Juegos repetidos

PID_00268973

Ignacio Sánchez-Cuenca

Tiempo mínimo de dedicación recomendado: 2 horas

Universitat
Oberta
de Catalunya

Ignacio Sánchez-Cuenca

El encargo y la creación de este recurso de aprendizaje UOC han sido coordinados por el profesor: Albert Batlle (2019)

Segunda edición: septiembre 2019

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Realización editorial: FUOC

Índice

Introducción

Es muy habitual que una situación estratégica, tanto si se representa como un juego en forma normal como en forma extensiva, se repita a lo largo del tiempo. Cuando es el caso, los modelos estáticos no sirven, son una simplificación abusiva de la realidad. La repetición del juego puede introducir cambios en los equilibrios respecto al juego jugado una sola vez.

En este módulo se analizan los cambios que se producen cuando un juego se repite a lo largo del tiempo. Se verá enseguida que lo que es verdaderamente importante es que el juego se repita indefinidamente, es decir, que los jugadores no sepan cuándo terminarán de interactuar. Si el juego se repite un número de veces determinado, no cambia nada respecto al juego jugado una sola vez.

Cuando el juego se repite indefinidamente, existe la posibilidad de que los jugadores establezcan tácita o explícitamente relaciones de colaboración, en el sentido de que cada uno condicione la estrategia que juega a lo que ha hecho hasta entonces el rival. La aparición de estrategias condicionales aumenta considerablemente los equilibrios del juego. De hecho, hay un teorema, conocido como el "Teorema popular" que establece que bajo ciertas circunstancias los juegos repetidos indefinidamente tienen un número infinito de equilibrios.

Es especialmente interesante este análisis aplicado al dilema del prisionero. Como vimos en el módulo "El principio de racionalidad y la teoría de la utilidad", este juego resulta muy desfavorable para la cooperación y, aun así, hay muchas situaciones sociales que se corresponden con este juego y en las que los agentes, en contra de lo que parece que la teoría establece, cooperan. Una explicación razonable de por qué cooperan es simplemente que el juego se repite de manera indefinida.

El aprendizaje del cálculo de equilibrios en juego repetidos sirve también para abordar los modelos de negociación, en los que dos o más agentes se tienen que poner de acuerdo, con ofertas y contraofertas sucesivas, en cómo se tienen que repartir un bien de un cierto valor. En la medida en que la estructura de la negociación se repite a lo largo del tiempo hasta que se logra un acuerdo, se puede enfocar el problema como un juego repetido. Los modelos de negociación son importantes porque se pueden aplicar en muchas situaciones políticas.

Objetivos

En este módulo se ofrecen enseñanzas sustantivas, pero no se avanza mucho en el manejo de instrumentos de análisis o de cálculo. En este sentido, la única novedad verdaderamente importante es el cálculo de la utilidad esperada a lo largo del tiempo cuando se aplica un factor de descuento temporal. Aun así, se continúa hablando de nociones de equilibrio ya familiares, como el equilibrio de Nash y el equilibrio de perfección en el subjuego.

Los principales objetivos del aprendizaje sustantivo son los siguientes:

1. Distinguir entre juegos repetidos *n* veces e indefinidamente.

2. Entender los efectos de la repetición sobre el dilema del prisionero.

3. Conocer los contenidos básicos del teorema popular.

4. Conocer los modelos de negociación.

1. La naturaleza de los juegos repetidos

Hasta ahora se han estudiado juegos estáticos y juegos dinámicos. Los primeros corresponden a los juegos en forma normal, en los que las decisiones se toman simultáneamente o sin conocimiento de lo que han elegido los otros, mientras que los segundos corresponden a los juegos en forma extensiva. Los juegos en forma extensiva son dinámicos porque hay una secuencia u orden de movimientos y, por lo tanto, podemos describir la «historia» de los movimientos de los jugadores.

Los juegos repetidos consisten en que una estructura de interacción estratégica se repita a lo largo del tiempo. Dicho de otro modo: un juego repetido es el que se juega más de una vez. El juego que se repite puede ser en forma normal o extensiva.

En lenguaje técnico, el juego que se repite se suele denominar el **juego de referencia** (*stade game*). Por ejemplo, podemos considerar que se da si el dilema del prisionero (DP) se repite a lo largo del tiempo, es decir, si los actores en cada periodo de tiempo tienen que jugar un DP (cuadro 16). El juego de referencia en cada fase o en cada etapa es el mismo, pero analizado globalmente, desde la perspectiva del tiempo, el equilibrio o los equilibrios del juego repetido no tienen que coincidir necesariamente con el equilibrio o los equilibrios del juego de referencia considerados en un único momento.

Cuadro 16

El dilema del prisionero			
		J2	
		C	***D***
J1	***C***	2, 2	0, 3
	D	3, 0	1, 1

Cuando un juego se repite, pueden surgir **estrategias condicionales**. En una estrategia condicional, un jugador elige una estrategia u otra según lo que su rival haya hecho hasta entonces. El jugador condiciona su estrategia a lo que haga el otro jugador. El hecho de que haya estrategias condicionales es lo que produce la aparición de nuevos equilibrios respecto al juego de referencia. En el juego repetido puede haber equilibrios diferentes de los equilibrios del juego de referencia porque se pueden elegir estrategias condicionales, lo que resulta imposible en el juego de referencia jugado una sola vez.

Bibliografía

A. Downs (1957). *An Economic Theory of Democracy*. Nueva York: Harper and Row.

Situación de interacción continua

Hay una multitud de situaciones en las que los actores interactúan de manera continua a lo largo del tiempo: dos países que año tras año deciden sus grados de apertura comercial (y que suben o bajan los aranceles), la interacción continua entre un estado y una organización terrorista, la relación que se establece a lo largo del tiempo entre un partido político y los seguidores o votantes, etc. Veamos este último caso.

Se ha dicho una y otra vez, desde Downs en adelante, que la celebración periódica de elecciones ejerce una poderosa influencia sobre la acción de los partidos que llegan al gobierno: una vez elegidos, los partidos y sus miembros se podrían desentender de las promesas hechas en campaña y dedicarse a enriquecerse personalmente o a disfrutar de los múltiples privilegios que comporta el ejercicio del poder político.

