Continuidad y derivabilidad

Derivadas y aplicaciones

PID_00224048

Mei Calm
Ramon Masià
Joan Carles Naranjo
Núria Parés
Francesc Pozo
Jordi Ripoll
Teresa Sancho

Universitat
Oberta
de Catalunya

Mei Calm

Licenciada en Ciencias Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB) y Doctora en Matemáticas por la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC). Profesora Titular de la Universidad de Girona (UdG) y colaboradora docente de la Universitat Oberta de Catalunya (UOC). Sus áreas de investigación son el análisis intervalar modal y sus aplicaciones al modelaje y al control de sistemas biomédicos.

Ramon Masià

Licenciado en Ciencias Exactas y en Filología Clásica por la UB. Doctor por la UB. Profesor de la Universitat Oberta de Catalunya (UOC). Su ámbito de experiencia es la enseñanza de las matemáticas online y la historia de la matemática griega.

Joan Carles Naranjo

Profesor de la Facultad de Matemáticas de la UB y colaborador de la UOC, posee una dilatada experiencia docente en el Grado de Matemáticas y en enseñanza online. Profesor titular del área de Geometría y Topología, su ámbito de investigación es la Geometría Algebraica.

Núria Parés

Licenciada en Matemáticas por la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC) (1999) y doctora en Matemática Aplicada por la UPC (2005). Desde el año 2000 es profesora del Departamento de Matemática Aplicada III de la UPC, actualmente como profesora agregada. Como miembro del Centro Específico de Búsqueda LaCàN (www-lacan.upc.edu) su investigación se centra en los métodos numéricos en ciencias aplicadas e ingeniería. Miembro del Grupo de Innovación Matemática 'e-learning' (GIMEL - bibliotecnica.upc.edu/gimel) con el que ha participado en numerosos proyectos de innovación docente.

Francesc Pozo

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Barcelona (2000) y doctor en Matemática Aplicada por la Universidad Politécnica de Cataluña (2005). Ha sido profesor asociado en la Universidad Autónoma de Barcelona, y profesor asociado, colaborador y actualmente profesor agregado en la Universidad Politécnica de Cataluña. Cofunfador del Grupo de Innovación Matemática 'e-learning' (GIMEL), responsable de varios proyectos de innovación docente y autor de varias publicaciones. Miembro del grupo de investigación consolidado CoDAlab (www-ma3.upc.se/ codalab), su investigación se centra en la teoría de control y sus aplicaciones a la ingeniería mecánica y civil.

Jordi Ripoll

Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Barcelona (UB). Profesor de la Universidad de Girona (UdG) y colaborador docente de la Universitat Oberta de Catalunya (UOC). Investiga en modelos matemáticos de la biología y en particular en la propagación de epidemias sobre redes complejas.

Teresa Sancho

Doctora ingeniera en Electrónica y licenciada en Matemáticas. Profesora y directora de investigación de la Universitat Oberta de Catalunya (UOC). Investiga en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas en línea en educación superior.

Sexta edición: febrero 2019

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Diseño: Manel Andreu
Realización editorial: Oberta UOC Publishing, SL

Índice

Introducción

El cálculo diferencial y el concepto de derivada son muy probablemente las aportaciones más importantes e influyentes de la matemática aplicada. Los métodos y técnicas del cálculo diferencial fueron inventados y desarrollados a finales del siglo XVII por Newton y Leibniz de manera independiente, y desde entonces las derivadas han sido una herramienta para resolver una infinidad de problemas: desde la determinación de la tangente a una curva, pasando por problemas de optimización de todo tipo y acabando por las ecuaciones diferenciales que modelizan muchos de los fenómenos del mundo real.

En este módulo, trabajaremos el concepto de derivada de una función en un punto, que de manera informal podemos decir que se corresponde con la variación de la función en aquel punto. Por ejemplo, en el movimiento de un objeto, la derivada de la posición del objeto respecto del tiempo da la velocidad a la que se mueve. Después de dar la definición formal de derivada, profundizaremos en su interpretación geométrica: pendiente de la recta tangente. En segundo lugar, estudiaremos la función derivada, es decir, una nueva función que da la derivada en cada uno de los puntos, y las reglas de derivación poniendo énfasis en la (importante) regla de la cadena, que nos permite calcular la derivada de una composición de funciones. En el apartado de las aplicaciones, estudiaremos el crecimiento/decrecimiento de una función y sus extremos relativos y lo aplicaremos a la representación gráfica de funciones.

Finalmente, haremos una interpretación de la derivada como tasa/ritmo de cambio de una magnitud/cantidad que depende de otra.

1. Derivación

1.1. Definición de derivada en un punto

El marco general en el que introduciremos el concepto de derivada es el marco de las funciones reales continuas de variable real. La derivada de una función representa el cambio infinitesimal de la función respecto de su variable.

Por lo tanto, empezamos definiendo formalmente el concepto de derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = x_0$ como

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,, \qquad (1)$$

si este límite existe. Dicho en palabras, la derivada de una función en un punto es el límite del cociente entre el incremento de la función y el incremento de la variable independiente $h = x - x_0$ cuando este último tiende a cero.

La notación $f'(x_0)$, que se lee “efe prima de x_0”, se debe a Newton. Cuando existe el límite $f'(x_0)$ y es finito decimos que la función $f(x)$ es derivable en x_0. En la práctica, sin embargo, pocas veces se calculan las derivadas por medio del límite de la definición, sino que se calculan de manera más fácil a partir de las derivadas elementales y las reglas de derivación, que relacionan derivadas y operaciones, como veremos en los subapartados siguientes.

La condición de ser derivable es más restrictiva que la de ser continua. Si reescribimos el límite de la definición de derivada se comprueba que, si una función es derivable en un punto, entonces necesariamente debe ser continua en este punto: $f(x_0) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h)$.

1.1.1. Interpretación geométrica

Geométricamente, el valor de la derivada en un punto x_0, $f'(x_0)$ es la pendiente (la inclinación respecto del eje horizontal) de la recta tangente en aquel punto x_0 (podéis ver la figura 1). Por lo tanto, la derivada nos dice cómo varía localmente la función en aquel punto y nos da la dirección que sigue la función en él.

