Jocs en forma normal o estratègica

PID_00268966

Ignacio Sánchez-Cuenca

Temps mínim de dedicació recomanat: 3 hores

Universitat
Oberta
de Catalunya

Ignacio Sánchez-Cuenca

La revisió d'aquest recurs d'aprenentatge UOC ha estat coordinada pel professor: Albert Batlle (2019)

Segona edició: setembre 2019

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Realització editorial: FUOC

Índex

Introducció

Els jocs en forma normal serveixen per a analitzar totes les situacions estratègiques en què els jugadors trien simultàniament, és a dir, cada jugador pren la seva decisió sense saber què han escollit els altres. Per a no introduir complicacions innecessàries, s'analitzaran només jocs de dos jugadors. A més, en aquest mòdul només es consideren jocs en forma normal estàtics, és a dir, que es juguen una única vegada. En el mòdul «Jocs repetits» s'abordarà la qüestió de què succeeix quan el joc es repeteix unes quantes vegades o indefinidament.

No hi ha gaires models en l'àmbit de les relacions Internacionals que es basin en jocs en forma normal estàtics. Això no obstant, conèixer-los és imprescindible per a entendre alguns dels conceptes més bàsics de la teoria de jocs, com l'equilibri de Nash o les estratègies mixtes. D'altra banda, en general els jocs en forma normal que s'examinen aquí poden representar situacions ideals molt importants per a diferents camps de la ciència política. Així, per exemple, els problemes fonamentals de la teoria de l'acció col·lectiva es poden sistematitzar amb diferents jocs en forma normal, segons es mostra a l'apartat «Els problemes de la cooperació amb jocs en forma normal».

El mòdul comença amb una caracterització precisa dels jocs en forma normal. A continuació s'examina una situació especial, és a dir, la possibilitat de resoldre el joc amb el criteri de dominació. Quan això és factible, la situació estratègica inicial es transforma a la pràctica en una situació paramètrica, ja que hi ha un procediment mecànic o algorítmic de resolució del joc que eximeix els jugadors d'haver de fer conjectures sobre el comportament del rival i sobre què compta com a elecció racional atès el comportament del rival.

Com que no sempre és possible resoldre un joc en forma normal per dominació, en la secció tercera es presenta la teoria de l'equilibri de Nash, que val per a qualsevol joc. Un equilibri de Nash és una combinació d'estratègies de manera que cap jugador no té raons per a canviar d'estratègia, cap jugador no pot millorar la seva condició a compte dels altres. Hi ha jocs que tenen un únic equilibri de Nash i n'hi ha amb equilibris múltiples. El que no hi ha són jocs sense equilibris de Nash. Nash va demostrar que, si es preveu la possibilitat que els jugadors utilitzin estratègies mixtes (estratègies probabilístiques), tot joc té almenys un equilibri. Aquest resultat és molt important, ja que garan teix que la teoria de jocs és capaç de determinar una solució racional per a tot joc possible en forma normal.

En aquest mòdul es dóna força importància no solament als problemes de càlcul que sorgeixen en analitzar els jocs en forma normal, sinó també als fonaments conceptuals i a la interpretació de l'equilibri de Nash i de les estratègies mixtes.

Objectius

El principal objectiu d'aquest mòdul consisteix a familiaritzar-se amb la idea d'equilibri de Nash en els jocs en forma normal. Això és la base de la teoria de jocs. Per a això, heu d'aprendre el següent:

1. Saber caracteritzar un joc en forma normal.

2. Ser capaços de determinar si hi ha estratègies dominades en un joc.

3. Calcular els equilibris de Nash d'un joc, amb estratègies pures i amb estratègies mixtes.

4. Conèixer els jocs en forma normal més rellevants i més utilitzats en l'estudi de les relacions internacionals.

1. Caracterització d'un joc en forma normal

Comencem el recorregut per la teoria de jocs examinant la situació estratègica més senzilla possible, aquella en què no s'especifica la seqüència o ordre de jugades dels jugadors. Simplement se suposa que fan les seves jugades simultàniament o, si es prefereix, que cada jugador fa les seves eleccions sense coneixement de les que han fet els altres. Aquests jocs es poden representar habitualment amb una matriu de pagaments i reben el nom de ***jocs en forma normal*** o ***jocs en forma estratègica***. En un joc en forma normal, per tant, tenim diferents jugadors o agents amb accions interconnectades, en el sentit que el que faci cada un depèn de les expectatives que tingui sobre el que faran els altres, i cada un actua sense saber què han fet els altres.

Vegeu també

En el mòdul 4 s'analitzen els jocs en forma extensiva, en què es detalla la seqüència temporal de jugades.

Podem caracteritzar formalment un joc en forma normal a partir dels tres elements següents:

- Un conjunt de jugadors $i \in I$, $I = \{1, 2, ..., i, I\}$.
- Un conjunt d'estratègies S_i per a cada jugador i.
- Funcions d'utilitat (o funcions de pagaments) Von Neumann-Morgenstern $U_i(S)$ per a cada combinació $S = (S_1, ..., S_I)$ d'estratègies.

Bibliografia

Morrow, J. (1994). *Game theory for political scientists* (pàg. 69). Princeton: Princeton University Press.

Encara que no hi ha res que impedeixi que hi hagi més de dos jugadors, d'ara endavant ens limitarem al cas més senzill de jocs de dos jugadors (per tant, $I = 2$), la qual cosa simplifica notablement els càlculs i raonaments.

Una estratègia es defineix tècnicament com un pla d'acció complet. En un joc en forma normal, atès que les eleccions a la pràctica són simultànies, una estratègia coincideix amb el curs d'acció que adopta el jugador. Com veurem en el mòdul «Jocs en forma extensiva», aquesta definició d'estratègia s'aplica plenament quan hi ha una seqüència de jugades. De moment, n'hi ha prou d'entendre que una estratègia és un pla que especifica com cal comportar-se en el desenvolupament del joc.

1.1. Representació d'un joc en forma normal

En el quadre 1 tenim un joc de dos jugadors (els jugadors *J*1 i *J*2) representat amb una matriu de tres files i tres columnes. Cada fila representa una de les tres possibles estratègies de *J*1 (*U*, *M* o *D*) i el mateix succeeix amb les columnes respecte a *J*2 (*l*, *m* o *r*). Cada jugador té, per tant, tres estratègies diferents i n'ha d'escollir una sense saber què ha escollit l'altre. Seguirem la convenció de representar les estratègies de *J*1 amb lletres majúscules i les de *J*2 amb minúscules.

Quadre 1

Un exemple de joc en forma normal				
		*J*2		
		l	*m*	*r*
*J*1	*U*	4, 3	5, 1	6, 2
	M	2, 1	8, 4	3, 6
	D	3, 0	9, 6	3, 8

Els números que apareixen a l'interior de les cel·les són els pagaments dels jugadors, mesurats en utilitat Von Neumann-Morgenstern. El primer número de cada cel·la és el pagament que rep el jugador en files, *J*1, i el segon és el pagament que rep el jugador en columnes, *J*2. Els pagaments són, per tant, les conseqüències mesurades en utilitat de les diferents combinacions possibles d'estratègies. Així, podríem descriure els pagaments com s'il·lustra en aquests exemples:

- $U_{J1}(M, m) = 8$
- $U_{J2}(M, m) = 4$
- etc.

Malgrat el fet que en la definició anterior s'estableix que els pagaments del joc es mesuren com a utilitats Von Neumann-Morgenstern i, per tant, com a utilitats cardinals, en certs contextos molt senzills els pagaments es poden interpretar ordinalment, i reflectir tan sols l'ordre de preferència sobre les diferents combinacions d'estratègies possibles. Tanmateix, és convenient cenyir-se al supòsit de cardinalitat, ja que només així es poden calcular estratègies mixtes en el joc (vegeu «Equilibri de Nash amb estratègies mixtes»).

2. Criteris de dominació

Hi ha alguns jocs en què la configuració de pagaments és de tal naturalesa que la mateixa condició estratègica del joc pràcticament es dissol. Abans s'ha vist que la característica dels jocs és que representen situacions estratègiques, és a dir, situacions en què l'acció de cada un depèn de les expectatives que tingui sobre el que els altres faran. Però, excepcionalment, aquesta dependència es pot neutralitzar, de manera que un jugador (o estat) tingui bones raons per triar una estratègia enfront d'una altra al marge del que faci l'altre jugador (o estat). Tot i que formalment ens trobem en un context estratègic, perquè les conseqüències de les nostres accions depenen del que els altres facin, en realitat l'elecció del jugador és paramètrica, ja que el jugador tria sense tenir en consideració quina estratègia escollirà el contrincant. Això només és possible quan en escollir una certa estratègia sempre estem millor jugant-la que si n'escollim una altra, independentment de la que triï l'altre jugador. Quan el joc es pot jugar, diguem-ho així, paramètricament, la resolució és més aviat trivial.