En las democracias no hay ningún mecanismo legal que obligue a los políticos a cumplir los programas. Pero si actuaran al margen de los programas, saben que comprometerían las futuras posibilidades de ser reelegidos (los votantes los castigarían). Si quieren mantenerse en el poder o continuar teniendo expectativas de volver a ganar las elecciones, los partidos no se pueden desviar mucho de lo que prometieron a los electores, puesto que condicionarán el futuro voto a la gestión anterior de los partidos.

Al analizar los juegos repetidos, lo que se pretende es averiguar si hay equilibrios nuevos basados en estrategias condicionales que no existían en el juego de referencia. A este respecto resulta fundamental la diferencia entre juegos repetidos un número de veces determinado y juegos repetidos indefinidamente. Pronto veremos que, cuando hay un final conocido por los dos jugadores, la repetición del juego casi no cambia, mientras que si no hay un final establecido, es decir, si el juego se continúa jugando siempre (o no se sabe cuando acabará), los equilibrios del juego repetido son muy diferentes respecto a los del juego de referencia.

2. El tiempo y el factor de descuento

Cuando se hacen cálculos sobre los pagos que reciben los jugadores en cada periodo, ronda o repetición del juego, se debe tener en cuenta que el tiempo no pasa en balde. No siempre podemos suponer que la utilidad final que obtiene cada jugador es simplemente la suma de los pagos conseguidos en cada periodo. Esto es así por dos razones que se complementan entre sí:

- Una técnica.

La razón técnica es muy sencilla

Si el juego se juega indefinidamente, la suma de los pagos en cada periodo da una cantidad infinita. Es decir, si en cada periodo el jugador recibe un pago de dos unidades de utilidad, el pago total en un juego de estas características es infinito. Pero esto, claramente, no tiene sentido. La utilidad será infinita positiva con cada estrategia que proporcione pagos por encima de 0, en cuyo caso no se puede distinguir entre los resultados que producen las diversas estrategias.

- Otra sustantiva.

Razón sustantiva

La razón sustantiva se puede expresar de diferentes maneras, aunque la idea subyacente es siempre la misma: valoramos menos un futuro pago idéntico en cantidad que un pago presente (nos proporciona menos utilidad). Es decir, entre recibir un euro hoy y recibirlo de aquí a un año, solemos preferir recibirlo hoy. Esto puede ser o bien porque el agente sea impaciente (quizá porque realmente necesita el dinero inmediatamente), o bien porque tenga miedo del futuro, que se presenta incierto (quizá teme que haya cierta probabilidad de que el juego se pueda acabar en el periodo siguiente).

En caso de que los pagos sean monetarios, la justificación todavía es más clara: si nos dan el euro, lo podemos invertir para que nos proporcione algún tipo de interés. En cambio, si lo recibimos después de un año, durante el año de espera hemos dejado de ganar el beneficio que podríamos haber conseguido si hubiéramos dispuesto de él desde el comienzo.

Para entender cómo se produce esta pérdida en valor presente de un pago futuro a medida que el pago se aleja en el tiempo, supondremos que es monetario. De este modo, podemos ser más precisos e introducir la tasa de interés. Tenemos una tasa de interés, r, del 1 %. Esto significa que si hoy ponemos en el banco 100 euros, después de un año tenemos 101 ($101 = 100\ (1 + r)$, $r = 0{,}01$). Por lo tanto, no podemos ser indiferentes ante recibir 100 euros hoy y recibir 100 de aquí a un año. Seremos indiferentes más bien ante recibir hoy 100 euros y recibir de aquí a un año 101 euros. Podemos entender la tasa de interés r más generalmente como **tasa de descuento**, y se puede interpretar como la cantidad extra de una unidad de pago que necesitamos para compensar el retraso con el que recibimos el pago. En el ejemplo, la tasa de descuento sería de 0,01 euros por euro.

2.1. El factor de descuento

Esta misma idea se puede reflejar de manera alternativa: en lugar de establecer cuánto tendría que aumentar el futuro pago para que el agente fuera indiferente entre recibirlo hoy y recibirlo en el próximo periodo, podemos calcular cuánto valora el agente en el presente un "pago futuro". Lo conseguimos con el **factor de descuento** δ, que definimos de este modo:

$$\delta = \frac{1}{1+r}$$

Así, un pago de 100 euros de aquí a un año valdría hoy esta cantidad:

$$100\left(\frac{1}{1+0{,}01}\right) = 100*0{,}99 = 99$$

El pago futuro expresado en valor presente tiene un descuento o una depreciación. Cuanto más elevada es la tasa de descuento, más bajo es el factor de descuento, lo cual implica, dado que δ varía entre 0 y 1, que descontamos más valor con el paso del tiempo. Si δ está próximo a 1 (y r, por lo tanto, próximo a 0), como en el ejemplo que utilizamos, esto significa que el descuento es muy pequeño. Si δ se aleja de 1 y se acerca a 0, el agente descuenta mucho el futuro: es muy impaciente o su incertidumbre sobre el final del juego es muy alta.

Aquí utilizaremos el factor de descuento δ, dejando a un lado la tasa de descuento. Lo que queda por resolver ahora es cómo se descuenta el valor para periodos más alejados en el tiempo que en el periodo siguiente. Recordad que el valor de δ es el factor de descuento aplicado al periodo inmediato. Cuando se consideran diferentes (o infinitos) futuros periodos, se tiene que decidir la manera como se aplica δ. El supuesto que casi siempre se emplea en la teoría de juegos es que **el descuento es exponencial**, de modo que el valor presente de un pago π es $\delta^{0\pi}$ en $t = 0$, $\delta^{1\pi}$ en $t = 1$, $\delta^{2\pi}$ en $t = 2$, $\delta^{3\pi}$ en $t = 3$ y así sucesivamente. Matemáticamente, el descuento exponencial para un periodo infinito se puede representar así respecto a un pago cualquiera π:

$$\delta^0\pi + \delta^1\pi + \delta^2\pi + \ldots = \sum_{t=0}^{\infty}\delta^t\pi$$

Esta suma no es infinita, sino que converge en una cantidad determinada siempre que $0 < \delta < 1$. Con esto se resuelve la dificultad técnica antes apuntada de que en un juego indefinido los pagos a lo largo del tiempo se vuelvan infinitos. Veamos por qué esto es así. Supongamos primero, para el caso más sencillo, que $\pi = 1$. En este caso, la serie converge de la manera siguiente:

$$1 + \delta + \delta^2 + \ldots = \frac{1}{1-\delta}$$

La demostración es muy sencilla: si δ está delimitado entre 0 y 1, en cada periodo sucesivo, al ser elevado a un exponente cada vez más elevado, se vuelve más pequeño, con lo cual necesariamente cada nuevo término de la serie será más pequeño y se garantizará, así, la convergencia. Para determinar el valor concreto en que converge, digamos de momento que este valor es s. Sacando factor común en la serie, llegamos a esto:

$$s = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots = 1 + \delta(1 + \delta + \delta^2 + \ldots) = 1 + \delta s$$

