El principio de racionalidad y la teoría de la utilidad

PID_00268974

Ignacio Sánchez-Cuenca

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 3 horas

Universitat Oberta de Catalunya

Ignacio Sánchez-Cuenca

La revisión de este recurso de aprendizaje UOC ha sido coordinada por el profesor: Albert Batlle (2019)

Segunda edición: septiembre 2019

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Realización editorial: FUOC

Índice

Introducción

La teoría de juegos, del mismo modo que la teoría económica y la teoría de la elección racional más en general, parte del supuesto de que los agentes (ya sean individuos, organizaciones o estados) son racionales. La racionalidad práctica, la racionalidad de la acción, consiste en que el agente tome sus decisiones según un orden de preferencias. Si el agente actúa en consonancia con estas preferencias, es racional. Si, en cambio, toma la decisión al margen de sus preferencias, por ejemplo porque actúa movido por intensas emociones o por la fuerza coercitiva que tienen las normas sociales o las obligaciones autoimpuestas, la decisión queda más allá del ámbito de la racionalidad.

Es lógico empezar el estudio de la teoría de juegos por un análisis de la racionalidad. Ahora bien, el concepto de racionalidad por sí mismo no es operativo, sino que hay que formalizarlo para poderlo aplicar. Las funciones de utilidad se encargan de ello. En este módulo se definen y analizan varias funciones de utilidad. El principio de racionalidad traducido a la terminología de las funciones de utilidad establece que el agente es racional cuando al actuar maximiza su función de utilidad. Las funciones de utilidad pueden ser más o menos exigentes, dependiendo de si la decisión se toma en un contexto de certidumbre o en uno de riesgo/incertidumbre.

La teoría de la utilidad (o teoría de la decisión) se encarga de investigar los aspectos más fundamentales de la acción racional. Hay que tener cierta familiaridad con esta teoría para entender la teoría de juegos. En este módulo examinamos algunos conceptos fundamentales, como la caracterización de un problema de decisión, la diferencia entre funciones de utilidad ordinales y cardinales, el principio de utilidad esperada, las funciones de utilidad Von Neumann-Morgenstern y la actitud hacia el riesgo. El módulo acaba con una toma de contacto muy superficial con las anomalías que se producen en la teoría de la utilidad: muy a menudo, los agentes de carne y hueso no se comportan como espera la teoría.

Objetivos

Con el estudio de este módulo aprenderéis las bases de la teoría de la utilidad, que se compone de los objetivos siguientes:

1. Formular con rigor el principio de racionalidad de la acción.

2. Saber descomponer un problema de decisión en los elementos básicos.

3. Hacer cálculos de utilidad esperada.

4. Operar con funciones de utilidad Von Neumann-Morgenstern.

5. Determinar la actitud hacia el riesgo en una función de utilidad.

1. El supuesto de la racionalidad

La teoría de la elección racional, como ya se ha explicado en la introducción, parte del supuesto de que los agentes son racionales. Empezaremos definiendo con más precisión qué quiere decir exactamente que los agentes sean racionales. Primero veremos una definición genérica, que vale para todas las situaciones posibles, y después cómo esta definición se desarrolla de manera diferente según el tipo de problema con el que se enfrente el agente. Por lo tanto, conviene subrayar desde el principio que hay versiones más exigentes que otras respecto a los contenidos de la racionalidad. Que una versión de la racionalidad sea más exigente que otra significa que hace supuestos más restrictivos sobre la manera como el agente toma sus decisiones. Normalmente, cuanto más exigente es la definición de racionalidad que se maneja, menos «realista» resulta.

La premisa de la que parte el supuesto de racionalidad es muy sencilla: los agentes tienen deseos sobre cómo les gustaría que fuera el mundo y creencias sobre cómo funciona realmente. En la terminología propia de la teoría económica y la teoría de la elección racional, estos deseos se denominan **preferencias**. Suponemos que las preferencias son estables, al menos a corto plazo. Si de repente las preferencias pudieran cambiar, la teoría de la elección racional se enfrentaría a dificultades insuperables. En la medida en que las preferencias son el principal elemento explicativo de la acción, si cambiaran caprichosamente habría poco que explicar. Aunque ha habido varios intentos desde el seno de la teoría de la elección racional para explicar el proceso de formación de las preferencias, casi siempre se considera que vienen dadas. A la teoría no le interesa tanto la manera como se originan las preferencias como que, una vez dadas, expliquen por qué el agente tomó unas decisiones y no otras.

Tipos de agentes

- Actores individuales: personas.
- Actores colectivos: estados, partidos políticos, sindicatos, clases sociales, etc.

1.1. La propuesta de Becker y Stigler

En la **teoría de la acción de Gary S. Becker** se hace un supuesto adicional sobre las preferencias: no solamente vienen dadas, sino que, además, son comunes o universales. Becker y George J. Stigler publicaron en 1977 un artículo muy influyente, «De gustibus non est disputandum», en el que argumentaban que todos los agentes tienen las mismas preferencias y que las diferencias en las decisiones se explicaban no por variaciones en las preferencias, sino por variaciones en los recursos de los que disponen y en los precios relativos de los bienes que quieren adquirir.

Bibliografía

G. S. Becker; G. J. Stigler (1977). «De gustibus non est disputandum». *American Economic Review* (vol. 67, núm. 2, págs. 76-90).

Adoptaron este planteamiento porque consideraban que las preferencias no son una variable explicativa adecuada, puesto que al ser privadas no son directamente observables. Dado que las preferencias no se pueden observar, mientras que los recursos de los individuos y los precios de los bienes sí, es mejor centrarse en estos últimos.

La propuesta de Becker y Stigler no es aceptada por todo el mundo. De hecho, lo que es más habitual en la teoría de la elección racional es suponer que las preferencias son la principal explicación de la acción. Ahora bien, esto implica que uno se tiene que enfrentar al problema metodológico de cómo imputar las preferencias a los agentes. Así, se supone que el empresario busca beneficios económicos con su actividad, que el consumidor busca la máxima satisfacción posible en los bienes que consume, que el político en democracia busca votos, que, con su comportamiento en el escenario internacional, los estados buscan poder, seguridad, etc. Estas imputaciones no siempre son evidentes. Por ejemplo, no está claro que los políticos solo busquen votos. Los hay que no están dispuestos a sacrificar ciertas ideas para incrementar la cuota electoral. Y más grave todavía: a veces no es tan solo que razonablemente se puedan hacer diferentes imputaciones de preferencias, sino que ni siquiera sabemos muy bien qué se puede imputar al agente. ¿Qué es exactamente lo que buscan los votantes cuando deciden su voto? ¿Qué busca exactamente un estado cuando entra en conflicto con otro estado?

