidor que atiende 50 paquetes por minuto.

a) Calculad las principales medidas del sistema, L, Lq, W, Ws, Wq.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya 2 paquetes en el sistema?

6. Una entidad bancaria estima que la tasa de llegadas de clientes (sigue una distribución de Poisson) es de 30 clientes/hora. En el caso de estudio hay solo una ventanilla abierta al público y el tiempo de servicio está distribuido de manera exponencial con una media de 115 segundos/cliente. Se pide:

a) Número medio de clientes en el sistema y número medio de clientes en espera.

b) Tiempo medio de espera y tiempo medio de permanencia en la sucursal.

c) A partir de los resultados obtenidos, se decide abrir una segunda ventanilla al público. Repetid los cálculos realizados.

Solucionario

1. Los trabajos llegan a la impresora con una tasa de llegadas de:

$$\lambda = 0{,}1 \cdot 6 = 0{,}6 \text{ trabajos/segundo}$$

a) El instante de tiempo en que se producen las llegadas, t, tiene una distribución:

$$F(t) = P(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0{,}6t}$$

La media:

$$m = E[t] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}6} = 1{,}67 \text{ segundo}$$

b) La probabilidad de que el tiempo entre llamadas sea superior a treinta segundos:

$$P(t > 30) = 1 - P(t \leq 30) = F(30) = 1 - e^{-30\lambda} = 0{,}99$$

c) Considerando que N es el número de trabajos que llegan en un minuto:

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - e^{-60 \cdot 0{,}6} \approx 1$$

2.

- La tasa de servicio: $\mu = 1/12$ clientes/minuto.
- La tasa de llegadas: $\lambda = 1/2$ clientes/minuto.

a) El factor de utilización es:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{6}{7} < 1$$

Por lo tanto, el sistema es estable.

b) El número medio de servidores ocupados corresponde al valor de la intensidad de tráfico:

$$A = \frac{\lambda}{\mu} = 6$$

c) Sabemos que: W = 30 minutos; entonces, el tiempo medio de espera en la cola es:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$
$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 30 - 12 = 18 \text{ min.}$$

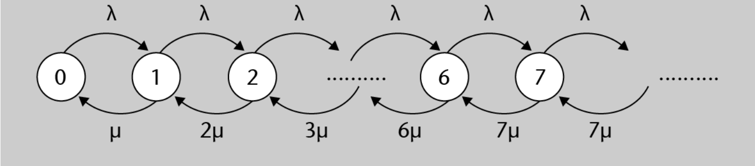
d) Aplicando la fórmula de Little:

$$L = \lambda W = 1/2 \cdot 30 = 15 \text{ clientes}$$

e) Análogamente:

$$L_q = \lambda W_q = 1/2 \cdot 18 = 9 \text{ clientes}$$

f) El diagrama de transición entre estados:



3. Podemos aplicar al modelo de este proceso un modelo M/M/1 con una tasa de llegadas λ = 5 clientes/hora y una tasa de servicio μ = 6 clientes/hora.

El factor de utilización es:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} < 1$$

Por lo tanto, el sistema es estable.

a) El número medio de clientes en el sistema es:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{5}{6-5} = 5 \text{ clientes}$$

El número medio de clientes que utiliza el computador es:

$$L - L_q = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} \text{ clientes}$$

b) Para que un cliente tenga que esperarse de pie, es necesario que en la sala haya más de cuatro clientes esperando; entonces:

$$P\left(L_q > 4\right) = 1 - P\left(L_q \leq 4\right) = 1 - \sum_{n=0}^{4} (1-\rho)\rho^n$$
$$= 1 - (1-\rho)\frac{\left(1-\rho^5\right)}{(1-\rho)} = \rho^5 \cong 0,4$$

c) Aplicando la fórmula de Little:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{5}{5} = 1 \text{ hora}$$

4. En este ejercicio disponemos solo de una ventana de tiempo de 9 minutos, por lo tanto, hemos de realizar los cálculos en función de la información de esta ventana.

a) Para calcular la tasa media, observamos el número de llamadas que han llegado durante el intervalo de tiempo de estudio y lo dividimos por el tiempo total.

9 llamadas/9 minutos = 1 llamada/minuto

b) Para obtener el volumen de tráfico cursado, miramos el área bajo el gráfico. El volumen de tráfico cursado será:

18 minutos

c) El tiempo de media de servicio por llamada:

18 minutos/9 llamadas = 2 minutos

d) El tráfico de media que cursa un servidor será:

El enunciado nos dice que tenemos 6 servidores. Por otro lado, la ocupación media es de 2 llamadas. Por lo tanto:

2 llamadas/6 servidores = 1/3 llamadas/servidor

e) La probabilidad de que el recurso tenga dos llamadas. Si vemos el gráfico, solo se produce una vez, por lo tanto:

1 caso/9 minutos

5.

a) Calculamos las principales medidas del sistema.

λ = 16,6 paquetes/minuto

μ = 50 paquetes/minuto

Tiempo medio en cola:

$Ws = 1/\mu = 0{,}02$ minutos

Número de paquetes medio en el sistema:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\rho = \lambda / \mu = 0{,}33$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = 0{,}5 \text{ paquetes}$$

Número de paquetes medio en cola:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 0{,}16$$

$$W = \frac{W_s}{1-\rho} = 0{,}03 \text{ segundos}$$

Tiempo medio en cola:

$$W_q = \rho W = W - W_s = 0{,}01 \text{ segundos}$$

b) La probabilidad de que haya dos paquetes en el sistema es:

Sabemos que para este caso (modelo M/M/1) $P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$

la probabilidad de que haya 2 paquetes en el sistema es:

$$P_2 = (1 - 0{,}333)0{,}333^2 = 0{,}074 = 7{,}4\ \%$$

6.

a) Se pide calcular el número medio de clientes en el sistema y el número medio de clientes en espera. Lo primero que necesitamos es saber la tasa de entrada y la tasa de salida para poder calcular el factor de ocupación.

