

---

# Interpolació, derivació i integració numèrica

---

PID\_00266168

Luis Ortiz Gracia

---

Temps mínim de dedicació recomanat: 2 hores

---





# Índex

<b>Introducció</b> .....	5
<b>1. Interpolació de funcions</b> .....	6
1.1. Interpolació polinòmica .....	8
1.2. Mètodes de càlcul del polinomi interpolador .....	9
1.2.1. Mètode de Lagrange .....	9
1.2.2. Mètode de les diferències dividides de Newton .....	10
1.3. Interpolació per trams .....	11
1.3.1. <i>Splines</i> cúbics .....	13
<b>2. Derivació i integració numèrica</b> .....	14
2.1. Derivació numèrica .....	14
2.2. Integració numèrica .....	15
2.2.1. Fórmules d'integració interpolatòria .....	16
2.2.2. Mètode d'extrapolació de Romberg .....	21
2.2.3. Mètodes de Montecarlo .....	22
<b>Bibliografia</b> .....	25



## Introducció

Aquesta guia d'estudi tracta els temes de la interpolació, la derivació i la integració numèrica i es divideix en dos apartats. El primer se centra en la interpolació de funcions. S'hi aborden l'existència i la unicitat del polinomi interpolador, a més de dos mètodes diferents que serveixen per calcular-lo: el mètode de Lagrange i el mètode de les diferències dividides de Newton. A continuació s'exposa el desavantatge que suposa treballar amb polinomis interpoladors de grau elevat, fet que es manifesta en l'anomenat *fenomen de Runge*, i es proposa com a alternativa la interpolació per trams, en la qual destaquen els *splines* cúbics. L'apartat 2 està dedicat a la derivació i integració numèrica. Pel que fa a la derivació, s'expliquen les dues etapes del procés d'aproximar la primera i la segona derivada d'una funció: càlcul del polinomi interpolador i aproximació de la derivada de la funció mitjançant la derivada del polinomi interpolador. Finalment, s'aborda la integració numèrica mitjançant tres enfocaments diferents: integració basada en el càlcul del polinomi interpolador (regla dels trapezoides i regla de Simpson), integració per extrapolació (mètode de Romberg) i integració basada en la simulació (mètodes de Montecarlo).

La majoria dels mètodes s'acompanyen d'exemples senzills que en faciliten la comprensió. A l'hora de desenvolupar aquesta guia s'ha posat el focus d'atenció en l'aplicació pràctica dels mètodes exposats i en l'observació dels resultats més que en l'anàlisi rigorosa de l'error numèric, ja que aquest últim aspecte es pot trobar amb facilitat en els manuals de referència.

## 1. Interpolació de funcions

A partir d'un conjunt de parelles de punts del plànol, podríem preguntar-nos si existeix una funció  $p$ , d'un tipus determinat, de manera que el gràfic d'aquesta funció passés per tots aquests punts. Aquesta qüestió s'anomena **problema d'interpolació** i el procés de cerca de la funció  $p$  s'anomena **interpolació**.

Posem, per exemple, que tenim la funció  $f(x) = x^2$  i dos punts de pas d'aquesta funció  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ,  $(x_1, y_1) = (2, 4)$ . Quina és la funció  $p(x)$  que passa per aquests dos punts? La resposta en aquest cas és la recta única  $y = mx + b$ , que uneix tots dos punts i té aquest pendent:

$$m = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$$

i

$$b = 4 - 3 \cdot 2 = -2,$$

és a dir,  $y = 3x - 2$ .

En general, les parelles de punts s'han d'expressar matemàticament com a  $(x_k, y_k)$ , on  $k$  és l'índex que farem servir per recórrer tots els punts donats. Concretament, suposarem que tenim  $m+1$  punts  $i$ , per tant,  $k = 0, \dots, m$ . D'aquesta manera, si  $m = 1$ , llavors tenim els punts  $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1)\}$ , si  $m = 2$ , llavors tenim el conjunt de punts  $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ , i així successivament. A més, suposarem que aquests punts són diferents dos en dos, és a dir,  $x_k \neq x_i$  si  $k \neq i$ . Volem veure si existeix alguna funció  $p$  tal que  $p(x_k) = y_k$ , per a  $k = 0, \dots, m$ .

### Exemple 1

El valor de l'acceleració de la gravetat en un punt de la superfície terrestre que es troba al nivell del mar depèn de la latitud. Experimentalment, s'ha comprovat la correspondència donada en la taula següent:

Taula 1

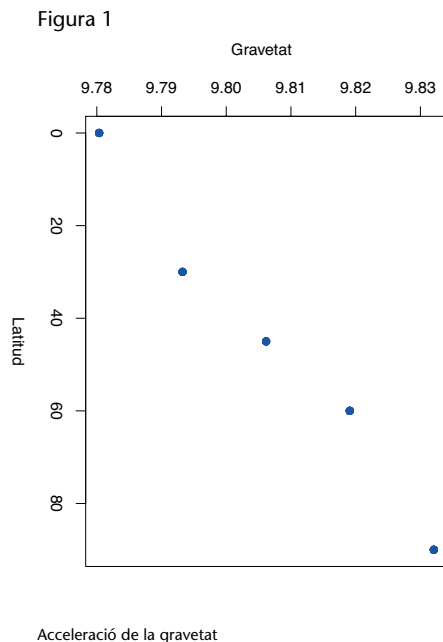
Latitud (en graus)	Acceleració de la gravetat (en $m/s^2$ )
0	9,780350
30	9,793238
45	9,806154
60	9,819099
90	9,832072

Mesures de la gravetat en diferents latituds

El problema de la interpolació consisteix a trobar el valor de la gravetat a Barcelona, que està situada en una latitud de 41 graus i 25 minuts.