A partir del joc del quadre 2, vegeu que *J*1 pot fer el raonament següent: faci el que faci *J*2, sempre estic millor escollint l'estratègia *D* que l'estratègia *U*. Si *J*2 escull *l*, llavors, si jo faig *U*, obtinc –1, però si faig *D* obtinc 0. Si *J*2 escull *r*, llavors, si faig *U*, obtinc 2, mentre que, si faig *D* obtinc 3. Atès que 0 és millor que –1 i 3 és millor que 2, faci el que faci *J*2 em compensa sempre escollir *D*. Per tant, diem que per a *J*1 l'estratègia *D* domina l'estratègia *U*. *J*1, a l'hora de fer la seva elecció d'estratègies, no té en compte què pugui fer *J*2, ja que faci el que faci ell està millor amb *D* que amb *U*. En canvi, *J*2 no té cap estratègia dominant: *l* li proporciona un pagament més alt que *r* si *J*1 tria *U*, però, si *J*1 tria *Dr* produeix més bon pagament que *l*.

Quadre 2

Un exemple de joc amb dominació			
		***J*2**	
		l	***r***
***J*1**	***U***	–1, 3	2, 1
	D	0, 2	3, 4

En aquest joc, tot i que *J*2 no té una estratègia *incondicionalment* millor, sap, per l'anàlisi del joc, que *J*1 sempre escollirà *D* tenint en compte que *D* domina

U. Per tant, està segur que *J*1 escollirà *D* si suposa que *J*1 és racional. Sabent això, l'elecció de *J*2 també es torna paramètrica, en el sentit que es limita a escollir entre els pagaments de 2 (si fa *l*) i 4 (si fa *r*). Com que 4 és millor 2, escollirà *r*. *J*1 jugarà *D*, *J*2 jugarà *r*i els pagaments per a cada un seran 3 i 4, respectivament. Hem pogut «resoldre» el joc gràcies al fet que l'elecció de cada jugador era, en última instància, paramètrica. Si els jugadors són racionals, la predicció és que jugaran les estratègies *D*, *r*.

2.1. Tipus de dominació

Ara podem definir amb una mica més de precisió què vol dir que una estratègia en domina una altra. S'han de distingir dos tipus de dominació:

1) La forta

Comencem per la definició de la dominació forta prenent com a referència, en la notació, *J*1, tot i que això, òbviament, és irrellevant:

Una estratègia S_1 domina fortament una altra estratègia S_2 si, i només si,

$$U_{J1}(S_1, s_j) > U_{J1}(S_2, s_j), \ \forall s_j$$

Amb paraules: a partir de qualsevol estratègia de *J*2, S_1 domina fortament S_2 si S_1 sempre produeix més utilitat que S_2. En el joc del quadre 2, *D* domina fortament *U* perquè

$$U_{J1}(D, \ I) > U_{J1}(U, \ I) y U_{J1}(D, \ r) > U_{J1}(U, \ r)$$

2) La feble

La definició de dominació feble és una mica menys exigent:

Una estratègia S_1 en domina feblement una altra de S_2 si, i només si,

$$U_{J1}(S_1, \ s_j) \geq U_{J1}(S_2, \ s_j), \ \forall s_j$$

i

$$U_{J1}(S_1, \ s_j) > U_{J1}(S_2, \ s_j), \ \text{per almenys una } s_j$$

Amb paraules: S_1 domina feblement S_2 si en tots els casos S_1 proporciona almenys tanta utilitat com S_2 i en com a mínim un cas S_1 proporciona més utilitat que S_2. Dit d'una altra manera, una estratègia en domina feblement una altra si totes dues proporcionen la mateixa utilitat a partir de les estratègies de l'altre jugador però almenys per a una estratègia de l'altre jugador succeeix que la primera estratègia és millor que la segona. En el joc del quadre 1 es pot comprovar que *D* domina feblement *M*, ja que, quan *J*2 juga, *r*, *D* i *M* proporcionen exactament la mateixa utilitat, però, quan *J*2 juga *l* o *m*, *D* és millor que *M*.

2.2. Eliminació d'estratègies dominades Dominació repetida

Quan en un joc ens trobem amb estratègies dominades, tant de manera forta com feble, les podem eliminar, ja que un jugador racional mai no tindrà bones raons per triar estratègies dominades. De vegades podem arribar a una solució única del joc mitjançant aquest procediment d'eliminació successiva d'estratègies dominades. Veurem com funciona aquest procediment en el cas del joc del quadre 1. És fàcil adonar-se que *r* domina fortament *m*. Per tant, podem eliminar *m* i veure què succeeix en el joc resultant, que es representa en el quadre 3.

Quadre 3

El joc del quadre 1 després d'haver eliminat *m*			
		***J*2**	
		l	***r***
***J*1**	***U***	4, 3	6, 2
	M	2, 1	3, 6
	D	3, 0	3, 8

Una vegada eliminat *m*, és evident que ara l'estratègia *U* domina fortament l'estratègia *M*. Per tant, eliminem *M*, amb la seguretat que, si *J*1 és racional, mai no jugaria *M*. El joc així modificat apareix en el quadre 4.

Quadre 4

El joc del quadre 1 després d'haver eliminat *m* i *M*			
		***J*2**	
		l	***r***
***J*1**	***U***	4, 3	6, 2
	D	3, 0	3, 8

En aquest joc reduït, encara és possible anar més lluny. Ara es pot eliminar *D*, ja que *U* domina fortament *D*. El resultat apareix en el quadre 5.

Quadre 5

El joc del quadre 1 després d'haver eliminat *m, M* i *D*			
		***J*2**	
		l	***r***
***J*1**	***U***	4, 3	6, 2

Arribats a aquest punt, la resolució del joc és trivial: ateses les dues estratègies de *J*2, salta a la vista immediatament que *l* domina fortament *r*, per la qual cosa el resultat final o solució del joc serà la combinació d'estratègies (*U*, *l*), amb pagaments de 4 per a *J*1 i 3 per a *J*2.

Quan en un joc hi ha diferents estratègies dominades, s'arriba al mateix resultat final independentment de per on comencem el procés d'eliminació.

Aquest procés de recerca per eliminació d'estratègies dominades de la solució del joc s'anomena ***dominació repetida*** (*iterated domination*). Es tracta d'un procés mecànic que funciona únicament perquè el joc, quan hi ha estratègies dominades, pot arribar a perdre la condició estratègica i transformar-se en un problema d'elecció paramètrica. Naturalment, no tots els jocs es poden resoldre així.

3. Equilibri de Nash

Més enllà de les limitacions que s'acaben d'assenyalar sobre el procediment de dominació repetida, el cas és que és aplicable de manera restringida, ja que en molts jocs no hi ha dominació (forta o feble) d'estratègies. En aquest cas, com es juga el joc? Què es considera una solució raonable?

La resposta més general a aquestes qüestions va ser proporcionada pel matemàtic John Nash, que el 1951 va publicar un article fonamental en què generalitzava la idea d'equilibri que havien proposat els fundadors de la teoria de jocs, Von Neumann i Morgenstern, per a un àmbit molt concret, els jocs de suma zero. Com ja es va aclarir en la introducció, aquí no s'explica res sobre els jocs de suma zero, perquè rarament es troben en la realitat situacions en què els guanys d'un jugador siguin les pèrdues de l'altre, i viceversa.

Nash va definir la seva famosa noció d'equilibri a partir de la idea de «**resposta òptima**» o «**millor resposta possible**» (***best reply***).

Una resposta òptima es defineix com l'estratègia que proporciona més bons resultats que totes les altres possibles davant d'una determinada estratègia del rival.

Això es pot formalitzar fàcilment. Si representem amb S el conjunt d'estratègies de $J1$ sense incloure una estratègia concreta S_i, podem dir que S_i és una resposta òptima quan

$$U_{J1}(S_i, s_j) \geq U_{J1}(S, s_j)$$

Amb paraules

S_i és la millor resposta possible de $J1$ a l'estratègia s_j de $J2$ quan S_i proporciona més utilitat a $J1$ que qualsevol altra estratègia.

Doncs bé, un equilibri de Nash es defineix simplement com la combinació d'estratègies de manera que cada una és una resposta òptima a l'altra.

Com que tots els jugadors utilitzen les seves respostes òptimes, cap d'ells no té cap raó per a canviar d'estratègia: si un jugador utilitza una estratègia que no sigui una resposta òptima, serà pitjor. Atès que els jugadors no tenen raons per a canviar d'estratègia, es diu que aquesta combinació d'estratègies està en equilibri, és a dir, que és estable.