Ahora no es el momento de profundizar en los problemas metodológicos que surgen a la hora de imputar preferencias a los agentes. Los investigadores intentan buscar soluciones en cada caso concreto, guiándose por las características propias de los distintos objetos de estudio.

1.2. Comportamientos autointeresado y egoísta

Lo importante en este momento es insistir en que la teoría de la elección racional representa que el agente actúa según su orden de preferencias.

> El agente ordena sus preferencias y actúa según este orden.

Que el agente elija a partir de sus preferencias significa, simplemente, que actúa buscando lo que es mejor frente a lo que es peor. Este supuesto también se conoce como el supuesto de comportamiento autointeresado. El agente actúa según sus preferencias y no según las de los demás.

Comportamiento autointeresado no implica necesariamente comportamiento egoísta. El agente puede ser egoísta, en el sentido de que solo se preocupe por su bienestar, pero también puede ser altruista o envidioso, en el sentido de que, además de su bienestar, está preocupado por el de los demás. Si el agente tiene preferencias sobre el bienestar de los demás, continúa siendo autointeresado, dado que todavía actúa según sus preferencias. El altruista se alegra de que los otros mejoren su condición, mientras que el envidioso se lamenta.

A pesar de que el principio del comportamiento autointeresado sea tan general, lo cierto es que en muchos casos se hace un supuesto adicional de comportamiento egoísta.

Volveremos a dejar las discusiones metodológicas al margen. Baste consignar que el supuesto egoísta es tan solo un caso especial, aunque habitual, de comportamiento autointeresado y que, en el ámbito de abstracción en el que todavía nos movemos, el principio de racionalidad se define a partir del comportamiento autointeresado, no a partir del egoísta. Con otras palabras, tener preferencias no egoístas no implica que el agente sea irracional. Otra cosa es que, cuando la teoría se aplique en situaciones concretas, el comportamiento autointeresado sea de naturaleza egoísta.

Después de estas aclaraciones, ya podemos abordar la definición del supuesto de racionalidad.

Un agente es racional cuando, al elegir entre las alternativas disponibles, lo hace según su orden de preferencias.

Toda la teoría de la elección racional es un desarrollo de este supuesto tan básico. Para dar más precisión a la definición, hay que explicar mejor qué es un orden de preferencia aceptable. Concretamente, se tienen que introducir **dos conceptos técnicos**: un orden de preferencias aceptable es **completo** y **transitivo**. Pero, a su vez, para definir estos dos conceptos se tiene que especificar cuál es la ontología de un problema de decisión, es decir, qué elementos se tendrán en cuenta a la hora de caracterizar una elección racional. Esto nos obligará a dar un pequeño rodeo.

1.3. Elementos de una elección

Siguiendo la presentación clásica de Leonard Savage en *The Foundations of Statistics*, podemos decir que los elementos necesarios para caracterizar un problema de decisión o elección son los siguientes:

Bibliografía

L. Savage (1954 [1972]). *The Foundations of Statistics*. Nueva York: Dover.

- Un conjunto de estados del mundo S exhaustivos y exclusivos.
- Un conjunto A de acciones.
- Un conjunto C de consecuencias, y hay una consecuencia para cada par AxS.
- Una ordenación de preferencias P sobre las consecuencias.

En lugar de proporcionar descripciones detalladas de cada uno de estos elementos, será más fácil explicar el significado por medio del célebre ejemplo que proporciona Savage sobre un agente que está haciendo una tortilla. Un agente prepara una tortilla de seis huevos. Ha roto los cinco primeros en una misma cazuela y no hay ninguno malo, pero sabe que hay un riesgo de que el sexto huevo esté podrido. El agente tiene que decidir qué hace con el sexto huevo. Su conjunto A de acciones se compone de tres elementos: romper el sexto huevo en la misma cazuela, romperlo en un plato aparte o tirarlo a la basura. La acción que elija dependerá de los estados del mundo. En este caso, el conjunto S de estados del mundo es muy reducido: o bien el sexto huevo está en buenas condiciones, o bien está podrido. Cada una de estas posibilidades caracteriza un estado del mundo diferente. Cada acción posible se puede emparejar con cada estado del mundo posible, lo que da lugar a consecuencias diferentes. El cuadro 1 refleja la estructura del problema. En las filas tenemos las acciones A_i, en las columnas, los estados del mundo S_i, y en el interior del cuadro, las consecuencias C_i.

Cuadro 1

El problema de decisión de Savage		
Acciones	**Estados del mundo**	
	Buen estado (S_1)	**Mal estado (S_2)**
Romper el sexto huevo en la cazuela (A_1)	Tortilla de seis huevos (C_{11})	No hay tortilla, cinco huevos tirados (C_{12})
Romper el sexto huevo en un plato (A_2)	Tortilla de seis huevos y un plato que hay que fregar (C_{21})	Tortilla de cinco huevos y un plato que hay que fregar (C_{22})
Tirar el sexto huevo (A_3)	Tortilla de cinco huevos y un huevo tirado (C_{31})	Tortilla de cinco huevos (C_{32})