Tasa de entrada:

λ = 30 clientes/hora = 0,5 clientes/minuto

Tasa de salida:

$1/\mu$ =115 segundos/cliente $\rightarrow$ μ = 60/115 clientes/minuto = 0,5217 clientes/minuto

Factor de ocupación ρ = 0,9583

Un único servidor. Por lo tanto, sigue una distribución: M/M/1

$$\text{Número de clientes en el sistema } (L) = \frac{\rho}{1-\rho} = 23 \text{ clientes}$$

$$\text{Número de clientes en cola } (Lq) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 22{,}02 \text{ clientes}$$

b) Tiempo en el sistema y tiempo de espera en cola.

Tiempo total en el sistema:

$$W = \frac{1}{\mu \cdot (1-\rho)} = 0{,}76 \text{ horas} = 45{,}64 \text{ minutos}$$

Tiempo en cola:

$$Wq = \frac{1}{\mu \cdot (1-\rho)} = 0{,}72 \text{ horas} = 43{,}72 \text{ minutos}$$

c) Repetimos los cálculos pero ahora con dos ventanillas.

Si ahora abrimos una segunda ventana, queda: M/M/2.

La expresión que nos da el número medio de paquetes en cola depende de P_0. Así, lo primero que calculamos es P_0:

En la expresión tenemos $c = 2$, $A = \lambda / \mu$ y $\rho = A/c$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^c}{c!(1-\rho)}} = 0{,}35$$

El número medio de unidades en la cola y el número medio de unidades en el sistema serán:

$$Lq = \frac{A^c}{c!} \cdot P_0 \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{0{,}958^2}{2!} \cdot 0{,}35 \cdot \frac{0{,}479}{(1-0{,}479)^2} = 0{,}283 \text{clientes}$$

$$L = Lq + \frac{\lambda}{\mu} = 1{,}241 \text{clientes}$$

En estos resultados, por medio de la ley de Little, calcularemos el tiempo medio de espera y el tiempo medio de permanencia en la sucursal para el modelo que se analiza.

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{0{,}283}{30} = 0{,}009 \text{ horas} = 33{,}96 \text{ segundos}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1{,}241}{30} = 0{,}041 \text{ horas} = 2{,}48 \text{ minutos}$$

Glosario

bloqueo *m* Estado de un sistema donde todos los servidores están ocupados.

cadena de Markov *f* Secuencia de variables aleatorias en la que su comportamiento futuro no depende del pasado, sólo del estado presente.

canal de servicio *m* Sistema que sirve a las unidades o clientes.

cliente *m* Unidad que llega al sistema para realizar algún servicio.

congestión *f Veáse* bloqueo

cola *m* Número de clientes que esperan ser atendidos.

disciplina de generación *f* Estadística de los tiempos de llegada de las unidades de datos.

disciplina de servicio *f* Estadística del tiempo que se tarda en servir las unidades en un sistema de colas.

ecuació de Chapman-Kolmogorov *f* Relación entre las probabilidades de transición de los estados de un proceso.

ecuación de futuro *f Veáse* ecuación de Chapman-Kolmogorov

Erlang *m* El tiempo que un recurso está ocupado durante la hora cargada.

Erlang B *m* Modelo de colas exponencial con un número limitado de servidores y con pérdidas.

Erlang C *m* Sistema con un número finito de servidores y con una cola infinita.

factor de utilización *m* Probabilidad de que el servidor esté ocupado.

fórmula de Little *f* Expresión que nos relaciona los tiempos medios de permanencia en la cola con el número medio de unidades que hay en el sistema.

fórmula de Pollaczek-Khinchine *f* Expresión que nos permite calcular el número de unidades en una cola.

función de densidad de probabilidad *f* Función que indica cómo está distribuida la probabilidad de una variable aleatoria.

función de distribución *f* Función de probabilidad acumulada de una variable aleatoria.

grado de servicio *m* Cociente entre las unidades perdidas y las unidades ofrecidas. Mide la calidad de servicio.

hora cargada *f* Periodo de una hora del día en que el tráfico es más elevado.

intensidad de tráfico *f* Medida de la ocupación de un recurso por unidad de tiempo.

muerte *f* Desaparición de una unidad del sistema de nacimiento y muerte debido a que se ha servido.

nacimiento *m* Aparición de una unidad en el sistema de nacimiento y muerte.

notación de Kendall *f* Notación abreviada de los diferentes modelos de colas.

población *f* Número de unidades que pueden llegar a un sistema.

prioridad *f* Regla para decidir quién será el próximo cliente servido.

proceso estocástico *m* Señal aleatoria.

servidores *m* Elemento que modela el servicio que se realiza en un determinado nodo de la red.

sistema sin memoria *m* Sistema cuyo estado futuro no depende de los estados anteriores.

tasa de llegada *f* Velocidad media de llegadas al sistema.

tasa de servicio *f* Velocidad media del servicio de las unidades en el sistema.

tasa de transición *f* Velocidad o probabilidad de transición de un estado a otro.

tráfico cursado *m* Cantidad de unidades servidas con éxito.

tráfico ofrecido *m* Cantidad de unidades que llegan al sistema para ser servidas.

tráfico perdido *m* Cantidad de unidades que no se han podido servir debido a la congestión.

vector de estado *m* Vector formado por el conjunto de probabilidades de estar en cada uno de los estados de un sistema.

red de cola *f* Sistema formado por un conjunto de colas interconectadas.

red abierta *f* Red de colas con entrada y salida de unidades al sistema.

red cerrada *f* Red de colas sin entrada ni salida de unidades. El número de unidades se mantiene constante.