Formalment, un parell d'estratègies (S_i, s_j) és un equilibri de Nash quan es compleix la doble condició que S_i és la resposta òptima a s_j i que s_j és la resposta òptima a S_i:

$$U_{J1}(S_i, s_j) \geq U_{J1}(S, s_j)$$
$$U_{J2}(S_i, s_j) \geq U_{J2}(S_i, s)$$

En analitzar un joc en forma normal, busquem totes les combinacions d'estratègies que siguin equilibris de Nash. Hi ha jocs amb un únic equilibri de Nash, amb múltiples equilibris de Nash i sense cap equilibri de Nash (encara que, com s'explica en la pròxima secció, sempre hi ha almenys un equilibri de Nash amb estratègies mixtes).

3.1. Exemple de joc amb equilibri de Nash

En el joc del quadre 7, *J*1 té tres estratègies i *J*2 dues. Això dóna lloc a sis resultats possibles. Com podem determinar quins d'aquests resultats representen una combinació d'estratègies que sigui un equilibri de Nash? S'ha de comprovar si les estratègies són simultàniament respostes òptimes. Comencem pel primer parell, (S_1, s_1): s_1 és una resposta òptima a S_1? La resposta és afirmativa, ja que si *J*1 juga S_1, *J*2 no pot millorar canviant de s_1 a s_2; per tant, segons la definició anterior, es compleix la condició de resposta òptima. Tanmateix, és evident que S_1 no és la resposta òptima a s_1, ja que *J*1 pot estar millor canviant a S_2. Per tant, (S_1, s_1) no pot ser un equilibri de Nash. Continuem amb el procés de recerca de l'equilibri. Considerem ara el parell (S_1, s_2). Es torna a complir que s_2 és la millor resposta a S_1. Però ara, a més, és el cas que S_1 és la resposta òptima a s_2. Per tant, el parell (S_1, s_2) sí que és un equilibri de Nash. Fixeu-vos que el que és rellevant no són els pagaments, perquè són idèntics en aquests dos primers casos, sinó el criteri de resposta òptima.

Quadre 6

		*J*2	
		s_1	s_2
*J*1	S_1	1, 1	1, 1
	S_2	2, –1	–10, –2
	S_3	–1, –2	0, –1

Tanmateix, l'anàlisi no acaba aquí: s'han de continuar calculant respostes òptimes fins a esgotar totes les combinacions d'estratègies possibles. (S_2, s_1) és un equilibri de Nash? De moment, S_2 és la millor resposta possible a s_1, segons hem vist abans. I s_1 és al seu torn la resposta òptima a S_2, ja que, encara que doni utilitat negativa a *J*2, *J*2 està millor jugant s_1 contra S_2 que s_2 contra S_2. Hem identificat, per tant, un segon equilibri de Nash dins d'aquest joc. (S_2, s_2) és un equilibri de Nash? Evidentment no, ja que acabem de dir que la millor resposta de *J*2 a S_2 és s_1, no s_2. I (S_3, s_1)? Tampoc, ja que la resposta òptima de *J*1 a s_1 és S_2, no S_3. Finalment, és (S_3, s_2) un equilibri de Nash? No, perquè sabem per raonaments anteriors que la resposta òptima a s_2 és S_1 i no S_3. En suma: el joc del quadre 7 té dos equilibris de Nash: (S_1, s_2) i (S_2, s_1).

3.2. Exemple de joc sense equilibri de Nash

Aquest mateix procés de recerca s'aplica en qualsevol altre joc en forma normal, tant si té un, múltiples o cap equilibri de Nash. És especialment interessant el cas de jocs sense equilibri de Nash, com el que apareix en el quadre 8. Breument: la resposta òptima de *J*2 a S_1 és s_2, la resposta òptima de *J*1 a s_2 és S_2, la resposta òptima de *J*2 a S_2 és s_1, la resposta òptima de *J1* a s_1 és S_1... i tornem a començar. No hi ha una combinació d'estratègies que siguin simultàniament respostes òptimes.

Quadre 7

		J2	
		s_1	s_2
*J*1	S_1	1, 1	0, 4
	S_2	–1, 3	3, –5

L'absència d'equilibris de Nash es produeix quan no hi ha estratègies dominades per cap dels dos jugadors. És evident que la teoria de jocs no es pot conformar de constatar l'absència d'equilibri, ja que en aquest cas representaria reconèixer que la teoria és incapaç de predir com actuaran els agents racionals en un joc amb aquestes característiques. Amb altres paraules, la teoria de jocs té el compromís de determinar en joc possible què compta com a elecció racional. Per a poder resoldre el problema dels jocs sense equilibri, Nash va demostrar que en realitat tot joc sempre té almenys un equilibri de Nash si s'hi admeten estratègies mixtes. En la pròxima secció s'explica què és una estratègia mixta i com es pot interpretar.

4. Equilibri de Nash amb estratègies mixtes

La idea d'estratègia mixta no és gens clara. És més fàcil aprendre a manejar estratègies mixtes que entendre realment què són.

Una estratègia mixta és una distribució de probabilitat sobre el conjunt d'estratègies pures. Les estratègies pures són les que que s'han previst fins a aquest moment, és a dir, estratègies que consisteixen a escollir un curs d'acció determinat.

Les estratègies mixtes inclouen diferents cursos d'acció (diferents estratègies pures), cada una amb una probabilitat determinada. Quan una estratègia mix ta és una combinació probabilística d'estratègies pures, es pot dir que les estratègies mixtes *expandeixen* el conjunt d'estratègies entre les quals pot escollir l'agent. Gràcies a aquest augment del conjunt d'estratègies possibles, podrem trobar equilibris de Nash en jocs en què, en examinar-los tenint únicament estratègies pures, no semblava que hi hagués aquests equilibris.

4.1. El joc de parells o senars

Comencem per un joc molt senzill, el joc de parells o senars. Cada jugador treu amb una mà tants dits com vulgui, de 0 a 5, i després se sumen. Un jugador guanya quan la suma dels dits dels dos jugadors dóna un número parell i l'altre guanya quan és senar. Suposem que el jugador en files guanya si la suma de dits és parell i perd si és senar, i al revés per al jugador en columnes. Sortirà un número parell quan tots dos treguin quantitats parelles o senars, i sortirà senar quan un tregui parells i l'altre senars.

Quadre 8

El joc de parells i senars			
		*J*2 (senars)	
		Parells	Senars
*J*1 (parells)	Parells	1, –1	–1, 1
	Senars	–1, 1	1, –1

Evidentment, aquest joc no té un equilibri de Nash amb estratègies pures, que són o bé treure un nombre de dits parell o bé treure'n un de senar. Si *J*1 espera que *J*2 tregui parells, *J*1 traurà parells, però en aquest cas *J*2 preferirà treure senars, i així successivament. Per a sortir de l'embolic, podem considerar què passa si ampliem el ventall d'estratègies amb estratègies mixtes, és a dir, que cada jugador triï una combinació d'estratègies pures per la qual tria amb certa probabilitat treure parells i, amb la resta de probabilitat, treure senars.

Abans d'examinar la qüestió de com s'estableixen aquestes probabilitats, veurem com operen en la pràctica. Suposem que *J*1 juga parells la meitat de les vegades i senars l'altra meitat o, si es prefereix, que *J*1 tria parells amb una probabilitat de 0,5 i senars amb una probabilitat també de 0,5. En aquest cas, quins pagaments pot esperar *J*2 amb les seves estratègies pures? Quins resultats traurà *J*2 jugant davant de l'estratègia mixta de *J*1?

Si J2 juga parells, els pagaments esperats per a *J*2 a partir de l'estratègia mixta de *J*1 seran els següents:

$$UE_{J2}(\text{parells}) = {}^{1}\!/_{2}(-1) + {}^{1}\!/_{2}(1) = 0$$

És a dir, si *J*1 juga parells i *J*2 juga parells, el resultat serà parells (-1 d'utilitat per a *J*2) i, si *J*1 juga senars i *J*2 juga parells, el resultat serà senars (1 d'utilitat per a *J*2). Però *J*2 no sap què farà realment *J*1, només sap que jugarà amb probabilitat

½ cada estratègia. Per tant, els resultats esperats s'han de ponderar per les probabilitats corresponents. La utilitat esperada és, com es veu en la fórmula, 0.

Si *J*2 juga senars, els pagaments esperats de *J*2 a partir de l'estratègia mixta de

*J*1 seran els següents:

$$UE_{J2}(\text{senars}) = {}^{1}\!/_{2}(1) + {}^{1}\!/_{2}(-1) = 0$$

La utilitat esperada torna a ser 0. Després, si *J*1 juga la seva estratègia mixta, llavors, faci el que faci *J*2, sempre traurà 0. Però, si l'elecció de les estratègies pures de *J*2 no introdueix cap canvi en el resultat final, això significa que *J*2 és indiferent entre les seves estratègies pures com a conseqüència de l'estratègia mixta de *J1*.