Por lo tanto, si pasamos δs a la izquierda restando y sacamos factor común,

$$s(1 - \delta) = 1$$

Ahora solo falta aislar s:

$$s = \frac{1}{1 - \delta}$$

Si π es cualquier otra cantidad que no sea 1, entonces, aplicando la misma lógica, la serie converge de la manera siguiente:

$$\pi + \delta\pi + \delta^2\pi + \delta^3\pi + \ldots = \frac{\pi}{1 - \delta}$$

La demostración sigue los mismos pasos que la anterior.

$$\delta\pi + \delta^2\pi + \delta^3\pi + \ldots = \frac{\delta\pi}{1 - \delta}$$

Una vez expuesta la idea del descuento exponencial del futuro, podemos analizar los juegos repetidos.

3. Juegos repetidos *n* veces

La teoría de juegos repetidos *n* veces se basa en un resultado o proposición básica. Si el juego de referencia que se repite tiene un único equilibrio de Nash, entonces el único equilibrio de Nash en el juego repetido es el equilibrio original del juego de referencia. Por lo tanto, la repetición del juego un número de veces fijo no altera el equilibrio original, no introduce ningún cambio. Así, un DP repetido cinco veces se juega igual que un DP jugado una sola vez. No hay posibilidad de que surjan estrategias condicionales.

La lógica que hay detrás de este resultado no es más que la lógica de retroinducción.

Situémonos en la última ronda o periodo del DP (en la quinta). Es evidente que, como el juego no continuará, la única elección racional consiste en elegir la estrategia dominante, «defraudar». Los dos jugadores defraudan en la ronda final. El DP se juega igual que si se jugara una sola vez. En la cuarta ronda, los jugadores son capaces de anticipar qué pasará en la última y, sabiendo, por lo tanto, que los dos defraudarán, entienden que lo mejor que pueden hacer ahora también es defraudar. No tiene sentido que se planteen cooperar en la cuarta ronda para condicionar la cooperación del rival en la ronda siguiente, puesto que cada uno sabe que el otro defraudará con seguridad en la última ronda y no tienen ningún incentivo para cooperar, por mucho que el otro haya cooperado en el pasado. Pero este mismo razonamiento se puede trasladar a la tercera ronda. Ahora *J*1 y *J*2 saben que los dos defraudarán en las rondas cuarta y quinta, con lo cual vuelven a decidir defraudar. Llegamos así hasta la primera ronda, en la que los dos jugadores defraudan.

Es la expectativa de lo que sucederá en la última ronda del juego repetido lo que arruina la posibilidad de que aparezca alguna forma de cooperación condicional entre los jugadores. Al sacar las consecuencias lógicas del conocimiento cierto de que en la última ronda los dos defraudarán, inician el juego en la primera ronda defraudando. Se trata del mismo argumento que se aplicaba en el caso del juego del ciempiés.

Conclusión

La conclusión se da tanto si el juego se repite dos veces como si lo hace dos mil. Incluso cuando el juego se juega durante 2.000 periodos, es la certeza sobre lo que sucederá en la ronda 2000 lo que impide que en las 1.999 rondas anteriores pueda haber alguna forma de cooperación condicional.

Ahora bien, del mismo modo que en el caso del ciempiés concluíamos que el criterio de retroinducción va demasiado lejos, puesto que en la práctica las personas apoyan cadenas de cooperación durante buena parte del juego, en el caso del DP o de cualquier otro juego repetido *n* veces la predicción de la teoría también se aleja mucho de lo que se aprecia experimentalmente.

Se ha comprobado de manera sistemática que la gente está dispuesta a cooperar en un DP repetido *n* veces, sin hacer caso del argumento retroinductivo de que, si se anticipa que en la última ronda se defraudará, entonces no compensa cooperar antes.

En cualquier caso, este resultado tan poco convincente solo sirve si, como se ha visto antes, el juego de referencia que se repite *n* veces tiene un único equilibrio de Nash. Si el juego de referencia tiene múltiples equilibrios, pueden surgir estrategias condicionales, aunque muchas veces dan lugar a equilibrios poco razonables.

4. El dilema del prisionero repetido indefinidamente

El DP es uno de los juegos que, como vimos en el módulo "Juegos en forma normal o estratégica", reflejan el problema de la cooperación (cuadro 16). Concretamente, se explicó que el DP representa la configuración de pagos más desfavorable posible para la cooperación porque la estrategia de defraudar domina fuertemente a la estrategia de cooperar. Hay una multitud de situaciones sociales y políticas que quedan representadas por el DP. Si elegimos el DP no es solamente porque se dé a menudo, sino porque el análisis de lo que sucede cuando se repite contribuye a disipar en parte la sospecha de que hay algún elemento paradójico o absurdo en la conclusión de que la racionalidad individual siempre obliga en un DP a sacrificar las ganancias colectivas por las personales, con el resultado de que finalmente los dos jugadores están peor que si no hubieran actuado según los dictados de esta racionalidad individual. La paradoja solo se da cuando el DP no se repite.

Cuadro 16

El dilema del prisionero			
		J2	
		C	***D***
J1	***C***	2, 2	0, 3
	D	3, 0	1, 1

Refrescar el problema

Para refrescar el problema, en el cuadro 1 se vuelve a reproducir el DP, definido como un orden de preferencias particular en relación con el juego genérico de la cooperación. La estrategia D domina a C porque $T > R$ y $P > S$. En consecuencia, el único equilibrio de Nash es (D, D).

Cuadro 1

El dilema del prisionero			
		J2	
			D
J1	***C***	*R, R*	*S, T*
	D	*T, S*	*P, P*

R = recompensa
T = tentación
P = penalización
S = *sucker* (hacer el primo)
Orden de preferencias: $T > R > P > S$

Aunque no se demostrará aquí, resulta que, si el juego se repite indefinidamente, el DP pasa a tener infinitos equilibrios. En lugar de entrar en la demostración de este sorprendente resultado, examinaremos simplemente algunos de los equilibrios posibles y nos centraremos en uno especialmente interesante, el equilibrio basado en la **estrategia Tit for Tat** ('toma y daca').