Figura 1. La derivada en un punto x_0 es la pendiente de la recta tangente

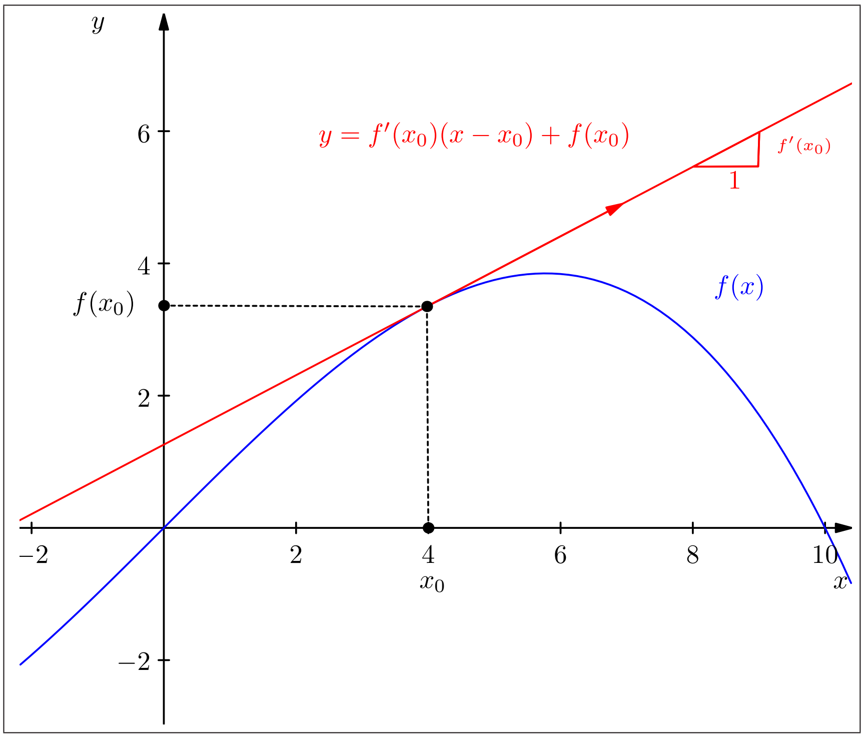


Figura 1

La recta tangente corta de manera local en un solo punto la gráfica de la función.

La ecuación de la recta tangente es $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, ya que se trata de la recta que pasa por el punto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ y tiene pendiente $f'(x_0)$.

Ejercicio 1 *Dada la función* $f(x) = x^4 - 2x^3 + \frac{x^2}{2} + 1$, *encontrad la recta tangente en* $x_0 = 2$. *Para calcular la derivada, utilizad las derivadas básicas y las reglas de derivación.*

1.2. Función derivada

La función derivada $f'(x)$ es la función que para cada punto x nos da el valor de la derivada de la función $f(x)$ en aquel punto.

Dada una función f, definimos la función derivada como

$$f' : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f'(x),$$

con dominio del conjunto A de puntos en los que la función f es derivable.

1.2.1. Cálculo de las derivadas de las funciones elementales

Utilizando la definición formal de derivada en un punto, el límite (ecuación 1) para un punto variable, se puede calcular la función derivada para cada una de las funciones elementales: los polinomios, las exponenciales y logaritmos, y las funciones periódicas seno y coseno.

Los polinomios son funciones que se basan en las operaciones aritméticas de suma/resta y producto. La derivada de un polinomio del tipo $f(x) = x^n$, en la que $n \geq 0$ es el grado del polinomio, es $f'(x) = nx^{n-1}$, que tiene un grado menos que el polinomio original y está definido para todo valor de x.

Derivada de un monomio

$f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$.

Ejemplo 1

Para calcular la derivada de la función $f(x) = x$ en $x_0 = 3$ utilizando la definición, hay que hacer:

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3} 1 = 1$$

Está claro que si en lugar de 3 ponemos cualquier valor, a, $f'(a) = 1$. Por lo tanto, si $f(x) = x$, $f'(x) = 1$.

Ejercicio 2 *Calculad la derivada de $f(x) = 2$ y de $g(x) = x^2$ utilizando la definición.*

Esta derivada se puede extender a valores negativos de n e incluso a valores racionales (¡y a reales también!). Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{x}$ definida por $x \geq 0$, que corresponde a una potencia de exponente $n = 1/2$, tiene derivada $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, que existe para $x > 0$.

Ejercicio 3 *Calculad la derivada de $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5}}$. ¿Para qué valores de x está definida la función y su derivada? Trabajad los exponentes con fracciones.*

Más allá de los polinomios tenemos las funciones exponenciales y logarítmicas. Hay distintas maneras de definir de manera formal estas funciones, pero la idea intuitiva que representa la función exponencial es la de un crecimiento muy rápido. Cuando observamos una magnitud que tiene un crecimiento muy rápido, se dice que crece de manera exponencial y, al contrario, si crece muy lentamente entonces tenemos la función logarítmica, que es su inversa.

Derivada del exponencial

$f(x) = e^x$ es $f'(x) = e^x$.

Derivada del logaritmo

$f(x) = \ln(x)$ es $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Nota

Cuando la base es a: $a^x = e^{x \ln a}$, $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$, $(a > 0, a \neq 1)$.

Recordemos que la función exponencial natural es $y = e^x$, en la que el número $2 < e = 2{,}718281\ldots < 3$ es la base y x es el exponente. El logaritmo neperiano o natural es la función inversa del exponencial:

$$y = e^x \quad \leftrightarrow \quad x = \ln(y)\ .$$

De manera más general, las funciones exponenciales de base $a > 0$ son de la forma $y = a^x$ y son todas equivalentes en el sentido de que $a^x = e^{kx}$ para una constante k adecuada. Las funciones logarítmicas de base $a > 0$: $x = \log_a(y)$ son sus inversas.

Una manera de caracterizar la función exponencial es diciendo que la derivada es la misma, si $y = e^x$ entonces $y' = e^x$ para cualquier valor de x, y que $e^0 = 1$. Por otro lado, la función logaritmo, vista como función de la variable $x > 0$ y no como función inversa, cumple que $y = \ln(x)$ e $y' = \frac{1}{x}$.

Derivada del seno

$f(x) = \text{sen}(x)$ es
$f'(x) = \cos(x)$.

Derivada del coseno

$f(x) = \cos(x)$ es
$f'(x) = -\text{sen}(x)$.

Las funciones periódicas básicas son el seno y el coseno, ya que haciendo combinaciones y cambiando la frecuencia angular se obtienen las otras funciones periódicas. Por ejemplo, $y = \text{sen}(2x) + 3\cos(5x)$ es una función periódica.

Las funciones seno y coseno cumplen que al derivarlas se intercambian entre sí salvo un signo, más concretamente: si $y = \text{sen}\, x$, entonces $y' = \cos x$ y si $y = \cos x$, entonces $y' = -\text{sen}\, x$.

Recordad

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

1.2.2. Reglas de derivación

Las reglas de derivación nos permiten calcular las derivadas de funciones construidas a partir de las funciones elementales y las operaciones aritméticas de suma/resta y producto/división. Utilizando las propiedades de los límites, obtenemos las reglas siguientes:

1) (Producto por número) $y = af(x)$, entonces $y' = af'(x)$.

2) (Suma de funciones) $y = f(x) + g(x)$, entonces $y' = f'(x) + g'(x)$.