4.2. La combinació d'estratègies

El propòsit de les estratègies mixtes consisteix precisament a neutralitzar l'elecció d'estratègies pures del rival. El jugador que utilitza una estratègia mixta d'equilibri aconsegueix que el rival sigui indiferent entre les seves estratègies pures. Ara bé, si ho fan tots dos jugadors, és a dir, si tots dos juguen estratègies mixtes que neutralitzin l'elecció d'estratègies pures del rival, llavors cap dels dos jugadors no tindrà cap incentiu per a deixar de jugar la seva estratègia mixta i, per tant, ens trobarem en una situació d'equilibri de Nash, en què cada estratègia mixta és la resposta òptima a l'altra estratègia mixta. Aquest argument mereix una anàlisi una mica més detallada.

En l'exemple de parells i senars, el joc és simètric. Per tant, si l'estratègia mixta d'equilibri per a *J*1 consisteix a jugar parells amb probabilitat ½ i senars amb probabilitat ½, l'estratègia mixta de *J*2 serà idèntica (encara no sabem, tanmateix, com s'arriba a una estratègia mixta d'equilibri). Doncs bé, és fàcil demostrar que si *J*1 juga la seva estratègia mixta, qualsevol estratègia (pura o mixta) de *J*2 és una resposta òptima a l'estratègia mixta de *J*1. Ja hem vist que qualsevol estratègia pura de *J*2 li proporciona un pagament esperat de 0. Tan sols queda per confirmar que l'estratègia mixta de *J*2 enfront de l'estratègia mixta de *J*1 també dóna 0 a *J*2:

$$UE_{J2}(1/2\,\text{parells},\ 1/2\,\text{senars}) = 1/2[1/2(-1) + 1/2(1)] + 1/2[1/2(1) + 1/2(-1)] = 0$$

Les probabilitats de ½ que apareixen per davant dels claudàtors es refereixen a les probabilitats que *J*2 triï parells o senars, mentre que les probabilitats de ½ que apareixen dins dels claudàtors corresponen a l'estratègia mixta de *J*1. En qualsevol cas, el resultat torna a ser 0, la qual cosa demostra que l'estratègia mixta de *J*2 també és una resposta òptima de *J*2 a l'estratègia mixta de *J*1.

Sabent que qualsevol estratègia de *J*2 és una resposta òptima a l'estratègia mixta de *J*1, és un equilibri de Nash que *J*1 jugui la seva estratègia mixta i *J*2 esculli com a resposta òptima l'estratègia pura dels parells? La resposta és negativa. Si *J*1 està segur que *J*2 triarà parells, llavors *J*1 està millor si ell mateix escull parells que si juga la seva estratègia mixta. Per tant, la combinació d'estratègies de tots dos jugadors (1/2 parells, 1/2 senars), parells) no és un equilibri de Nash. El mateix es pot dir respecte a ((1/2 parells, 1/2 senars), senars): tampoc no és un equilibri de Nash, perquè la millor resposta possible de *J*1 a senars no és l'estratègia mixta, sinó senars. En canvi, la combinació d'estratègies ((1/2 parells, 1/2 senars), (1/2 parells, 1/2 senars)) sí que és un equilibri de Nash, perquè cap dels dos jugadors no té incentius per a canviar d'estratègia. Fixeu-vos que hi ha certa circularitat en l'argument: *J*2 pot recórrer en equilibri a una estratègia mixta perquè *J*1 està, amb la seva estratègia mixta, fent indiferent *J*2 entre les seves estratègies pures. I al seu torn *J*1 pot utilitzar en equilibri l'estratègia mixta perquè *J*2, amb la seva estratègia mixta, està fent indiferent *J*1 entre les seves estratègies pures.

> Davant d'una estratègia mixta, qualsevol estratègia possible (pura o mixta) és una resposta òptima. Però una estratègia mixta només és una resposta òptima davant d'una estratègia mixta o una altra. Per tant, l'equilibri de Nash amb estratègies mixtes només es produeix quan tots dos les utilitzen.

En principi, sembla que la idea d'estratègia mixta representa que els agents prenen decisions per algun mecanisme aleatori (si l'estratègia mixta és fer escollir una estratègia pura amb probabilitat ½ i l'altra amb la ½ restant, n'hi ha prou de llançar una moneda a l'aire). Això pot semblar molt poc realista, ja que gairebé mai no prenem les decisions probabilísticament, sobretot quan el tema és una mica important. Amb tot, hi ha alguns casos en què la interpretació literal de l'estratègia mixta sí que té sentit: com quan el Ministeri d'Hisenda fa probabilísticament inspeccions fiscals en el joc entre el Ministeri i els ciutadans, o quan es fan controls aleatoris de substàncies prohibides als esportistes. Però què succeeix quan no és procedent per a un mecanisme real d'aleatorització? Això vol dir que les estratègies mixtes són només un artifici matemàtic per a garantir l'existència d'equilibris de Nash en tots els jocs possibles?

Des d'una interpretació no racional, les probabilitats d'una estratègia mixta es poden entendre simplement com les freqüències amb què en el passat s'han escollit les estratègies pures. Així, les estratègies mixtes solament serien regularitats estocàstiques.

Quan la teoria de jocs s'aplica en biologia, de vegades es considera que l'estratègia mixta que utilitza una espècie respon a un cas de «polimorfisme»: un 30% dels membres de l'espècie tenen una característica que els fa escollir una estratègia pura, mentre que el 70% restant té una altra característica que els fa escollir l'altra estratègia pura. En aquestes circumstàncies, un animal d'una altra espècie sap que en jugar amb un membre d'aquesta espècie s'enfronta a una estratègia mixta 0,3 ; 0,7.

Bibliografia

Maynard Smith, J. (1982). *Evolution and the Theory of Games* (pàg. 16). Cambridge: Cambridge University Press.

Tanmateix, la interpretació més interessant no obliga a abandonar el supòsit de racionalitat, però exigeix considerar que no hi ha informació completa en el joc. La idea consisteix en el fet que *J*1 no està del tot segur sobre la naturalesa dels pagaments de *J*2. Si els pagaments de *J*2 tenen certes característiques, llavors *J*2 actua d'una manera i, si en tenen d'altres, actua d'una altra manera. Sens dubte, *J*2 coneix els seus pagaments i escull una estratègia pura. Però, per a *J*1, que no té tota la informació necessària sobre els autèntics pagaments de *J*2, l'elecció d'una estratègia pura per part de *J*2 se li presenta com una estratègia mixta, com una estratègia probabilística, ja que amb certa probabilitat els pagaments seran els uns amb la seva estratègia pura corresponent, i amb la resta de probabilitat els pagaments seran d'altres i *J*2 escollirà una altra estratègia pura. Aquí la idea d'estratègia mixta es tradueix en incertesa per part d'un jugador sobre els vertaders pagaments del rival.

Igualment, es pot considerar que l'elecció d'una estratègia pura o una altra depèn d'informació privada rellevant que només coneix el jugador, però no el seu rival. Tot i que el jugador jugui escollint estratègies pures, el seu rival, per no tenir aquesta informació privada, actuarà com si s'enfrontés a una estratègia mixta.

Exemple 1

Suposem, respecte al joc del quadre 7, en què hem calculat les estratègies mixtes, que en realitat no hi ha informació completa. *J*1 no està segur de quin dels dos jocs que apareixen en el quadre 11 està jugant. En el primer, *J*2 té una estratègia pura dominant, escollir primera columna; en el segon, l'estratègia dominant de *J*2 és escollir la segona columna.

Quadre 9

		*J*2	
		s_1	s_2
*J*1	S_1	1, 5	0, 4
	S_2	–1, 3	3, –5

		*J*2	
		s_1	s_2
*J*1	S_1	1, 1	0, 4
	S_2	–1, 3	3, 5

Si la creença de *J*1 d'estar jugant el primer joc és de 3/5 i la d'estar jugant el segon, de 2/5, llavors *J*1, encara que sàpiga que *J*2 tria en cada cas una estratègia pura, a la pràctica s'enfronta a una estratègia mixta que el fa indiferent entre les estratègies pures.

No cal, per tant, considerar que una estratègia mixta implica un mecanisme real d'aleatorització: pot ser també un reflex d'una incertesa subjacent que no s'ha reflectit explícitament en el joc. D'aquesta manera, s'aconsegueix una interpretació més plausible d'aquestes estratègies.

Exemple 2

Un altre exemple (pres de Kydd, 2015)

Al juny de 1944 els aliats estaven preparant la invasió de la França ocupada pels nazis. Hi havia tres possibilitats per al desembarcament: Calais, Normandia i Bretanya. Els dos bàndols havien de decidir on situar la majoria de les seves forces militars. Si els aliats desembarcaven en una zona defensada pels nazis, perdien; si els aliats desembarcaven en una zona no defensada pels nazis, guanyaven. Calais era la zona més propera a la Gran Bretanya (des d'on s'organitzaria i partiria tota la logística de la invasió); en segon lloc estava Normandia i en tercer lloc (el més llunyà), estava Bretanya. A causa d'aquestes distàncies relatives, la possibilitat d'invasió a Normandia o a Bretanya suposava uns costos afegits que la possibilitat d'un atac a Calais no tenia. Aquests costos eren tals que $c_n < c_b$. La situació pot resumir-se en el quadre 10:

Quadre 10. El dia D

		Jugador 2 (Nazis)		
Jugador 1 (Aliats)		Defensar Calais	Defensar Normandia	Defensar Bretanya
	Atacar Calais (c)	0,1	1,0	1,0
	Atacar Normandia (n)	$1 - c_n$, 0	$-c_n$, 1	$1 - c_n$, 0
	Atacar Bretanya (b)	$1 - c_b$, 0	$1 - c_b$, 0	$-c_b$, 1

Per calcular l'equilibri amb estratègies mixtes, assignem la probabilitat p1 a la possibilitat que el jugador 1 ataqui en algun lloc en concret i la probabilitat p2 que aquest lloc estigui defensat pel jugador 2.

