
El principi de racionalitat i la teoria de la utilitat

PID_00268968

Ignacio Sánchez-Cuenca

Temps mínim de dedicació recomanat: 2 hores



Ignacio Sánchez-Cuenca

L'encàrrec i la creació d'aquest recurs d'aprenentatge UOC han estat coordinats pel professor: Albert Batlle (2019)

Segona edició: setembre 2019
© Ignacio Sánchez-Cuenca
Tots els drets reservats
© d'aquesta edició, FUOC, 2019
Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Realització editorial: FUOC

Cap part d'aquesta publicació, incloent-hi el disseny general i la coberta, no pot ser copiada, reproduïda, emmagatzemada o transmesa de cap manera ni per cap mitjà, tant si és elèctric com químic, mecànic, òptic, de gravació, de fotocòpia o per altres mètodes, sense l'autorització prèvia per escrit dels titulars dels drets.

Índex

Introducció	5
Objectius	6
1. El supòsit de la racionalitat	7
1.1. La proposta de Becker i Stigler	7
1.2. Comportaments autointeressat i egoista	8
1.3. Elements d'una elecció	9
2. Funcions d'utilitat	12
2.1. Funcions d'utilitat en contextos paramètrics de certesa	12
2.2. Funcions amb incertesa. El principi d'utilitat esperada	13
2.3. Les funcions d'utilitat Von Neumann-Morgenstern	17
3. La paradoxa d'Allais	20
Resum	23
Bibliografia	25

Introducció

La teoria de jocs, de la mateixa manera que la teoria econòmica i la teoria de l'elecció racional més en general, parteix del supòsit que els agents (ja siguin individus, organitzacions o estats) són racionals. La racionalitat pràctica, la racionalitat de l'acció, consisteix en el fet que l'agent prengui les seves decisions segons un ordre de preferències. Si l'agent actua en consonància amb aquestes preferències, és racional. Si, en canvi, pren la decisió al marge de les seves preferències, per exemple perquè actua mogut per intenses emocions o per la força coercitiva que tenen les normes socials o les obligacions autoimposades, la decisió queda més enllà de l'àmbit de la racionalitat.

És lògic començar l'estudi de la teoria de jocs per una anàlisi de la racionalitat. Ara bé, el concepte de racionalitat per si mateix no és operatiu, sinó que cal formalitzar-lo per a poder-lo aplicar. Les funcions d'utilitat se n'encarreguen. En aquest mòdul es defineixen i analitzen diverses funcions d'utilitat. El principi de racionalitat traduït a la terminologia de les funcions d'utilitat estableix que l'agent és racional quan en actuar maximitza la seva funció d'utilitat. Les funcions d'utilitat poden ser més o menys exigents, depenent de si la decisió es pren en un context de certesa o en un de risc/incertesa.

La teoria de la utilitat (o teoria de la decisió) s'encarrega d'investigar els aspectes més fonamentals de l'acció racional. Cal tenir certa familiaritat amb aquesta teoria per a entendre la teoria de jocs. En aquest mòdul examinem alguns conceptes fonamentals, com la caracterització d'un problema de decisió, la diferència entre funcions d'utilitat ordinals i cardinals, el principi d'utilitat esperada, les funcions d'utilitat Von Neumann-Morgenstern i l'actitud envers el risc. El mòdul acaba amb una presa de contacte molt superficial amb les anomalies que es produeixen en la teoria de la utilitat: molt sovint, els agents de carn i ossos no es comporten com espera la teoria.

Objectius

En aquest mòdul, heu d'aprendre els rudiments més bàsics de la teoria de la utilitat. Això representa el següent:

1. Formular amb rigor el principi de racionalitat de l'acció.
2. Saber descompondre un problema de decisió en els elements bàsics.
3. Fer càlculs d'utilitat esperada.
4. Operar amb funcions d'utilitat Von Neumann-Morgenstern.
5. Determinar l'actitud envers el risc en una funció d'utilitat.

1. El supòsit de la racionalitat

La teoria de l'elecció racional, com ja s'ha explicat en la introducció, parteix del supòsit que els agents són racionals. Començarem definint amb més precisió què vol dir exactament que els agents siguin racionals. Primer veurem una definició genèrica, que val per a totes les situacions possibles, i després com aquesta definició es desenvolupa de manera diferent segons el tipus de problema amb què s'enfronti l'agent. Per tant, convé subratllar des del principi que hi ha versions més exigents que altres respecte als continguts de la racionalitat. Que una versió de la racionalitat sigui més exigent que una altra significa que fa supòsits més restrictius sobre la manera en què l'agent pren les seves decisions. Normalment, com més exigent és la definició de racionalitat que es maneja, menys «realista» resulta.

La premissa de què parteix el supòsit de racionalitat és molt senzilla: els agents tenen desitjos sobre com els agradaria que fos el món i creences sobre com funciona realment. En la terminologia pròpia de la teoria econòmica i la teoria de l'elecció racional, aquests desitjos s'anomenen *preferències*. Suposem que les preferències són estables, almenys a curt termini. Si de sobte les preferències poguessin canviar, la teoria de l'elecció racional s'enfrontaria a dificultats insuperables. En la mesura que les preferències són el principal element explicatiu de l'acció, si canviessin capritxosament hi hauria poca cosa a explicar. Malgrat que hi ha hagut diversos intents des del si de la teoria de l'elecció racional per a explicar el procés de formació de les preferències, gairebé sempre es considera que vénen donades. A la teoria no li interessa tant la manera en què s'originen les preferències com que, una vegada donades, expliquin per què l'agent va prendre unes decisions i no unes altres.

1.1. La proposta de Becker i Stigler

En la teoria de l'acció de Gary S. Becker es fa un supòsit addicional sobre les preferències: no solament vénen donades, sinó que, a més, són comunes o universals. Becker i George J. Stigler van publicar el 1977 un article molt influent, «De gustibus non est disputandum», en què argumentaven que tots els agents tenen les mateixes preferències i que les diferències en les decisions s'explicaven no per variacions en les preferències, sinó per variacions en els recursos de què disposen i en els preus relatius dels béns que volen adquirir.

Van adoptar aquest plantejament perquè consideraven que les preferències no són una variable explicativa adequada, ja que en ser privades no són directament observables. Atès que les preferències no es poden observar, mentre que els recursos dels individus i els preus dels béns sí, és millor centrar-se en aquests últims.