Es decir, un factor constante multiplicando se puede quitar de la derivada, y la derivada de una suma es suma de derivadas (ya que el límite de una suma es suma de límites). Combinando las dos reglas, obtenemos la resta y más en general una combinación lineal: $y = af(x) + bg(x)$, entonces $y' = af'(x) + bg'(x)$ donde a,b son dos números reales cualesquiera. Por ejemplo, el polinomio de grado 4: $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 7$ tiene derivada $P'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 1$, que es un polinomio de grado 3.

Ejercicio 4 *Calculad la derivada de la función* $y = 100e^x - 10x^4 - \frac{1}{x}$.

Por otro lado, la derivada del producto no es el producto de derivadas, pero tenemos una fórmula que nos da la derivada del producto y de manera similar para la división:

Reglas de la derivación

Si f y g son funciones derivables, y a es un número:

- $(a \cdot f)' = a \cdot f'$
- $(f + g)' = f' + g'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $(f + g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

3) (Producto) $y = f(x)g(x)$, entonces $y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

4) (División) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, entonces $y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Es decir, la derivada de un producto es la derivada del primero por el segundo sin derivar más la derivada del segundo por el primero sin derivar. Para la división, que es parecida, hay que tener en cuenta que tanto la función como su derivada solo están definidas por los valores de x que $g(x) \neq 0$.

Con las reglas hechas hasta ahora, ya podemos calcular la derivada de una función racional (cociente de polinomios). Por ejemplo, $y = \frac{20x^2}{1+5x^2}$, $y' = \frac{40x}{(1+5x^2)^2}$, que está definida para todo x.

Ejercicio 5 *Considerad la función continua* $y = \frac{\text{sen}(x)}{x}$, *denominada función sinc. Calculad su derivada. ¿Cuál es el valor de la función en* $x = 0$*?*

Función sinc

La función sinc se utiliza para procesar señales digitales.

Regla de la cadena

La regla de la cadena se utiliza para calcular la derivada de la composición de funciones.

Si f y u son dos funciones que se pueden componer, entonces la derivada de la composición $(f \circ u)'(x) = f'\big(u(x)\big)u'(x)$.

Ejemplo 2

Si $f(x) = 3x + 2$ y $u(x) = \text{sen}(x)$, entonces $(f \circ u)(x) = 3\,\text{sen}(x) + 2$, $f'(x) = 3$, $u'(x) = \cos(x)$, por lo tanto, $(f \circ u)'(x) = f'\big(u(x)\big)u'(x) = 3\cos(x)$.

Ejercicio 6 *Calculad* $(f \circ u)'(x)$ *si* $f(x) = \tan(x)$, $u(x) = \ln(x)$.

1.2.3. Tabla de derivadas

Los resultados obtenidos en los subapartados anteriores se resumen y se amplían en la tabla 1.

Tabla 1

Funciones simples	Funciones compuestas $u = u(x)$
$y = x^n$, $y' = nx^{n-1}$	$y = u^n$, $y' = nu^{n-1}u'$
$y = \sqrt[n]{x}$, $n \neq 0$, $y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{u}$, $y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y = e^x$, $y' = e^x$	$y = e^u$, $y' = e^u u'$
$y = a^x$, $a > 0$, $y' = a^x \ln(a)$	$y = a^u$, $y' = a^u \ln(a)u'$
$y = \text{sen}(x)$, $y' = \cos(x)$	$y = \text{sen}(u)$, $y' = \cos(u)u'$
$y = \cos(x)$, $y' = -\text{sen}(x)$	$y = \cos(u)$, $y' = -\text{sen}(u)u'$
$y = \tan(x)$, $y' = 1 + \tan^2(x)$	$y = \tan(u)$, $y' = (1 + \tan^2(u))u'$
$y = \ln(x)$, $y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln(u)$, $y' = \frac{u'}{u}$
$y = \log_a(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, $y' = \frac{1}{x\ln(a)}$	$y = \log_a(u)$, $y' = \frac{u'}{u\ln(a)}$
$y = \text{arc sen}(x)$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arc sen}(u)$ $y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
$y = \text{arc cos}(x)$ $y' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$	$y = \text{arc cos}(u)$ $y' = \frac{1}{-\sqrt{1-u^2}}u'$
$y = \arctan(x)$ $y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \arctan(u)$ $y' = \frac{1}{1+u^2}u'$

1.2.4. Derivadas laterales

Al comprobar la derivabilidad de una función en un punto para la definición formal, puede suceder que no exista el límite pero sí existan los límites laterales por la derecha y por la izquierda.

Definimos las derivadas laterales por la derecha y por la izquierda:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ , \quad f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

respectivamente. Si coinciden las derivadas laterales $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, entonces la función es derivable en aquel punto.

En algunos problemas, aparecen funciones con valor absoluto. El caso más sencillo corresponde a la función misma valor absoluto $f(x) = |x| = \max\{x,-x\}$, que es continua en todos los puntos y derivable en todos los puntos salvo en $x = 0$.

Ejemplo 3

La función continua $f(x) = |(x+5)(x-10)|$ se puede definir a trozos: $f(x) = -(x+5)(x-10)$ si $-5 \leq x \leq 10$ y $f(x) = (x+5)(x-10)$ en caso contrario. La derivada también la podemos calcular a trozos:

$$f'(x) = \begin{cases} -(2x-5) & -5 < x < 10 \\ 2x-5 & x > 0 \text{ o } x < -5 \end{cases} ,$$

y en $x = -5$ y $x = 10$ la función no es derivable, ya que las derivadas laterales no coinciden.

Ejercicio 7 *Considerad la función definida a trozos* $f(x) = \frac{2}{1+e^{-x}}$ *para* $x \geq 0$ *y* $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1$ *para* $x < 0$. *Estudiad la continuidad y la derivabilidad de la función.*

1.3. Derivadas de orden superior

Derivadas de orden superior

La derivada segunda es la derivada de la derivada, y así de manera sucesiva...

Dada una función f derivable, podemos considerar la función f' derivada de f. Suponiendo que la función f' esté definida en un intervalo I, podemos considerar los puntos en los que es derivable y la función derivada correspondiente, que denotaremos con f''. De este modo, f' la denominaremos derivada primera de f, y f'' la denominaremos derivada segunda de f. La derivada de f'' la denotaremos con f''' y la denominaremos derivada tercera de f. En general, la derivada definida por recurrencia la denotaremos con $f^{n)}$ y la denominaremos derivada n-ésima de f, o derivada de orden n de f.