Anexo

Erlang B Traffic Table

Maximum Offered Load Versus B and N
B is in %

N/B	0.01	0.05	0.1	0.5	1.0	2	5	10	15	20	30
1	.0001	.0005	.0010	.0050	.0101	.0204	.0526	.1111	.1765	.2500	.4286
2	.0142	.0321	.0458	.1054	.1526	.2235	.3813	.5954	.7962	1.000	1.449
3	.0868	.1517	.1938	.3490	.4555	.6022	.8994	1.271	1.603	1.930	2.633
4	.2347	.3624	.4393	.7012	.8694	1.092	1.525	2.045	2.501	2.945	3.891
5	.4520	.6486	.7621	1.132	1.361	1.657	2.219	2.881	3.454	4.010	5.189
6	.7282	.9957	1.146	1.622	1.909	2.276	2.960	3.758	4.445	5.109	6.514
7	1.054	1.392	1.579	2.158	2.501	2.935	3.738	4.666	5.461	6.230	7.856
8	1.422	1.830	2.051	2.730	3.128	3.627	4.543	5.597	6.498	7.369	9.213
9	1.826	2.302	2.558	3.333	3.783	4.345	5.370	6.546	7.551	8.522	10.58
10	2.260	2.803	3.092	3.961	4.461	5.084	6.216	7.511	8.616	9.685	11.95
11	2.722	3.329	3.651	4.610	5.160	5.842	7.076	8.487	9.691	10.86	13.33
12	3.207	3.878	4.231	5.279	5.876	6.615	7.950	9.474	10.78	12.04	14.72
13	3.713	4.447	4.831	5.964	6.607	7.402	8.835	10.47	11.87	13.22	16.11
14	4.239	5.032	5.446	6.663	7.352	8.200	9.730	11.47	12.97	14.41	17.50
15	4.781	5.634	6.077	7.376	8.108	9.010	10.63	12.48	14.07	15.61	18.90
16	5.339	6.250	6.722	8.100	8.875	9.828	11.54	13.50	15.18	16.81	20.30
17	5.911	6.878	7.378	8.834	9.652	10.66	12.46	14.52	16.29	18.01	21.70
18	6.496	7.519	8.046	9.578	10.44	11.49	13.39	15.55	17.41	19.22	23.10
19	7.093	8.170	8.724	10.33	11.23	12.33	14.32	16.58	18.53	20.42	24.51
20	7.701	8.831	9.412	11.09	12.03	13.18	15.25	17.61	19.65	21.64	25.92
21	8.319	9.501	10.11	11.86	12.84	14.04	16.19	18.65	20.77	22.85	27.33
22	8.946	10.18	10.81	12.64	13.65	14.90	17.13	19.69	21.90	24.06	28.74
23	9.583	10.87	11.52	13.42	14.47	15.76	18.08	20.74	23.03	25.28	30.15
24	10.23	11.56	12.24	14.20	15.30	16.63	19.03	21.78	24.16	26.50	31.56
25	10.88	12.26	12.97	15.00	16.13	17.51	19.99	22.83	25.30	27.72	32.97
26	11.54	12.97	13.70	15.80	16.96	18.38	20.94	23.89	26.43	28.94	34.39
27	12.21	13.69	14.44	16.60	17.80	19.27	21.90	24.94	27.57	30.16	35.80
28	12.88	14.41	15.18	17.41	18.64	20.15	22.87	26.00	28.71	31.39	37.21
29	13.56	15.13	15.93	18.22	19.49	21.04	23.83	27.05	29.85	32.61	38.63
30	14.25	15.86	16.68	19.03	20.34	21.93	24.80	28.11	31.00	33.84	40.05
31	14.94	16.60	17.44	19.85	21.19	22.83	25.77	29.17	32.14	35.07	41.46
32	15.63	17.34	18.21	20.68	22.05	23.73	26.75	30.24	33.28	36.30	42.88
33	16.34	18.09	18.97	21.51	22.91	24.63	27.72	31.30	34.43	37.52	44.30
34	17.04	18.84	19.74	22.34	23.77	25.53	28.70	32.37	35.58	38.75	45.72
35	17.75	19.59	20.52	23.17	24.64	26.44	29.68	33.43	36.72	39.99	47.14
36	18.47	20.35	21.30	24.01	25.51	27.34	30.66	34.50	37.87	41.22	48.56
37	19.19	21.11	22.08	24.85	26.38	28.25	31.64	35.57	39.02	42.45	49.98
38	19.91	21.87	22.86	25.69	27.25	29.17	32.62	36.64	40.17	43.68	51.40
39	20.64	22.64	23.65	26.53	28.13	30.08	33.61	37.72	41.32	44.91	52.82
40	21.37	23.41	24.44	27.38	29.01	31.00	34.60	38.79	42.48	46.15	54.24
41	22.11	24.19	25.24	28.23	29.89	31.92	35.58	39.86	43.63	47.38	55.66
42	22.85	24.97	26.04	29.09	30.77	32.84	36.57	40.94	44.78	48.62	57.08
43	23.59	25.75	26.84	29.94	31.66	33.76	37.57	42.01	45.94	49.85	58.50