Tipus d'agents

- Actors individuals: persones.
- Actors col·lectius: estats, partits polítics, sindicats, classes socials, etc.

Bibliografia

Becker, G.S.; Stigler, G.J. (1977). «De gustibus non est disputandum». *American Economic Review* (vol. 67, núm. 2, pàg. 76-90).

La proposta de Becker i Stigler és acceptada per tothom. De fet, el que és més habitual en teoria de l'elecció racional és suposar que les preferències són la principal explicació de l'acció. Ara bé, això implica que un s'ha d'enfrontar al problema metodològic de com imputar les preferències als agents. Així, se suposa que l'empresari busca beneficis econòmics amb la seva activitat, que el consumidor busca la màxima satisfacció possible en els béns que consumeix, que el polític en democràcia busca vots, que, amb el seu comportament a l'escenari internacional, els estats busquen poder, seguretat, etc. Aquestes imputacions no sempre són evidents. Per exemple, no és clar que els polítics només busquin vots. N'hi ha que no estan disposats a sacrificar certes idees per a incrementar la quota electoral. I més greu encara: de vegades no és tan sols que raonablement es puguin fer diferents imputacions de preferències, sinó que ni tan sols sabem gaire bé què es pot imputar a l'agent. Què és exactament el que busquen els votants quan decideixen el seu vot? Què busca exactament un estat quan entra en conflicte amb un altre estat?

Ara no és el moment d'aprofundir en els problemes metodològics que sorgeixen a l'hora d'imputar preferències als agents. Els investigadors intenten de buscar solucions en cada cas concret, guiant-se per les característiques pròpies dels diversos objectes d'estudi.

1.2. Comportaments autointeressat i egoista

L'important en aquest moment és insistir que la teoria de l'elecció racional representa que l'agent actua segons el seu ordre de preferències.

L'agent ordena les seves preferències i actua segons aquest ordre.

Que l'agent triï a partir de les seves preferències significa, simplement, que actua buscant el que és millor davant del que és pitjor. Aquest supòsit també es coneix com el *supòsit de comportament autointeressat*. L'agent actua segons les seves preferències i no segons les dels altres.

Comportament autointeressat no implica necessàriament comportament egoista. L'agent pot ser egoista, en el sentit que només es preocupi pel seu benestar, però també pot ser altruista o envejós, en el sentit que, a més del seu benestar, està preocupat pel dels altres. Si l'agent té preferències sobre el benestar dels altres, continua essent autointeressat, atès que encara actua segons les seves preferències. L'altruista s'alegra que els altres millorin la seva condició, mentre que l'envejós se'n lamenta.

Malgrat el fet que el principi del comportament autointeressat sigui tan general, el que és cert és que en molts casos es fa un supòsit addicional de comportament egoista.

Tornarem a deixar les discussions metodològiques al marge. Només cal consignar que el supòsit egoista és tan sols un cas especial, encara que habitual, de comportament autointeressat i que, en l'àmbit d'abstracció en què encara ens movem, el principi de racionalitat es defineix a partir del comportament autointeressat, no a partir de l'egoista. Amb altres paraules, tenir preferències no egoistes no implica que l'agent sigui irracional. Una altra cosa és que, quan la teoria s'apliqui en situacions concretes, el comportament autointeressat sigui de naturalesa egoista.

Després d'aquests aclariments, ja podem abordar la definició del supòsit de racionalitat.

Un agent és racional quan, en escollir entre les alternatives disponibles, ho fa segons el seu ordre de preferències.

Tota la teoria de l'elecció racional és un desenvolupament d'aquest supòsit tan bàsic. Per a donar més precisió a la definició, cal explicar millor què és un ordre de preferència acceptable. Concretament, s'han d'introduir **dos conceptes tècnics**: el d'un ordre de preferències que és *complet* i *transitiu*. Però, al seu torn, per a definir aquests dos conceptes s'ha d'especificar quina és l'ontologia d'un problema de decisió, és a dir, quins elements es tindran en compte a l'hora de caracteritzar una elecció racional. Això ens obligarà a fer una petita marrada.

1.3. Elements d'una elecció

Seguint la presentació clàssica de Leonard Savage a *The Foundations of Statistics*, podem dir que els elements necessaris per a caracteritzar un problema de decisió o elecció són els següents:

- Un conjunt d'estats del món S exhaustius i exclusius.
- Un conjunt A d'accions.
- Un conjunt C de conseqüències, i hi ha una conseqüència per a cada parell
- $A \times S$.
- Una ordenació de preferències P sobre les conseqüències.

En lloc de proporcionar descripcions detallades de cada un d'aquests elements, serà més fàcil explicar-ne el significat per mitjà del cèlebre exemple que proporciona Savage sobre un agent que està fent una truita. Un agent prepara una truita de sis ous. Ha trencat els cinc primers en una mateix cassola i no n'hi ha cap de dolent, però sap que hi ha un risc que el sisè ou estigui podrit. L'agent ha

Bibliografia

Savage, L. (1954 [1972]). *The foundations of statistics*. Nova York: Dover.

de decidir què fa amb el sisè ou. El seu conjunt A d'accions es compon de tres elements: trencar el sisè ou a la mateixa cassola, trencar-lo en un plat a part o llençar-lo a les escombraries. L'acció que triï dependrà dels estats del món. En aquest cas, el conjunt S d'estats del món és molt reduït: o bé el sisè ou està en bones condicions, o bé està podrit. Cada una d'aquestes possibilitats caracteritza un estat del món diferent. Cada acció possible es pot aparellar amb cada estat del món possible, fet que dóna lloc a conseqüències diferents. El quadre 1 reflecteix l'estructura del problema. A les files tenim les accions A_i , a les columnes, els estats del món S_i , i a l'interior del quadre, les conseqüències C_i .