La resolució d'un problema d'interpolació és d'utilitat en moltes situacions, en particular quan la procedència dels punts  $(x_k, y_k)$  és experimental. En l'exemple 1 hem considerat un procés en el qual, per determinats valors d'una variable  $x$  (latitud), s'obté un resultat expressat per a la variable  $y$  (acceleració de la gravetat). Suposem que coneixem experimentalment la resposta  $y_k$  obtinguda sota condicions  $x_k$  i que ens interessa trobar el resultat  $y$  que obtindríem si tinguéssim unes condicions  $x$  no experimentades, com, per exemple, saber el valor de la gravetat corresponent a la latitud de 41 graus i 25 minuts.

Podem pensar que els punts donats formen part de la gràfica d'una funció  $f$  que voldríem conèixer almenys aproximadament i de la qual únicament sabem que  $f(x_k) = y_k$ , per a  $k = 0, \dots, m$ . Aquesta situació és freqüent en la ciència i la tècnica, i ens condueix al problema típic d'interpolació en el qual no aproximem nombres, sinó funcions. En la figura 1 hem representat en color blau els cinc punts de la taula 1.



Quan es planteja un problema d'interpolació com el que acabem de veure, podem formular-nos les preguntes següents:

- De quin tipus ha de ser la funció  $p$  que busquem (polinòmica, trigonomètrica, racional, etc.)?
- Existeix la funció que estem buscant? I, si és així, és única?
- La funció  $p$  és una bona aproximació de la funció  $f$  en els punts en què no coincideixen?

### 1.1. Interpolació polinòmica

Donats  $m + 1$  punts d'interpolació  $(x_k, f_k)$ ,  $k = 0, \dots, m$  amb  $x_k \neq x_i$  si  $k \neq i$ , anomenarem **interpolació polinòmica** la determinació d'un polinomi  $p(x)$  de grau menor o igual que  $N$  tal que

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, m.$$

Quan  $f_k$  representi el valor d'una certa funció  $f$  a  $x_k$ , parlarem d'interpolació **polinòmica de la funció  $f$**  en les **abscisses d'interpolació  $x_k$** .

Per donar resposta a les tres preguntes anteriors, començarem dient que la funció  $p$  que busquem formarà part del conjunt de polinomis de grau més petit o igual que  $N$  per a un cert valor de  $N$ , és a dir,  $p(x)$  serà

$$p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Per determinar aquest polinomi, haurem de conèixer el valor dels  $N + 1$  coeficients  $a_0, a_1, \dots, a_N$ . Si  $a_N$  és no nul, direm que  $p(x)$  té exactament grau  $N$ .

En relació amb la segona pregunta formulada, podem afirmar que existeix un únic polinomi  $p_m(x)$  de grau més petit o igual que  $N = m$ , tal que  $p_m(x_k) = f_k$  per a  $k = 0, \dots, m$ . El polinomi  $p_m(x)$  s'anomena **polinomi interpolador** de  $f$  en les abscisses  $x_k, k = 0, \dots, m$ . Aquesta afirmació és certa. Per fer-ho, considerem un polinomi  $p_m(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ . Després d'imposar les condicions d'interpolació, obtenim un sistema lineal d'equacions  $m + 1$  en les  $m + 1$  incògnites  $a_0, a_1, \dots, a_m$ :

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_m x_0^m &= f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_m x_1^m &= f_1 \\ &\dots = \dots \\ a_0 + a_1 x_m + \dots + a_m x_m^m &= f_m \end{aligned} \right\}$$

El determinant de la matriu del sistema és el **determinant de Vandermonde** i té aquesta forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^m \end{vmatrix} = \prod_{k>i} (x_k - x_i).$$

Observem que aquest determinant és diferent de zero, ja que  $x_i \neq x_k$  si  $i \neq k$ . Per tant, el sistema plantejat és compatible determinat amb una única solució  $a_0, a_1, \dots, a_m$ , coeficients de l'únic polinomi interpolador.

**Productori**

La lletra  $\Pi$  majúscula denota el productori, també conegut com multiplicatori o simplement producte. És una notació matemàtica que representa una multiplicació els factors dels quals són els que hi ha entre parèntesis, variant els subíndexs d'acord amb la condició que hi ha sota del símbol.



El mètode que acabem de descriure per trobar  $p_m(x)$  resulta especialment laboriós quan  $m$  és gran. En el subapartat 1.2. estudiarem el mètode de Lagrange i el de les diferències dividides de Newton, respectivament, amb el propòsit de facilitar aquesta tasca.

Finalment, en relació amb la tercera pregunta que hem formulat, ens interessa tenir un criteri per “mesurar la proximitat” del polinomi  $p_m(x)$  a la funció  $f$ .

Diem que una funció és derivable amb continuïtat en l'interval  $(a,b)$  si existeix la derivada de la funció en tots els punts de l'interval i si, a més, la funció derivada és contínua en cada punt de l'interval. Aquests tipus de funcions són de classe  $C^1$  en l'interval  $(a,b)$  i es representen com a  $f \in C^1(a,b)$ . De la mateixa manera, direm que  $f$  és  $n + 1$  vegades derivable amb continuïtat en  $(a,b)$  i ho escriurem com a  $f \in C^{n+1}(a,b)$ , si  $f$  pot derivar-se  $n + 1$  vegades en  $(a,b)$  i la derivada  $n + 1$  de  $f$  és contínua en  $(a,b)$ .

Suposem, per tant, que  $f$  és de classe  $C^{n+1}$  en  $(a,b)$  i que  $x_k \in (a,b), k = 0, \dots, m$ ; llavors, per a tot qualsevol punt  $x$  de l'interval  $(a,b)$  tenim l'expressió següent per a l'error d'interpolació:

$$f(x) - p_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi(x))}{(m+1)!} (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_m),$$

en què  $\xi(x)$  depèn de  $x$  i pertany al mínim interval que conté les abscisses  $x_0, x_1, \dots, x_m$  i  $x$ , que indicarem com a  $\langle x_0, \dots, x_m, x \rangle$ .

## 1.2. Mètodes de càlcul del polinomi interpolador

En aquest subapartat destacarem els mètodes de càlcul del polinomi interpolador coneguts com a **mètode de Lagrange** i **mètode de les diferències dividides de Newton**.