44	24.33	26.53	27.64	30.80	32.54	34.68	38.56	43.09	47.09	51.09	59.92	71.01
45	25.08	27.32	28.45	31.66	33.43	35.61	39.55	44.17	48.25	52.32	61.35	72.67
46	25.83	28.11	29.26	32.52	34.32	36.53	40.55	45.24	49.40	53.56	62.77	74.33
47	26.59	28.90	30.07	33.38	35.22	37.46	41.54	46.32	50.56	54.80	64.19	76.00
48	27.34	29.70	30.88	34.25	36.11	38.39	42.54	47.40	51.71	56.03	65.61	77.66
49	28.10	30.49	31.69	35.11	37.00	39.32	43.53	48.48	52.87	57.27	67.04	79.32
50	28.87	31.29	32.51	35.98	37.90	40.26	44.53	49.56	54.03	58.51	68.46	80.99
51	29.63	32.09	33.33	36.85	38.80	41.19	45.53	50.64	55.19	59.75	69.88	82.65
52	30.40	32.90	34.15	37.72	39.70	42.12	46.53	51.73	56.35	60.99	71.31	84.32
53	31.17	33.70	34.98	38.60	40.60	43.06	47.53	52.81	57.50	62.22	72.73	85.98
54	31.94	34.51	35.80	39.47	41.51	44.00	48.54	53.89	58.66	63.46	74.15	87.65
55	32.72	35.32	36.63	40.35	42.41	44.94	49.54	54.98	59.82	64.70	75.58	89.31
56	33.49	36.13	37.46	41.23	43.32	45.88	50.54	56.06	60.98	65.94	77.00	90.97
57	34.27	36.95	38.29	42.11	44.22	46.82	51.55	57.14	62.14	67.18	78.43	92.64
58	35.05	37.76	39.12	42.99	45.13	47.76	52.55	58.23	63.31	68.42	79.85	94.30
59	35.84	38.58	39.96	43.87	46.04	48.70	53.56	59.32	64.47	69.66	81.27	95.97
60	36.62	39.40	40.80	44.76	46.95	49.64	54.57	60.40	65.63	70.90	82.70	97.63
61	37.41	40.22	41.63	45.64	47.86	50.59	55.57	61.49	66.79	72.14	84.12	99.30
62	38.20	41.05	42.47	46.53	48.77	51.53	56.58	62.58	67.95	73.38	85.55	101.0
63	38.99	41.87	43.31	47.42	49.69	52.48	57.59	63.66	69.11	74.63	86.97	102.6
64	39.78	42.70	44.16	48.31	50.60	53.43	58.60	64.75	70.28	75.87	88.40	104.3
65	40.58	43.52	45.00	49.20	51.52	54.38	59.61	65.84	71.44	77.11	89.82	106.0
66	41.38	44.35	45.85	50.09	52.44	55.33	60.62	66.93	72.60	78.35	91.25	107.6
67	42.17	45.18	46.69	50.98	53.35	56.28	61.63	68.02	73.77	79.59	92.67	109.3
68	42.97	46.02	47.54	51.87	54.27	57.23	62.64	69.11	74.93	80.83	94.10	111.0
69	43.77	46.85	48.39	52.77	55.19	58.18	63.65	70.20	76.09	82.08	95.52	112.6
70	44.58	47.68	49.24	53.66	56.11	59.13	64.67	71.29	77.26	83.32	96.95	114.3
71	45.38	48.52	50.09	54.56	57.03	60.08	65.68	72.38	78.42	84.56	98.37	116.0
72	46.19	49.36	50.94	55.46	57.96	61.04	66.69	73.47	79.59	85.80	99.80	117.6
73	47.00	50.20	51.80	56.35	58.88	61.99	67.71	74.56	80.75	87.05	101.2	119.3
74	47.81	51.04	52.65	57.25	59.80	62.95	68.72	75.65	81.92	88.29	102.7	120.9
75	48.62	51.88	53.51	58.15	60.73	63.90	69.74	76.74	83.08	89.53	104.1	122.6
76	49.43	52.72	54.37	59.05	61.65	64.86	70.75	77.83	84.25	90.78	105.5	124.3
77	50.24	53.56	55.23	59.96	62.58	65.81	71.77	78.93	85.41	92.02	106.9	125.9
78	51.05	54.41	56.09	60.86	63.51	66.77	72.79	80.02	86.58	93.26	108.4	127.6
79	51.87	55.25	56.95	61.76	64.43	67.73	73.80	81.11	87.74	94.51	109.8	129.3
80	52.69	56.10	57.81	62.67	65.36	68.69	74.82	82.20	88.91	95.75	111.2	130.9
81	53.51	56.95	58.67	63.57	66.29	69.65	75.84	83.30	90.08	96.99	112.6	132.6
82	54.33	57.80	59.54	64.48	67.22	70.61	76.86	84.39	91.24	98.24	114.1	134.3
83	55.15	58.65	60.40	65.39	68.15	71.57	77.87	85.48	92.41	99.48	115.5	135.9
84	55.97	59.50	61.27	66.29	69.08	72.53	78.89	86.58	93.58	100.7	116.9	137.6
85	56.79	60.35	62.14	67.20	70.02	73.49	79.91	87.67	94.74	102.0	118.3	139.3
86	57.62	61.21	63.00	68.11	70.95	74.45	80.93	88.77	95.91	103.2	119.8	140.9
87	58.44	62.06	63.87	69.02	71.88	75.42	81.95	89.86	97.08	104.5	121.2	142.6
88	59.27	62.92	64.74	69.93	72.82	76.38	82.97	90.96	98.25	105.7	122.6	144.3
89	60.10	63.77	65.61	70.84	73.75	77.34	83.99	92.05	99.41	107.0	124.0	145.9
90	60.92	64.63	66.48	71.76	74.68	78.31	85.01	93.15	100.6	108.2	125.5	147.6
91	61.75	65.49	67.36	72.67	75.62	79.27	86.04	94.24	101.8	109.4	126.9	149.3
92	62.58	66.35	68.23	73.58	76.56	80.24	87.06	95.34	102.9	110.7	128.3	150.9
93	63.42	67.21	69.10	74.50	77.49	81.20	88.08	96.43	104.1	111.9	129.8	152.6
94	64.25	68.07	69.98	75.41	78.43	82.17	89.10	97.53	105.3	113.2	131.2	154.3
95	65.08	68.93	70.85	76.33	79.37	83.13	90.12	98.63	106.4	114.4	132.6	155.9
96	65.92	69.79	71.73	77.24	80.31	84.10	91.15	99.72	107.6	115.7	134.0	157.6
97	66.75	70.65	72.61	78.16	81.25	85.07	92.17	100.8	108.8	116.9	135.5	159.3
98	67.59	71.52	73.48	79.07	82.18	86.04	93.19	101.9	109.9	118.2	136.9	160.9
99	68.43	72.38	74.36	79.99	83.12	87.00	94.22	103.0	111.1	119.4	138.3	162.6
100	69.27	7~.25	75.24	80.91	84.06	87.97	95.24	104.1	112.3	120.6	139.7	164.3

N is the number of servers. The numerical column headings indicate blocking probability B in %. Table generated by Dan Dexter