Lo único que nos falta para caracterizar completamente el problema de elección es especificar el orden de preferencias, es decir, una ordenación de las consecuencias de más a menos preferida. Evidentemente, son posibles órdenes de preferencia múltiples. Podemos utilizar como término primitivo para caracterizar el orden de preferencia el término relacional de **preferencia débil**:

$$C_i \geq C_j$$

Esta expresión significa que la consecuencia i es al menos tan preferida como la consecuencia j. Si se da a la vez que $C_i \geq C_j$ y $C_j \geq C_i$ entonces es que el agente es indiferente entre las dos consecuencias, y lo representaremos como $C_i \approx C_j$. Pues bien, podríamos considerar, en el ejemplo de los huevos, que este es un orden de preferencias posible:

$$C_{11} \geq C_{21} \geq C_{31} \approx C_{32} \geq C_{22} \geq C_{12}$$

Con palabras

Lo que se prefiere es una tortilla de seis huevos, después una tortilla de seis huevos y un plato que hay que fregar, después una tortilla de cinco huevos y un huevo tirado o una tortilla de cinco huevos, después una tortilla de cinco huevos y un plato que hay que fregar y, finalmente, cinco huevos malgastados. Ahora bien, si al agente realmente le resulta desagradable tener que fregar, el orden podría haber sido el siguiente:

$$C_{11} \geq C_{31} \approx C_{32} \geq C_{21} \geq C_{12} \geq C_{22}$$

Ahora ya podemos definir los dos conceptos que teníamos pendientes. Así, decimos que un orden de preferencias es *completo* si es el caso que:

$$C_y \geq C_j \quad \text{o} \quad C_j \geq C_y \quad \text{o} \quad (C_y \geq C_j \;\; \text{y} \;\; C_j \geq C_y)$$

Con palabras

Dadas dos consecuencias cualesquiera, el agente o prefiere débilmente una a la otra, o a la inversa, o es indiferente entre las dos. Esto significa que el agente tiene que ser capaz de comparar cualesquiera de las dos alternativas que se le presenten, por muy dispares que sean. Evidentemente, esto no es muy realista, pero se debe suponer para formalizar la teoría de la decisión.

Por otro lado, decimos que un orden de preferencias es *transitivo* en el caso siguiente:

$$\text{Si } (C_i \geq C_j \text{ y } C_j \geq C_k), \text{ entonces } C_i \geq C_k$$

Con palabras

Si la consecuencia *i* se prefiere débilmente a la consecuencia *j* y esta se prefiere débilmente a la consecuencia *k*, entonces el agente prefiere débilmente *i* a *k*. La condición de transitividad garantiza que la relación de preferencia sea coherente. Esta condición es más importante que la de completud.

Sabiendo esto, podemos definir precisamente el principio de racionalidad en términos genéricos:

Supuesto de racionalidad: si el orden de preferencias del agente es completo y transitivo y el agente elige sus acciones según el orden de preferencias, entonces el agente es racional.

Expresado con este nivel de abstracción, el supuesto de racionalidad no nos permite determinar cuál será la elección del agente en el problema de los huevos. Si suponemos que su orden de preferencias es

$$C_{11} \geq C_{21} \geq C_{31} \approx C_{32} \geq C_{22} \geq C_{12}$$

¿qué tendría que hacer el agente si es racional? Si el agente no sabe en qué estado del mundo se encuentra, es decir, si no sabe si el sexto huevo está podrido o no, el orden de preferencias definido sobre las consecuencias no es suficiente para tomar una decisión, puesto que una misma acción dará lugar a una consecuencia u otra dependiendo de cuál sea el estado del mundo. Para poder responder a la pregunta sobre qué hará el agente, se tiene que dar más contenido al supuesto de racionalidad. Y, para ello, hay que saber algo sobre las funciones de utilidad.

2. Funciones de utilidad

Una función de utilidad asigna números a un orden de preferencias. Estos números miden la utilidad o el bienestar que obtiene un individuo o un estado si se da una cierta consecuencia cuando hace una acción determinada. La utilidad puede derivar de las propias consecuencias, o de la acción cuando una misma acción tiene unas consecuencias u otras dependiendo de cuál sea el estado del mundo. Esto quedará más claro dentro de un momento, al ver diferentes tipos de función de utilidad.

La utilidad, por lo tanto, es la traducción cuantitativa de un orden de preferencias.

> Cuando hablamos en términos de utilidad, el supuesto de racionalidad implica que el agente elige la acción que maximiza la función de utilidad. Como el valor máximo de la función equivale a la opción más preferida, decir que alguien actúa racionalmente cuando elige a partir de su orden de preferencias o cuando maximiza su función de utilidad es equivalente.

En cualquier caso, es fundamental recordar que la relación más básica es la de preferencia. Porque preferimos *i* a *j*, *i* nos proporciona más utilidad que *j*. No es a la inversa: no es porque *i* proporciona más utilidad que *j* por lo que preferimos *i* a *j*.

Una analogía

Del mismo modo que no decimos que hace más calor porque el termómetro marca una temperatura más alta, sino que el termómetro marca una temperatura más alta porque hace calor, tampoco decimos que se prefiere una cosa porque proporciona más utilidad, sino que proporciona más utilidad porque se prefiere en mayor medida que otras cosas.

Las funciones de utilidad tienen diferentes grados de complejidad según el contexto de la acción en el que se apliquen. Siguiendo con la distinción que se presentaba en la introducción de este tema, la clave en este caso es que el agente, al actuar, tenga o no certidumbre sobre el estado del mundo relevante en cada momento. Cuando hay certidumbre, las funciones de utilidad son muy sencillas. Cuando hay incertidumbre, la cosa se complica un poco.

2.1. Funciones de utilidad en contextos paramétricos de certidumbre

Cuando hay certidumbre, es decir, cuando el agente está seguro sobre qué consecuencia originará su acción, basta con tener una función de utilidad ordinal, una función que ordena las consecuencias pero no mide la distancia que hay en términos de utilidad entre una consecuencia y otra. Si se conoce el estado del mundo, la consecuencia preferida será la que proporcione más utilidad y, por lo tanto, da igual a qué distancia en utilidad se sitúe esta consecuencia respecto a la siguiente, porque el agente siempre elegirá la primera preferencia. Para caracterizar la elección racional es suficiente, por lo tanto, con que la función ordene las preferencias.

Si $U(C_i)$ es la utilidad que proporciona la consecuencia C_i, formalmente, podemos caracterizar la propiedad específica de las funciones de utilidad en contextos de certidumbre así:

$$\text{Si } C_i \geq C_j \text{, entonces } U(C_i) \geq U(C_j).$$

Lo único que nos importa en esta función de utilidad es que el primer número sea más elevado que el segundo, y es igual cómo sea de grande. Por ejemplo, este orden de preferencias

$$C_1 \geq C_2 \geq C_3$$

Cualquier función de utilidad que satisfaga

$$U(C_1) \geq U(C_2) \geq U(C_3)$$

representa igualmente bien el orden de preferencias subyacente. Las dos funciones siguientes serían estrictamente idénticas:

Función A	**Función B**
$U(C_1) = 100$	$U(C_1) = 1$
$U(C_2) = 25$	$U(C_2) = 0$
$U(C_3) = -1000$	$U(C_3) = -1$

Como se puede ver, no hay ninguna relación lineal entre las dos funciones. Las dos reflejan igualmente el orden de preferencias porque en los dos casos C_1 es la consecuencia preferida, C_3 la que lo es menos y C_2 ocupa la posición intermedia.