### 1.2.1. Mètode de Lagrange

Es pren com a expressió del polinomi interpolador aquesta **fórmula d'interpolació de Lagrange**:

$$p_m(x) = \sum_{k=0}^m f_k l_k(x), \quad l_k(x) = \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)}, k = 0, \dots, m.$$

Els polinomis  $l_k(x)$  reben el nom de **polinomis de Lagrange**. Es pot observar que el grau de  $l_k(x)$  és igual a  $m$  i que  $l_k(x_i) = \delta_{ik}, i, k = 0, \dots, m$ . Per tant,  $p_m(x_i) = f_i, i = 0, \dots, m$ , que és el que volíem.

#### Lectures complementàries

Per a un estudi a fons sobre funcions derivables, es recomana llegir la guia de *Continuïtat i derivabilitat* (PID\_00224048).

**Exemple 2**

Calculeu  $f(3)$  per interpolació cúbica a partir de les dades de la taula:

$x_k$	1	2	4	5
$f_k$	0	2	12	21

Observem que en aquest cas  $m = 3$ . Els polinomis de Lagrange associats als punts de la taula són:

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{1}{-12}(-40 + 38x - 11x^2 + x^3),$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{1}{6}(-20 + 29x - 10x^2 + x^3),$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{1}{-6}(-10 + 17x - 8x^2 + x^3)$$

i

$$l_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{1}{12}(-8 + 14x - 7x^2 + x^3).$$

I el polinomi interpolador és:

$$p_3(x) = f_0l_0(x) + f_1l_1(x) + f_2l_2(x) + f_3l_3(x) = \frac{1}{12}(-8 + 2x + 5x^2 + x^3).$$

Finalment, el polinomi interpolador en  $x = 3$  val  $\frac{35}{6} \approx 5,83$ .

**1.2.2. Mètode de les diferències dividides de Newton**

Expressem ara el polinomi interpolador de la manera següent:

$$p_m(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_m(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{m-1}).$$

El mètode de les diferències dividides ens permet calcular els coeficients  $c_j, j = 0, \dots, m$ , mitjançant la construcció de les anomenades **diferències dividides**, definides per:

$$f[x_i] = f_i, i = 0, \dots, m,$$

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}, x_{i+j+1}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+j+1}] - f[x_i, \dots, x_{i+j}]}{x_{i+j+1} - x_i}$$

$$i = 0, \dots, m - j, j = 0, \dots, m - 1.$$

L'esquema de construcció de les diferències dividides de Newton és el següent:

$x_0$	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
$x_1$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
$x_2$	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		
$x_3$	$f[x_3]$			

Es pot provar (per inducció sobre  $m$ ) que el polinomi  $p_m(x)$  de grau més petit o igual que  $m$  també és donat per la **fórmula d'interpolació de Newton** següent:

$$p_m(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_m](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{m-1}),$$

on  $c_j = f[x_0, x_1, \dots, x_j]$ .

El mètode de les diferències dividides de Newton, a més de ser un procediment interessant per al càlcul explícit del polinomi interpolador, té l'avantatge que, si s'hi afegeixen més punts d'interpolació, permet aprofitar tota la feina feta. Per construir el nou polinomi interpolador només cal continuar l'esquema de construcció de diferències dividides i calcular els nous coeficients  $c_{m+1}, c_{m+2}, \dots$ , aprofitant d'aquesta manera tots els càlculs previs.

**Exemple 3**

A partir de la taula següent de la funció  $f(x) = e^x$ , calculeu el valor aproximat de  $\sqrt[3]{e}$  per interpolació cúbica emprant el mètode de Newton.

$x$	0,0	0,2	0,4	0,6
$f(x)$	1,0000	1,2214	1,4918	1,8221

La taula de diferències dividides de Newton és:

0	1,0000			
		1,107		
0,2	1,2214		0,6125	
		1,352		$\frac{0,68125}{3}$
0,4	1,4918		0,74875	
		1,6515		
0,6	1,8221			

El polinomi interpolador és:

$$p_3(x) = 1 + 1,107x + 0,6125x(x - 0,2) + \frac{0,68125}{3}x(x - 0,2)(x - 0,4),$$

que en  $x = \frac{1}{3}$  val  $x = \frac{113,0395}{81}$ .

**1.3. Interpolació per trams**

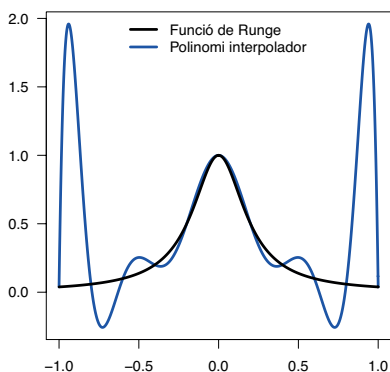
A mesura que el nombre de punts d'interpolació s'incrementa, el grau del polinomi interpolador també creix. Aquest fet dificulta el càlcul del polinomi interpolador per qualsevol dels dos mètodes que hem vist en el subapartat 1.2.

És més, encara que un polinomi interpolador de grau elevat passi pels punts donats, és possible que fluctuï àmpliament entre dos punts. Aquest fenomen es coneix com a **fenomen de Runge** i està il·lustrat en la figura 2, on hem representat la funció de Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

(línia de color negre) i hem calculat el polinomi interpolador de grau 10 utilitzant punts equidistants entre -1 i 1 (línia de color blau). Com es pot observar, el polinomi interpolador oscil·la àmpliament quan ens aproximem als extrems de l'interval d'interpolació.