Erlang C Traffic Table

Maximum Offered Load Versus B and N

B is in %

N/B	0.01	0.05	0.1	0.5	1.0	2	5	10	15	20	30	40
1	.0001	.0005	.0010	.0050	.0100	.0200	.0500	.1000	.1500	.2000	.3000	.4000
2	.0142	.0319	.0452	.1025	.1465	.2103	.3422	.5000	.6278	.7403	.9390	1.117
3	.0860	.1490	.1894	.3339	.4291	.5545	.7876	1.040	1.231	1.393	1.667	1.903
4	.2310	.3533	.4257	.6641	.8100	.9939	1.319	1.653	1.899	2.102	2.440	2.725
5	.4428	.6289	.7342	1.065	1.259	1.497	1.905	2.313	2.607	2.847	3.241	3.569
6	.7110	.9616	1.099	1.519	1.758	2.047	2.532	3.007	3.344	3.617	4.062	4.428
7	1.026	1.341	1.510	2.014	2.297	2.633	3.188	3.725	4.103	4.406	4.897	5.298
8	1.382	1.758	1.958	2.543	2.866	3.246	3.869	4.463	4.878	5.210	5.744	6.178
9	1.771	2.208	2.436	3.100	3.460	3.883	4.569	5.218	5.668	6.027	6.600	7.065
10	2.189	2.685	2.942	3.679	4.077	4.540	5.285	5.986	6.469	6.853	7.465	7.959
11	2.634	3.186	3.470	4.279	4.712	5.213	6.015	6.765	7.280	7.688	8.336	8.857
12	3.100	3.708	4.018	4.896	5.363	5.901	6.758	7.554	8.099	8.530	9.212	9.761
13	3.587	4.248	4.584	5.529	6.028	6.602	7.511	8.352	8.926	9.379	10.09	10.67
14	4.092	4.805	5.166	6.175	6.705	7.313	8.273	9.158	9.760	10.23	10.98	11.58
15	4.614	5.377	5.762	6.833	7.394	8.035	9.044	9.970	10.60	11.09	11.87	12.49
16	5.150	5.962	6.371	7.502	8.093	8.766	9.822	10.79	11.44	11.96	12.77	13.41
17	5.699	6.560	6.991	8.182	8.801	9.505	10.61	11.61	12.29	12.83	13.66	14.33
18	6.261	7.169	7.622	8.871	9.518	10.25	11.40	12.44	13.15	13.70	14.56	15.25
19	6.835	7.788	8.263	9.568	10.24	11.01	12.20	13.28	14.01	14.58	15.47	16.18
20	7.419	8.417	8.914	10.27	10.97	11.77	13.00	14.12	14.87	15.45	16.37	17.10
21	8.013	9.055	9.572	10.99	11.71	12.53	13.81	14.96	15.73	16.34	17.28	18.03
22	8.616	9.702	10.24	11.70	12.46	13.30	14.62	15.81	16.60	17.22	18.19	18.96
23	9.228	10.36	10.91	12.43	13.21	14.08	15.43	16.65	17.47	18.11	19.10	19.89
24	9.848	11.02	11.59	13.16	13.96	14.86	16.25	17.51	18.35	19.00	20.02	20.82
25	10.48	11.69	12.28	13.90	14.72	15.65	17.08	18.36	19.22	19.89	20.93	21.76
26	11.11	12.36	12.97	14.64	15.49	16.44	17.91	19.22	20.10	20.79	21.85	22.69
27	11.75	13.04	13.67	15.38	16.26	17.23	18.74	20.08	20.98	21.68	22.77	23.63
28	12.40	13.73	14.38	16.14	17.03	18.03	19.57	20.95	21.87	22.58	23.69	24.57
29	13.05	14.42	15.09	16.89	17.81	18.83	20.41	21.82	22.75	23.48	24.61	25.50
30	13.71	15.12	15.80	17.65	18.59	19.64	21.25	22.68	23.64	24.38	25.54	26.44
31	14.38	15.82	16.52	18.42	19.37	20.45	22.09	23.56	24.53	25.29	26.46	27.38
32	15.05	16.53	17.25	19.18	20.16	21.26	22.93	24.43	25.42	26.19	27.39	28.33
33	15.72	17.24	17.97	19.95	20.95	22.07	23.78	25.30	26.32	27.10	28.31	29.27
34	16.40	17.95	18.71	20.73	21.75	22.89	24.63	26.18	27.21	28.01	29.24	30.21
35	17.09	18.67	19.44	21.51	22.55	23.71	25.48	27.06	28.11	28.92	30.17	31.16
36	17.78	19.39	20.18	22.29	23.35	24.53	26.34	27.94	29.00	29.83	31.10	32.10
37	18.47	20.12	20.92	23.07	24.15	25.36	27.19	28.82	29.90	30.74	32.03	33.05
38	19.17	20.85	21.67	23.86	24.96	26.18	28.05	29.71	30.80	31.65	32.97	34.00
39	19.87	21.59	22.42	24.65	25.77	27.01	28.91	30.59	31.71	32.57	33.90	34.94
40	20.58	22.33	23.17	25.44	26.58	27.84	29.77	31.48	32.61	33.48	34.83	35.89
41	21.28	23.07	23.93	26.23	27.39	28.68	30.63	32.37	33.51	34.40	35.77	36.84
42	22.00	23.81	24.69	27.03	28.21	29.51	31.50	33.26	34.42	35.32	36.70	37.79
43	22.71	24.56	25.45	27.83	29.02	30.35	32.36	34.15	35.33	36.23	37.64	38.74
44	23.43	25.31	26.22	28.63	29.84	31.19	33.23	35.04	36.23	37.15	38.58	39.69
45	24.15	26.06	26.98	29.44	30.67	32.03	34.10	35.93	37.14	38.07	39.51	40.64
46	24.88	26.82	27.75	30.24	31.49	32.87	34.97	36.83	38.05	39.00	40.45	41.59
47	25.60	27.57	28.52	31.05	32.32	33.72	35.84	37.72	38.96	39.92	41.39	42.54
48	26.34	28.33	29.30	31.86	33.14	34.56	36.72	38.62	39.87	40.84	42.33	43.50
49	27.07	29.10	30.08	32.68	33.97	35.41	37.59	39.52	40.79	41.76	43.27	44.45
50	27.80	29.86	30.86	33.49	34.80	36.26	38.47	40.42	41.70	4?,69	44.21	45.40
51	28.54	30.63	31.64	34.31	35.64	37.11	39.35	41.32	42.61	43.61	45.15	46.36
52	29.28	31.40	32.42	35.12	36.47	37.97	40.23	42.22	43.53	44.54	46.10	47.31
53	30.03	32.17	33.21	35.94	37.31	38.82	41.10	43.12	44.44	45.47	47.04	48.27
54	30.77	32.95	33.99	36.76	38.15	39.67	41.99	44.02	45.36	46.39	47.98	49.22
55	31.52	33.72	34.78	37.59	38.99	40.53	42.87	44.93	46.28	47.32	48.93	50.18
56	32.27	34.50	35.57	38.41	39.83	41.39	43.75	45.83	47.20	48.25	49.87	51.13
57	33.03	35.28	36.37	39.24	40.67	42.25	44.64	46.74	48.12	49.18	50.82	52.09
58	33.78	36.06	37.16	40.07	41.51	43.11	45.52	47.64	49.04	50.11	51.76	53.05
59	34.54	36.85	37.96	40.90	42.36	43.97	46.41	48.55	49.96	51.04	52.71	54.01
60	35.30	37.63	38.76	41.73	43.20	44.83	47.29	49.46	50.88	51.97	53.65	54.96
61	36.06	38.42	39.56	42.56	44.05	45.70	48.18	50.37	51.80	52.90	54.60	55.92
62	36.82	39.21	40.36	43.39	44.90	46.56	49.07	51.27	52.72	53.83	55.55	56.88
63	37.59	40.00	41.16	44.23	45.75	47.43	49.96	52.18	53.64	54.77	56.49	57.84
64	38.35	40.80	41.97	45.06	46.60	48.30	50.85	53.10	54.57	55.70	57.44	58.80
65	39.12	41.59	42.78	45.90	47.45	49.16	51.74	54.01	55.49	56.63	58.39	59.76