2.2. Funciones con incertidumbre. El principio de utilidad esperada

Cuando no hay certidumbre sobre los estados del mundo, el agente no puede saber con seguridad cuál será la consecuencia de cada una de sus acciones. En consecuencia, no podemos identificar una acción con una consecuencia y calcular la utilidad de la primera a partir de la utilidad de la segunda. Ahora la utilidad se debe calcular para cada acción sobre las posibles consecuencias que se asocian a ella. Y para hacer este cálculo hay que tener en cuenta, además de las preferencias del agente, sus creencias sobre la probabilidad de que se dé un estado del mundo u otro.

Por ejemplo

Si considero mucho más probable que el sexto huevo esté podrido que no que no lo esté, haría una tontería rompiéndolo en la misma cazuela que los otros cinco o incluso rompiéndolo en un plato: es mejor tirarlo directamente. Al contrario, si creo que la probabilidad de que el huevo esté podrido es muy baja, me podría compensar romperlo en la cazuela con los otros cinco para evitar el riesgo tanto de tener que fregar un plato adicional como de malgastar el huevo tirándolo a la basura. Y así sucesivamente.

Con la teoría de la utilidad esperada podemos formalizar el tipo de razonamiento que se hacía en el párrafo anterior. Concretamente, la idea consiste en ponderar la utilidad de las consecuencias por la probabilidad de ocurrencia de los estados del mundo correspondientes a esas consecuencias. Primero se introduce la definición formal y después se explica con dos ejemplos.

Si representamos la idea de utilidad esperada de una acción A como $UE(A)$, podemos definir la utilidad esperada de la manera siguiente:

$$EU(A) = \sum p(S)U[C(S, A)], \quad \sum p = 1$$

En esta fórmula, $C(S, A)$ representa la consecuencia C de llevar a cabo la acción A dado el estado del mundo S, y p representa la probabilidad de que se dé el estado del mundo S. Las probabilidades de todos los estados del mundo posibles tienen que sumar 1. La fórmula nos dice, por lo tanto, que la utilidad esperada de hacer A es la suma de la utilidad de todas las consecuencias posibles de la acción ponderada por la probabilidad de ocurrencia de cada consecuencia.

Ejemplo 1

El bombardeo navideño de Nixon (tomado de Morrow, 1994)

En 1972, las negociaciones para llegar al fin de la guerra del Vietnam sufrieron un parón: los norteamericanos no sabían si los norvietnamitas estaban «frenando» el acuerdo para intentar obtener más concesiones («Farol vietnamita» o S_1) o si realmente existía algún malentendido sobre el contenido del tratado de paz que impedía el progreso de las negociaciones («No farol vietnamita» o S_2). Cada una de estas posibilidades derivaba un estado del mundo posible. Sin embargo, la Administración Nixon, a la hora de responder al parón, desconocía cuál era el estado del mundo real. La respuesta norteamericana tenía dos posibilidades ante esta situación: demostrar su poderío militar con un bombardeo aéreo (A_1) o aceptar las concesiones adicionales pedidas por el Gobierno de Vietnam del Norte en las negociaciones de paz (A_2). Como ya es conocido, la relación entre los estados del mundo y las acciones de los jugadores crea consecuencias.

Si Nixon decidía no bombardear, Estados Unidos revisaría el tratado de paz y haría concesiones independientemente de si Vietnam estaba haciendo un farol o no. Esta era la consecuencia que denominamos C_2. Si Nixon decidía bombardear, la consecuencia dependía de si Vietnam estaba haciendo un farol o no: si estaban haciendo un farol (el estado del mundo era S_1), asumimos que, tras el bombardeo, las negociaciones para el tratado de paz se retomarían en su punto original (esta es la consecuencia C_1); si no había farol alguno por parte de los norvietnamitas (S_2), el bombardeo provocaría que el Gobierno de Vietnam del Norte rompiera las negociaciones de paz y se volviera a una situación de guerra (consecuencia C_3). El cuadro 2 resume la situación:

Cuadro 2

		Vietnam del Norte	
		Farol (S_1)	No farol (S_2)
EE. UU.	Bombardeo (A_1)	Vietnam vuelve a la mesa de negociaciones y se llega a un acuerdo (C_1)	Se rompen las negociaciones y se vuelve a la guerra (C_3)
	No bombardeo (A_2)	Se llega a un acuerdo con concesiones adicionales (C_2)	Se llega a un acuerdo con concesiones adicionales (C_2)

Se asume que el orden de preferencias de Nixon sobre las distintas consecuencias era tal que $C_1 > C_2 > C_3$ (Nixon prefería no hacer concesiones adicionales a Vietnam del Norte, pero prefería hacerlas a continuar una guerra que ya tenía perdida). Este es un conjunto ordinal de las posibles consecuencias derivadas de la acción. Pero las funciones de utilidad sobre las consecuencias especifican el riesgo que un actor aceptará para conseguir su consecuencia preferida. El Gobierno de Estados Unidos no quería de ninguna manera hacer concesiones e intentaba evitarlas.

Asumimos pues que $u(C_1) = 1$; $u(C_2) = 0,3$; $u(C_3) = 0$.

La probabilidad de ocurrencia de los distintos estados del mundo resume las creencias de Estados Unidos sobre cuál sería la respuesta vietnamita a su propia decisión. El gobierno de Estados Unidos creía que Vietnam estaba haciendo un farol y, por lo tanto, asumimos que $p(S_1) = 0,7$ y que, lógicamente, $p(S_2) = 0,3$.

Calculando las utilidades esperadas derivadas de las dos posibles acciones se comprueba cómo Estados Unidos prefería jugar A_1 a jugar A_2:

$$UE(A_1) = p(S_1)u(C_1) + p(S_2)u(C_3) = (0,7)(1) + (0,3)(0) = 0,7$$

$$UE(A_2) = p(S_1)u(C_2) + p(S_2)u(C_2) = (0,7)(0,3) + (0,3)(0,3) = 0,3$$

Por lo tanto, $UE(A_1) > UE\ (A_2)$ y, en consecuencia, para la Administración Nixon $A_1 > A_2$.