Quadre 1

El problema de decisió de Savage		
Accions	Estats del món	
	Bon estat (S_1)	Mal estat (S_2)
Trencar el sisè ou a la cassola (A_1)	Truita de sis ous (C_{11})	No hi ha truita, cinc ous llençats (C_{12})
Trencar el sisè ou en un plat (A_2)	Truita de sis ous i un plat que cal fregar (C_{21})	Truita de cinc ous i un plat que cal fregar (C_{22})
Llençar el sisè ou (A_3)	Truita de cinc ous i un ou llençat (C_{31})	Truita de cinc ous (C_{32})

L'única cosa que ens falta per a caracteritzar completament el problema d'elecció és especificar l'ordre de preferències, és a dir, una ordenació de les conseqüències de més a menys preferida. Evidentment, són possibles ordres de preferència múltiples. Podem utilitzar com a terme primitiu per a caracteritzar l'ordre de preferència el terme relacional de *preferència feble*:

$$C_i \geq C_j$$

Aquesta expressió significa que la conseqüència i és almenys tan preferida com la conseqüència j . Si es dóna alhora que $C_i \geq C_j$ i $C_j \geq C_i$ llavors és que l'agent és indiferent entre les dues conseqüències, i ho representarem com a $C_i \approx C_j$. Doncs bé, podríem considerar, en l'exemple dels ous, que aquest és un ordre de preferències possible:

$$C_{11} \geq C_{21} \geq C_{31} \approx C_{32} \geq C_{22} \geq C_{12}$$

Amb paraules

El que s'estima més és una truita de sis ous, després una truita de sis ous i un plat que cal fregar, després una truita de cinc ous i un ou llençat o una truita de cinc ous, després una truita de cinc ous i un plat que cal fregar i, finalment, cinc ous malgastats. Ara bé, si a l'agent realment li resulta desagradable haver de fregar, l'ordre podria haver estat el següent:

$$C_{11} \geq C_{31} \approx C_{32} \geq C_{21} \geq C_{12} \geq C_{22}$$

Ara ja podem definir els dos conceptes que teníem pendents. Així, diem que un ordre de preferències és *complet* si és el cas següent:

$$C_i \geq C_j \text{ o } C_j \geq C_i \text{ o } (C_i \geq C_j \text{ i } C_j \geq C_i)$$

Amb paraules

Ateses dues conseqüències qualssevol, l'agent o prefereix feblement una que l'altra, o al revés, o és indiferent entre totes dues. Això significa que l'agent ha de ser capaç de comparar qualssevol de les dues alternatives que se li presentin, per molt dispars que siguin. Evidentment, això no és gaire realista, però s'hi de suposar per a formalitzar la teoria de la decisió.

D'altra banda, diem que un ordre de preferències és *transitiu* en el cas següent:

$$\text{Si } (C_i \geq C_j \text{ i } C_j \geq C_k), \text{ llavors } C_i \geq C_k$$

Quan sabem això, cal definir precisament el principi de racionalitat en termes genèrics:

Supòsit de racionalitat: si l'ordre de preferències de l'agent és complet i transitiu i l'agent escull les seves accions segons l'ordre de preferències, llavors l'agent és racional.

Amb paraules

Si la conseqüència *i* es prefereix feblement a la conseqüència *j* i aquesta es prefereix feblement a la conseqüència *k*, llavors l'agent prefereix feblement *i* a *k*. La condició de transitivitat garanteix que la relació de preferència sigui coherent. Aquesta condició és més important que la de completesa.

Expressat amb aquest nivell d'abstracció, el supòsit de racionalitat no ens permet de determinar quina serà l'elecció de l'agent en el problema dels ous. Si suposem que el seu ordre de preferències és

$$C_{11} \geq C_{21} \geq C_{31} \approx C_{32} \geq C_{22} \geq C_{12}$$

què hauria de fer l'agent si és racional? Si l'agent no sap en quin estat del món es troba, és a dir, si no sap si el sisè ou està podrit o no, l'ordre de preferències definit sobre les conseqüències no és suficient per a prendre una decisió, ja que una mateixa acció donarà lloc a una conseqüència o una altra depenent de quin sigui l'estat del món. Per a poder respondre la pregunta de què farà l'agent, s'ha de donar més contingut al supòsit de racionalitat. I, per a això, cal saber alguna cosa sobre les funcions d'utilitat.

2. Funcions d'utilitat

Una funció d'utilitat assigna números a un ordre de preferències. Aquests números mesuren la utilitat o el benestar que obté un individu o un estat si es dóna una certa conseqüència quan fa una acció determinada. La utilitat es pot derivar de les mateixes conseqüències, o de l'acció quan una mateixa acció té unes conseqüències o unes altres depenent de quin sigui l'estat del món. Això quedarà més clar d'aquí a un moment, en veure diferents tipus de funció d'utilitat.

La utilitat, per tant, és la traducció quantitativa d'un ordre de preferències.

Quan parlem en termes d'utilitat, el supòsit de racionalitat implica que l'agent tria l'acció que maximitza la funció d'utilitat. Com que el valor màxim de la funció equival a l'opció més preferida, dir que algú actua racionalment quan tria a partir del seu ordre de preferències o quan maximitza la seva funció d'utilitat és equivalent.

En qualsevol cas, és fonamental recordar que la relació més bàsica és la de preferència. Perquè preferim i a j , i ens proporciona més utilitat que j . No és al revés: no és perquè i proporciona més utilitat que j que preferim i a j .

Les funcions d'utilitat tenen diferents graus de complexitat, segons el context de l'acció en què s'apliquin. Seguint amb la distinció que es presentava en la introducció d'aquest tema, la clau en aquest cas és que l'agent, en actuar, tingui o no certesa sobre l'estat del món rellevant en cada moment. Quan hi ha certesa, les funcions d'utilitat són molt senzilles. Quan hi ha incertesa, la cosa es complica una mica.

2.1. Funcions d'utilitat en contextos paramètrics de certesa

Quan hi ha certesa, és a dir, quan l'agent està segur sobre quina conseqüència originarà la seva acció, n'hi ha prou de tenir una funció d'utilitat ordinal, que ordena les conseqüències però no mesura la distància que hi ha en termes d'utilitat entre una conseqüència i una altra. Si es coneix l'estat del món, la conseqüència preferida serà la que proporcioni més utilitat i, per tant, és igual a quina distància en utilitat se situï aquesta conseqüència respecte a la següent, perquè l'agent sempre escollirà la primera preferència. Per a caracteritzar l'elecció racional n'hi ha prou, per tant, que la funció ordeni les preferències.

Una analogia

De la mateixa manera que no diem que fa més calor perquè el termòmetre marca una temperatura més alta, sinó que el termòmetre marca una temperatura més alta perquè fa calor, tampoc no diem que es prefereix una cosa perquè proporciona més utilitat, sinó que proporciona més utilitat perquè es prefereix més que altres coses.