Les estratègies mixtes del jugador 1 (els aliats) han de fer que al jugador 2 li sigui indiferent defensar qualsevol de les tres localitzacions. Per tant:

Defensar Calais = $p1(c)1 + p1(n)(0) + p1(b)(0) =$

Defensar Normandia = $p1(c)(0) + p1(n)1 + p1(b)(0) =$

Defensar la Bretanya = $p1(c)(0) + p1(n)(0) + p1(b)1$

Esto implica que

$p1(c) = p1(n) = p1(b) = 1/3$

per la qual cosa el jugador 1 hauria de poder atacar les tres zones amb una mateixa probabilitat (o fer creure als nazis aquesta possibilitat). Per tant, per als aliats era fonamental que els nazis es preguntessin per on es realitzaria la invasió i que no tinguessin informació segura sobre la seva localització exacta. D'aquí la intensa campanya de desinformació que els aliats van desenvolupar mitjançant els seus espies: volien mantenir costi el que costi la incògnita del lloc del desembarcament. Aquesta campanya va produir el seu efecte i va confondre els nazis fins a tal punt que, fins i tot després del desembarcament a Normandia, aquests seguien creient que es tractava d'un «cimbell» per «despistar-los» i, en conseqüència, van mantenir el gruix de les seves forces defensant Calais (el lloc menys costós, més «natural», per a la invasió a causa de la seva proximitat més gran amb Gran Bretanya) amb la intenció d'estar preparats per repel·lir el que pensaven hauria de ser la invasió «principal».

Per la seva banda, les estratègies mixtes de defensa del jugador 2 han de fer que al jugador 1 li sigui indiferent atacar qualsevol dels tres emplaçaments. Per tant:

Atacar Calais = $p2(c)(0) + \mathrm{p2(n)}1 + p2(b)1$

Atacar Normandia = $p2(c)1 - c_n + \mathrm{p2(n)}(0 - c_n) + p2(b)1 - c_n$

Atacar Bretanya = $p2(c)1 - c_b + \mathrm{p2(n)}1 - c_b + p2(b)(0 - c_b)$

O el que és el mateix

$p2(c)(0) + p2(n)1 + p2(b)1 = [p2(c)1 + p2(n)(0) + p2(b)1] - c_n = [p2(c)1 + p2(n)1 + p2(b)(0] - c_b$

Que es converteix en

$p2(n) + p2(b) = [p2(c) + p2(b)] - c_n = [p2(c) + p2(n)] - c_b$

Com que les probabilitats han de sumar u, $p2(c) + p2(b) + p2(n) = 1$. Aïllant (per exemple) $p2(b)$ tenim que

$p2(b) = 1 - p2(c) - p2(n)$. A l'equació original substituïm el terme $p2(b)$ per $1 - p2(c) - p2(n)$ per obtenir

$p2(n) + 1 - p2(c) - p2(n) = [p2(c) + 1 - p2(c) - p2(n)] - c_n = [p2(c) + p2(n)] - c_b$

Una vegada simplificada obtenim

$1 - p2(c) = [1 - p2(n)] - c_n = [p2(c) + p2(n)] - c_b$

Per definició sabem que $p2(n) = p2(c) - c_n$. Ara en la igualtat entre el terme 1 (atacar Calais) i el terme 2 (atacar Normandia) $p2(n)$ per $p2(c) - c_n$ per obtenir

$1 - p2(c) = [p2(c) + p2(c) - c_n] - c_b$. Reordenant,

$1 + c_n + c_b = p2(c) + p2(c) + p2(c)$, o el que és el mateix, $p2(c) = 1 + c_n + c_b / 3$

Ara en la igualtat entre el terme 1 (atacar Calais) i el terme 2 (atacar Normandia)

$1 - p2(c) = [1 - p2(n)] - c_n$ substituïm $p2(c)$ per $1 + c_n + c_b / 3$. D'aquesta forma obtenim

$1 - [1 + c_n + c_b / 3] = 1 - p2(n) - c_n$. Aïllant $p2(n)$ tenim

$p2(n) = 1 - c_n - 1 + [1 + c_n + c_b / 3]$, o el que és el mateix $p2(n) = [1 + c_n + c_b / 3] - c_n$.

Finalment, a la igualtat entre els termes 2 (atacar Normandia) i 3 (atacar Bretanya),

$[\, p2(c) + p2(b)] - c_n = [\, p2(c) + p2(n)] - c_b$ substituïm $p2(n)$ por $p2(c) - c_n$ donat que sabem que $p2(n) = p2(c) - c_n$. Así

$[\, p2(c) + p2(b)] - c_n = [\, p2(c) + p2(c) - c_n] - c_b$. Reordenant obtenim

$p(b) - c_n + c_n = p2(c) + p2(c) - p2(c) - c_b$

O, el que és el mateix, $p(b) = p2(c) - c_b$. Ara només queda substituir $p2(c)$ pel valor que ja coneixem i s'obté

$p2(b) = [1 + c_n + c_b \,/\, 3] - c_b$

En resum,

$p2(c) = 1 + c_n + c_b \,/\, 3$

$p2(n) = [1 + c_n + c_b \,/\, 3] - c_n$

$p2(b) = [1 + c_n + c_b \,/\, 3] - c_b$

D'aquestes probabilitats, es pot inferir fàcilment que $p2(c) > p2(n) > p2(b)$. Per tant, per mantenir els aliats indiferents entre les tres possibilitats d'atac, els nazis havien de posar més obstinació a defensar Calais que Normandia, i més obstinació a defensar Normandia que Bretanya. Això és el que va passar realment: els nazis van concentrar el gruix de les seves forces defensives a Calais, mentre que el desembarcament a Normandia no anava més enllà de ser una simple «trampa».

Aquest tipus de jocs que analitzen on situar recursos defensius davant possibles atacs enemics (coneguts com a «jocs del Coronel Blotto») han estat molt utilitzats en contextos militars i també en l'àmbit de la lluita antiterrorista.

5. La interpretació de l'equilibri de Nash

Ara que sabem que tot joc en forma normal té almenys un equilibri de Nash si s'admeten estratègies mixtes, convé aprofundir una mica més en la idea d'equilibri que Nash va proposar. De moment, és important subratllar que la noció d'equilibri de Nash no es basa en cap teoria sobre com els jugadors assoleixen l'equilibri. L'única cosa que estableix la idea d'equilibri de Nash és que si els jugadors trien estratègies que conjuntament són les respostes òptimes, llavors cap dels jugadors no tindrà incentius per a canviar d'estratègia. Però no diu res sobre com els jugadors arriben a seleccionar estratègies que són conjuntament respostes òptimes les unes respecte a les altres.

En l'article original de 1950 en què Nash presentava la seva idea d'equilibri, no deia res sobre com s'assoleix.

Tanmateix, en la tesi doctoral que Nash havia escrit abans i de la qual va treure el seu article, sí que va incloure algunes observacions sobre equilibris. Concretament, va proposar dos mecanismes diferents:

Bibliografia

Nash, J.F. (1996). *Essays on Game Theory* (pàg. 32-33). Cheltenham: Edward Elgar.

a) Mecanisme que inclou la racionalitat

> D'acord amb el primer mecanisme, l'equilibri d'un joc coincideix amb la predicció racional de com s'hauria de jugar. Els jugadors racionals són capaços d'analitzar la naturalesa del joc, establir què es considera com a solució racional i anticipar que, atesa la racionalitat del rival, la millor opció possible és jugar per a aconseguir l'equilibri de Nash. Això requereix suposar que els agents són racionals, tenen tota la informació rellevant i són capaços de derivar la solució del joc fins i tot si no coneixen el concepte d'equilibri de Nash. Com diu el mateix Nash, «es tracta d'una interpretació racionalista i idealitzadora».

b) Mecanisme que no inclou la racionalitat

> D'acord amb el segon mecanisme, els jugadors no es caracteritzen per la racionalitat, no cal suposar que entenen l'estructura d'incentius del joc o que fan càlculs mentals sobre com s'ha de jugar. Simplement, acumulen experiència sobre quines estratègies pures els proporcionen més avantatges. Es tracta, per tant, d'un procés d'assaig i error, d'aprenentatge progressiu sobre les conseqüències d'escollir una estratègia o l'altra.