Ejemplo 4

Consideremos la función $f(x) = 3^x$. Entonces, calculando unas pocas derivadas podemos obtener la expresión de la derivada n-ésima de f,

$$f'(x) = 3^x \ln(3),\ f''(x) = 3^x(\ln(3))^2,\ \cdots,\ f^{n)}(x) = 3^x(\ln(3))^n$$

Ejemplo 5

Consideremos ahora la función $f(x) = \ln(1+x)$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

$$f^{iv}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$$

$$\ldots$$

$$f^{n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$

Ejercicio 8 *Calculad la primera y la segunda derivada para cada una de las funciones siguientes respecto de su variable independiente.*

a) $x = 2\cos(3t) - \operatorname{sen}(3t)$ *b)* $y = 10(1+3x)e^{-3x}$

c) $x = t\operatorname{sen}(2t) + \cos(2t)$ *d)* $z = \frac{y^3}{1+y^2}$

Ejercicio 9 *Calculad las tres primeras derivadas de la función $f(x) = \frac{1}{x+2}$ y de esto deducid una fórmula para la derivada n-ésima.*

2. Aplicaciones

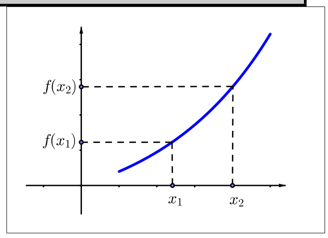
En este apartado, veremos algunas aplicaciones de la derivación: el signo de la derivada nos permite decidir sobre el crecimiento y el decrecimiento de una función; la derivada también es útil en la búsqueda de extremos de una función y, por esto, también en la resolución de problemas de optimización.

2.1. Crecimiento y decrecimiento de una función

En primer lugar, definiremos los conceptos de función creciente y función decreciente.

Consideremos una función f definida en un intervalo abierto (a,b) y tomemos dos puntos cualesquiera x_1, x_2 de este intervalo con $x_1 < x_2$, entonces:

Gráfica de una función estrictamente creciente



1) Si $f(x_1) \leq f(x_2)$ diremos que f es monótona creciente en (a,b).

2) Si $f(x_1) \geq f(x_2)$ diremos que f es monótona decreciente en (a,b).

3) Si $f(x_1) < f(x_2)$ diremos que f es estrictamente creciente en (a,b).

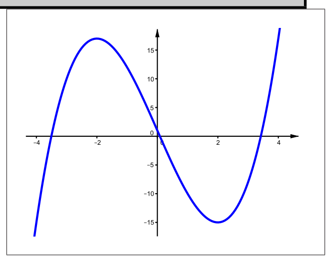
4) Si $f(x_1) > f(x_2)$ diremos que f es estrictamente decreciente en (a,b).

En la figura al margen, se puede ver la gráfica de una función estrictamente creciente.

Veamos cómo a partir de la derivada podemos decidir si una función es creciente o decreciente.

> Consideremos una función f derivable en un intervalo abierto (a,b), entonces:
>
> **1)** Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es monótona creciente en (a,b).
>
> **2)** Si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es monótona decreciente en (a,b).
>
> **3)** Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es constante en (a,b).

Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 12x + 1$



Por ejemplo, si consideramos la función $f(x) = x^3 - 12x + 1$, calculamos su derivada $f'(x) = 3x^2 - 12$ y estudiamos en qué puntos se anula esta derivada:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ o } x = -2$$

Observemos que $f'(x) > 0$ si $x < -2$ o $x > 2$ y $f'(x) < 0$ si $-2 < x < 2$, por lo tanto f es creciente en $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-2,2)$, tal y como puede verse en la figura del margen.

Ejercicio 10 *Estudiad el crecimiento y decrecimiento de las funciones:*

a) $f(x) = (x^2 - 4)^2$

b) $g(x) = xe^x$

2.1.1. Extremos relativos. Puntos críticos

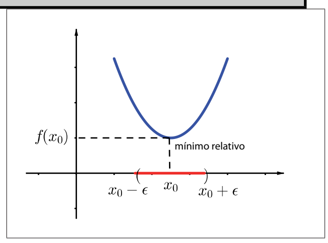
Supongamos una función f definida en un intervalo (a,b).

- Diremos que f tiene un máximo relativo en el punto $x_0 \in (a,b)$ si hay un entorno de x_0 que escribiremos $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ tal que para cualquier valor x dentro de este entorno, $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, se verifica que $f(x) \leq f(x_0)$.
- Diremos que f tiene un mínimo relativo en el punto $x_0 \in (a,b)$ si existe un entorno de x_0 que escribiremos $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ tal que para cualquier valor x dentro de este entorno, $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, se verifica que $f(x) \geq f(x_0)$.

Un punto en el que la función tenga un máximo o un mínimo relativo se denomina un **extremo relativo**.

En el margen, podéis ver la gráfica de una función con un mínimo relativo en la que podemos observar que la imagen del punto x_0 sería la más pequeña de entre todos los puntos del intervalo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.

Gráfica de una función con un mínimo relativo



A continuación, veremos una condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo en un punto. Supongamos que f es una función real definida en un intervalo (a,b). Supongamos que f tiene un extremo relativo en $x_0 \in (a,b)$ y que f es derivable en x_0. Entonces podemos asegurar que $f'(x_0) = 0$.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ sabemos que tiene un mínimo en $x = 0$, y puesto que $f'(x) = 2x$, entonces $f'(0) = 0$.

El recíproco no es cierto, es decir, es posible encontrar una función f derivable como por ejemplo $f'(x_0) = 0$ pero x_0 no es un extremo relativo. Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$ pero f no tiene máximo ni mínimo relativo en ningún punto.

Los puntos donde $f'(x) = 0$ se denominan **puntos singulares o críticos**.

Una función puede tener un extremo relativo en un punto sin necesidad de ser derivable. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$, y en cambio f no es derivable en $x = 0$.

Resumiendo, podemos decir que los extremos relativos de una función f se encuentran entre:

1) los puntos críticos de f

2) los puntos de no derivabilidad de f

3) los extremos del dominio de la función f

Criterio de la primera derivada para la clasificación de los extremos relativos

Podemos estudiar la derivada por la derecha y por la izquierda de estos puntos de manera que, si la función crece por la izquierda de x_0 y decrece por la derecha de x_0, deduciremos que en x_0 la función tiene un máximo relativo, y si la función decrece por la izquierda de x_0 y crece por la derecha de x_0, deduciremos que en x_0 la función tiene un mínimo relativo.

Ejemplo 6

Consideremos la función $f(x) = 2x - 3x^{2/3} + 1$ que está definida en todos los reales. Sus extremos relativos los buscaremos entre los puntos críticos de f,

$$f'(x) = 2 - 2x^{-1/3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

y los puntos en los que la función no es derivable. Observemos que f no es derivable por $x = 0$. Entonces estudiamos el signo de la derivada por la derecha y por la izquierda de estos puntos, y obtenemos como resultado lo que se representa en el esquema en el margen. La gráfica de la función f está representada en la figura 2. Podemos ver que los puntos de no derivabilidad ($x = 0$) son puntos en forma de punta y en este punto habría infinitas tangentes; en cambio, el punto crítico de la función ($x = 1$) verifica que su tangente es paralela al eje OX, ya que tiene pendiente cero.