Si $U(C_i)$ és la utilitat que proporciona la conseqüència C_i . Formalment, podem caracteritzar la propietat específica de les funcions d'utilitat en contextos de certesa així:

$$\text{Si } C_i \geq C_j, \text{ llavors } U(C_i) \geq U(C_j)$$

L'única cosa que ens importa en aquesta funció d'utilitat és que el primer número sigui més elevat que el segon, i és igual com sigui de gran. Per exemple, aquest ordre de preferències

$$C_1 \geq C_2 \geq C_3$$

Qualsevol funció d'utilitat que satisfaci

$$U(C_1) \geq U(C_2) \geq U(C_3)$$

representa igualment bé l'ordre de preferències subjacent. Les dues funcions següents serien estrictament idèntiques:

Funció A	Funció B
$U(C_1) = 100$	$U(C_1) = 1$
$U(C_2) = 25$	$U(C_2) = 0$
$U(C_3) = -1000$	$U(C_3) = -1$

Com es pot veure, no hi ha cap relació lineal entre les dues funcions. Totes dues reflecteixen igualment l'ordre de preferències, perquè en tots dos casos C_1 és la conseqüència preferida, C_3 la que ho és menys i C_2 ocupa la posició intermèdia.

2.2. Funcions amb incertesa. El principi d'utilitat esperada

Quan no hi ha certesa sobre els estats del món, l'agent no pot saber amb seguretat quina serà la conseqüència de cada una de les seves accions. En conseqüència, no podem identificar una acció amb una conseqüència i calcular la utilitat de la primera a partir de la utilitat de la segona. Ara la utilitat s'ha de calcular per a cada acció sobre les possibles conseqüències que s'hi associen. I per a fer aquest càlcul cal tenir en compte, a més de les preferències de l'agent, les seves creences sobre la probabilitat que es doni un estat del món o un altre.

Amb la teoria de la utilitat esperada podem formalitzar el tipus de raonament que es feia en el paràgraf anterior. Concretament, la idea consisteix a ponderar la utilitat de les conseqüències per la probabilitat que es donin dels estats del món que hi corresponen. Primer s'introdueix la definició formal i després s'explica amb dos exemples.

Per exemple

Si considero molt més probable que el sisè ou estigui podrit que no pas que no ho estigui, faria una ximpleria trencant-lo a la mateixa cassola que els altres cinc o fins i tot trencant-lo en un plat: és millor llençar-lo directament. Al contrari, si crec que la probabilitat que l'ou estigui podrit és molt baixa, em podria compensar trencar-lo a la cassola amb els altres cinc, per a evitar el risc tant d'haver de fregar un plat addicional com de malgastar l'ou llençant-lo a les escombraries. I així successivament.

Si representem la idea d'utilitat esperada d'una acció A com $UE(A)$, podem definir la utilitat esperada de la manera següent:

$$EU(A) = \sum_p(S) U[C(S,A)], \sum_p = 1$$

En aquesta fórmula, $C(S, A)$ representa la conseqüència C de dur a terme l'acció A a partir de l'estat del món S , i p representa la probabilitat que es doni l'estat del món S . Les probabilitats de tots els estats del món possibles han de sumar 1. La fórmula ens diu, per tant, que la utilitat esperada de fer A és la suma de la utilitat de totes les conseqüències possibles de l'acció ponderada per la probabilitat que tingui lloc cada conseqüència.

Exemple 1

El bombardeig nadalenc de Nixon (pres de Morrow, 1994)

El 1972, les negociacions per arribar a la fi de la guerra del Vietnam van sofrir una aturada: els nord-americans no sabien si els nord-vietnamites estaven «frenant» l'acord per intentar obtenir més concessions («Fanfarronada vietnamita» o S_1) o si realment existia algun malentès sobre el contingut del tractat de pau que impedia el progrés de les negociacions («No fanfarronada vietnamita» o S_2). Cadascuna d'aquestes possibilitats derivava un estat del món possible. No obstant això, l'Administració Nixon, a l'hora de respondre a l'aturada, desconeixia quin era l'estat del món real. La resposta nord-americana tenia dues possibilitats davant aquesta situació: demostrar el seu poder militar amb un bombardeig aeri (A_1) o acceptar les concessions addicionals demanades pel Govern de Vietnam del Nord en les negociacions de pau (A_2). Com ja és conegut, la relació entre els estats del món i les accions dels jugadors crea conseqüències.

Si Nixon decidia no bombardejar, Estats Units revisaria el tractat de pau i faria concessions independentment de si Vietnam estava fent una fanfarronada o no. Aquesta era la conseqüència que denominem C_2 . Si Nixon decidia bombardejar, la conseqüència depenia de si Vietnam estava fent una fanfarronada o no: si estaven fent una fanfarronada (l'estat del món era S_1), assumim que, després del bombardeig, les negociacions per al tractat de pau es reprendrien al punt original (aquesta és la conseqüència C_1); si no hi havia cap fanfarronada per part dels nord-vietnamites (S_2), el bombardeig provocaria que el Govern de Vietnam del Nord trenqués les negociacions de pau i es tornés a una situació de guerra (conseqüència C_3). El quadre 2 resumeix la situació:

Quadre 2

		Vietnam del Nord	
		Fanfarronada (S_1)	No Fanfarronada (S_2)
EUA	Bombardeig (A_1)	Vietnam torna a la taula de negociacions i s'arriba a un acord (C_1)	Es trenquen les negociacions i es torna a la guerra (C_3)
	No bombardeig (A_2)	S'arriba a un acord amb concessions addicionals (C_2)	S'arriba a un acord amb concessions addicionals (C_2)

S'assumeix que l'ordre de preferències de Nixon sobre les diferents conseqüències era tal que $C_1 > C_2 > C_3$ (Nixon preferia no fer concessions addicionals a Vietnam del Nord, però preferia fer-les a continuar una guerra que ja tenia perduda). Aquest és un conjunt ordinal de les possibles conseqüències derivades de l'acció. Però les funcions d'utilitat sobre les conseqüències especifiquen el risc que un actor acceptarà per aconseguir la seva conseqüència preferida. El Govern dels Estats Units no volia de cap manera fer concessions i intentava evitar-les.

Assumim doncs que $u(C_1) = 1$; $u(C_2) = 0,3$; $u(C_3) = 0$.