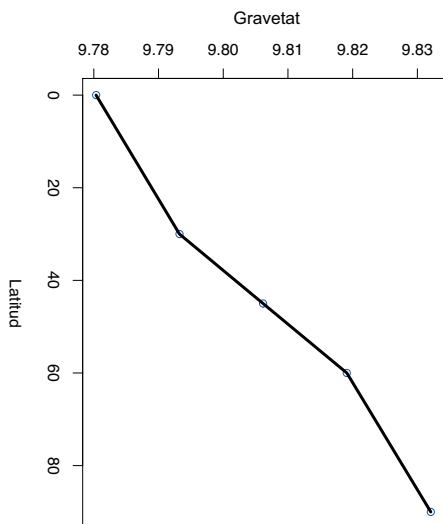
Figura 2



Fenomen de Runge

La **interpolació per trams** ofereix una alternativa al càlcul del polinomi interpolador tal com el coneixem fins ara. Un enfocament inicial a la interpolació per trams podria ser l'anomenada **interpolació per trams lineal**, que consisteix a fer una interpolació lineal (polinomi interpolador de primer grau) entre cada parell de punts consecutius al llarg de l'eix d'abscisses. Com a resultat de la interpolació lineal per trossos, obtenim una funció contínua però no derivable, ja que presenta un pic en cadascun dels punts on s'uneixen dos polinomis interpoladors de primer grau i, per tant, les derivades laterals no coincideixen. Podem observar aquests pics en la figura 3, en la qual il·lustrem la interpolació per trams lineal utilitzant el conjunt de punts de la taula 1. La derivabilitat és una propietat desitjable que satisfà la interpolació per trams quan fem servir **splines cúbics**.

Figura 3



Interpolació per trams lineal

### 1.3.1. Splines cúbics

Els *splines* cúbics proporcionen una corba suau i derivable malgrat que sigui una interpolació per trams.

Suposem que tenim un conjunt de  $n$  punts per interpolar  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . Definim  $S_i$  com la funció cúbica polinomial que representa la corba sobre el domini  $[x_i, x_{i+1}]$ . Per a aquests  $n$  punts tindrem, per tant,  $n - 1$  polinomis cúbics interpoladors  $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ , sobre els dominis  $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  respectivament. Inicialment considerarem que cadascun d'aquests polinomis té la forma següent:

$$S_i(x) = d_i(x - x_i)^3 + c_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + a_i, \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Si fem servir un polinomi d'aquest tipus per a cadascun dels intervals, tenim en total  $4(n - 1) = 4n - 4$  incògnites que corresponen a  $a_i, b_i, c_i, d_i$  per a les  $n - 1$  equacions. Atès que volem que l'*spline* sigui continu i derivable, tindrem, finalment, el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{aligned} S_i(x_i) &= y_i, & i = 1, \dots, n - 1, \\ S_i(x_{i+1}) &= y_{i+1}, & i = 1, \dots, n - 1, \\ S'_i(x_{i+1}) &= S'_{i+1}(x_{i+1}), & i = 1, \dots, n - 2, \\ S''_i(x_{i+1}) &= S''_{i+1}(x_{i+1}), & i = 1, \dots, n - 2, \end{aligned} \right\}$$

Les dues primeres equacions ens asseguren que si avaluem el nostre *spline* en un dels nodes (o punts  $x_i$ ) interns, el resultat és l'esperat,  $y_i$ . La tercera equació ens assegura que tenim una derivada contínua en cada node intern, mentre que la quarta equació assegura una segona derivada contínua, la qual cosa significa que la primera derivada és diferenciable.

Aquestes condicions ens porten a tenir un total de  $4n - 6$  equacions amb  $4n - 4$  incògnites, la qual cosa fa que el sistema sigui compatible indeterminat. Podem solucionar aquesta indeterminació incloent-hi les dues condicions addicionals  $S'_1(x_1) = 0$  i  $S''_{n-1}(x_n) = 0$ . Aquestes dues condicions asseguren que, en els dos punts extrems  $x_1$  i  $x_n$ , la primera derivada és lineal i, per tant, la funció *spline* continua anant en la direcció que havia pres. Aquesta construcció ens condueix a l'anomenat ***spline natural***.

## 2. Derivació i integració numèrica

### 2.1. Derivació numèrica

La **derivació** ens proporciona una mesura del ritme o la velocitat de canvi d'una determinada quantitat. Els ritmes de canvi de quantitats apareixen en moltes disciplines, especialment en la ciència i l'enginyeria. Alguns dels exemples fonamentals es troben en la relació entre la posició d'un objecte, la seva velocitat i l'acceleració. Si la posició  $x$  d'un objecte que es mou al llarg d'una línia recta és coneguda com una funció del temps,

$$x = f(t),$$

llavors la velocitat de l'objecte  $v(t)$  és la derivada de la posició pel que fa al temps,

$$v = f'(t).$$

De manera similar, l'acceleració de l'objecte  $a(t)$  és la derivada de la velocitat pel que fa al temps,

$$a = v'(t).$$

És important assenyalar que les derivades també exerceixen un paper fonamental en el càlcul dels valors màxims i mínims d'una funció.

Tot i que hi ha regles conegudes per derivar les funcions més usuals, no sempre es poden fer servir, com quan les funcions són donades per taules de valors. En aquests casos, hem de recórrer a tècniques numèriques que, partint dels valors de la funció en certes abscisses, ens permetin calcular una aproximació al valor d'alguna de les seves derivades en una abscissa propera. Aquestes tècniques numèriques també es fan servir per resoldre equacions diferencials en els casos en què no es poden resoldre analíticament (una equació diferencial és una equació que relaciona una funció amb les seves derivades, i resoldre una equació diferencial consisteix a trobar aquesta funció).

La **derivació numèrica** d'una funció  $f$  derivable en  $a \in \mathbb{R}$  consta de dues etapes:

- Construcció del polinomi interpolador  $p_m(x)$  a la funció  $f$  en una família d'abscisses  $x_0, x_1, \dots, x_m$  (que convindrà que siguin properes a  $a$ ).
- Derivació del polinomi  $p_m(x)$  i avaluació en  $a$ , amb la fórmula de derivació numèrica:  $f'(a) \approx p'_m(a)$ .