En primer lugar, el equilibrio original del juego de referencia se mantiene como equilibrio del juego repetido indefinidamente. Es decir, una posibilidad de jugar el juego consiste en que los dos defrauden permanentemente. Nos puede parecer que esto presenta un panorama un poco gris, pero esto no quita que sea un equilibrio de pleno derecho. Si $J1$ espera que $J2$ responda a la cooperación defraudando, y $J2$ espera lo mismo de $J1$, ninguno de los dos tiene razones para cooperar: sus expectativas se refuerzan mutuamente y hacen que defraudar sea la respuesta óptima ante la elección de defraudar del otro. Los pagos esperados de los dos jugadores en este equilibrio son los siguientes:

$$P+\delta P+\delta^2 P+\delta^3 P+\ldots=\frac{P}{1-\delta}$$

Resulta chocante que esto pueda ser un equilibrio, puesto que es evidente que, si cooperaran entre sí, podrían conseguir pagos muy superiores. Aun así, este es el resultado más lógico si domina la desconfianza absoluta entre los jugadores. En cualquier caso, es importante darse cuenta de que la combinación opuesta de estrategias, cooperar siempre, no es un equilibrio de Nash ni en el juego de referencia ni en el juego repetido indefinidamente. Si en la versión repetida $J1$ espera que $J2$ cooperará siempre, la mejor respuesta posible de $J1$ a esta expectativa no es cooperar también, sino defraudar. Si los dos jugadores jugaran la estrategia de cooperar siempre, el pago esperado de cada uno sería el siguiente:

$$\frac{R}{1-\delta}$$

Pero cada uno podría estar mejor defraudando siempre si el otro jugara esta estrategia de siempre cooperar. Concretamente, si $J1$ defrauda siempre mientras que $J2$ coopera siempre, $J1$ obtendría

$$\frac{T}{1-\delta}$$

siendo

$$\frac{T}{1-\delta}>\frac{R}{1-\delta}$$

puesto que hemos partido de un orden de preferencias en el que $T > R$. Por lo tanto, $J1$ tendría un incentivo para desviarse del par de estrategias de cooperar siempre, con lo cual cooperar siempre no puede ser un equilibrio de Nash.

Tanto las estrategias de defraudar siempre como de cooperar siempre son incondicionales. La acción del jugador no depende de lo que haya hecho hasta entonces el rival. La primera estrategia, defraudar siempre, es un equilibrio, mientras que la segunda, cooperar siempre, no lo es.

Aparte de estas dos estrategias incondicionales, hay una infinidad de estrategias condicionales posibles. Son estas estrategias condicionales las que expanden el espacio de equilibrios posibles.

4.1. Ejemplo de una estrategia condicional

Veamos algunos ejemplos de estrategias condicionales. Tenemos **la estrategia desoladora** (***grim-trigger strategy***), que consiste en empezar cooperando, continuar cooperando siempre que el rival coopere y, en caso de que en algún momento el rival defraude, defraudar siempre a partir de ahí. Para determinar si esta estrategia, jugada por los dos jugadores, representa un equilibrio, se tiene que averiguar si, dados los pagos que produce, alguno de los jugadores tendría una razón para desviarse. Si los dos jugadores juegan la estrategia desoladora, los dos empiezan cooperando y continúan cooperando indefinidamente, sin necesidad de que tengan que poner en práctica el castigo que se contiene en su estrategia (defraudar hasta la eternidad en caso de que el rival defraude en una ocasión). Los pagos que obtendrían serían, por lo tanto, los siguientes:

$$\frac{R}{1-\delta}$$

Para ver si alguno de los jugadores tiene incentivos para desviarse de su estrategia, se tiene que comparar el pago que obtendría desviándose con el que acabamos de ver que obtendría si continuara jugando la estrategia desoladora. Supongamos que *J*1 en un periodo cualquiera *t* defrauda. En *t*, *J*1 recibe el pago máximo, *T*, el pago de la tentación, pero a partir de aquel momento (a partir de *t* +1), sabe que *J*2 defraudará siempre y, por lo tanto, lo mejor que puede hacer *J*1 a partir de ahora es defraudar siempre. Esquemáticamente, podemos representar la historia del juego así:

Cuadro 2. Una desviación de *J*1 en *t* de la estrategia desoladora

	t - 1	*T*	*t* + 1	*t* + 2	...	Pago esperado a partir de *t*
*J*1	*C*	*D*	*D*	*D*	...	$T+\delta P+\delta^2 P+\ldots=T+\dfrac{\delta P}{1-\delta}$
*J*2	*C*	*C*	*D*	*D*	...	$S+\delta P+\delta^2 P+\ldots=S+\dfrac{\delta P}{1-\delta}$

Ahora ya podemos saber bajo qué condiciones a *J*1 no le compensa desviarse de la estrategia desoladora. Concretamente, no le compensará cuando el pago esperado de continuarla jugando sea superior al pago esperado de desviarse una vez. Es decir, cuando

$$\frac{R}{1-\delta} > T + \frac{\delta P}{1-\delta}$$

Se trata de aislar δ en esta ecuación. Lo podemos hacer de la manera siguiente: multiplicamos a ambos lados por (1 – δ) para liberarnos de las fracciones y después ponemos en un lado todos los términos que multiplican a δ y en el otro todos los términos que están libres de δ:

$$\begin{aligned}
&R > T(1-\delta)+\delta P \\
&R > T-\delta T+\delta P \\
&\delta T-\delta P > T-R \\
&\delta(T-P) > T-R \\
&\delta > \tfrac{T-R}{T-P}
\end{aligned}$$

Como el juego es simétrico y consideramos, por simplicidad, que los dos jugadores tienen el mismo factor de descuento, podemos concluir que, siempre que los jugadores sean bastante pacientes, es decir, siempre que

$$\delta > \frac{T-R}{T-P}$$

la estrategia desoladora, que es una estrategia condicional, configura un equilibrio. Esto significa que, si cada uno de los jugadores juega la estrategia desoladora y su factor de descuento es superior a la cantidad indicada, ninguno de los dos tiene incentivos para desviarse.