El bombardeo masivo de Hanoi y Haiphong (la llamada Operación Linebacker II llevada a cabo entre los días 18 y 29 de diciembre) fue muy controvertido en Estados Unidos (y también a nivel internacional) porque, en definitiva, aunque se podía compartir el cálculo de la utilidad derivada de las tres posibles consecuencias, no se entendía cómo Nixon podía asumir el riesgo de volver a activar la guerra ni tampoco cómo había interpretado que Vietnam del Norte estaba «marcándose un farol» en el proceso de paz.

Ejemplo 2

Supongamos que se acusa a un político con fundamento de haber malversado fondos. El político no sabe si las acusaciones se basan en pruebas o si solo son meras sospechas. Hay dos estados del mundo sobre los cuales no tiene certidumbre: o bien hay pruebas que apoyan las acusaciones, o bien no las hay. El político puede hacer tres cosas:

- negarlo todo,
- reconocer una parte o
- reconocerlo todo.

Los datos del problema, incluyendo las consecuencias, se resumen en el cuadro 3 análogo al cuadro 1 con el problema de los huevos. Si el político lo niega todo y no hay pruebas, sale reforzado en su posición por haber sido víctima de un ataque injusto. Si lo niega todo y hay pruebas, se le obliga a dimitir. Si lo confiesa todo, da igual el estado del mundo, el caso es que se le obliga a dimitir. Si confiesa una parte saldrá debilitado, tanto si hay pruebas como si no, pero no se fuerza la destitución por haber afrontado las acusaciones siendo sincero, al menos en parte.

Cuadro 3

El problema del político corrupto		
Acciones	**Estados del mundo**	
	Hay pruebas (S_1)	**No hay pruebas (S_2)**
Negarlo todo (A_1)	Destituido (C_1)	Reforzado (C_3)
Confesar una parte (A_2)	Debilitado (C_2)	Debilitado (C_2)
Confesarlo todo (A_3)	Destituido (C_1)	Destituido (C_1)

En este caso, el orden de preferencias sobre las consecuencias es evidente:

$$C_3 \geq C_2 \geq C_1$$

(Reforzado ≥ Debilitado ≥ Destituido)

Para poder aplicar la fórmula anterior, se requiere que las consecuencias tengan algún valor medido en utilidad. También se tienen que especificar los valores de *p*, es decir, se tienen que especificar las creencias del político sobre los estados del mundo. De momento asignaremos unos valores arbitrarios entre 0 y 1 a la utilidad de las consecuencias: en la subsección siguiente se explica de dónde proceden estos números. Concretamente, supondremos lo siguiente:

U (Reforzado) = 1	*p* (Hay pruebas) = 0,2
U (Debilitado) = 0,6	*p* (No hay pruebas) = 0,8
U (Destituido) = 0	

Dadas estas medidas de utilidad para las consecuencias y también estas creencias, podemos calcular la utilidad esperada que corresponde a cada acción posible:

$$UE \text{ (Negarlo todo)} = p \text{ (Hay pruebas)} \times U \text{ (Destituido)} + \\ + p \text{ (No hay pruebas)} \times U \text{ (Reforzado)}$$

Sustituyendo:

$$\text{UE (Negarlo todo)} = 0{,}2 \times 0 + 0{,}8 \times 1 = 0{,}8.$$

Igualmente, para la acción de confesar una parte:

$$UE \text{ (Confesar una parte)} = p \text{ (Hay pruebas)} \times U \text{ (Debilitado)} + \\ + p \text{ (No hay pruebas)} \times U \text{ (Debilitado)}$$

Sustituyendo:

$$UE \text{ (Confesar una parte)} = 0{,}2 \times 0{,}6 + 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}6$$

Finalmente, en cuanto a confesarlo todo:

$$UE \text{ (Confesarlo todo)} = p \text{ (Hay pruebas)} \times U \text{ (Destituido)} + \\ + p \text{ (No hay pruebas)} \times U \text{ (Destituido)}$$

Sustituyendo:

$$UE \text{ (Confesarlo todo)} = 0{,}2 \times 0 + 0{,}8 \times 0 = 0$$

Es evidente que la máxima utilidad esperada se produce cuando el político lo niega todo. Por lo tanto, un político racional negará las acusaciones de escándalo si los datos del problema se corresponden con los que hemos supuesto. Negarlo todo maximiza la utilidad del agente. Sin duda, podría ser que las diversas consecuencias se valoraran de otro modo o que el político tuviera diferentes creencias sobre si hay pruebas o no. Por ejemplo, suponed que, manteniendo constantes las utilidades de las consecuencias, queremos saber a partir de qué creencia de que hay pruebas el político preferirá confesar una parte que negarlo todo. Es decir, lo que se pide es resolver la inecuación o desigualdad siguiente:

$$UE \text{ (Confesar una parte)} \geq UE \text{ (Negarlo todo)}$$

Dando valores a todo menos a p, que es lo que queremos averiguar, la desigualdad que hay que resolver se puede expresar así:

$$p \times 0{,}6 + (1 - p) \times 0{,}6 > p \times 0 + (1 - p)1$$

Es fácil darse cuenta de que esta desigualdad solo se cumple en este caso:

$$p > 0{,}4$$

Si la creencia de que hay pruebas es superior a 0,4, entonces el político confesará una parte, puesto que esta acción es la que ahora maximiza su utilidad.

En este ejemplo es evidente que la clave es que la utilidad que se asigna a las consecuencias tenga alguna justificación. Y esto por dos razones: primero, porque si podemos alterar a conveniencia la utilidad de las consecuencias, la utilidad esperada de cada acción variará arbitrariamente; segundo, porque ponderamos estas utilidades por las probabilidades contenidas en las creencias, y esta ponderación solo tiene sentido si estas utilidades no son arbitrarias. En otras palabras, lo que se revela en este ejemplo es que tanto las utilidades de las consecuencias como la propia utilidad esperada se tienen que expresar cardinalmente, no ordinalmente. No importa solamente el orden de las utilidades, sino también la distancia entre ellas. La cuestión es: ¿hay alguna manera de definir cardinalmente la utilidad para que se pueda aplicar el principio de utilidad esperada? La respuesta es afirmativa. Fueron los fundadores de la teoría de juegos, John von Neumann y Oskar Morgenstern, quienes propusieron una solución.