Mentre que el primer mecanisme, el racionalista, és compatible amb el supò sit que el joc en forma normal es juga una sola vegada, el segon, el de l'aprenentatge, només té sentit si entenem que el joc es juga una vegada i una altra, de manera que els resultats del passat permeten que tingui lloc l'aprenentatge o ajustament gradual.

Aquí no examinarem els arguments a favor i en contra de cada una d'aquestes interpretacions de l'equilibri de Nash, ja que això ens portaria a una discussió metodològica massa llarga. Quan apareguin a partir d'ara equilibris de Nash no es faran comentaris sobre com s'han d'entendre, malgrat que, en consonància amb el que s'ha explicat en el mòdul «El principi de racionalitat i la teoria de la utilitat», la interpretació natural serà en molts casos la racionalista, és a dir, que els agents són capaços d'entendre l'estructura del joc i anticipar la solució racional, la que estableix l'equilibri de Nash.

Resumint aquesta breu exploració dels fonaments de l'equilibri de Nash, es pot dir que hi ha dues interpretacions de l'equilibri: una no racionalista, basada en l'aprenentatge, que exigeix que el joc es repeteixi al llarg del temps, i una altra racionalista, compatible amb la possibilitat que el joc es jugui una sola vegada, però que només resulta convincent quan l'equilibri de Nash coincideix amb la manera «natural» de jugar el joc, la qual cosa passa sovint però no en tots els casos (per exemple, no succeeix quan hi ha equilibris múltiples). De tota manera, la idea mateixa d'equilibri de Nash és neutral respecte al procés de consecució de l'equilibri que es postuli.

6. Els problemes de la cooperació amb jocs en forma normal

Bona part de les aplicacions dels jocs en forma normal tenen a veure amb el problema de la cooperació. Aquest problema sorgeix sempre que per a aconseguir uns guanys cal que els actors (dos o més) cooperin entre si. En certa manera, es poden distingir dos àmbits:

- l'àmbit del que és bo per a tots i
- l'àmbit del que és bo per a cadascú.

Si tots dos coincideixen, si el que és bo per a tots també ho és per a cadascú, tots tindran incentius per a cooperar. Però el que és més habitual en la societat és que l'àmbit col·lectiu i l'individual no coincideixin completament. En aquests casos, sorgeixen dilemes molt profunds sobre què exigeix la racionalitat dels individus.

La **teoria de l'acció col·lectiva**, que analitza de manera exhaustiva el problema de la cooperació, s'ha centrat en diversos jocs en forma normal que representen les possibles modulacions entre l'àmbit del que és bo per a tots i el del que és bo per a cadascú.

6.1. Representació d'un joc de cooperació genèric

Podem representar un joc genèric de la cooperació per a dos jugadors, com apareix en el quadre 11. Cada jugador (o estat) té dues estratègies, cooperar (*C*) o defraudar (*D*). Els pagaments estan definits amb lletres, no amb números. Així, si tots dos cooperen, el resultat és una recompensa per a cada un (*R*). Si cap no coopera, tots dos són penalitzats (*P*). Si un defrauda i l'altre coopera, el primer rep el pagament de la temptació d'enganyar l'altre (*T*) i el segon, el pagament de ser el *sucker* (babau, *S*). El que hi ha en el quadre 11 no és tant un joc com una estructura genèrica d'interacció que, depenent de com definim l'ordre dels pagaments, dóna lloc a uns jocs o a uns altres. Aquí nomes considerarem jocs simètrics, és a dir, aquells en què els ordres de preferències dels jugadors sobre les conseqüències siguin idèntics.

Quadre 11

L'estructura del joc de la cooperació			
		J2	
		C	D
J1	C	R, R	S, T
	D	T, S	P, P

R = recompensa
T = temptació
P = penalització
S = *sucker*

6.2. Tipus de jocs de cooperació

Es poden definir almenys quatre jocs possibles que tinguin rellevància directa per al problema de la cooperació. El que distingeix cada joc, segons es reflecteix en el quadre 12, són diferents ordres de preferències.

Quadre 12

Quatre jocs de cooperació	
Ordre de preferències	**Joc resultant**
$T > R > P > S$	Dilema del presoner
$R > T > P > S$	La seguretat
$T > R > S > P$	El gallina
$R > T > S > P$	Privilegiat

6.2.1. Joc privilegiat

El joc més favorable per a la cooperació, en què no es produeix cap tensió entre els àmbits col·lectiu i individual, és el que de vegades s'anomena *el joc privilegiat*. Des del punt de vista del col·lectiu, el millor resultat es produeix amb la cooperació mútua; des del punt de vista individual, cooperant. Hi ha un únic equilibri de Nash, amb estratègies pures: la cooperació mútua, ja que cooperar domina fortament defraudar. En el quadre 13 s'ofereix un exemple en què s'han donat arbitràriament valors numèrics a les preferències. És fàcil advertir que l'únic equilibri de Nash és (C, C).

Quadre 13

El joc privilegiat			
		J2	
		C	*D*
J1	*C*	3, 3	1, 2
	D	2, 1	0, 0

6.2.2. Dilema del presoner

En l'extrem oposat se situa el famós dilema del presoner (DP). Rep aquest nom per la història que es va inventar originalment per a donar contingut concret a l'estructura d'interacció que representa. En un DP es produeix una contraposició total entre l'àmbit individual i el col·lectiu. El que és bo per al grup és negatiu per a mi i a la inversa. Malgrat el fet que hi ha una possibilitat que tot el grup estigui millor si tots cooperen, la racionalitat els condueix a no cooperar amb l'altre i s'acaba en un resultat subòptim. Si s'observa el quadre 12, es veurà que les relacions de preferència entre *T* i *R*, d'una banda, i entre *P* i *S*, de l'altra, són invertides respecte al joc privilegiat. En el quadre 14 s'ofereix una representació amb pagaments numèrics. El DP té un únic equilibri de Nash (*D*, *D*), en què tots dos defrauden. Encara que són conscients que tots dos podrien estar millor cooperant, el parell (*C*, *C*) no és un equilibri. La raó és ben senzilla: l'estructura de pagaments és tal que defraudar domina fortament cooperar. Així, si l'altre coopera, el millor que puc fer és aprofitar-me de la seva cooperació, defraudant jo mateix, i, si l'altre defrauda, el millor que puc fer és defraudar també, ja que si no acabaré «fent el préssec», que és el pitjor resultat possible. Per tant, faci el que faci l'altre sempre em compensa defraudar. L'anomalia d'aquest joc passa pel fet que, essent tots dos conscients dels guanys de la cooperació, no tenen manera d'obtenir-los, ja que cada un sap que l'altre no té incentius per a cooperar.

Quadre 14

El dilema del presoner			
		J2	
		C	*D*
J1	*C*	2, 2	0, 3
	D	3, 0	1, 1

Exemple

Potser l'exemple més conegut d'aplicació del joc del DP en les relacions internacionals és el de la carrera armamentística (i la dissuasió) en la qual dos estats han de decidir si continuar amb la carrera o desistir. Els països utilitzen una política de dissuasió quan amenacen amb represàlies davant un possible atac d'un altre país per, precisament, evitar aquest primer atac. Sota aquestes circumstàncies, la carrera armamentísitica és simplement una conseqüència derivada del fet que els països han de fer creïbles aquestes amenaces de resposta. Els estats se sentiran més segurs si adquireixen armes (encara que solament sigui per reforçar la seva estratègia defensiva). D'altra banda, ja que les armes també poden ser utilitzades per a un atac, un altre estat pot no estar segur de les intencions defensives del primer, amb la qual cosa pot sentir-se obligat a adquirir més armes amb la intenció de defensar-se d'un possible atac del primer (o, com a mínim) amenaçar amb una possible resposta.

El quadre 14 resumeix perfectament aquesta situació. En aquest quadre l'estratègia cooperadora (C) significa deixar de comprar armes i l'estratègia defraudadora (D) significa seguir amb la carrera armamentística. En primer lloc (pagament 3), els dos jugadors prefereixen defraudar i que l'altre jugador cooperi (D,C) ja que d'aquesta manera guanyen seguretat i poder relatiu (la capacitat militar de l'altre jugador es veu reduïda). En segon lloc (pagament 2), tots dos jugadors prefereixen seguir una estratègia cooperadora (C,C): el poder relatiu de tots dos jugadors no canvia però no han d'assumir els costos econòmics de la carrera d'armaments i poden dedicar aquests recursos a altres polítiques. En tercer lloc (pagament 1), els països prefereixen adoptar una estratègia no cooperadora (D,D) amb la qual, malgrat el seu cost, almenys el seu poder relatiu es manté estable. En l'últim lloc (pagament 0) els dos jugadors prefereixen seguir una estratègia cooperadora mentre l'altre país s'arma (C,D) ja que, en aquesta situació, el país cooperador perd poder relatiu i, per tant, la seva seguretat pot veure's amenaçada.