La probabilitat d'ocurrència dels diferents estats del món resumeix les creences dels Estats Units sobre quina seria la resposta vietnamita a la seva pròpia decisió. El govern dels Estats Units creia que Vietnam estava fent una fanfarronada i, per tant, assumim que $p(S_1) = 0,7$ i que, lògicament, $p(S_2) = 0,3$.

Calculant les utilitats esperades derivades de les dues possibles accions es comprova com Estats Units preferia jugar A_1 a jugar A_2 :

$$UE(A_1) = p(S_1)u(C_1) + p(S_2)u(C_3) = (0,7)(1) + (0,3)(0) = 0,7$$

$$UE(A_2) = p(S_1)u(C_2) + p(S_2)u(C_2) = (0,7)(0,3) + (0,3)(0,3) = 0,3$$

Per tant, $UE(A_1) > UE(A_2)$ i, en conseqüència, per a l'Administració Nixon $A_1 > A_2$.

El bombardeig massiu de Hanoi i Haiphong (l'anomenada Operació Linebacker II duta a terme entre els dies 18 i 29 de desembre) va ser molt controvertit als Estats Units (i també en l'àmbit internacional) perquè, en definitiva, encara que es podia compartir el càlcul de la utilitat derivada de les tres possibles conseqüències, no s'entenia com Nixon podia assumir el risc de tornar a activar la guerra ni tampoc com havia interpretat que Vietnam del Nord estava «dient una fanfarronada» en el procés de pau.

Exemple 2

Suposem que s'acusa un polític amb fonament d'haver malversat fons. El polític no sap si les acusacions es basen en proves o si només són meres sospites. Hi ha dos estats del món sobre els quals no té certesa: o bé hi ha proves que donen suport a les acusacions, o bé no n'hi ha. El polític pot fer tres coses:

- negar-ho tot,
- reconèixer-ne una part o
- reconèixer-ho tot.

Les dades del problema, incloent-hi les conseqüències, es resumeixen en el quadre 3 anàleg al quadre 1 amb el problema dels ous. Si el polític ho nega tot i no hi ha proves, surt reforçat en la seva posició per haver estat víctima d'un atac injust. Si ho nega tot i hi ha proves, se l'obliga a dimitir. Si ho confessa tot, és igual l'estat del món, el cas és que se l'obliga a dimitir. Si en confessa una part en sortirà debilitat, tant si hi ha proves com si no, però no se'n força la destitució per haver afrontat les acusacions essent sincer, almenys en part.

Quadre 3

El problema del polític corrupte		
Accions	Estats del món	
	Hi ha proves (S_1)	No hi ha proves (S_2)
Negar-ho tot (A_1)	Destituït (C_1)	Reforçat (C_3)
Confessar-ne una part (A_2)	Debilitat (C_2)	Debilitat (C_2)
Confessar-ho tot (A_3)	Destituït (C_1)	Destituït (C_2)

En aquest cas l'ordre de preferències sobre les conseqüències és evident:

$$C_3 \geq C_2 \geq C_1$$

$$(\text{Reforçat} \geq \text{Debilitat} \geq \text{Destituït})$$

Per a poder aplicar la fórmula anterior, cal que les conseqüències tinguin algun valor mesurat en utilitat. També s'han d'especificar els valors de p , és a dir, s'han d'especificar les creences del polític sobre els estats del món. De moment assignarem uns valors arbitraris entre 0 i 1 a la utilitat de les conseqüències: en la subsecció següent s'explica d'on procedeixen aquests números. Concretament, suposarem el següent:

$$U(\text{Reforçat}) = 1 \quad | \quad p(\text{Hi ha proves}) = 0,2$$

$U(\text{Debilitat}) = 0,6$	$p(\text{No hi ha proves}) = 0,8$
$U(\text{Destituït}) = 0$	

Ateses aquestes mesures d'utilitat per a les conseqüències i també aquestes creences, podem calcular la utilitat esperada que correspon a cada acció possible:

$$UE(\text{Negar-ho tot}) = p(\text{Hi ha proves}) \times U(\text{Destituït}) + p(\text{No hi ha proves}) \times U(\text{Reforçat})$$

Substituint:

$$UE(\text{Negar-ho tot}) = 0,2 \times 0 + 0,8 \times 1 = 0,8.$$

Igualment, per a l'acció de confessar-ne una part:

$$UE(\text{Confessar-ne una part}) = p(\text{Hi ha proves}) \times U(\text{Debilitat}) + p(\text{No hi ha proves}) \times U(\text{Debilitat})$$

Substituint:

$$UE(\text{Confessar-ne una part}) = 0,2 \times 0,6 + 0,8 \times 0,6 = 0,6$$

Finalment, pel que fa a confessar-ho tot:

$$UE(\text{Confessar-ho tot}) = p(\text{Hi ha proves}) \times U(\text{Destituït}) + p(\text{No hi ha proves}) \times U(\text{Destituït})$$

Substituint:

$$UE(\text{Confessar-ho tot}) = 0,2 \times 0 + 0,8 \times 0 = 0$$

És evident que la màxima utilitat esperada es produeix quan el polític ho nega tot. Per tant, un polític racional negarà les acusacions d'escàndol si les dades del problema es corresponen amb les que hem suposat. Negar-ho tot maximitza la utilitat de l'agent. Sens dubte, podria ser que les diverses conseqüències es valoressin d'una altra manera o que

el polític tingués diferents creences sobre si hi ha proves o no. Per exemple, suposeu que, mantenint constants les utilitats de les conseqüències, volem saber a partir de quina creença que hi ha proves el polític s'estimarà més confessar-ne una part que negar-ho tot. És a dir, el que es demana és resoldre la inequació o desigualtat següent:

$$UE(\text{Confessar-ne una part}) \geq UE(\text{Negar-ho tot})$$

Donant valors a tot menys a p , que és el que volem esbrinar, la desigualtat que cal resoldre es pot expressar així:

$$p \times 0,6 + (1 - p) \times 0,6 > p \times 0 + (1 - p) \times 1$$

És fàcil adonar-se que aquesta desigualtat només es compleix en aquest cas:

$$p > 0,4$$

Si la creença que hi ha proves és superior a 0,4, llavors el polític en confessarà una part, ja que aquesta acció és la que ara maximitza la seva utilitat.