Les fórmules obtingudes reben el nom de **fórmules de derivació interpolatòries**.

Suposem que volem aproximar la derivada d'una funció  $f$  a  $x = a$  fent servir les abscisses  $x_0 = a$  i  $x_1 = a + h$ . En aquest cas, el polinomi interpolador  $p_1(x)$  és de primer grau. Tal com hem vist en el subapartat 1.2.2., el polinomi interpolador és:

$$p_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

i, per tant,  $p_1'(a) = f[x_0, x_1] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ . D'aquesta manera, hem obtingut una aproximació a la primera derivada de la funció  $f$  en un punt  $x = a$ ,

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

El procediment anterior es pot repetir per aproximar la segona derivada de  $f$  a  $x = a$ , que denotarem com a  $f''(a)$ . Considerem les abscisses  $x_0 = a - h, x_1 = a, x_2 = a + h$  i el polinomi interpolador següent:

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Si derivem dues vegades el polinomi interpolador  $p_2(x)$  i l'avaluem en  $x = a$ , obtenim

$$f''(a) \approx 2f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

#### Exemple 4

Ara cal aprendre a fer servir les fórmules que hem vist per aproximar la primera i la segona derivada de la funció  $f(x) = \ln(x)$  a  $x = a = 1$ . En aquest cas, sabem que  $f'(x) = \frac{1}{x}$  i  $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ , i, per tant,  $f'(1) = 1, f''(1) = -1$ . Si considerem  $h = 0,1$  i les fórmules de derivació interpolatòries per a la primera i segona derivada, obtenim:

$$f'(1) \approx \frac{f(1+0,1) - f(1)}{0,1} = \frac{\ln(1+0,1) - \ln(1)}{0,1} \approx \frac{0,0953}{0,1} = 0,9531$$

i

$$f''(1) \approx \frac{f(1+0,1) - 2f(1) + f(1-0,1)}{0,1^2} \approx \frac{0,0953 - 0,1054}{0,01} = -1,0050.$$

## 2.2. Integració numèrica

La **integració** apareix sovint quan resollem problemes d'enginyeria i ciències. Un dels exemples més simples en l'aplicació de la integració apareix en el càlcul de la longitud d'una corba. Quan tenim dibuixada una corba en el plànol que és donada per l'equació  $y = f(x)$ , la longitud  $L$  de la corba entre els punts  $x = a$  i  $x = b$  és donada pel que anomenem **integral definida**,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

#### Lectures complementàries

Per a un estudi a fons de les integrals definides, es recomana llegir la guia *Integració: Integral de Riemann* (PID\_00224050).

en què  $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$  s'anomena **integrant** i és una funció de la variable independent  $x$ . Els valors  $a$  i  $b$  es denominen **límits d'integració**.

El valor de la integral definida és un nombre. Per calcular-lo, és necessari trobar una primitiva de l'integrant, és a dir, una funció la derivada de la qual sigui la integrant. Finalment s'avalua aquesta primitiva en els límits d'integració  $a$  i  $b$ . Vegem un exemple que il·lustri aquests conceptes.

### Exemple 5

Estem interessats a calcular la longitud de la recta  $f(x) = x$  entre els punts  $x = 0$  i  $x = 5$ . En aquest sentit, calcularem el valor de  $L$  seguint la fórmula anterior:

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + 1^2} dx = \sqrt{2} \int_0^5 1 dx = \sqrt{2} \cdot [x]_0^5 = 5\sqrt{2},$$

en què hem emprat el fet que  $x$  és una primitiva d'1 i la regla de Barrow:

$$\int_0^5 1 dx = [x]_0^5 = 5 - 0 = 5.$$

En general, donada una funció  $f$  definida sobre un interval fitat  $[a, b]$ , la forma general de la integral definida serà donada per

$$J(f) = \int_a^b f(x) dx$$

i representa l'àrea delimitada per la funció, les rectes verticals  $x = a, x = b$  i l'eix d'abscisses.

La **quadratura** o **integració numèrica** consisteix a donar fórmules aproximades per al càlcul de la integral  $J(f)$  de  $f$ . Aquestes fórmules poden ser de gran utilitat quan la integral no es pot calcular per mètodes analítics (per exemple, la funció  $f(x) = e^{-x^2}$  no té primitiva i és de summa importància en probabilitat, ja que apareix en la distribució normal estàndard). També pot passar que no convingui fer-los servir perquè resulten complexos d'utilitzar i ens conformem a conèixer  $J(f)$  amb una precisió donada.

#### 2.2.1. Fórmules d'integració interpolatòria

Amb la finalitat de calcular  $J(f)$  de manera aproximada, en aquest subapartat estudiarem dos mètodes d'integració numèrica basats en el polinomi interpolador: la regla de Simpson i la regla dels trapezis. Més concretament, aproximarem  $f$ , per un polinomi interpolador  $p_m(x)$ , a  $m + 1$  abscisses de l'interval  $[a, b]$  ( $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_m \leq b$ ) i calcularem de manera exacta  $J(p_m)$ . D'aquesta manera obtindrem una aproximació a  $J(f)$ :



$$J(f) = \int_a^b f(x)dx \approx J(p_m) = \int_a^b p_m(x)dx. \tag{1}$$

Atès que les fórmules que veurem es troben mitjançant la integració d'un polinomi interpolador de grau  $m$ , reben el nom de **fórmules d'integració interpolatòria de  $m + 1$  abscisses**.