66	39.89	42.39	43.58	46.74	48.30	50.03	52.64	54.92	56.42	57.57	59.34	60.72
67	40.66	43.18	44.39	47.58	49.16	50.90	53.53	55.83	57.34	58.50	60.29	61.68
68	41.44	43.98	45.20	48.42	50.01	51.77	54.42	56.75	58.27	59.44	61.24	62.64
69	42.21	44.78	46.02	49.26	50.87	52.65	55.32	57.66	59.20	60.37	62.19	63.60
70	42.99	45.58	46.83	50.10	51.73	53.52	56.21	58.57	60.12	61.31	63.14	64.56
71	43.77	46.39	47.64	50.95	52.59	54.39	57.11	59.49	61.05	62.25	64.09	65.52
72	44.55	47.19	48.46	51.79	53.45	55.27	58.01	60.41	61.98	63.18	65.04	66.48
73	45.33	48.00	49.28	52.64	54.31	56.14	58.90	61.32	62.91	64.12	65.99	67.44
74	46.11	48.81	50.10	53.49	55.17	57.02	59.80	62.24	63.84	65.06	66.94	68.40
75	46.90	49.61	50.92	54.34	56.03	57.90	60.70	63.16	64.76	66.00	67.89	69.37
76	47.68	50.42	51.74	55.19	56.89	58.78	61.60	64.07	65.69	66.94	68.85	70.33
77	48.47	51.23	52.56	56.04	57.76	59.65	62.50	64.99	66.63	67.88	69.80	71.29
78	49.26	52.05	53.38	56.89	58.62	60.53	63.40	65.91	67.56	68.82	70.75	72.25
79	50.05	52.86	54.21	57.74	59.49	61.41	64.30	66.83	68.49	69.76	71.70	73.22
80	50.84	53.68	55.03	58.60	60.36	62.30	65.21	67.75	69.42	70.70	72.66	74.18
81	51.63	54.49	55.86	59.45	61.22	63.18	66.11	68.67	70.35	71.64	73.61	75.14
82	52.43	55.31	56.69	60.30	62.09	64.06	67.01	69.59	71.28	72.58	74.57	76.11
83	53.22	56.13	57.52	61.16	62.96	64.94	67.92	70.52	72.22	73.52	75.52	77.07
84	54.02	56.95	58.35	62.02	63.83	65.83	68.82	71.44	73.15	74.46	76.47	78.04
85	54.81	57.77	59.18	62.88	64.70	66.71	69.73	72.36	74.08	75.40	77.43	79.00
86	55.61	58.59	60.01	63.73	65.57	67.60	70.63	73.28	75.02	76.35	78.38	79.97
87	56.41	59.41	60.84	64.59	66.45	68.48	71.54	74.21	75.95	77.29	79.34	80.93
88	57.21	60.23	61.67	65.45	67.32	69.37	72.45	75.13	76.89	78.23	80.30	81.90
89	58.02	61.06	62.51	66.32	68.19	70.26	73.35	76.06	77.82	79.18	81.25	82.86
90	58.82	61.88	63.34	67.18	69.07	71.15	74.26	76.98	78.76	80.12	82.21	83.83
91	59.62	62.71	64.18	68.04	69.94	72.04	75.17	77.91	79.69	81.06	83.16	84.79
92	60.43	63.54	65.02	68.90	70.82	72.92	76.08	78.83	80.63	82.01	84.12	85.76
93	61.23	64.36	65.86	69.77	71.70	73.81	76.99	79.76	81.57	82.95	85.08	86.73
94	62.04	65.19	66.70	70.63	72.57	74.71	77.90	80.69	82.50	83.90	86.03	87.69
95	62.85	66.02	67.54	71.50	73.45	75.60	78.81	81.61	83.44	84.84	86.99	88.66
96	63.66	66.85	68.38	72.36	74.33	76.49	79.72	82.54	84.38	85.79	87.95	89.62
97	64.47	67.69	69.22	73.23	75.21	77.38	80.63	83.47	85.32	86.74	88.91	90.59
98	65.28	68.52	70.06	74.10	76.09	78.27	81.54	84.39	86.26	87.68	89.87	91.56
99	66.09	69.35	70.90	74.97	76.97	79.17	82.46	85.32	87.20	88.63	90.82	92.53
100	66.91	70.19	71.75	75.84	77.85	80.06	83.37	86.25	88.13	89.58	91.78	93.49

N is the number of servers. The numerical column headings indicate blocking probability B in %. Table generated by Dan Dexter