En aquest exemple és evident que la clau és que la utilitat que s'assigna a les conseqüències tingui alguna justificació. I això per dues raons: primer, perquè si podem alterar a conveniència la utilitat de les conseqüències, la utilitat esperada de cada acció variarà arbitràriament; segon, perquè ponderem aquestes utilitats per les probabilitats que hi ha en les creences, i aquesta ponderació només té sentit si aquestes utilitats no són arbitràries. En altres paraules, el que es revela en aquest exemple és que tant les utilitats de les conseqüències com la mateixa utilitat esperada s'han d'expressar cardinalment, no ordinalment. No importa solament l'ordre de les utilitats, sinó també la distància entre elles. La qüestió és: hi ha alguna manera de definir cardinalment la utilitat perquè es pugui aplicar el principi d'utilitat esperada? La resposta és afirmativa. Van ser els fundadors de la teoria de jocs, John von Neumann i Oskar Morgenstern, els que van proposar una solució.

2.3. Les funcions d'utilitat Von Neumann-Morgenstern

Les funcions d'utilitat Von Neuman-Morgenstern són cardinals perquè els creadors van aconseguir idear un mètode per a assignar valors numèrics a les conseqüències. Es tracta de veure com es valoren les conseqüències intermèdies (les que estan entre la conseqüència millor i la pitjor) en termes d'una *loteria* en què només intervinguin la millor i la pitjor. Una loteria L es defineix com un aparellament de probabilitats i conseqüències. Formalment:

$$L = (p_1 C_1, p_2 C_2, \dots, p_n C_n), \sum p_i = 1$$

Von Neumann i Morgenstern van utilitzar aquesta definició de loteria per a aconseguir les seves utilitats cardinals. El procediment és molt senzill. En l'exemple del polític corrupte, teníem tres conseqüències, «reforçat», «debilitat» i «destituït». Es tracta d'expressar la utilitat de la conseqüència intermèdia, «debilitat», en termes d'una loteria entre la millor i la pitjor conseqüència, és a dir, en termes de «reforçat» i «debilitat». Més concretament, es tracta de mesurar la valoració de la conseqüència intermèdia en termes del risc que l'agent estaria disposat a assumir per a aconseguir la millor conseqüència, «reforçat».

Exemple

Suposem que al polític se li planteja aquest dilema: ha d'escollir entre quedar debilitat amb seguretat o una loteria en què hi ha una probabilitat de tres cinquens (60%) de sortir reforçat i una probabilitat de dos cinquens (40%) de ser destituït (la loteria es representaria formalment com a $0,6 \times C_3, 0,4 \times C_1$). En aquest cas, el polític diu que prefereix sortir debilitat amb seguretat a participar en aquesta loteria. Això és així perquè la valoració relativa de sortir debilitat enfront de sortir reforçat no queda ben reflectida en la loteria anterior: el polític necessita una probabilitat encara més elevada de sortir reforçat per a

acceptar-la. Si en canvi la loteria fos $(0,8 \times C_3, 0,2 \times C_1)$, el polític s'estimaria més jugar-hi que no sortir debilitat amb seguretat. Podem continuar afinant en aquest intercanvi entre un resultat segur i una loteria en què intervinguin la primera i última conseqüència fins a arribar a un punt d'indiferència. En aquest exemple, suposarem que el polític és indiferent entre sortir debilitat amb certesa i la loteria $(0,7 \times C_3, 0,3 \times C_1)$. En certa manera, això significa que la conseqüència intermèdia, sortir debilitat, val un 70% respecte a la primera conseqüència, que és sortir reforçat.

Doncs bé, la manera de mesurar cardinalment les utilitats de les conseqüències consisteix a trobar el punt d'indiferència entre un resultat intermedi segur i una loteria en què només intervinguin la millor i la pitjor conseqüència. Per comoditat, «normalitzem» l'escala d'utilitat, forçant que la millor conseqüència valgui 1 i la pitjor 0. Les opcions intermèdies se situen entre 0 i 1, depenent del risc que l'agent estigui disposat a assumir per a jugar en aquesta loteria. Com més elevada sigui la probabilitat d'aconseguir la millor conseqüència necessària per a la indiferència, menys risc està disposat a assumir l'agent, la qual cosa significa que valora més l'opció intermèdia. En el nostre exemple tindríem aquest punt de partida:

$$U(C_3) = 1$$

$$U(C_1) = 0$$

$$U(C_2) = U(L(0,7C_3,0,3C_1)) = 0,7$$

Com que la utilitat de C_2 és la mateixa que la de la loteria L i aquesta loteria té una utilitat esperada de 0,7 ($0,7 \times 1 + 0,3 \times 0$), assignem la utilitat 0,7 a C_2 . Així, hem aconseguit una manera no arbitrària d'assignar utilitat cardinal a les conseqüències.

Podríem fer el mateix si hi hagués més d'una conseqüència intermèdia. En aquest cas, es busca una relació d'indiferència entre cada conseqüència intermèdia i la loteria respectiva entre la millor i la pitjor conseqüència possible.

Una vegada hem vist què és una loteria i com s'assignen valors cardinals a les conseqüències segons loteries especials en què només intervenen la millor i la pitjor conseqüència, podem caracteritzar amb més rigor en què consisteix una funció d'utilitat Von Neumann-Morgenstern.

La novetat principal d'aquestes funcions és que es defineixen sobre loteries. És a dir, ateses diferents loteries, la funció d'utilitat Von Neumann-Morgenstern assigna números cardinals a cada una que reflecteixen la intensitat de les preferències que hi subjauen. Quin interès té definir la funció d'utilitat a partir de loteries? En realitat, és l'única manera de resoldre el problema general de la utilitat esperada.

Exemple (pres de Kydd, 2015)

Suposem que tres estats (i, j, l) valoren distintament les tres conseqüències possibles derivades d'una guerra (victòria, signar un tractat de pau, derrota $-V, TP, D-$), de manera que tots tres prefereixen en primer lloc obtenir la victòria, en segon lloc, signar un tractat de pau i, en tercer i últim lloc, ser derrotat en el conflicte. Així doncs, assignem la millor recompensa (1) a la victòria i la pitjor recompensa (0) a la derrota. Llavors cal preguntar als estats quina loteria entre el millor i el pitjor resultat seria equivalent a la utilitat de signar un tractat de pau amb total seguretat.