4.2. Variaciones de estrategia desoladora: Tit for Tat

La estrategia desoladora es solamente una de las infinitas estrategias condicionales posibles. Hay innumerables variaciones de la estrategia desoladora. Por ejemplo, empezar cooperando, continuar cooperando mientras el otro coopere y, en caso de que el otro defraude una vez, castigarlo a partir de entonces defraudando en las 1.423 rondas siguientes. Como antes, si el factor de descuento satisface cierta condición, esta estrategia puede ser un equilibrio.

Entre todas las variantes de la estrategia desoladora hay una que destaca claramente, la estrategia Tit for Tat, identificada por primera vez por Anatol Rapoport. Esta estrategia se puede formular así:

1) El jugador empieza cooperando en la primera ronda.

2) En todas las demás rondas, el jugador hace lo que hizo su rival en la ronda anterior.

De este modo, el jugador coopera en la ronda t si su rival cooperó en la ronda $t-1$, y defrauda en t si su rival defraudó en $t-1$. Supongamos que el rival, $J2$, defraudó en $t-1$. Entonces, $J1$ defrauda en t. Si en t $J2$ coopera, $J1$ coopera en $t+1$; si $J2$ defrauda en t, $J1$ vuelve a defraudar en $t+1$. Y así sucesivamente.

¿Qué relación tiene Tit for Tat con la estrategia desoladora? Tit for Tat es una variante de la estrategia desoladora porque, del mismo modo que esta estrategia, produce cooperación mientras el rival coopera, y se distinguen en que el castigo que aplica cuando el rival defrauda es el más suave posible, defraudar en ronda la siguiente, mientras que con la estrategia desoladora el castigo es el máximo posible, defraudar hasta la eternidad.

¿Bajo qué condiciones representa un equilibrio que los dos jugadores jueguen la estrategia Tit for Tat? Cuando continuar jugándola sea mejor que desviarse.

1) Desviarse solo en una ronda de Tit for Tat defraudando una vez después de que el rival haya cooperado en la ronda anterior y volviendo después a la estrategia original.

2) Desviarse siempre, defraudando de manera permanente a partir de la primera desviación.

Es posible demostrar que bajo ciertas condiciones Tit for Tat produce mejores resultados que cualquiera de las dos desviaciones, quiere decir que esta estrategia es un equilibrio. En rigor se demuestra que, del mismo modo que no compensa ni una ni infinitas desviaciones, tampoco compensa un número intermedio n de veces, $1 < n < \infty$:

4.3. Características de la estrategia Tit for Tat

En cualquier caso, ¿qué tiene de especial Tit for Tat frente a otras estrategias condicionales? Robert Axelrod, en su famoso libro *La evolución de la cooperación*, hizo un torneo de liguilla entre estrategias para un DP repetido indefinidamente.

Bibliografía

R. Axelrod (1984). *The evolution of cooperation*. Nueva York: Basic Books. (Está traducido al español en Alianza, 1986).

Los participantes en la liguilla enviaban la que creían que sería la mejor estrategia posible, la estrategia que maximizaría los pagos. Axelrod tradujo todas estas estrategias a un lenguaje de programación y puso a competir cada estrategia contra todas las demás. Concretamente, cada estrategia jugaba doscientas rondas del DP con cada una de las otras estrategias. La estrategia ganadora fue precisamente la Tit for Tat. Era la más sencilla de todas las estrategias propuestas. Según Axelrod, las razones de este inesperado éxito de Tit for Tat se explican por algunas de sus características:

1) Es una estrategia **decente**, entendiendo por decencia que empieza cooperando, que no es la primera en defraudar.

2) Es una estrategia **indulgente**, en el sentido de que retoma la cooperación con relativa rapidez después de que el rival haya defraudado.

3) Es una estrategia **vengativa**, puesto que, si su rival defrauda, no pasa por alto una ofensa parecida y también defrauda.

4) Es una estrategia **clara** cuyo funcionamiento es transparente y fácil de entender. Esta combinación de características hacen de Tit for Tat una estrategia ganadora en el tipo de torneo que organizó Axelrod.

No obstante, para que Tit for Tat tenga éxito se requiere que haya otras estrategias decentes. Tit for Tat obtiene muy buenos resultados si se fundamenta en otras estrategias decentes con las que pueda establecer relaciones duraderas de cooperación condicional. En cambio, funciona peor ante estrategias no decentes: por ejemplo, Tit for Tat ante una estrategia que empiece defraudando y a continuación coopere salvo que el otro defraude, caso en el que defrauda permanentemente, produce una secuencia indefinida de defecciones mutuas, puesto que en la primera ronda Tit for Tat coopera y la otra defrauda; en la segunda ronda, Tit for Tat defrauda y la otra coopera, y a partir de aquí la otra ya defrauda siempre.

En cualquier caso, que Tit for Tat tenga unas propiedades tan atractivas no significa necesariamente que, cuando los jugadores jueguen un DP, seleccionen el equilibrio correspondiente a esta estrategia. Al fin y al cabo, Tit for Tat es tan solo un equilibrio posible dentro de un conjunto de equilibrios infinito. En realidad, no es evidente que todo jugador racional tenga que ser consciente de las características especiales de esta estrategia.

Por otro lado, cuando vemos casos reales de cooperación condicional exitosa, es difícil saber qué estrategias sostienen la cooperación. Fijaos en que cualquier variante de la estrategia desoladora, incluyendo Tit for Tat y la propia estrategia desoladora, producen cooperación condicional. Con otras palabras, la cooperación condicional es compatible o sostenible con múltiples estrategias posibles.

Ante los resultados del análisis del DP repetido indefinidamente, podemos tener la tentación de concluir que las estrategias condicionales son lo que explican la presencia de un grado de cooperación en las sociedades más elevado del que se podría esperar desde la teoría de juegos. Aun así, conviene subrayar e insistir en que estrategias como Tit for Tat solo son un equilibrio cuando dos personas juegan el DP. En cambio, las formas de cooperación colectiva en la sociedad, cuando se dan, suelen involucrar a un gran número de jugadores.

A medida que aumenta el número de jugadores que intervienen en un DP, las posibilidades de que surja cooperación condicional disminuyen rápidamente, por mucho que se repita el juego y por muy paciente que sea cada uno de los jugadores.

Sencillamente, si el grupo es muy grande, el único equilibrio realista de un único DP jugado entre todos los miembros del grupo consiste en hacer que todos defrauden permanentemente.