Tal com s'ha vist en el subapartat 1.2.1., el polinomi interpolador de Lagrange depèn del següent:

$$p_m(x) = \sum_{k=0}^m f_k l_k(x), \quad l_k(x) = \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)}, k = 0, \dots, m.$$

Si integrem la fórmula d'interpolació de Lagrange, obtenim a partir de (1) la fórmula d'integració numèrica següent:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^m W_k f_k, \quad W_k = \int_a^b l_k(x)dx, k = 0, \dots, m. \tag{2}$$

Els coeficients  $W_k$ , els anomenats **pesos** de la fórmula d'integració, depenen de l'interval  $[a,b]$  i de les abscisses  $x_0, \dots, x_m$ , però no depenen de la funció  $f$ . En el subapartat 1.1. ja hem vist que el polinomi interpolador  $p_m(x)$  és únic i, per tant, la fórmula (2) és exacta per a polinomis de grau més petit o igual que  $m$ . Aquest fet ens proporciona una manera de calcular els pesos  $W_k$  sense necessitat de calcular les integrals de  $l_k(x)$ . Així doncs, imposem que la fórmula (2) sigui exacta per als polinomis  $1, x, x^2, \dots, x^m$  i es resol el sistema lineal resultant. Aquesta metodologia de càlcul dels pesos s'anomena **mètode dels coeficients indeterminats**.

Vegem un exemple de fórmula d'integració numèrica basada en el polinomi interpolador de segon grau d'una funció  $g(t)$  en les abscisses  $-1, 0$  i  $1$ . En concret, volem trobar els pesos d'integració  $w_{-1}, w_0$  i  $w_1$ , de manera que la fórmula d'integració numèrica següent sigui exacta per a tots els polinomis de grau més petit o igual que  $2$ , en què  $g_{-1} = g(-1), g_0 = g(0)$  i  $g_1 = g(1)$ :

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \approx w_{-1}g_{-1} + w_0g_0 + w_1g_1.$$

Si imposem l'exactitud de la fórmula per a  $g(t) = 1, t, t^2$ , s'obté aquest sistema lineal:

$$\left. \begin{array}{rcl} w_{-1} & + & w_0 & + & w_1 & = & 2 \\ -w_{-1} & & & & + & w_1 & = & 0 \\ w_{-1} & & & & + & w_1 & = & \frac{2}{3} \end{array} \right\},$$

la solució del qual és  $w_{-1} = w_1 = \frac{1}{3}, w_0 = \frac{4}{3}$ , la qual cosa dona lloc a la fórmula

d'integració numèrica següent:

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \approx \frac{1}{3}(g_{-1} + 4g_0 + g_1). \quad (3)$$

Aquesta fórmula es pot traslladar a qualsevol interval  $[a,b]$  mitjançant el canvi de variables  $t = 2\frac{x-a}{b-a} - 1$  o, equivalentment,  $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$ , la qual cosa dona lloc a l'anomenada **fórmula de Simpson**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right], \quad (4)$$

que també s'escriu d'aquesta manera:

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)], \quad (5)$$

en què  $c = \frac{a+b}{2}$  i  $h = \frac{b-a}{2}$ .

És interessant assenyalar que sobre els polinomis de grau 3, les fórmules (4) i (5) també són exactes, ja que si  $g(t) = t^3$  els dos membres de (3) són nuls.

### Exemple 6

Considerem la integral següent:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = 1.$$

Si aproximem el valor de la integral fent servir la fórmula de Simpson en l'interval  $[a,b] = [0, \frac{\pi}{2}]$ , s'obté aquesta fórmula:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \approx \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{6} \left[ \sin(0) + 4 \sin\left(\frac{0 + \frac{\pi}{2}}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{\pi}{12} \left[ 4 \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right] \approx 1,0023.$$

Si considerem el polinomi interpolador de primer grau en les abscisses  $x = a$  i  $x = b$ , obtenim l'anomenada **fórmula del trapezi**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)],$$

que també s'escriu d'aquesta manera:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(a) + f(b)],$$

on  $h = b - a$ .

Observem que, en aquest cas, l'àrea delimitada per la funció  $f$ , les rectes  $x = a$ ,  $x = b$  i l'eix d'abscisses s'aproxima per l'àrea del trapezi de bases  $f(a), f(b)$  i altura  $b - a$ .

**Exemple 7**

Considerem de nou la integral de l'exemple 6:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = 1.$$

Si aproximem el valor de la integral fent servir la fórmula del trapezi en l'interval  $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$ , s'obté aquesta fórmula:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx \approx \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} \left[ \sin(0) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854.$$

Les fórmules del trapezi i de Simpson són un cas particular de les anomenades **fórmules tancades de Newton-Cotes**, que s'obtenen considerant  $m+1$  abscisses equidistants en l'interval  $[a, b]$ . Aquestes fórmules són exactes fins i tot per a tots els polinomis de grau  $m+1$  quan  $m$  és parell (o, de manera equivalent, quan el nombre d'abscisses és imparell), tal com succeïa amb la fórmula de Simpson ( $m = 2$ ).

Normalment les fórmules d'integració numèrica no s'apliquen sobre tot l'interval  $[a, b]$ , sinó sobre subintervalls de  $[a, b]$ . Així és com tenen lloc les **regles compostes d'integració numèrica**. Aquestes regles d'integració ens proporcionen millors resultats en l'aproximació.

Si dividim l'interval  $[a, b]$  en  $M$  parts iguals i en cadascuna d'elles apliquem la fórmula del trapezi, obtenim l'anomenada **regla dels trapezis**:

$$\int_a^b f(x) dx \approx T(h) = \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(b-h) + f(b)],$$

obtinguda en descompondre la integral inicial com la suma de les integrals en les  $M$  parts de longitud  $h = \frac{b-a}{M}$  en què s'ha dividit l'interval  $[a, b]$ :

$$J(f) = \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{M-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \sum_{k=0}^{M-1} J_k(f),$$

on  $x_k = a + kh, k = 0, \dots, M$  i  $J_k(f) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})]$ .

**Exemple 8**

En l'exemple 7 hem vist que la integral del sinus entre 0 i  $\frac{\pi}{2}$ , el valor exacte del qual és 1, podia calcular-se de manera aproximada mitjançant la fórmula del trapezi. D'aquesta manera, s'obtenia el següent:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx \approx 0,7854.$$

Apliquem a continuació la regla dels trapezis composta al càlcul de la mateixa integral dividint l'interval d'integració  $[0, \frac{\pi}{2}]$  en quatre parts iguals, és a dir, posem que  $M = 4$ .