L'estat núm. 1 respon que una loteria amb un 90 % d'aconseguir la victòria i un 10 % de ser derrotat seria equivalent a signar un tractat de pau amb un 100 % de seguretat. Li atribuïm una utilitat de 0,9 a la signatura del tractat de pau [$U_i(TP) = 0,9$]. Aquest estat considera que el tractat de pau és bastant favorable i que el seu resultat difícilment milloraria amb una victòria militar. Òbviament, la derrota seria un desastre. Així doncs, aquest estat seria reticent a realitzar grans inversions de recursos per aconseguir la victòria.

L'estat núm. 2 respon que una loteria amb una possibilitat de victòria o derrota al 50 % seria equivalent a signar el tractat de pau (seguro al 100 %). Per tant, li atribuïm una utilitat de 0,5 a la signatura del tractat de pau [$U_j(TP) = 0,5$]. Aquest estat considera que el tractat de pau està exactament en el punt mitjà entre la victòria i la derrota.

L'estat núm. 3 respon que una loteria amb un 10 % de possibilitats de victòria (i un 90 % de possibilitats de derrota) seria equivalent a la signatura del tractat de pau. Així doncs, li atribuïm una utilitat de 0,1 a la signatura del tractat de pau [$U_l(TP) = 0,1$]. L'estat núm. 3 considera que el tractat de pau és bastant dolent, solament una mica millor que la derrota i molt pitjor que una victòria (encara que aquesta sigui poc probable). Per tant, l'estat núm. 3 tindria molts incentius per seguir endavant amb el conflicte.

Quadre 4

Estats	Utilitat de les conseqüències		
	Victòria	Tractat de pau	Derrota

	Utilitat de les conseqüències		
Estat (j)	1	0,9	0
Estat (j)	1	0,5	0
Estat (j)	1	0,1	0

Resumint: les funcions d'utilitat Von Neumann-Morgenstern permeten de fer càlculs d'utilitat esperada gràcies al procediment de definir les opcions intermèdies en termes de loteries entre la millor i la pitjor opció. D'aquesta manera, es poden comparar i valorar diferents loteries. Aquesta és la clau de l'assumpte, ja que quan duem a terme una acció en un context en què no hi ha certesa, cada acció equival a una loteria en què es combinen probabilitats i conseqüències.

Acabem de veure que el risc és la clau per mesurar la intensitat de les preferències de l'agent. Sens dubte, podem mesurar aquestes intensitats perquè ara les funcions d'utilitat són cardinals. Però podem anar més lluny en l'anàlisi del risc. Així, es pot determinar l'actitud que l'individu (o l'estat en qüestió) adopti cap al risc i incorporar-la a la funció d'utilitat. La manera de fer-ho no és molt complicada: es tracta de comprovar si l'agent és indiferent o no entre jugar una loteria i obtenir amb seguretat el valor que s'espera. Això dona lloc a tres possibilitats:

- Si l'agent és indiferent entre jugar la loteria i obtenir el valor esperat de la loteria, és **neutral** al risc.
- Si l'agent prefereix jugar la loteria a obtenir el valor esperat de la loteria, és **propens** al risc.
- Si l'agent prefereix el valor esperat de la loteria a jugar la loteria, té **aversió** al risc.

Suposem a algú advers al risc: se li ofereix una loteria en la qual pot obtenir 10 euros amb una probabilitat de 0,3, i 2 euros amb una probabilitat de 0,7. El valor esperat de la loteria és $0,3 \times 10 + 0,7 \times 2 = 5,44$. En principi, a un agent que no desenvolupés una actitud especial cap al risc li hauria de resultar indiferent que li donessin 5,44 euros amb seguretat o jugar una loteria amb un valor esperat de 5,44 euros. Així i tot, si és advers al risc preferirà els 5,44 euros en mà a la loteria, a pesar que el valor esperat és el mateix.

3. La paradoxa d'Allais

Malgrat que sembla que la teoria de la utilitat es basa en premisses certes, poc discutibles en qualsevol cas, i que la teoria sigui en certa manera una lògica de l'elecció, de la mateixa manera que la lògica inferencial és una lògica de l'argumentació, el cert és que nombrosos experiments duts a terme des de mitjan segle XX demostren que els individus es desvien sistemàticament del que es pot esperar des de la teoria de la utilitat. Els agents no sempre segueixen un curs d'acció «lògic».

En vista d'aquests resultats, s'han intentat d'introduir reformes de la teoria de la utilitat que aproximïn una mica els resultats teòrics als resultats empírics. Una visió panoràmica d'aquests esforços es pot trobar a Kahneman i Tversky.

Aquí no considerarem teories heterodoxes de l'elecció, però almenys veurem una de les paradoxes o resultats xocants que han contribuït a desenvolupar-les, la paradoxa d'Allais (seguim la presentació de Binmore).

El problema és aquest: un agent ha d'escollir entre dos cursos d'acció, L o M . Hi ha tres possibles estats del món, S , T i U . L'agent no sap el vertader estat del món, però coneix les seves probabilitats d'ocurrència: $p(S) = 0,01$, $p(T) = 0,1$ i $p(U) = 0,89$. Les conseqüències de les accions depenen de quin estat del món tingui lloc finalment. Una vegada ha escollit entre L i M , se li dóna a escollir entre dues alternatives més, que ara anomenarem L' i M' variant els pagaments, però amb les mateixes creences sobre els estats del món.

En el quadre 5 tenim un resum de la situació. Mentre que fer L té un resultat segur, 500.000 €, fer M ens pot deixar sense res amb probabilitat de 0,01, ens pot fer guanyar 2.500.000 € amb probabilitat 0,1 o ens pot fer guanyar 500.000 € amb probabilitat 0,89. Quant al segon problema, ara s'ha d'escollir entre les loteries L' i M' . Si l'agent tria L' davant de M' , s'emporta 500.000 € amb una probabilitat de 0,11 o 0 € amb una probabilitat de 0,89. Si tria M' davant de L' , aconsegueix 2.500.00 € amb una probabilitat de 0,1 o 0 € amb una probabilitat de 0,9.

Quadre 5

La paradoxa d'Allais			
	S $p(S) = 0,01$	T $p(T) = 0,1$	U $p(U) = 0,89$
L	500.000 €	500.000 €	500.000 €
M	0 €	2.500.000 €	500.000 €
L'	500.000 €	500.000 €	0 €

Bibliografia

Kahneman, D.; Tversky, A. (ed.) (2000). *Choices, Values, and Frames*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bibliografia

Binmore, K. (1992). *Fun and Games. A Text on Game Theory* (pàg. 115-117). Lexington: Heath.