2.3. Las funciones de utilidad Von Neumann-Morgenstern

Las funciones de utilidad Von Neuman-Morgenstern son cardinales porque los creadores consiguieron idear un método para asignar valores numéricos a las consecuencias. Se trata de ver cómo se valoran las consecuencias intermedias (las que están entre la consecuencia mejor y la peor) en términos de una lotería en la que solo intervengan la mejor y la peor consecuencia. Una lotería L se define como un emparejamiento de probabilidades y consecuencias. Formalmente:

$$L = (p_1 C_1, p_2 C_2, \ldots, p_n C_n), \quad \sum p_i = 1$$

Von Neumann y Morgenstern utilizaron esta definición de lotería para conseguir sus utilidades cardinales. El procedimiento es muy sencillo. En el ejemplo del político corrupto, teníamos tres consecuencias, «reforzado», «debilitado» y «destituido». Se trata de expresar la utilidad de la consecuencia intermedia, «debilitado», en términos de una lotería entre la mejor y la peor consecuencia, es decir, en términos de «reforzado» y «debilitado». Más concretamente, se trata de medir la valoración de la consecuencia intermedia en términos del riesgo que el agente estaría dispuesto a asumir para conseguir la mejor consecuencia, «reforzado».

Ejemplo

Supongamos que al político se le plantea este dilema: tiene que elegir entre quedar debilitado con seguridad o una lotería en la que hay una probabilidad de tres quintos (60 %) de salir reforzado y una probabilidad de dos quintos (40 %) de ser destituido (la lotería se representaría formalmente como $0{,}6 \times C_3$, $0{,}4 \times C_1$). En este caso, el político dice que prefiere salir debilitado con seguridad a participar en esta lotería. Esto es así porque la valoración relativa de salir debilitado frente a salir reforzado no queda bien reflejada en la lotería anterior: el político necesita una probabilidad todavía más elevada de salir reforzado para aceptar la lotería. Si en cambio la lotería fuera (0,8 × C_3, 0,2 × C_1), el político preferiría jugar dicha lotería a salir debilitado con seguridad. Podemos continuar afinando en este intercambio entre un resultado seguro y una lotería en la que intervengan la primera y última consecuencia hasta llegar a un punto de indiferencia. En este ejemplo, supondremos que al político le es indiferente entre salir debilitado con certeza y la lotería (0,7 × C_3, 0,3 × C_1). En cierto modo, esto significa que la consecuencia intermedia, salir debilitado, vale un 70 % respecto a la primera consecuencia, que es salir reforzado.

Pues bien, la manera de medir cardinalmente las utilidades de las consecuencias consiste en encontrar el punto de indiferencia entre un resultado intermedio seguro y una lotería en la que solo intervengan la mejor y la peor consecuencia. Por comodidad, «normalizamos» la escala de utilidad, forzando que la mejor consecuencia valga 1 y la peor 0. Las opciones intermedias se sitúan entre 0 y 1, dependiendo del riesgo que el agente esté dispuesto a asumir para jugar en esta lotería. Cuanto más elevada sea la probabilidad de conseguir la mejor consecuencia necesaria para la indiferencia, menos riesgo está dispuesto a asumir el agente, lo cual significa que valora más la opción intermedia. En nuestro ejemplo tendríamos este punto de partida:

$$U(C_3) = 1.$$
$$U(C_1) = 0.$$
$$U(C_2) = U(L(0{,}7C_3, 0{,}3C_1) = 0{,}7.$$

Como la utilidad de C_2 es la misma que la de la lotería L y esta lotería tiene una utilidad esperada de 0,7 (0,7 × 1 + 0,3 × 0), asignamos la utilidad 0,7 a C_2. Así, hemos conseguido una manera no arbitraria de asignar utilidad cardinal a las consecuencias.

Podríamos hacer lo mismo si hubiera más de una consecuencia intermedia. En este caso, se busca una relación de indiferencia entre cada consecuencia intermedia y la lotería respectiva entre la mejor y la peor consecuencia posible.

Una vez hemos visto qué es una lotería y cómo se asignan valores cardinales a las consecuencias según loterías especiales en las que solo intervienen la mejor y la peor consecuencia, podemos caracterizar con más rigor en qué consiste una función de utilidad Von Neumann-Morgenstern. La novedad principal de estas funciones es que se definen sobre loterías. Es decir, dadas diferentes loterías, la función de utilidad Von Neumann-Morgenstern asigna números cardinales a cada una que reflejan la intensidad de las preferencias que subyacen a ellas. ¿Qué interés tiene definir la función de utilidad a partir de loterías? En realidad, es la única manera de resolver el problema general de la utilidad esperada.

Ejemplo (tomado de Kydd, 2015)

Supongamos que tres estados (*i*, *j*, *l*) valoran distintamente las tres consecuencias posibles derivadas de una guerra (victoria, firmar un tratado de paz, derrota –*V*, *TP*, *D*–), de manera que los tres prefieren en primer lugar obtener la victoria, en segundo lugar, firmar un tratado de paz y, en tercer y último lugar, ser derrotado en el conflicto. Así pues, asignamos la mejor recompensa (1) a la victoria y la peor recompensa (0) a la derrota.

Entonces cabe preguntar a los estados qué lotería entre el mejor y el peor resultado sería equivalente a la utilidad de firmar un tratado de paz con total seguridad.

El estado núm. 1 responde que una lotería con un 90 % de conseguir la victoria y un 10 % de ser derrotado sería equivalente a firmar un tratado de paz con un 100 % de seguridad. Le atribuimos una utilidad de 0,9 a la firma del tratado de paz [U_i (*TP*) = 0,9]. Este estado considera que el tratado de paz es bastante favorable y que su resultado difícilmente se vería mejorado por una victoria militar. Obviamente, la derrota sería un desastre. Así pues, este estado sería reticente a realizar grandes inversiones de recursos para conseguir la victoria.