D'aquesta manera,  $h = \frac{\pi}{8}$  i, per tant:

$$T\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{16} \left[ \sin(0) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \approx 0,9871.$$

Podem observar que, si fem servir la regla dels trapezis, el resultat aproximat s'apropa més al valor exacte que si utilitzem la fórmula del trapezi i, per tant, l'error que cometem en el càlcul és menor.

En canvi, si dividim  $[a,b]$  en  $2M$  parts iguals i apliquem en cada interval de longitud  $h = \frac{b-a}{2M}$  la fórmula de Simpson, obtenim la **regla de Simpson**:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S(h),$$

on

$$S(h) = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) \cdots + 2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)].$$

### Exemple 9

En l'exemple 6 hem vist que la integral del sinus entre 0 i  $\frac{\pi}{2}$ , el valor exacte del qual és 1, podia calcular-se de manera aproximada mitjançant la fórmula de Simpson. D'aquesta manera, s'obtenia el següent:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \approx 1,0023.$$

Apliquem a continuació la regla de Simpson composta al càlcul de la mateixa integral dividint l'interval d'integració  $[0, \frac{\pi}{2}]$  en quatre parts iguals, és a dir, posem que  $M = 2$ . D'aquesta manera,  $h = \frac{\pi}{8}$  i, per tant:

$$S\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{24} \left[ \sin(0) + 4 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4 \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \approx 1,0001.$$

Podem observar que si fem servir la regla de Simpson, el resultat aproximat s'apropa més al valor exacte que si fem servir la fórmula de Simpson i, per tant, l'error que cometem en el càlcul és menor.

En aquest subapartat hem estudiat fórmules d'integració interpolatòria per a dues abscisses (fórmula del trapezi) i per a tres abscisses (fórmula de Simpson). En general, les fórmules d'integració interpolatòria de  $m + 1$  abscisses  $x_0, x_1, \dots, x_m$ , obtingudes integrant el polinomi interpolador en aquestes abscisses, són exactes per als polinomis de grau més petit o igual que  $m$ . Això succeeix per a qualsevol elecció que fem de les abscisses dins de l'interval d'integració. Una elecció adequada d'aquestes  $m + 1$  abscisses podria proporcionar fórmules d'integració numèrica de  $m + 1$  abscisses, exactes per a polinomis de grau més petit o igual que  $2m+1$ . Aquestes fórmules reben el nom de **fórmules gaussianes**.

### Lectures complementàries

Podeu ampliar les fórmules gaussianes en el capítol 4 d'A. Delshams; A. Benseny; A. Aubanell (1998). *Útiles básicos de cálculo numérico*. Barcelona: Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona.

### 2.2.2. Mètode d'extrapolació de Romberg

La **integració de Romberg** és una extensió relativament directa de la regla dels trapezis, que consisteix a fer servir iteracions refinades d'aquest mètode per explotar el seu comportament en el límit i produir una estimació de la integral.

$T(h)$  és el valor de la integral que aproxima a

$$J(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

mitjançant subintervalls de longitud  $h = \frac{b-a}{M}$  fent servir la regla dels trapezis, tal com hem vist en el subapartat anterior. El **mètode d'extrapolació de Romberg** combina dues aproximacions d'integració numèrica per obtenir un tercer valor més exacte:

$$J(f) \approx \frac{4T(h/2) - T(h)}{3}. \tag{6}$$

Per entendre el mètode, podem pensar que es treballa en diferents nivells d'aproximació. En un primer nivell, anomenat **nivell 0**, apliquem la regla dels trapezis duplicant cada vegada el nombre de subintervalls. D'aquesta manera, començarem amb un subinterval, a continuació amb dos, després amb quatre, i així successivament. Posteriorment, passarem al **nivell 1** d'aproximació. En aquest punt aplicarem la fórmula (6) fent servir les parelles contigües del nivell anterior. Atès que la relació (6) és recursiva, podem refinar l'aproximació incloent-hi més nivells d'aproximació. En general:

$$J(f) \approx I_{j,k} = \frac{4^k I_{j,k-1} - I_{j-1,k-1}}{4^k - 1},$$

en què  $I_{0,0} = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$  és la fórmula del trapezi,  $I_{j,0}$  és la regla dels trapezis amb  $h = \frac{b-a}{2^j}$  i  $k$  representa el nivell d'aproximació. Fent servir aquestes funcions de referència,  $I_{j,k}$  pot trobar-se iterativament com una matriu triangular inferior en què cada element es calcula amb el valor de la seva esquerra i el de sobre de la seva esquerra. Per entendre millor l'algorisme, podem seguir l'esquema que hi ha a continuació. El nombre de nivells d'aproximació que s'aconsegueixen depèn de les aproximacions que s'hagin fet en el nivell 0, és a dir, si comencem amb  $n$  aproximacions en el nivell 0, llavors podrem arribar fins al nivell  $n-1$ . D'aquesta manera, es completarien  $n$  nivells d'aproximació.

Nivell 0 (regla dels trapezis: $I_{j,0}$ )	Nivell 1 ( $I_{j,1}$ )	Nivell 2 ( $I_{j,2}$ )	...
$I_{0,0} = T(h), h = b - a$			
$I_{1,0} = T(h), h = \frac{b-a}{2}$	$I_{1,1} = \frac{4I_{1,0} - I_{0,0}}{3}$		
$I_{2,0} = T(h), h = \frac{b-a}{4}$	$I_{2,1} = \frac{4I_{2,0} - I_{1,0}}{3}$	$I_{2,2} = \frac{16I_{2,1} - I_{1,1}}{15}$	
$I_{3,0} = T(h), h = \frac{b-a}{8}$	$I_{3,1} = \frac{4I_{3,0} - I_{2,0}}{3}$	$I_{3,2} = \frac{16I_{3,1} - I_{2,1}}{15}$	
⋮	⋮	⋮	