La paradoxa d'Allais			
M'	0 €	2.500.000 €	0 €

En escollir entre L i M , d'una banda, i entre L' i M' , de l'altra, moltes persones trien en el primer cas L i en el segon M' . Tanmateix, és fàcil demostrar que aquestes eleccions són incoherents.

Segons el que hem après anteriorment, podem entendre que L , M , L' i M' són loteries. Atès que la millor conseqüència és 2.500.000 € i la pitjor 0 €, podem definir les utilitats de la manera següent:

$$U(2.500.000) = 1$$

$$U(500.000) = z \quad 0 < z < 1$$

$$U(0) = 0$$

De moment és igual el valor de z , sempre que, naturalment, sigui el mateix en tots dos problemes de decisió. Vegem quina és la utilitat esperada de les dues primeres loteries, L i M :

$$UE(L) = 0,01 \times z + 0,1 \times z + 0,89 \times z = z$$

$$UE(M) = 0,01 \times 0 + 0,1 \times 1 + 0,89 \times z = 0,1 + 0,89z$$

Si l'agent tria L davant de M , llavors és que $UE(L) > UE(M)$, és a dir:

$$z > 0,1 + 0,89z$$

Si aclarim respecte a z , ens queda el següent:

$$z > 0,1 / 0,11$$

Vegem ara si aquest resultat és coherent amb l'elecció de M' davant de L' :

$$UE(L') = 0,01 \times z + 0,1 \times z + 0,89 \times 0 = 0,11z$$

$$UE(M) = 0,01 \times 0 + 0,1 \times 1 + 0,89 \times 0 = 0,1$$

Si l'agent tria M' , és perquè $UE(M') > UE(L')$, és a dir:

$$0,1 > 0,11z$$

Aclarint de nou respecte a z , obtenim el següent:

$$z > 0,1/0,11$$

Però aquest resultat clarament contradia l'anterior. Per tant, si en el primer cas tria L davant de M i en el segon M' davant de L' , està violant algun dels supòsits bàsics de la teoria de la utilitat: el seu comportament és irracional. El que és més desconcertant és que hi hagi un percentatge de gent important en els experiments de laboratori que revelen aquest tipus de comportament incoherent. El principal suggeriment per a entendre el que succeeix és que les persones no valoren de la mateixa manera el risc de guanyar alguna cosa i el risc de perdre-la, encara que en els termes estrictes de la teoria aquests riscos siguin estrictament equivalents. Quan en l'elecció entre L i M l'agent tria L , sol ser perquè dóna molta importància a una probabilitat molt petita de quedar-se sense res si tria M . En canvi, quan escull M' entre L' i M' , l'agent es deixa guiar més no pel risc de perdre, sinó per la probabilitat de guanyar els dos milions i mig d'euros. Aquesta variació psicològica en la manera de calibrar pèrdues i guanys va més enllà de les consideracions que preveu la teoria estàndard de la utilitat.

Si no s'aprofundeix més en aquest tipus de desviacions empíriques respecte a la teoria és perquè la teoria de jocs incorpora la teoria de la utilitat estàndard, sense donar gaire importància a anomalies com les de la paradoxa d'Allais.

Resum

La teoria de la utilitat estudia les propietats que ha de complir l'acció racional. Aquesta teoria proporciona una formalització del principi de racionalitat, entenent com a tal un agent que, quan ha d'escollir entre diferents opcions, ho fa segons el seu ordre de preferències. Més tècnicament, l'agent és racional si actua segons un ordre de preferències complet i transitiu.

A l'hora d'analitzar un problema de decisió, s'ha de descompondre en quatre elements: estats del món, accions, conseqüències de les accions (una conseqüència és un parella formada per un estat del món i una acció) i un ordre de preferències definit sobre les conseqüències de l'acció.

Les preferències sobre les conseqüències de l'acció es poden quantificar amb funcions d'utilitat. Si l'acció es duu a terme en un context de certesa, podem representar aquest ordre de preferències amb una funció ordinal, que només estableix quina conseqüència es prefereix a una altra, sense poder especificar quant més es prefereix.

Si l'acció es duu a terme sense certesa, s'ha d'aplicar el principi d'utilitat esperada. Ara la utilitat no s'assigna directament a les conseqüències, sinó a les accions. La utilitat esperada d'una acció consisteix en la suma de les utilitats de cada conseqüència possible, segons un estat del món, multiplicades per la probabilitat d'ocurrència de cada estat del món. Perquè el principi d'utilitat esperada tingui sentit, cal que les utilitats per les quals es multiplica la probabilitat d'ocurrència dels estats del món no siguin arbitràries. Concretament, calen funcions d'utilitat Von Neumann-Morgenstern, que són cardinals i reflecteixen la intensitat de les preferències. La intensitat de les preferències es mesura pel risc que està disposat a assumir l'agent per a aconseguir la millor opció possible enfront d'aconseguir una opció intermèdia amb seguretat.

Una característica interessant de les funcions d'utilitat Von Neumann-Morgenstern és que reflecteixen l'actitud dels agents envers el risc. Aquesta actitud consisteix en el fet de si l'agent és indiferent o no entre la utilitat del valor esperat d'una loteria i la utilitat que s'espera de jugar-hi.

En la pràctica, la teoria de la utilitat no sempre funciona. Un experiment molt senzill com el que es fa a propòsit de la paradoxa d'Allais revela que els agents reals no sempre donen el mateix pes a un mateix resultat quan es presenta com un guany i quan ho fa com una pèrdua.

Bibliografia

Becker, G.S.; Stigler, G.J. (1977). «De gustibus non est disputandum». *American Economic Review* (vol. 67, núm. 2, pàg. 76-90).

Binmore, K. (1992). *Fun and Games. A Text on Game Theory*. Lexington: Heath.

Downs, A. (1957). *An Economic Theory of Democracy*. Nova York: Harper and Row.

Kahneman, D.; Tversky, A. (ed.) (2000). *Choices, Values, and Frames*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kydd, A. H. (2015). *International Relations Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Morrow, J. (1994). *Game Theory for Political Scientists*. Princeton: Princeton University Press.

Olson, M. (1965). *The Logic of Collective Action*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Savage, L. (1954 [1972]). *The Foundations of Statistics*. Nova York: Dover.