Malgrat que tots dos jugadors obtindrien un millor resultat si cooperen i abandonen la carrera armamentística (3,3) tots dos tenen forts incentius per no seguir aquesta estratègia. En realitat, si alguna vegada s'aconseguia la casella (C,C) els dos jugadors poden, de manera unilateral, abandonar aquesta estratègia cooperadora i defraudar seguint una estratègia no cooperadora (i. e. comprant armes) cosa que proporcionaria el millor resultat possible al jugador no cooperador (que passaria d'un pagament de 2 a un de 3). En el mateix sentit, per als dos jugadors també resulta millor seguir una estratègia no cooperadora en el cas que l'altre jugador segueixi una estratègia no cooperadora. En definitiva, l'estratègia no cooperadora és una estratègia dominant per als dos jugadors (condueix als millors resultats faci el que faci l'altre jugador). Com que aquesta possibilitat resulta certa per als dos jugadors, és presumible que els dos jugadors racionals escullin la seva estratègia dominant de manera que l'únic equilibri possible en la carrera armamentística és la casella (D,D). Una vegada aconseguit, cap dels dos jugadors té incentius per modificar unilateralment la seva estratègia atès que el conduiria al seu pitjor resultat possible. Sota quines condicions és possible que els jugadors confiïn en els altres i adoptin la seva estratègia cooperadora superant el DP? En general, s'accepta que si un conflicte internacional presenta una estructura del DP i es juga únicament una vegada, el resultat pessimista (D,D) sembla inevitable. No obstant això, rares vegades les relacions entre els estats són «*single shot games*»: sembla més sensat pensar que les relacions internacionals es desenvolupen en un context de repetició en el qual els estats estan contínuament en negociacions (o en conflicte) uns amb altres. En aquest cas, les estratègies dels estats poden deixar de ser binàries (cooperar o defraudar) i passar a ser contínues amb la qual cosa l'estructura del DP pot veure's afectada. En el mateix sentit, la repetició pot induir els jugadors a «aprendre» a adoptar una estratègia cooperadora que, en el cas que sigui compartida per l'altre jugador, deriva en uns resultats millors que l'estratègia defraudadora. Com veurem més endavant en el mòdul «Jocs repetits», precisament el pas del temps pot ser una variable clau per explicar de quina manera és possible escapar d'un DP.

6.2.3. El joc de la seguretat

Entre el DP i el joc privilegiat hi ha dos jocs que presenten una tensió entre els àmbits col·lectiu i individual més rebaixada que en el DP, però més accentuada que en el joc privilegiat. D'una banda hi ha el joc de la seguretat. Com es pot veure en el quadre 12, aquest joc només es distingeix del DP en l'ordenació de les dues primeres preferències: mentre que en el DP es dóna que $T > R$, ara R > T, és a dir, l'agent està millor cooperant si l'altre coopera que defraudant si l'altre coopera. En el quadre 15 apareix una il·lustració numèrica d'aquest joc. No hi ha una ruptura completa entre l'interès individual i el col·lectiu perquè ara l'agent està disposat a cooperar si té confiança o seguretat que l'altre també cooperarà. En el DP la seguretat que l'altre fos cooperador induïa a defraudar. Amb tot, si el jugador espera que el seu rival defraudi, és millor que també ho faci. Això dóna lloc a dos equilibris de Nash amb estratègies pures, l'equilibri (*C*, *C*) i l'equilibri (*D*, *D*). Atès que en l'equilibri (*C*, *C*) els dos jugadors estan millor que en l'equilibri (*D*, *D*), el que és lògic és que se seleccioni el primer enfront del segon. La clau és que hi hagi un mínim de confiança entre els jugadors. Aquest joc té un tercer equilibri de Nash amb estratègies mixtes (comproveu-ho en l'exemple del quadre 15), encara que ateses les característiques del joc resulta difícil trobar una justificació a l'ús d'estratègies mixtes en aquest cas. Hi ha cert consens a considerar que el joc de la seguretat és el que representa millor la majoria dels exemples d'acció col·lectiva, sobretot en l'àmbit de la política, en què hi ha agents als quals preocupa un cert bé col·lectiu pel qual estan disposats a cooperar amb la condició que els altres també ho facin.

Quadre 15

El joc de la seguretat			
		J2	
		C	*D*
J1	*C*	3, 3	0, 2
	D	2, 0	1, 1

Aquesta estructura del joc de la seguretat ha estat utilitzada per analitzar precisament el dilema de la seguretat en l'àmbit de les relacions internacionals. Els estats poden aconseguir seguretat **1)** cooperant en les seves interaccions amb altres estats, o **2)** seguint un comportament més competitiu. L'equilibri competitiu és pitjor per als dos jugadors (1,1) però l'equilibri més cooperatiu (3,3) pot resultar vulnerable si no hi ha suficient confiança entre les dues parts. Un cas específic d'aquesta situació és la «guerra preventiva» (un concepte molt relacionat amb la carrera armamentística i amb la noció de dissuasió: de fet la guerra preventiva podria considerar-se un cas específic de dissuasió).

La guerra preventiva està provocada per la por que l'altre jugador estigui a punt d'atacar juntament amb el convenciment que hi ha avantatges si s'ataca en primer lloc (hi ha elements de caràcter militar com el factor sorpresa, disposar de la iniciativa...). El problema de la guerra preventiva pot il·lustrar-se com segueix:

Quadre 16

		Jugador 2	
		No atacar	Atacar
Jugador 1	No atacar	s_1,s_2	w_1^s , w_2^f
	Atacar	w_1^f , w_2^s	w_1,w_2

Si cap estat inicia l'atac, tots dos reben com a pagament el resultat d'un *statu quo* en pau (s_1,s_2). Si els dos estats s'ataquen mútuament, tots dos reben com a pagament el resultat de la guerra (w_1,w_2). Si únicament un dels dos estats ataca, l'estat atacant té (suposadament) avantatge i el seu pagament augmenta fins a w_i^f mentre que l'estat que ha de respondre a l'atac rep com a pagament w_i^s. S'assumeix que $w_i^f > w_i > w_i^s$ per denotar l'avantatge d'atacar en primera instància.

Si assumim que $w_i < s_i$ llavors els dos jugadors preferiran l'*statu quo* a la guerra sense realitzar un atac unilateral. Quins són els equilibris d'aquest joc? Si succeeix que $w_i^f < s_i$ llavors els dos jugadors preferiran no atacar si creuen que l'altra part tampoc atacarà (i els pagaments es correspondran al joc de la seguretat). No obstant això, ja que $w_i > w_i^s$, si un estat creu que l'altre atacarà, la seva preferència serà atacar de manera preventiva. Per tant, si un dels jugadors té aquesta creença, l'atac mutu resulta un punt d'equilibri i serà el resultat final del joc. Dit en altres paraules, si la condició o creença segons la qual $w_i^f < s_i$ no és aplicable a algun dels jugadors, els pagaments es correspondran als del Dilema del Presoner i l'únic equilibri possible serà el de l'atac mutu i la guerra.

La decisió d'atacar en primer lloc o de respondre únicament en cas de ser atacat va ser particularment important durant la Guerra Freda entre els Estats Units i la Unió Soviètica. I més tenint en compte el desenvolupament i l'abast de les armes atòmiques del moment. Durant l'època en què l'avantatge armamentístic corresponia als EUA, es va considerar seriosament la possibilitat de realitzar un atac nuclear contra la Unió Soviètica com la millor de les alternatives possibles. No obstant això, quan la Unió Soviètica va desenvolupar la capacitat tecnològica per respondre amb armes nuclears al possible atac nuclear nord-americà, la força d'aquest argument (afortunadament) es va esvair ja que $w_i^f < s_i$, quin era l'avantatge per als EUA d'atacar primer si la resposta al seu atac per part de la Unió Soviètica implicava la destrucció total del planeta?

6.2.4. El joc del gallina

Finalment, tenim el **joc del gallina**, que és igual al DP només que s'inverteix l'ordre de les dues últimes preferències. Si en el DP és millor per a un jugador que tots dos defraudin que no que ell cooperi i l'altre defraudi, ara això canvia i és pitjor que no en cooperi cap. La imatge a què sempre es recorre per a il·lustrar aquest joc, i de la qual rep el nom, són les curses de cotxes en què dos conductors avancen l'un contra l'altre i el primer a retirar-se passa a ser considerat el «gallina» o covard. Evidentment, si cap dels dos no es retira, es produeix un xoc amb conseqüències fatals. En aquestes condicions, és millor quedar com a «gallina» que provocar el xoc. Una versió numèrica del joc apareix en el quadre 17.