El estado núm. 2 responde que una lotería con una posibilidad de victoria o derrota al 50 % sería equivalente a firmar el tratado de paz (seguro al 100 %). Por lo tanto, le atribuimos una utilidad de 0,5 a la firma del tratado de paz [U_j (*TP*) = 0,5]. Este estado considera que el tratado de paz está exactamente en el punto medio entre la victoria y la derrota.

El estado núm. 3 responde que una lotería con un 10 % de posibilidades de victoria (y un 90 % de posibilidades de derrota) sería equivalente a la firma del tratado de paz. Así pues, le atribuimos una utilidad de 0,1 a la firma del tratado de paz [U_l (*TP*) = 0,1]. El estado núm. 3 considera que el tratado de paz es bastante malo, solamente un poco mejor que la derrota y mucho peor que una victoria (aunque esta sea poco probable). Por lo tanto, el estado núm. 3 tendría muchos incentivos para seguir adelante con el conflicto.

Cuadro 4

	Utilidad de las consecuencias		
Estados	Victoria	Tratado de paz	Derrota
Estado (*i*)	1	0,9	0
Estado (*j*)	1	0,5	0
Estado (*l*)	1	0,1	0

Resumiendo: las funciones de utilidad Von Neumann-Morgenstern permiten hacer cálculos de utilidad esperada gracias al procedimiento de definir las opciones intermedias en términos de loterías entre la mejor y la peor opción. De este modo, se pueden comparar y valorar diferentes loterías. Esta es la clave del asunto, puesto que cuando llevamos a cabo una acción en un contexto en el que no hay certidumbre, cada acción equivale a una lotería en la que se combinan probabilidades y consecuencias.

Acabamos de ver que el riesgo es la clave para medir la intensidad de las preferencias del agente. Sin duda, podemos medir estas intensidades porque ahora las funciones de utilidad son cardinales. Pero podemos ir más lejos en el análisis del riesgo. Así, se puede determinar la actitud que el individuo (o el estado en cuestión) adopte hacia el riesgo e incorporarla a la función de utilidad. La manera de hacerlo no es muy complicada: se trata de comprobar si el agente es indiferente o no entre jugar una lotería y obtener con seguridad el valor que se espera. Esto da lugar a tres posibilidades:

- Si el agente es indiferente entre jugar la lotería y obtener el valor esperado de la lotería, es **neutral** al riesgo.

- Si el agente prefiere jugar la lotería a obtener el valor esperado de la lotería, es **propenso** al riesgo.

- Si el agente prefiere el valor esperado de la lotería a jugar la lotería, tiene **aversión** al riesgo.

Supongamos a alguien averso al riesgo: se le ofrece una lotería en la que puede obtener 10 euros con una probabilidad de 0,3, y 2 euros con una probabilidad de 0,7. El valor esperado de la lotería es $0{,}3 \times 10 + 0{,}7 \times 2 = 5{,}44$. En principio, a un agente que no desarrollara una actitud especial hacia el riesgo le tendría que resultar indiferente que le dieran 5,44 euros con seguridad o jugar una lotería con un valor esperado de 5,44 euros. Aun así, si es averso al riesgo preferirá los 5,44 euros en mano a la lotería, a pesar de que el valor esperado es el mismo.

3. La paradoja de Allais

A pesar de que parece que la teoría de la utilidad se basa en premisas ciertas, poco discutibles en cualquier caso, y que la teoría sea en cierto modo una lógica de la elección, igual que la lógica inferencial es una lógica de la argumentación, lo cierto es que numerosos experimentos llevados a cabo desde mediados del siglo XX demuestran que los individuos se desvían sistemáticamente de lo que se puede esperar desde la teoría de la utilidad. Los agentes no siempre siguen un curso de acción «lógico».

En vista de estos resultados, se han intentado introducir reformas de la teoría de la utilidad que aproximen un poco los resultados teóricos a los resultados empíricos. Una visión panorámica de estos esfuerzos se puede encontrar en Kahneman y Tversky.

Bibliografía

D. Kahneman; A. Tversky (ed.) (2000). *Choices, Values, and Frames*. Cambridge: Cambridge University Press.

Aquí no consideraremos teorías heterodoxas de la elección, pero al menos veremos una de las paradojas o resultados chocantes que han contribuido a desarrollarlas, la paradoja de Allais (seguimos la presentación de Binmore).

Bibliografía

K. Binmore (1992). *Fun and Games. A Text on Game Theory* (págs. 115-117). Lexington: Heath.

El problema es este: un agente tiene que elegir entre dos cursos de acción, *L* o *M*. Hay tres posibles estados del mundo, *S*, *T* y *U*. El agente no sabe el verdadero estado del mundo, pero conoce sus probabilidades de ocurrencia: $p(S) = 0{,}01$, $p(T) = 0{,}1$ y $p(U) = 0{,}89$. Las consecuencias de las acciones dependen de qué estado del mundo tenga lugar finalmente. Una vez ha elegido entre *L* y *M*, se le da a escoger entre dos alternativas más, que ahora denominaremos *L'* y *M'* variando los pagos, pero con las mismas creencias sobre los estados del mundo.

En el cuadro 5 tenemos un resumen de la situación. Mientras que hacer *L* tiene un resultado seguro, 500.000 €, hacer *M* nos puede dejar sin nada con probabilidad de 0,01, nos puede hacer ganar 2.500.000 € con probabilidad 0,1 o nos puede hacer ganar 500.000 € con probabilidad 0,89. En cuanto al segundo problema, ahora se tiene que elegir entre las loterías *L'* y *M'*. Si el agente elige *L'* frente a *M'*, se lleva 500.000 € con una probabilidad de 0,11 o 0 € con una probabilidad de 0,89. Si elige *M'* frente a *L'*, consigue 2.500.00 € con una probabilidad de 0,1 o 0 € con una probabilidad de 0,9.

Cuadro 5

La paradoja de Allais			
	S $p(S) = 0{,}01$	*T* $p(T) = 0{,}1$	*U* $p(U) = 0{,}89$
L	500.000 €	500.000 €	500.000 €
M	0 €	2.500.000 €	500.000 €

La paradoja de Allais			
	S $p(S) = 0{,}01$	*T* $p(T) = 0{,}1$	*U* $p(U) = 0{,}89$
L'	500.000 €	500.000 €	0 €
M'	0 €	2.500.000 €	0 €

Al elegir entre *L* y *M*, por un lado, y entre *L'* y *M'*, por otro, muchas personas eligen en el primer caso *L* y en el segundo *M'*. Aun así, es fácil demostrar que estas elecciones son incoherentes.