5. El teorema popular (*the folk theorem*)

Hasta ahora hemos visto que, cuando el DP se juega indefinidamente, surgen múltiples equilibrios de Nash (la estrategia desoladora y sus múltiples variantes). Se puede demostrar que la repetición indefinida afecta igual a todos los juegos, no solamente al DP.

El llamado **teorema popular** demuestra que los juegos repetidos indefinidamente tienen infinitos equilibrios.

Aunque este teorema resulta muy interesante, puesto que revela la enorme diferencia que hay entre los juegos jugados una vez y los jugados indefinidamente, en el fondo compromete muchísimo la capacidad predictiva de la teoría. La teoría no puede aclarar cuál de los infinitos equilibrios seleccionarán los jugadores.

Nos limitaremos a presentar la idea general que guía la demostración del teorema.

Bibliografía

D. Kreps (1990a). *A course in microeconomic theory* (págs. 507-508). Princeton: Princeton University Press.

P. K. Dutta (1999). *Strategies and games* (págs. 232-234). Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Para ello, necesitamos dos conceptos nuevos:

1) El de ciclo.

Concepto de ciclo

Se define técnicamente un ciclo como cualquier combinación posible de acciones a lo largo del tiempo. Por ejemplo, en el DP un ciclo podría ser: (C, C) durante T_1 rondas, (C, D) durante T_2 rondas, (D, C) durante T_3 rondas y (D, D) durante T_4 rondas. El ciclo $T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ quedaría entonces caracterizado por los valores de T_i, que en ocasiones pueden ser cero. Por ejemplo, la combinación de estrategias de defraudar siempre sería un ciclo con estos valores: $T_1 = T_2 = T_3 = 0$, $T_4 = 1$.

2) El de pago minimax.

Concepto de pago "minimax"

Por otro lado, el pago minimax es el mejor que puede obtener un jugador cuando su rival tiene como única finalidad hundirle los pagos. Se trata del pago máximo entre los mínimos que le deja el rival, de aquí viene el nombre de *minimax*. Ahora es irrelevante considerar si el rival tiene buenas razones para buscar antes de nada hacerle la vida imposible a nuestro jugador. Solo importa establecer el concepto.

Supongamos que $J1$ y $J2$ se encuentran en un juego cualquiera. Podría ser que ninguno de ellos tuviera incentivos para desviarse de la estrategia de equilibrio, sea cual sea, si la consecuencia de esta desviación consiste en recibir el pago minimax. Es decir, los equilibrios se pueden sostener sobre la base de que si $J1$, por ejemplo, se plantea desviarse del equilibrio, anticipa que su desviación hará realidad la amenaza de $J2$ de aplicar el castigo del pago minimax.

*J*2 amenaza a *J*1 de condenarlo a recibir su pago minimax si *J*1 se desvía del equilibrio. Si *J*1 hace la misma amenaza, castigar a *J*2 con el pago minimax en caso de desviación, *J*2 tampoco tendrá razones para desviarse de la estrategia que se haya configurado en equilibrio.

Pues bien, lo que establece el teorema popular es simplemente que cualquier ciclo de estrategias que proporcione pagos superiores al pago minimax puede ser un equilibrio de Nash gracias al mecanismo de las amenazas mutuas de forzar el pago minimax en caso de que se produzca una desviación.

Al basar la demostración en la idea de ciclo de estrategias, lo que se consigue es poner de manifiesto que cualquier combinación de estrategias, por muy absurda o arbitraria que nos parezca, puede llegar a ser un equilibrio de Nash siempre que los pagos que proporcione el ciclo sean mejores que el peor pago posible, el pago que recibiría el jugador si se le ocurriera desviarse en una ocasión del ciclo de estrategias propuesto. El peor pago posible es el pago minimax, es decir, el que resulta cuando el rival no tiene más propósito que fastidiar al otro jugador.

El teorema popular tiene gran importancia. Por un lado, señala la increíble variedad de equilibrios posibles en los juegos repetidos indefinidamente. Casi cualquier combinación de estrategias puede llegar a ser un equilibrio. Pero, por otro lado, este teorema revela las fuertes limitaciones de la teoría de juegos como teoría predictiva. La teoría establece un margen muy grande de resultados posibles y no puede especificar qué equilibrio se seleccionará finalmente en el conjunto de todos los equilibrios.

6. El modelo de negociación de Rubinstein

En esta sección final, veremos el modelo de negociación de Rubinstein como un juego repetido tres veces. El análisis de este modelo nos permitirá utilizar todo el instrumental analítico que hemos aprendido hasta ahora, tanto la idea de equilibrio de perfección en el subjuego como el descuento temporal de los juegos repetidos.

En una negociación, dos o más partes tienen que ponerse de acuerdo en cómo repartirse un bien. Aquí nos limitaremos al caso más simple, en el que solo hay dos negociadores. Corresponde a Nash el mérito de haber ofrecido por primera vez en 1950 una solución a los problemas de negociación basada en la teoría de juegos (en este sentido, conviene no confundir la idea de equilibrio de Nash con la idea de solución negociadora de Nash). Lo que hizo Nash fue establecer una serie de condiciones que tendría que cumplir una propuesta de solución, y demostró axiomáticamente que su propuesta las satisfacía. Ante esta solución axiomática, **Ariel Rubinstein** planteó en 1982 un modelo que no se basaba en condiciones ideales, sino que partía directamente de la racionalidad de los agentes y de su poder de negociación. En realidad, el propio Nash había planteado también de manera embrionaria una solución basada solo en la racionalidad, pero el desarrollo completo tuvo que esperar hasta el trabajo de Rubinstein. El modelo de Rubinstein consiste en un juego repetido indefinidamente, a pesar de que aquí se expondrá una versión simplificada en solo tres periodos en la que se llega, en esencia, al mismo resultado.

Bibliografía

M. Osborne; A. Rubinstein (1990). *Bargaining and markets* (págs. 29-49). San Diego: Academic Press.

6.1. El poder negociador

La clave para entender un problema de negociación consiste en cómo se han de sacar consecuencias del poder negociador de las partes. Supongamos que lo que hay en juego es simplemente un euro. Dos personas se tienen que poner de acuerdo en cómo se lo tienen que repartir: si no lo consiguen, los dos se quedan sin nada.

Para Nash, el poder negociador queda reflejado en la actitud hacia el riesgo del individuo.