Clasificación de los extremos relativos

Criterio de la primera derivada por la clasificación de los extremos relativos de la función $f(x) = 2x - 3x^{2/3} + 1$:

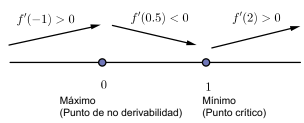
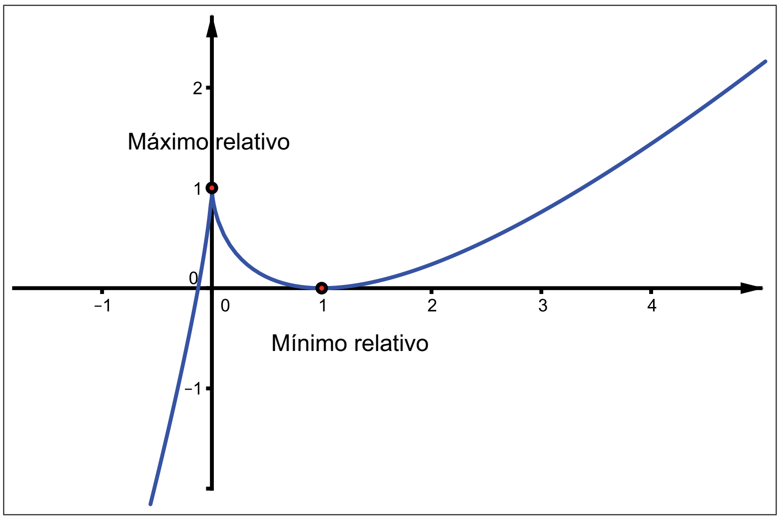


Figura 2. Gráfica de la función $f(x) = 2x - 3x^{2/3} + 1$



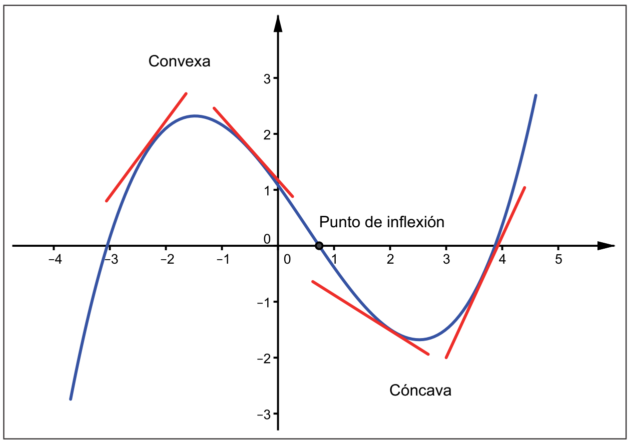
Ejercicio 11 *Determinad los extremos relativos de la función* $f(x) = x - x^{2/3}$.

2.2. Concavidad y puntos de inflexión de una función

Diremos que f es cóncava en un intervalo abierto (a,b) si es derivable en (a,b) y su derivada f' es una función creciente en (a,b). De manera parecida, diremos que f es convexa en (a,b) si existe f' y es decreciente en (a,b).

En la figura 3 podemos observar que si f es cóncava en un intervalo, entonces la gráfica de f está por encima de sus tangentes en este intervalo, y si f es convexa, la gráfica de f está por debajo de sus tangentes en este intervalo.

Figura 3. Concavidad, convexidad y punto de inflexión de una función f



Los puntos que separan zonas de concavidad opuesta se denominan **puntos de inflexión**.

Criterio de la segunda derivada para el estudio de la concavidad:

1) Si $f''(x) > 0$ en un intervalo (a,b), entonces f es cóncava en (a,b).

2) Si $f''(x) < 0$ en un intervalo (a,b), entonces f es convexa en (a,b).

3) Si f tiene un punto de inflexión en un punto x_0 y existe $f''(x_0)$, entonces $f''(x_0) = 0$.

Por lo tanto, para obtener los puntos de inflexión de una función f dos veces derivable, solo tenemos que encontrar los puntos como por ejemplo $f''(x) = 0$. Sin embargo, observemos que no todos los puntos que verifican la condición $f''(x) = 0$ son puntos de inflexión. Por ejemplo, la función $f(x) = x^4$ tiene derivada segunda $f''(x) = 12x^2$ y, por lo tanto, $f''(0) = 0$, pero en cambio $x = 0$ no es un punto de inflexión para la función $f(x) = x^4$, ya que esta función es siempre cóncava.

Igual que en el caso de los extremos relativos, para decidir si un punto x_0 es candidato o no a ser punto de inflexión, podemos hacer un estudio del signo de la derivada segunda por la derecha y por la izquierda de x_0 de manera que si hay cambio de concavidad y x_0 pertenece al dominio de la función, podremos asegurar que x_0 es un punto de inflexión.

Ejemplo 7

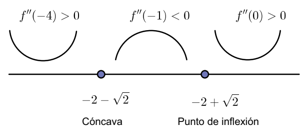
Encontremos los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^2e^x$. Para esto, primero calculamos la primera derivada, $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x$, y entonces calculamos los ceros de la segunda derivada,

$$f''(x) = (2 + 2x)e^x + (2x + x^2)e^x = (2 + 4x + x^2)e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 - \sqrt{2} \text{ o } x = -2 + \sqrt{2}$$

Haciendo el estudio del signo de la derivada segunda por la derecha y por la izquierda de estos puntos, obtenemos el esquema que se representa en el margen, del que se puede deducir que la función es cóncava en $(-\infty, -2 - \sqrt{2}) \cup (-2 + \sqrt{2}, +\infty)$ y convexa en $(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$. Los puntos $x = -2 - \sqrt{2}$ y $x = -2 + \sqrt{2}$ son puntos de inflexión.

Estudio de la concavidad y la convexidad de una función

Esquema del estudio de la concavidad y la convexidad de la función $f(x) = x^2e^x$:



La derivada segunda también nos permite dar información sobre los extremos relativos.

Criterio de la segunda derivada para la clasificación de los extremos relativos:

1) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = x_0$.

2) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = x_0$.

3) Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$, entonces no podemos extraer ninguna conclusión. La función f puede tener un máximo relativo o un mínimo relativo o un punto de inflexión en $x = x_0$.

Ejemplo 8

En el ejemplo anterior, los puntos críticos de la función $f(x) = x^2e^x$ se obtienen de

$$f'(x) = (2x + x^2)e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ o } x = -2$$

Entonces

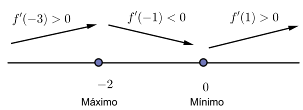
$f''(-2) = -2e^{-2} < 0$, por tanto $x = -2$ es un máximo relativo.

$f''(0) = 2 > 0$, por lo tanto $x = 0$ es un mínimo relativo.