**Exemple 10**

Farem servir el mètode de Romberg per aproximar la integral següent:

$$\int_0^1 e^{x^2},$$

en la qual tenim en compte tres nivells d'aproximació en total. Per fer-ho començarem calculant tres integrals de nivell 0, és a dir, aplicarem la regla dels trapezis per a  $h = 1, h = \frac{1}{2}$  i  $h = \frac{1}{4}$ . Si fem un esquema com l'anterior, ens queda el següent:

Nivell 0	Nivell 1	Nivell 2
$I_{0,0} = 1,859140914$		
$I_{1,0} = 1,571583165$	$I_{1,1} = 1,475730582$	
$I_{2,0} = 1,490678862$	$I_{2,1} = 1,463710761$	$I_{2,2} = 1,46290944$

D'aquesta manera, conclourem que el valor de l'aproximació mitjançant el mètode de Romberg a la integral donada és el que es mostra a continuació:

$$\int_0^1 e^{x^2} \approx 1,46290944.$$

**2.2.3. Mètodes de Montecarlo**

Els mètodes de Montecarlo s'han fet servir des de fa molts anys en diverses àrees de la matemàtica aplicada. Els economistes fan servir aquest tipus de mètodes per modelitzar resultats potencials de l'economia, mentre que els físics els fan servir per determinar les possibles trajectòries de certs processos estocàstics. Les finances, l'enginyeria i moltes altres disciplines han adoptat mètodes de Montecarlo per comprendre millor certs processos aleatoris. El nom **Montecarlo** prové de Mònaco, famós pels casinos i les apostes. El nom il·lustra la importància de l'aleatorietat, ja que els algorismes de Montecarlo fan servir generadors de nombres aleatoris.

Els mètodes de Montecarlo també es poden fer servir en integració numèrica per a qualsevol nombre arbitrari de dimensions. La integració de Montecarlo fa servir el mostreig aleatori d'una funció per calcular numèricament una estimació de la seva integral sobre un domini donat. Suposem que volem calcular la integral de dimensió de nivell 1 següent:

$$J(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Podem interpretar aquesta integral en termes de l'esperança matemàtica de la variable aleatòria  $f(U)$ , que escriurem com a  $E(f(U))$ , en què  $U$  és una variable aleatòria que segueix una distribució uniforme en  $[a,b]$ , ja que es compleix el següent:

$$E(f(U)) = \int_a^b f(x) \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

**Lectures complementàries**

Es recomana llegir l'apartat 4 de la guia de *Variables aleatoris* (P08/75057/02305) per entendre el concepte *esperança matemàtica* d'una variable aleatòria contínua.

atès que la densitat de probabilitat d'una distribució uniforme en  $[a,b]$  pren el valor  $\frac{1}{b-a}$  per a tot punt de  $[a,b]$  i val zero fora d'aquest interval. Per tant, hem establert la relació següent entre el valor esperat i la integral:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)E(f(U)).$$

Sabem que, per l'anomenada **lleï forta dels grans nombres**, el valor esperat d'una variable aleatòria es pot estimar segons la mitjana de les mostres d'aquesta variable aleatòria.

Per tant, aquesta integral pot aproximar-se fent la mitjana de les mostres de la funció  $f$  avaluada en punts aleatoris uniformement distribuïts dins del domini d'integració. Donat un conjunt de  $N$  variables aleatòries uniformes  $U_i$  en  $[a,b]$ , l'estimador de Montecarlo per aproximar  $J(f)$  és el següent:

$$J(f) = \int_a^b f(x)dx \approx J_N(f) = (b-a) \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N f(U_i),$$

en què la variable aleatòria  $U_i$  pot ser construïda a partir d'una variable aleatòria  $\bar{U}_i$  uniforme en  $[0,1]$  si  $U_i = a + \bar{U}_i(b-a)$ .

La manera més pràctica de procedir per calcular la integral serà la següent:

- 1) Generem  $N$  nombres aleatoris  $\bar{U}_i$  que segueixin una distribució uniforme en  $[0,1]$  (en llenguatge R, l'ordre més adequada és `runif(N)`). Com més gran sigui  $N$ , millor serà el valor aproximat de la integral.
- 2) Calculem  $U_i = a + \bar{U}_i(b-a)$  fent servir els  $\bar{U}_i$  que acabem de generar.
- 3) Calculem  $f(U_1), \dots, f(U_N)$  amb els  $U_i$  del pas anterior i amb la funció  $f(x)$ .
- 4) Finalment, apliquem la fórmula  $J_N(f) = (b-a) \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N f(U_i)$ .

### Exemple 11

Suposem que volem calcular una aproximació a la integral següent:

$$\int_0^1 5x^4 dx = 1.$$

Farem servir un mètode d'integració de Montecarlo amb  $N$  punts i farem variar  $N$  per observar que l'error es va reduint a mesura que augmenta  $N$ . Els resultats obtinguts són els següents:

Taula 2

$N$	$J_N(f)$
$10^2$	0,80098
$10^4$	1,00247
$10^6$	1,00031

Observem que en l'exemple anterior, malgrat que es faci servir un nombre elevat de punts, l'estimació és bona només per a alguns dígitos. Si ho comparem amb els mètodes d'integració numèrica que hem vist fins ara, els mètodes de Montecarlo són extremadament cars des d'un punt de vista computacional per obtenir un resultat de baixa qualitat en l'aproximació. L'avantatge dels mètodes de Montecarlo, a més de la senzillesa d'implementació, radica en la seva habilitat per tractar integrals múltiples.

**Lectures  
complementàries**

**J. P. Howard** (2017).  
*Computational methods for  
numerical analysis with R*.  
Nova York: Chapman &  
Hall/CRC.



## Bibliografia

**Delshams, A.; Benseny, A.; Aubanell, A.** (1998). *Útiles básicos de cálculo numérico*. Barcelona: Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona.

**Howard, J. P.** (2017). *Computational methods for numerical analysis with R*. Nova York: Chapman & Hall/CRC.