Poisson Traffic Table

Maximum Offered Load Versus B and N
B is in %

N/B	0.01	0.05	0.1	0.5	1.0	2	5	10	15	20	30	40
1	.0001	.0005	.0010	.0050	.0101	.0202	.0513	.1054	.1625	.2231	.3567	.5108
2	.0142	.0320	.0454	.1035	.1486	.2147	.3554	.5318	.6832	.8244	1.097	1.376
3	.0862	.1497	.1905	.3379	.4360	.5672	.8177	1.102	1.331	1.535	1.914	2.285
4	.2318	.3552	.4286	.6722	.8232	1.016	1.366	1.745	2.039	2.297	2.764	3.211
5	1.078	1.279	1.530	1.970	2.433	2.785	3.090	3.634	4.148			
6	.7137	.9672	1.107	1.537	1.785	2.089	2.613	3.152	3.557	3.904	4.517	5.091
7	1.030	1.348	1.520	2.037	2.330	2.684	3.285	3.895	4.348	4.734	5.411	6.039
8	1.387	1.768	1.971	2.571	2.906	3.307	3.981	4.656	5.155	5.576	6.312	6.991
9	1.778	2.220	2.452	3.132	3.508	3.953	4.695	5.433	5.973	6.429	7.220	7.947
10	2.198	2.699	2.961	3.717	4.130	4.618	5.425	6.221	6.802	7.289	8.133	8.904
11	2.643	3.202	3.492	4.321	4.771	5.300	6.169	7.021	7.639	8.157	9.050	9.864
12	3.112	3.726	4.042	4.943	5.428	5.996	6.924	7.829	8.484	9.031	9.972	10.83
13	3.600	4.269	4.611	5.580	6.099	6.704	7.690	8.646	9.336	9.910	10.90	11.79
14	4.106	4.828	5.195	6.231	6.782	7.424	8.464	9.470	10.19	10.79	11.82	12.76
15	4.629	5.402	5.794	6.893	7.477	8.153	9.246	10.30	11.06	11.68	12.75	13.72
16	5.167	5.990	6.405	7.567	8.181	8.891	10.04	11.14	11.92	12.57	13.69	14.69
17	5.718	6.590	7.028	8.251	8.895	9.638	10.83	11.98	12.79	13.47	14.62	15.66
18	6.281	7.201	7.662	8.943	9.616	10.39	11.63	12.82	13.67	14.37	15.56	16.63
19	6.856	7.822	8.306	9.645	10.35	11.15	12.44	13.67	14.55	15.27	16.50	17.60
20	7.442	8.453	8.958	10.35	11.08	11.92	13.26	14.53	15.43	16.17	17.44	18.57
21	8.037	9.093	9.619	11.07	11.83	12.69	14.07	15.38	16.31	17.08	18.38	19.54
22	8.642	9.741	10.29	11.79	12.57	13.47	14.89	16.24	17.20	17.99	19.32	20.51
23	9.255	10.40	10.96	12.52	13.33	14.25	15.72	17.11	18.09	18.90	20.27	21.48
24	9.876	11.06	11.65	13.26	14.09	15.04	16.55	17.98	18.98	19.81	21.21	22.46
25	10.50	11.73	12.34	14.00	14.85	15.83	17.38	18.84	19.88	20.73	22.16	23.43
26	11.14	12.41	13.03	14.74	15.62	16.63	18.22	19.72	20.77	21.64	23.10	24.41
27	11.78	13.09	13.73	15.49	16.40	17.43	19.06	20.59	21.67	22.56	24.05	25.38
28	12.43	13.78	14.44	16.25	17.18	18.23	19.90	21.47	22.57	23.48	25.00	26.36
29	13.09	14.47	15.15	17.00	17.96	19.04	20.75	22.35	23.48	24.40	25.95	27.33
30	13.75	15.17	15.87	17.77	18.74	19.85	21.59	23.23	24.38	25.32	26.91	28.31
31	14.42	15.87	16.59	18.53	19.53	20.66	22.45	24.11	25.29	26.24	27.86	29.29
32	15.09	16.58	17.32	19.31	20.32	21.48	23.30	25.00	26.19	27.17	28.81	30.26
33	15.76	17.30	18.05	20.08	21.12	22.30	24.15	25.89	27.10	28.09	29.76	31.24
34	16.44	18.01	18.78	20.86	21.92	23.12	25.01	26.77	28.01	29.02	30.72	32.22
35	17.13	18.73	19.52	21.64	22.72	23.95	25.87	27.66	28.92	29.95	31.67	33.20
36	17.82	19.46	20.26	22.42	23.53	24.77	26.73	28.56	29.84	30.88	32.63	34.18
37	18.52	20.19	21.01	23.21	24.33	25.60	27.60	29.45	30.75	31.81	33.59	35.16
38	19.21	20.92	21.75	24.00	25.14	26.44	28.46	30.35	31.66	32.74	34.54	36.14
39	19.92	21.66	22.51	24.79	25.96	27.27	29.33	31.24	32.58	33.67	35.50	37.11
40	20.62	22.40	23.26	25.59	26.77	28.11	30.20	32.14	33.50	34.60	36.46	38.09
41	21.33	23.14	24.02	26.38	27.59	28.95	31.07	33.04	34.42	35.54	37.42	39.07
42	22.05	23.88	24.78	27.18	28.41	29.79	31.94	33.94	35.33	36.47	38.38	40.05
43	22.76	24.63	25.54	27.99	29.23	30.63	32.81	34.84	36.26	37.41	39.34	41.04
44	23.48	25.38	26.31	28.79	30.05	31.47	33.69	35.74	37.18	38.34	40.30	42.02
45	24.20	26.14	27.08	29.60	30.88	32.32	34.56	36.65	38.10	39.28	41.26	43.00
46	24.93	26.90	27.85	30.41	31.71	33.17	35.44	37.55	39.02	40.22	42.22	43.98
47	25.66	27.65	28.62	31.22	32.53	34.01	36.32	38.46	39.94	41.16	43.18	44.96
48	26.39	28.42	29.40	32.03	33.37	34.87	37.20	39.36	40.87	42.09	44.14	45.94
49	27.13	29.18	30.18	32.85	34.20	35.72	38.08	40.27	41.79	43.03	45.10	46.92
50	27.86	29.95	30.96	33.66	35.03	36.57	38.97	41.18	42.72	43.97	46.06	47.90
51	28.60	30.72	31.74	34.48	35.87	37.43	39.85	42.09	43.65	44.91	47.03	48.89
52	29.34	31.49	32.53	35.30	36.71	38.28	40.73	43.00	44.58	45.85	47.99	49.87
53	30.09	32.26	33.31	36.13	37.55	39.14	41.62	43.91	45.50	46.80	48.95	50.85
54	30.84	33.04	34.10	36.95	38.39	40.00	42.51	44.82	46.43	47.74	49.92	51.83
55	31.59	33.82	34.90	37.78	39.23	40.86	43.40	45.74	47.36	48.68	50.88	52.82
56	32.34	34.60	35.69	38.60	40.07	41.72	44.29	46.65	48.29	49.63	51.85	53.80
57	33.09	35.38	36.48	39.43	40.92	42.59	45.18	47.56	49.22	50.57	52.81	54.78
58	33.85	36.16	37.28	40.26	41.77	43.45	46.07	48.48	50.15	51.51	53.78	55.77
59	34.60	36.95	38.08	41.09	42.61	44.32	46.96	49.40	51.09	52.46	54.74	56.75
60	35.36	37.73	38.88	41.93	43.46	45.18	47.85	50.31	52.02	53.40	55.71	57.73
61	36.13	38.52	39.68	42.76	44.31	46.05	48.75	51.23	52.95	54.35	56.68	58.72
62	36.89	39.31	40.48	43.60	45.16	46.92	49.64	52.15	53.89	55.30	57.64	59.70
63	37.66	40.11	41.29	44.43	46.02	47.79	50.54	53.07	54.82	56.24	58.61	60.68
64	38.42	40.90	42.09	45.27	46.87	48.66	51.43	53.99	55.76	57.19	59.58	61.67
65	39.19	41.70	42.90	46.11	47.73	49.53	52.33	54.91	56.69	58.14	60.54	62.65