A veces, el cálculo de la segunda derivada puede ser complicado. Por este motivo, a la hora de clasificar los extremos relativos es más fácil utilizar el criterio de la primera derivada tal y como se puede ver en la figura en el margen.

Clasificación de los extremos relativos

Criterio de la primera derivada para la clasificación de los extremos relativos de $f(x) = x^2e^x$:



Ejercicio 12 *Calculad los extremos relativos y puntos de inflexión de la función* $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.

2.3. Representación gráfica de funciones

Consideremos una función $y = f(x)$. La gráfica de la función f es el conjunto de puntos del plano:

$$G(f) = \{(x,f(x)) \text{ on } x \in Dom(f)\}$$

Ahora veremos unas pautas que conviene seguir para dibujar un croquis aproximado de la gráfica de una función. Lo iremos explicando sobre la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+1)}$$

1) Determinar el dominio $Dom(f)$ de la función. Estudiar la continuidad de f en los puntos de $Dom(f)$. Si un punto a no pertenece al dominio de la función, pero es un punto frontera del dominio de f, convendría calcular los límites laterales, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y/o $\lim_{x\to a^-} f(x)$. Si alguno de estos límites es $+\infty$ o $-\infty$, la recta $x = a$ será una asíntota vertical de la gráfica de f.

En nuestro ejemplo, puesto que $Dom(f) = \mathbb{R}$, no es procedente hacer este estudio asintótico. La función f es continua en R, ya que es la composición de la función polinómica $f_1(x) = x^2(x+1)$ y de la función $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$, las dos continuas en $\mathbb{R}$.

2) Asíntotas

En nuestro ejemplo no tenemos asíntotas verticales, ya que el dominio son todos los reales. Tampoco hay asíntotas horizontales, ya que

Véase también

El cálculo de las asíntotas ya se ha estudiado en el subapartado 2.3.2 del módulo 1.1.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2(x+1)} = +\infty.$$

Calculamos las asíntotas oblicuas, $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}{x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^2(x+1)} - x) = +\infty - \infty$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^2(x+1)} - x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^2(x+1)} - x)(\sqrt[3]{x^4(x+1)^2} + x\sqrt[3]{x^2(x+1)} + x^2)}{\sqrt[3]{x^4(x+1)^2} + x\sqrt[3]{x^2(x+1)} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(x+1) - x^3}{\sqrt[3]{x^4(x+1)^2} + x\sqrt[3]{x^2(x+1)} + x^2} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, $y = x + 1/3$ es una asíntota oblicua.

3) Puntos de intersección con el eje de abscisas. Si la ecuación $f(x) = 0$ es de resolución fácil, convendrá buscar las raíces (ceros) de esta ecuación, las cuales se corresponderán con las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje de abscisas.

Si ha sido posible determinar estos ceros de la función, resultará conveniente estudiar el signo de la función. Si una función presenta cambios de signo, estos se deben producir necesariamente en los ceros de la función, o en los puntos de discontinuidad, o en los puntos frontera del dominio.

En nuestro ejemplo, los ceros de la función son los puntos $x = -1$ y $x = 0$.

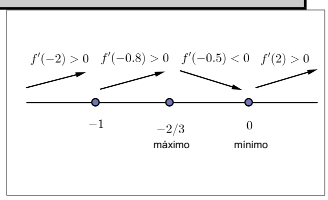
4) Estudio del crecimiento o monotonía. Determinación de los extremos relativos

Buscaremos la expresión de la derivada f' de la función. Es posible que la función deje de ser derivable en algún punto del $Dom(f)$. Por este motivo, habría que determinar el dominio de la derivabilidad de la función. Con la intención de estudiar el signo de f', buscaremos los ceros de la ecuación $f'(x) = 0$ que pertenecen al dominio de derivabilidad de la función f. El estudio del signo de f' lo haremos teniendo en cuenta que los cambios de signo de f' (si los hay) deben producirse de manera necesaria en los ceros de f', o en los puntos de discontinuidad de f, o en los puntos de discontinuidad de f'.

En los puntos en los que la derivada f' es positiva, la función será estrictamente creciente, y en los puntos en los que la derivada es negativa, la función será estrictamente decreciente. La función presenta un extremo relativo en los puntos del dominio de la función en los que haya un cambio de monotonía. Si la función es derivable en estos puntos, la derivada deberá ser necesariamente nula. Se trataría de un máximo o un mínimo.

En nuestro ejemplo, $f'(x) = \frac{3x+2}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2}}$. El dominio de derivabilidad de la función es $R - \{-1,0\}$. La derivada f' solo se anula en el punto $x = -2/3$. El estudio del signo de la derivada f' y de la monotonía de f queda reflejado en la figura que tenéis en el margen.

Monotonía de la función
$f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+1)}$



Por lo tanto, la función tiene un máximo relativo en $x = -2/3$ (punto crítico) y un mínimo relativo en $x = 0$ (punto de no derivabilidad).

5) Estudio de la concavidad. Puntos de inflexión

Buscaremos la expresión de la segunda derivada f''. Determinaremos igualmente el dominio de f'' que, en todo caso, no podrá superar el dominio de derivabilidad de f. Con el objetivo de estudiar el signo de f'', buscaremos los ceros de la ecuación $f''(x) = 0$ que pertenezcan al dominio de f''. El estudio del signo de f'' lo haremos teniendo en cuenta que los cambios de signo de f''

(si los hay) se tienen que producir necesariamente en los ceros de f'', o en los puntos de discontinuidad de f, f' y f''.

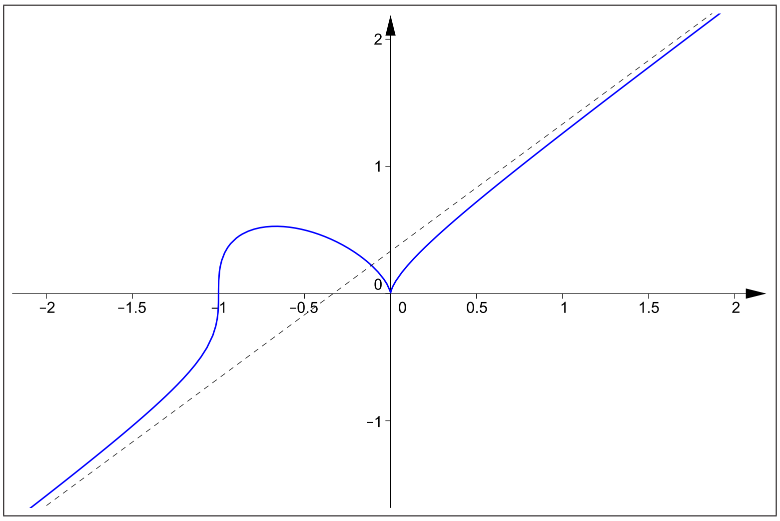
En los puntos en los que f'' es positiva, la función es cóncava, y en los puntos en los que f'' es negativa, la función es convexa. La función presentará un punto de inflexión en los puntos interiores del dominio de la función que sean frontera entre dos regiones de concavidad de signo contrario. Si en estos puntos existe la segunda derivada, esta deberá ser necesariamente nula.