Buenos resultados

Cuanto más necesidad tenga una de las partes de conseguir buenos resultados, más averso al riesgo será el agente, es decir, menos se arriesgará a que haya un desacuerdo final y menos capacidad de amenazar tendrá en el intercambio de ofertas y contraofertas.

Rubinstein parte del mismo supuesto, pero identifica el poder negociador con el factor de descuento de los individuos.

Cuanto más bajo sea el factor de descuento, es decir, cuanto más impaciente sea el agente, menos poder negociador tendrá, puesto que más prisa tendrá para conseguir un acuerdo, incluso a costa de obtener quizá el peor resultado posible.

En el modelo hay dos jugadores, *J*1 y *J*2. A diferencia de lo que hemos hecho hasta ahora, consideraremos que cada jugador tiene su factor de descuento, que puede ser diferente al del otro jugador. Así, hablaremos de δ_1 y δ_2 respecto a *J*1 y *J*2 respectivamente. Los periodos de negociación son tres. Cada uno se compone de dos partes, una oferta $(x, 1 - x)$ y una respuesta a la oferta, en que x es la parte que se lleva *J*1 y $1 - x$, la que se lleva *J*2. Si un jugador acepta la oferta de su rival, el juego acaba. Si no la acepta, se pasa al periodo siguiente. *J*1 propone ofertas en los periodos impares y *J*2 en los pares.

Los pagos del juego corresponden a la misma oferta que finalmente se acepte (salvo que los actores no se pongan nunca de acuerdo, en cuyo caso cada uno obtiene 0). El valor en el presente de los pagos que se obtienen en el periodo t se tiene que descontar exponencialmente, de modo que una oferta $(x, 1 - x)$ aceptada en el periodo t vale, en términos presentes,

$$\left(\delta_1^t x,\ \delta_2^t(1 - x)\right)$$

Este juego tiene múltiples equilibrios de Nash, la mayoría de los cuales no tienen mucho sentido.

Por ejemplo, la siguiente combinación de estrategias es un equilibrio de Nash

(*J*1 siempre pide 1 y rechaza cualquier oferta inferior; *J*2 siempre ofrece 1 y acepta cualquier oferta).

Este par de estrategias se traduciría así en este contexto: *J*1 hace la oferta (1, 0) en la primera ronda, por la cual *J*1 se queda con todo el euro y *J*2 con nada, y *J*2 lo acepta, con lo cual se acaba el juego. Fijaos en que si *J*2 está convencido de que *J*1 rechaza cualquier otra cosa y *J*1 cree que *J*2 se conforma con cualquier oferta, cada estrategia es una respuesta óptima a la otra.

6.2. El equilibrio de perfección en el subjuego

Rubinstein demostró que, a pesar de que hay una multiplicidad de equilibrios de Nash, hay un único equilibrio de perfección en el subjuego. Esta demostración solo depende de un supuesto: que cuando a un jugador le sea indiferente entre aceptar y rechazar una oferta, elige aceptarla. En el caso más extremo, esto implica que, si un jugador, en el último periodo, tiene que elegir entre una oferta que le deja 0 euros y rechazarla y provocar la desaparición del euro, acepta la oferta. El jugador prefiere aceptar la oferta (1, 0) a rechazarla.

Para calcular el equilibrio de perfección en el subjuego, se tiene que proceder por retroinducción, de atrás hacia delante. Se desarrollará el argumento **en tres fases**, **a**, **b** y **c**.

Esquemáticamente, el proceso se podría representar como aparece en el cuadro 5.

Cuadro 5

El modelo de negociación de Rubinstein en tres periodos		
	Oferta de ***J*1**	**Oferta de** ***J*2**
$t = 1$	$(1 - \delta_2 (1 - \delta_1 1), \delta_2 (1 - \delta_1 1))$	
$t = 2$		$(\delta_1 1, 1 - \delta_1 1)$
$t = 3$	(1, 0)	

a) Empezamos por el periodo final, $t = 3$. Habiendo solo tres periodos de ofertas y haciendo ofertas *J*1 en los periodos impares, *J*1 tiene capacidad de ultimátum en la última ronda. *J*1 puede forzar al máximo a *J*2, puesto que, si *J*2 rechaza la oferta final de *J*1, *J*2 se queda sin nada. De este modo, en $t = 3$ *J*1 hace la oferta (1, 0) y *J*2, por la razón anteriormente expuesta, acepta.

b) En $t = 2$, le toca a *J*2 hacer una oferta. *J*1 solo la aceptará si es al menos tan buena como la que puede conseguir en el periodo siguiente, $t = 3$. Lo que puede conseguir en $t = 3$ es 1, que en el periodo $t = 2$ lo valora como $\delta_1 1$. Por lo tanto, la oferta de *J*2 será $(\delta_1 1, 1 - \delta_1 1)$. Está oferta hace a *J*1 indiferente entre aceptar y rechazar. Se supone que *J*1 la acepta.

c) En $t = 1$, *J*1 hace una oferta que *J*2 aceptará solo si lo que le toca es al menos tan bueno como lo que podría conseguir rechazando la oferta y pasando al periodo siguiente. Lo que *J*2 puede conseguir en $t = 2$ es $1 - \delta_1 1$ y, por lo tanto, *J*2 será indiferente en $t = 1$ entre conseguir $\delta_2(1 - \delta_1 1)$ en $t = 1$ o conseguir $1 - \delta_1 1$ en $t = 2$. Por lo tanto, la oferta de *J*1 será $(1 - \delta_2(1 - \delta_1 1), \delta_2(1 - \delta_1 1))$. Cuando *J*1 hace esta oferta, *J*2 la acepta inmediatamente.

El único equilibrio de perfección en el subjuego consiste, por lo tanto, en que *J*1 y *J*2 sigan las estrategias que se acaban de especificar. En la primera ronda *J*1 ofrece $(1 - \delta_2(1 - \delta_1 1), \delta_2(1 - \delta_1 1))$ y *J*2 acepta. El juego acaba entonces. O si se prefiere, esta es la ruta de equilibrio. No obstante, esta ruta de equilibrio se sostiene sobre las respuestas óptimas calculadas fuera de la ruta de equilibrio, es decir, la ruta de equilibrio es así porque los jugadores anticipan que en el segundo periodo la oferta de *J*2 sería $(\delta_1 1, 1 - \delta_1 1)$ y que en el tercer periodo la oferta de *J*1 sería (1, 0).