Quadre 17

El joc del gallina			
		*J*2	
		C	*D*
*J*1	*C*	2, 2	1, 3
	D	3, 1	0, 0

Aquest joc té **dos equilibris de Nash asimètrics amb estratègies pures**. Un equilibri és asimètric quan els jugadors reben pagaments diferents. En aquest cas, els equilibris són (*D*, *C*) i (*C*, *D*). Si *J*2 assumeix que *J*1 defraudarà, el mi llor que pot fer és cooperar; igualment, si *J*1 assumeix que *J*2 defraudarà, *J*1 cooperarà. Quin dels dos equilibris prevalgui no és clar, ja que depèn de fac tors que van més enllà del joc, que no es poden incorporar a la representació matricial: concretament, depèn del que es coneix com a «tecnologies de compromís» (*commitment*), és a dir, maneres de fer irrevocable un curs d'acció, perquè no hi hagi marxa enrere. L'individu que estableix un compromís (vegeu el mòdul «Jocs en forma extensiva») es lliga les mans, com va fer Ulisses lligant-se al pal del vaixell per a evitar la temptació d'anar-se'n amb les sirenes. En l'exemple anterior, un jugador podria establir un compromís arrencant el volant del cotxe, fent veure al contrari que no té manera de modificar la seva trajectòria. Si cap dels dos jugadors no pogués establir un compromís, la solució més lògica del joc passa per un equilibri amb estratègies mixtes. Amb els pagaments ordinaris i arbitraris del quadre 17, l'equilibri amb estratègies mixtes seria (½ *C*, ½ *D*; ½ *C*, ½ *D*) (comproveu-ho). Aquest equilibri és simètric.

L'estructura del joc del gallina serveix com a analogia d'algunes situacions típiques de l'escena internacional en les quals l'amenaça de l'ús de la violència apareix com un element fonamental en les negociacions. Vegem l'exemple següent.

El 1962 la Unió Sovètica va instal·lar a Cuba míssils balístics de mig **abast** (i amb capacitat nuclear). En plena guerra freda, aquests míssils suposaven una amenaça per a la seguretat dels EUA. Així doncs, el principal objectiu dels EUA era la retirada dels míssils i, per aconseguir-ho, es van considerar dues possibilitats:

a) El bloqueig naval o «quarantena» per evitar l'enviament i instal·lació de més míssils, seguit d'una acció més directa per provocar la retirada dels míssils que ja estaven instal·lats.

b) L'atac aeri per destruir els míssils seguit de la invasió de l'illa.

Com és sabut, l'estratègia seguida va ser la del bloqueig. Davant aquest moviment, els soviètics podien decidir:

a) Retirar els seus míssils.

b) Mantenir els seus míssils.

El quadre 18 resumeix de manera molt esquemàtica les possibles estratègies i els possibles resultats de la situació: en realitat les dues parts van considerar més alternatives de les que figuren en el quadre (per exemple, els soviètics van demanar la retirada dels míssils que els nord-americans tenien a Turquia a canvi de la retirada dels míssils a Cuba) i, a més, el quadre simplifica la realitat històrica presentant la situació com un conflicte en el qual els dos jugadors prenien decisions silmultàniament, quan en realitat va haver-hi negociacions entre les dues parts durant els tretze dies que va durar la crisi.

Quadre 18

		Unió Soviètica	
		Retirar míssils	No retirar míssils
EUA	Bloqueig naval	2,2	1,3
	Atac aeri i invasió	3,1	0,0

La interpretació més comuna dels analistes és que les dues potències nuclears estaven en una situació propera al «xoc de trens». No obstant això, sembla ser que cap dels jugadors volia prendre passos irreversibles i, en conseqüència, no es van autoimposar límits a les seves possibles estratègies. Encara que els fets històrics poguessin fer creure que els EUA van guanyar el joc (ja que la solució final va ser que es van retirar els míssils de Cuba), també és cert que els soviètics van aconseguir la promesa de no invasió per part dels americans, cosa que suggereix que va haver-hi algun tipus de compromís final (2,2). Entre altres elements, l'existència d'aquest compromís entre les dues potències es taduiria en la signatura, el 1963, del Tractat de prohibició parcial d'assajos nuclears a l'atmosfera, a l'espai exterior i sota l'aigua. D'altra banda, el fet que, fins i tot després de bloquejar l'illa, els nord-americans mantinguessin oberta la possibilitat d'escalar el conflicte i de realitzar un atac aeri i una invasió, assenyala que la decisió dels EUA d'optar pel bloqueig no era necessàriament la decisió final sinó tan sol un pas en un dels cursos d'acció possibles. D'aquesta manera, si després del bloqueig naval els soviètics decidien mantenir els míssils (1,3), ràpidament es podia passar a l'atac aeri i a la invasió de l'illa, una estratègia que conduiria a la casella menys desitjada pels jugadors (0,0). Aquesta amenaça oberta és la que va possibilitar d'alguna manera l'estabilitat del resultat final (bloqueig naval, retirada de míssils).

En realitat, sota el joc del gallina, un jugador racional sempre escull cooperar (és a dir «rendir-se») quan s'enfronta a un oponent del que no és possible esperar que segueixi una estratègia cooperativa. En el joc del gallina (a diferència del Dilema del Presoner) no existeix una «tragèdia» o «cercle viciós»: els jugadors no estan en una posició en la qual sempre sigui millor no cooperar per molt que els jugadors «desitgin» cooperar, no estan «irrevisiblemente condemnats» a no cooperar. Òbviament la raó d'això és que, a diferència del cas del Dilema del Presoner, en el joc del gallina el càstig per la mútua no cooperació és pitjor que el càstig derivat d'una estratègia cooperativa que es veiés explotada per l'estratgeia no cooperativa de l'altre jugador. En altres paraules, mentre que en el Dilema del Presoner la credibilitat dels jugadors que seguiran una estratègia cooperadora depèn de la confiança, en el joc del gallina aquesta credibilitat depèn de la seva capacitat d'elevar amenaces creïbles, depèn de la por.

Els quatre jocs analitzats representen les variacions possibles en la interacció estratègica que sorgeix en els problemes de l'acció col·lectiva. Quin dels qua tre jocs serà l'apropiat per a modelitzar una situació empírica dependrà de les característiques pròpies de cada situació.

Resum

Els jocs en forma normal corresponen a aquella situació estratègica en què els jugadors trien simultàniament o trien sense coneixement de les eleccions de la resta.

En certes condicions, la resolució d'un joc en forma normal és trivial: així s'esdevé sempre que podem arribar a un resultat únic mitjançant l'eliminació d'estratègies dominades (fortament o dèbilment). Es diu que una estratègia està fortament dominada per una altra quan aquesta sempre produeix millors pagaments que aquella. I està feblement dominada, quan aquesta produeix almenys pagaments tan bons i, almenys en un cas, pagaments millors. Quan es pot aplicar el criteri de dominació fins al final, el joc, malgrat la seva naturalesa estratègica, té una solució paramètrica.

Si no s'aplica el criteri de dominació, aleshores la manera de resoldre el joc és mitjançant la recerca dels equilibris de Nash. Un equilibri de Nash és una combinació d'estratègies tal que cap jugador guanya res canviant la seva estratègia. Si només es consideren estratègies pures, pot passar que un joc tingui un, diversos o cap equilibri de Nash. Quan també s'admeten estratègies mixtes (combinacions probabilístiques d'estratègies pures), tot joc té almenys un equilibri de Nash.

Una estratègia mixta d'equilibri és aquella que fa indiferent el rival entre les seves estratègies pures. Si els dos jugadors utilitzen les seves estratègies mixtes d'equilibri, cap no pot millorar els seus pagaments canviant d'estratègia. No cal suposar que una estratègia mixta requereix necessàriament un mecanisme d'aleatorització. En realitat, es poden reinterpretar les estratègies mixtes com a manifestacions d'incertesa.

La teoria de jocs no explica com s'arriba a un equilibri de Nash: tan sols diu que si els jugadors es troben en una situació d'equilibri, no canviaran d'estratègia. Això no és molt satisfactori, ja que la teoria de jocs no pot saber què passarà quan hi ha diversos equilibris de Nash. I en principi els jugadors només seleccionaran un equilibri de Nash si aquest coincideix amb el que ells consideren que és la forma raonable de jugar el joc.

Bibliografia

Heckathorn, D. D. (1998). «Collective Action, Social Dilemmas, and Ideology». *Rationality and Society* (vol. 10, núm. 4, pàg. 541-579).

Kreps, D. (1990a). *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton: Princeton University Press.

Kreps, D. (1990b). *Game Theory and Economic Modeling*. Oxford: Oxford University Press.

Kydd, A. H. (2015). *International Relations Theory. The Game-Theoretic Approach*. Cambridge: Cambridge University Press.

Maynard Smith, J. (1982). *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge: Cambridge University Press.

Morrow, J. (1994). *Game Theory for Political Scientists*. Princeton: Princeton University Press.

Nash, J. F. (1996). *Essays on Game Theory*. Cheltenham: Edward Elgar.