En nuestro ejemplo, $f''(x) = \frac{-2}{9x(x+1)\sqrt[3]{x(x+1)^2}}$, el dominio de f'' coincide con el dominio de derivabilidad de f, la segunda derivada f'' no se anula en ningún punto, y el estudio del signo de la segunda derivada f'' y de la concavidad de f queda reflejado en la figura que tenéis en el margen.

Por lo tanto, la función tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

Con todo este estudio, la gráfica de la función está determinada por la figura 4.

Figura 4. Gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+1)}$

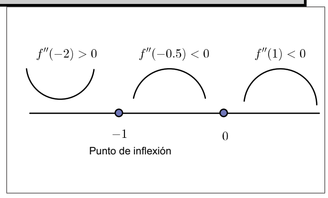


Aparte de estos pasos generales que acabamos de describir, podemos hacer unas comprobaciones para simplificar la representación:

1) Comprobar si la expresión de f es el resultado de aplicar a una función g elemental o ya conocida una translación en la dirección del eje de abscisas ($f(x) = g(x+a)$); o una translación en la dirección del eje de ordenadas ($f(x) = g(x)+b$); o una "compresión" o "dilatación" en la dirección del eje de abscisas ($f(x) = g(kx)$, $k > 0$); una "compresión" o "dilatación" en la dirección del eje de ordenadas ($f(x) = kg(x)$, $k > 0$); una simetría respecto del eje de abscisas ($f(x) = -g(x)$); una simetría respecto del eje de ordenadas ($f(x) = g(-x)$), o una combinación de dos o más de estas transformaciones.

Si es así, el conocimiento de la gráfica de g nos ayudará a intuir, e incluso a dibujar enteramente, la gráfica de la función f.

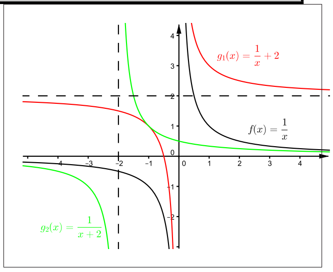
Concavidad de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x+1)}$



Ejemplo 9

En la figura al margen, se representa la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ (en negro); la función $g_1(x) = \frac{1}{x}+2$ (en rojo) que se obtiene de la gráfica de $f(x)$ trasladada dos unidades hacia arriba, y la gráfica de $g_2(x) = \frac{1}{x+2}$ (en verde) que se obtiene de trasladar la función $f(x)$ dos unidades hacia la izquierda.

Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y sus translaciones



2) Estudiar la existencia de posibles simetrías respecto de los ejes de coordenadas, es decir:

- Si $f(-x) = f(x)$ para cualquier $x \in Dom(f)$, la gráfica de f es simétrica respecto del eje de ordenadas.

- Si $f(-x) = -f(x)$ para cualquier $x \in Dom(f)$, la gráfica de f es simétrica respecto del origen de coordenadas.

3) Estudio de la periodicidad. Si existe un valor real $p > 0$ tal que $f(x+p) = f(x)$, para cualquier $x \in Dom(f)$, entonces la función es periódica. En este caso, será necesario buscar el valor más bajo de p que cumple esta propiedad. Entonces bastará con representar la gráfica de f en un intervalo cualquiera $[a,a+p] \subset Dom(f)$ y, según la periodicidad de f, extenderla al resto del dominio.

A continuación, presentaremos otro ejemplo. Haremos un estudio completo de la función $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ hasta obtener una representación gráfica aproximada de esta.

1) Dominio: los únicos puntos en los que la función no está definida son aquellos donde $x^2-1 = 0$, y por lo tanto cuando $x = 1$ o $x = -1$ y, de este modo, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1,1\}$.

2) Simetrías: vemos que $f(-x) = e^{\frac{1}{(-x)^2-1}} = e^{\frac{1}{x^2-1}} = f(x)$, por lo tanto es una función simétrica respecto del eje de ordenadas.

3) Asíntotas:

Para obtener las asíntotas verticales, calculamos los límites en los extremos del dominio:

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

Por lo tanto, $x = 1$ es una asíntota vertical por la derecha.

$$\lim_{x \to -1^+} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty$$

Por lo tanto, $x = -1$ es una asíntota vertical por la izquierda.

Para obtener las asíntotas horizontales, calculamos los límites en $+\infty$ y en $-\infty$.

$$\lim_{x \to + \inf} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x^2-1}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

Por lo tanto, $y = 1$ es una asíntota horizontal.

4) Estudio de la monotonía. Determinación de los extremos relativos. Dado que las funciones exponenciales son derivables y la división de funciones derivables es derivable en su dominio, la función será derivable en su dominio y

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{-2x}{(x^2-1)^2}.$$

Observemos que $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$, por lo tanto $x = 0$ es el único extremo relativo posible. Puesto que $f'(x) > 0$ si $x < 0$ y $f'(x) < 0$ si $x > 0$, tendremos que $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1{,}0)$, decreciente en $(0{,}1) \cup (1, +\infty)$, y en $x = 0$ habrá un máximo relativo.

5) Estudio de la concavidad. Puntos de inflexión.

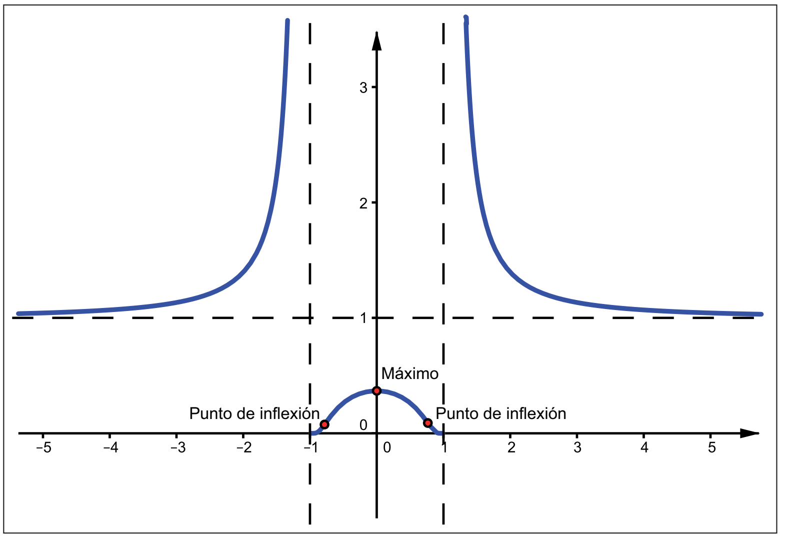
Calculamos la segunda derivada y obtenemos $f''(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{6x^4-2}{(x^2-1)^4}$. Igualamos esta derivada a cero para obtener los posibles puntos de inflexión:

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^4 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \approx \pm 0{,}76$$

Además, $f''(x) < 0$ para $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,-0{,}76) \cup (0{,}76,1) \cup (1,+\infty)$ y $f''(x) > 0$ para $x \in (-0{,}76, 0{,}76)$. Por lo tanto, $f(x)$ es convexa en $(-\infty, -1) \cup (-1, -0{,}76) \cup (0{,}76, 1) \cup (1, +\infty)$ y cóncava en $(-0{,}76, 0{,}76)$, y podemos decir que $x = -0{,}76$ y $x = 0{,}76$ son puntos de inflexión.