66	39.96	42.49	43.71	46.95	48.58	50.41	53.23	55.83	57.63	59.08	61.51	63.64
67	40.74	43.29	44.52	47.79	49.44	51.28	54.13	56.75	58.56	60.03	62.48	64.62
68	41.51	44.09	45.33	48.64	50.30	52.16	55.03	57.67	59.50	60.98	63.45	65.61
69	42.29	44.89	46.15	49.48	51.16	53.03	55.93	58.59	60.44	61.93	64.41	66.59
70	43.07	45.70	46.96	50.33	52.02	53.91	56.83	59.52	61.37	62.88	65.38	67.58
71	43.84	46.50	47.78	51.17	52.88	54.79	57.73	60.44	62.31	63.83	66.35	68.56
72	44.63	47.31	48.60	52.02	53.74	55.66	58.63	61.36	63.25	64.78	67.32	69.54
73	45.41	48.11	49.42	52.87	54.60	56.54	59.54	62.29	64.19	65.73	68.29	70.53
74	46.19	48.92	50.24	53.72	55.47	57.42	60.44	63.21	65.13	66.68	69.26	71.52
75	46.98	49.73	51.06	54.57	56.33	58.30	61.35	64.14	66.07	67.63	70.23	72.50
76	47.76	50.54	51.88	55.42	57.20	59.19	62.25	65.06	67.01	68.58	71.20	73.49
77	48.55	51.36	52.70	56.28	58.07	60.07	63.16	65.99	67.95	69.54	72.17	74.47
78	49.34	52.17	53.53	57.13	58.94	60.95	64.06	66.92	68.89	70.49	73.14	75.46
79	50.13	52.98	54.35	57.98	59.80	61.84	64.97	67.85	69.83	71.44	74.11	76.44
80	50.92	53.80	55.18	58.84	60.67	62.72	65.88	68.77	70.77	72.39	75.08	77.43
81	51.72	54.62	56.01	59.70	61.54	63.61	66.79	69.70	71.72	73.35	76.05	78.41
82	52.51	55.43	56.84	60.55	62.41	64.49	67.70	70.63	72.66	74.30	77.02	79.40
83	53.31	56.25	57.67	61.41	63.29	65.38	68.60	71.56	73.60	75.25	77.99	80.39
84	54.10	57.07	58.50	62.27	64.16	66.27	69.51	72.49	74.54	76.21	78.96	81.37
85	54.90	57.89	59.33	63.13	65.03	67.15	70.43	73.42	75.49	77.16	79.93	82.36
86	55.70	58.72	60.16	63.99	65.91	68.04	71.34	74.35	76.43	78.11	80.91	83.34
87	56.50	59.54	61.00	64.85	66.78	68.93	72.25	75.28	77.38	79.07	81.88	84.33
88	57.31	60.37	61.83	65.72	67.66	69.82	73.16	76.21	78.32	80.02	82.85	85.32
89	58.11	61.19	62.67	66.58	68.53	70.71	74.07	77.14	79.27	80.98	83.82	86.30
90	58.91	62.02	63.51	67.44	69.41	71.61	74.98	78.08	80.21	81.93	84.79	87.29
91	59.72	62.84	64.34	68.31	70.29	72.50	75.90	79.01	81.16	82.89	85.77	88.28
92	60.52	63.67	65.18	69.17	71.17	73.39	76.81	79.94	82.10	83.85	86.74	89.26
93	61.33	64.50	66.02	70.04	72.05	74.28	77.73	80.88	83.05	84.80	87.71	90.25
94	62.14	65.33	66.86	70.91	72.93	75.18	78.64	81.81	83.99	85.76	88.68	91.24
95	62.95	66.16	67.70	71.77	73.81	76.07	79.56	82.74	84.94	86.72	89.66	92.22
96	63.76	66.99	68.55	72.64	74.69	76.97	80.47	83.68	85.89	87.67	90.63	93.21
97	64.57	67.83	69.39	73.51	75.57	77.86	81.39	84.61	86.83	88.63	91.60	94.20
98	65.38	68.66	70.23	74.38	76.45	78.76	82.31	85.55	87.78	89.59	92.58	95.19
99	66.19	69.50	71.08	75.25	77.33	79.65	83.22	86.48	88.73	90.54	93.55	96.17
100	67.01	70.33	71.92	76.12	78.22	80.55	84.14	87.42	89.68	91.50	94.52	97.16

N is the number of servers. The numerical column headings indicate blocking probability B in %. Table generated by Dan Dexter

Bibliografía

Allen, A. O. (1990). *Probability, Statistics, and Queueing Theory with Computer Science Applications* (2.ª ed.). Boston: Academic Press.

Gross, D.; Shortle, J. F.; Thompson, J. M.; Harris, C. M. (2008). *Fundamentals of queueing theory* (4.ª ed.). Nueva York: John Wiley and Sons.

Hock, C. (1996). *Queueing Modelling Fundamentals*. Nueva York: John Wiley and Sons.

León-García, A. (2008). *Probability and Random Processes for Electrical Engineering* (3.ª ed.). Upper Saddle River: Prentice Hall.

Pazos, J. J.; Suárez, A.; Díaz, R. (2003). *Teoría de colas y simulación de eventos discretos*. Madrid: Pearson Educación.

Stallings, W. (2004). *Redes e Internet de alta velocidad. Rendimiento y calidad de servicio* (2.ª ed.). Madrid: Pearson Prentice Hall.