Según lo que hemos aprendido anteriormente, podemos entender que *L*, *M*, *L'* y *M'* son loterías. Dado que la mejor consecuencia es 2.500.000 € y la peor 0 €, podemos definir las utilidades de la manera siguiente:

$$U(2.500.000) = 1$$

$$U(500.000) = z 0 < z < 1$$

$$U(0) = 0$$

De momento da igual el valor de *z*, siempre que, naturalmente, sea el mismo en los dos problemas de decisión. Veamos cuál es la utilidad esperada de las dos primeras loterías, *L* y *M*:

$$UE(L) = 0{,}01 * z + 0{,}1 * z + 0{,}89 * z = z$$
$$UE(M) = 0{,}01 * 0 + 0{,}1 * 1 + 0{,}89 * z = 0{,}1 + 0{,}89z$$

Si el agente elige *L* frente a *M*, entonces es que *UE(L)* > *UE(M)*, es decir:

$$z > 0{,}1 + 0{,}89z$$

Si despejamos respecto a *z*, nos queda lo siguiente:

$$z > 0{,}1 / 0{,}11$$

Veamos ahora si este resultado es coherente con la elección de *M'* frente a *L'*:

$$UE(L') = 0{,}01 * z + 0{,}1 * z + 0{,}89 * 0 = 0{,}11z$$
$$UE(M') = 0{,}01 * 0 + 0{,}1 * 1 + 0{,}89 * 0 = 0{,}1$$

Si el agente elige *M'*, es porque *UE(M')* > *UE(L')*, es decir:

$$0{,}1 > 0{,}11z$$

Despejando de nuevo respecto a *z*, obtenemos lo siguiente:

$$z < 0{,}1 / 0{,}11$$

Pero este resultado claramente contradice el anterior. Por lo tanto, si en el primer caso elige L frente a M y en el segundo M' frente a L', está violando alguno de los supuestos básicos de la teoría de la utilidad: su comportamiento es irracional. Lo que resulta más desconcertante es que haya un importante porcentaje de gente en los experimentos de laboratorio que revelan este tipo de comportamiento incoherente. La principal sugerencia para entender lo que sucede es que las personas no valoran del mismo modo el riesgo de ganar algo y el riesgo de perderlo, aunque en los términos estrictos de la teoría estos riesgos sean estrictamente equivalentes. Cuando en la elección entre L y M el agente elige L, suele ser porque da mucha importancia a una probabilidad muy pequeña de quedarse sin nada si elige M. En cambio, cuando elige M' entre L' y M', el agente se deja guiar más no por el riesgo de perder, sino por la probabilidad de ganar los dos millones y medio de euros. Esta variación psicológica en la manera de calibrar pérdidas y ganancias va más allá de las consideraciones que prevé la teoría estándar de la utilidad.

Si no se profundiza más en este tipo de desviaciones empíricas respecto a la teoría es porque la teoría de juegos incorpora la teoría de la utilidad estándar, sin dar mucha importancia a anomalías como las de la paradoja de Allais.

Resumen

La teoría de la utilidad estudia las propiedades que tiene que cumplir la acción racional. Esta teoría proporciona una formalización del principio de racionalidad, entendiendo como tal un agente que, cuando tiene que elegir entre diferentes opciones, lo hace según su orden de preferencias. Más técnicamente, el agente es racional si actúa según un orden de preferencias completo y transitivo.

A la hora de analizar un problema de decisión, se tiene que descomponer en cuatro elementos: estados del mundo, acciones, consecuencias de las acciones (una consecuencia es un pareja formada por un estado del mundo y una acción) y un orden de preferencias definido sobre las consecuencias de la acción.

Las preferencias sobre las consecuencias de la acción se pueden cuantificar con funciones de utilidad. Si la acción se lleva a cabo en un contexto de certidumbre, podemos representar este orden de preferencias con una función ordinal, que solo establece qué consecuencia se prefiere a otra, sin poder especificar cuánto más se prefiere.

Si la acción se lleva a cabo sin certidumbre, se tiene que aplicar el principio de utilidad esperada. Ahora la utilidad no se asigna directamente a las consecuencias, sino a las acciones. La utilidad esperada de una acción consiste en la suma de las utilidades de cada consecuencia posible, según un estado del mundo, multiplicadas por la probabilidad de ocurrencia de cada estado del mundo. Para que el principio de utilidad esperada tenga sentido, es necesario que las utilidades por las cuales se multiplica la probabilidad de ocurrencia de los estados del mundo no sean arbitrarias. Concretamente, hacen falta funciones de utilidad Von Neumann-Morgenstern, que son cardinales y reflejan la intensidad de las preferencias. La intensidad de las preferencias se mide por el riesgo que está dispuesto a asumir el agente para conseguir la mejor opción posible frente a conseguir una opción intermedia con seguridad.

Una característica interesante de las funciones de utilidad Von Neumann-Morgenstern es que reflejan la actitud de los agentes hacia el riesgo. Esta actitud consiste en si el agente es indiferente o no entre la utilidad del valor esperado de una lotería y la utilidad que se espera de jugarla.

En la práctica, la teoría de la utilidad no siempre funciona. Un experimento muy sencillo como el que se hace a propósito de la paradoja de Allais revela que los agentes reales no siempre dan el mismo peso a un mismo resultado cuando se presenta como una ganancia y cuando lo hace como una pérdida.

Bibliografía

Becker, G. S.; Stigler, G. J. (1977). «De gustibus non est disputandum». *American Economic Review* (vol. 67, núm. 2, págs. 76-90).

Binmore, K. (1992). *Fun and Games. A Text on Game Theory*. Lexington: Heath.

Downs, A. (1957). *An Economic Theory of Democracy*. Nueva York: Harper and Row.

Kahneman, D.; Tversky, A. (ed.) (2000). *Choices, Values, and Frames*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kydd, A. H. (2015). *International Relations Theory Cambride*. Cambridge: Cambridge University Press.

Morrow, J. (1994). *Game Theory for Political Scientists*. Princeton: Princeton University Press

Olson, M. (1965). *The Logic of Collective Action*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Savage, L. (1954 [1972]). *The Foundations of Statistics*. Nueva York: Dover.