Supongamos que $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}8$. Teniendo el mismo poder negociador, la diferencia o asimetría que se produzca en la oferta inicial de *J*1 será consecuencia única y exclusivamente del poder de ultimátum que tiene *J*1 en el último periodo. Con este factor de descuento común, la oferta de *J*1 sería (0,84, 0,16). Si además variamos el factor de descuento, el poder negociador, de forma que *J*1 sea más paciente que *J*2, la diferencia será todavía más importante. Si tenemos que $\delta_1 = 0{,}9$ y $\delta_2 = 0{,}7$. Ahora la oferta de *J*1 sería (0,93, 0,07), todavía más asimétrica.

Cuando el juego se juega indefinidamente, habiendo una sucesión ininterrumpida de ofertas y contraofertas hasta que se logra un acuerdo, el poder de ultimátum de *J*1 desaparece y cualquier diferencia que se produzca en la oferta de equilibrio en el primer periodo se deberá casi en su totalidad a los diferentes factores de descuento de los jugadores.

6.3. La información y la negociación

La propiedad más sorprendente del modelo de Rubinstein, ya sea en la versión simplificada en tres periodos, ya sea en el juego repetido indefinidamente, es que la negociación nunca se llega a desarrollar, siempre se acaba en la primera ronda con una oferta de equilibrio que lanza *J*1 y que *J*2 acepta. Sin embargo, en el mundo real vemos que a veces las negociaciones se prolongan durante largos periodos de tiempo. Esto no tiene sentido en términos del modelo de Rubinstein, puesto que los dos jugadores saben que, cuanto más tiempos pase, más valor pierde el bien sobre el cual negocian. Anticipando esta pérdida de valor según el factor de descuento de cada individuo, las partes consiguen llegar a un acuerdo en la primera ronda del juego. Si a pesar de esto las negociaciones no se acaban siempre en la primera ronda, es porque la situación real es más compleja que el modelo de Rubinstein, concretamente, porque habrá información incompleta, es decir, los jugadores no tendrán toda la información relevante sobre los rivales y podrán avanzar en la negociación con la intención de pedir parte de esta información que les falta. Este tipo de juegos de información incompleta se estudian en el módulo "Juegos de información incompleta".

Bibliografía

P. Lange; G. Tsebelis (1993). «Wages, strikes and power: an equilibrium analysis». En: Booth; James; Meadwell (eds.). *Politics and Rationality*. Cambridge: Cambridge University Press.
D. P. Baron; J. Ferejohn (1987). «Bargaining and agenda formation in legislatures». *American Economic Review* (vol. 72, núm. 2, págs. 303-309).

Ejemplos de ciencias sociales

El modelo de Rubinstein no tiene solamente aplicaciones económicas. He aquí un par de ejemplos en ciencias sociales:

- El modelo se ha utilizado para entender por qué y cómo se dan las huelgas en los enfrentamientos entre trabajadores y empresarios.

- También se ha utilizado para modelizar el funcionamiento interno del Congreso americano.

Resumen

Un juego se puede repetir un número determinado de veces o indefinidamente. Si se repite *n* veces, el equilibrio del juego es el mismo que cuando se juega una única vez. La repetición finita del juego no introduce ningún cambio debido a la lógica retroinductiva: puesto que los jugadores saben que la última ronda es estratégicamente equivalente al juego jugado una sola vez, jugarán en la última ronda como si jugaran una sola vez. Anticipando esto, en la penúltima ronda sucede lo mismo, y también en la antepenúltima, y así hasta llegar a la primera ronda.

Si el juego se juega indefinidamente, el equilibrio del juego de referencia continúa siendo un equilibrio, aunque ahora hay otros muchos equilibrios posibles. Por ejemplo, en un dilema del prisionero, la pareja de estrategias (defraudar siempre; defraudar siempre) es un equilibrio de Nash. Pero también hay otros muchos equilibrios basados en estrategias condicionales. Uno de estos equilibrios destaca sobre los otros: el que tiene lugar cuando los dos jugadores juegan la estrategia *Tit for Tat* (toma y daca). Esta estrategia es fácil de aplicar, tiene propiedades únicas y sirve para explicar múltiples casos de cooperación condicional.

Yendo más allá del dilema del prisionero, el teorema popular demuestra que, si el factor de descuento es bastante alto, hay infinitos equilibrios de Nash en un juego repetido indefinidamente. Cualquier combinación de estrategias que proporcione pagos superiores al pago minimax puede ser un equilibrio de Nash. Esta multiplicidad de equilibrios provoca que la teoría sea incapaz de determinar qué pasará cuando el juego se repita.

No obstante, hay veces que la repetición del juego no impide que haya un único equilibrio. Así, en el modelo de negociación de Rubinstein, a pesar de que hay infinitos equilibrios de Nash, hay un único equilibrio de perfección en el subjuego. Este equilibrio refleja el poder negociador de las partes. El poder negociador se refleja en el factor de descuento. Cuanto más impaciente es una persona, menos poder tendrá en una negociación, puesto que más urgencia tiene para conseguir un acuerdo cuanto antes mejor, incluso si es a costa de conseguir un acuerdo en peores términos.

Bibliografía

Alesina, A. (1988). «Credibility and policy convergence in a two-party system with rational voters». *American Economic Review* (núm. 78, págs. 796-805).

Axelrod, R. (1984). *The Evolution of Cooperation*. Nueva York: Basic Books. (Hay traducción española en Alianza, 1986).

Baron, D. P.; Ferejohn, J. (1987). «Bargaining and agenda formation in legislatures». *American Economic Review* (vol. 72, núm. 2, págs. 303-309).

Calvert, R. (1995). «Rational actors, equilibrium and social institutions». En: J. Knight (ed.). *Explaining Social Institutions*. Ann Arbor: University of Michigan Press.

Downs, A. (1957). *An Economic Theory of Democracy*. Nueva York: Harper and Row.

Dutta, P. K. (1999). *Strategies and Games*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Gibbons, R. (1992). *Game Theory for Applied Economists*. Princeton: Princeton University Press.

Kreps, D. (1990). *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton: Princeton University Press.

Lange, P.; Tsebelis, G. (1993). «Wages, strikes and power: an equilibrium analysis». En: Booth; James; Meadwell (eds.). *Politics and Rationality*. Cambridge: Cambridge University Press.

Osborne, M.; Rubinstein, A. (1990). *Bargaining and markets*. San Diego: Academic Press.