Finalmente, y de acuerdo con todos los pasos anteriores, la gráfica de la función está determinada por la figura 5.

Figura 5. Gráfica de la función $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$



Ejercicio 13 *Elaborad una representación gráfica de la función* $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ *haciendo previamente un estudio completo de la función.*

Ejercicio 14 *Elaborad una representación gráfica de la función* $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^3}$ *haciendo de manera previa un estudio completo de la función.*

3. Derivada y cociente de diferenciales

La definición de derivada a partir del cálculo de un límite permite utilizar unas técnicas para calcular la función derivada y algunas reglas para derivar muchas funciones y operaciones entre funciones. Hay, sin embargo, otra metodología, debida a Leibniz, que permite obtener el mismo resultado (derivadas de funciones) usando una técnica distinta: el cálculo mediante el cociente de diferenciales. En este curso solo haremos una breve introducción sobre esto, especialmente en lo que respecta a su utilidad en ciertos contextos.

Si consideramos una función $y = f(x)$, la notación diferencial $\frac{dy}{dx}$, que se lee "*d de y partido por d de x*", contrasta con la notación funcional de Newton (f'). Definimos

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \, ,$$

siendo $\Delta x, \Delta y$ los incrementos en x e y de manera respectiva. Esta definición es equivalente a la definición de derivada que hemos hecho al principio del tema.

En los orígenes del cálculo diferencial, la derivada de una magnitud respecto de otra se escribía y se interpretaba como un cociente: $\frac{dy}{dx}$ es la variación de la variable dependiente y respecto de la variación (arbitrariamente pequeña) de la variable independiente x. Esta notación es muy útil y adecuada todavía hoy día, especialmente para la aplicación de la regla de la cadena, el cálculo de la derivada de la función inversa y también para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias por el método de separación de variables.

También cuando hablamos de tasa de cambio o ritmo de variación o velocidad de variación (o expresiones similares) de una magnitud, nos referimos a la derivada de la magnitud respecto de su variable independiente.

Ejemplo 10

Si dejamos caer un objeto desde una altura de 100 m, su posición en vertical, suponiendo caída libre, está representada por $x(t) = 100 - 9{,}8\frac{t^2}{2}$ metros, donde $t \geq 0$ es el tiempo en segundos, y entonces su velocidad es $v(t) = \frac{dx}{dt} = -9{,}8t$ m/s y su aceleración es constante $a(t) = \frac{dv}{dt} = -9{,}8$ m/s^2.

Velocidad

La velocidad es el espacio recorrido dividido entre el tiempo transcurrido.

Ejercicio 15 *Si la posición de un objeto en caída libre es $x(t) = 100 - 9{,}8\frac{t^2}{2}$ metros, ¿cuánto tiempo (en segundos) tarda en llegar al suelo ($x = 0$) y a qué velocidad lo hace (en metros por segundo)?*

Hay distintas maneras de escribir la derivada de una función $y = f(x)$. Las expresiones siguientes son equivalentes:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

Resulta especialmente útil la notación diferencial porque permite tratar $\frac{dy}{dx}$ como si fuese un cociente, con numerador y denominador. Esta manera de manipular los diferenciales es especialmente indicada en algunos casos, como veremos a continuación.

3.1. Derivada de la función inversa

Siguiendo con la notación de Leibniz, la derivada de la función inversa se calcula de la manera siguiente:

Función inversa

Si la función original es $x \mapsto y$, la función inversa es $y \mapsto x$.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \leftrightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

Por lo tanto, solo hay que hacer 1 dividido por la derivada de la función original y poner x en función de y, es decir, $x = f^{-1}(y)$. Por ejemplo, si $y = \ln(x)$, $x > 0$, entonces $x = e^y$ y derivando $\frac{dx}{dy} = e^y = x$, y por lo tanto haciendo inversos obtenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas se obtienen de manera parecida. Por ejemplo, si $y = \arctan(x)$, entonces $x = \tan y$ y derivando $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, y por lo tanto haciendo inversos obtenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

Ejercicio 16 *Considerad $y = \frac{x}{1+x}$, $x \geq 0$. Calculad la función inversa, es decir, x en función de y, y calculad las derivadas $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dx}{dy}$ por separado.*

3.2. Regla de la cadena

El uso de la notación diferencial también es útil para simplificar la derivación de una composición de funciones cuando utilizamos la regla de la cadena.

Supongamos que tenemos una variable y que depende de la variable x. Supongamos ahora que tenemos una tercera variable z que depende de la segunda variable y. Si encadenamos estos dos hechos, tenemos que la última variable z también depende de la primera x (variable independiente). Además, nos puede interesar saber cómo varía z respecto de x:

Cadena de variables

$x \to y \to z$.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Es decir, la variación de z respecto de x es la variación de z respecto de y por la variación de y respecto de x. Esta fórmula es otra manera de ver la derivación de una composición de funciones: $(f \circ u)'(x) = f'\left(u(x)\right)u'(x)$, donde $y = u(x)$ y $z = f(y)$.

Ejemplo 11

Considerad un globo esférico que se está inflando con aire. En un cierto instante de tiempo t, el radio del globo es de $r = 6$ centímetros y está creciendo a un ritmo de $\frac{dr}{dt} = 2$ centímetros por segundo. ¿A qué ritmo está creciendo el volumen V del globo, en centímetros cúbicos, en este mismo instante? Por un lado, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ y $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$ y, por otro lado, la regla de la cadena nos dice que $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$. Finalmente, tenemos $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot 2 = 288\pi = 904{,}8$ cm^3/s.

Ejercicio 17 *La evolución de la población (en miles de individuos) de una cierta especie está determinada por* $x(t) = \frac{100}{1+4e^{-2t}}$*, donde* t *es el tiempo en años. Calculad el ritmo de crecimiento de la población* $\frac{dx}{dt}$ *en miles de individuos por año.*

Ecuación logística

Crecimiento de una población con recursos limitados.

Soluciones a los ejercicios

1) Función $f(x) = x^4 - 2x^3 + \frac{x^2}{2} + 1$, derivada $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + x$ y recta tangente en $x_0 = 2$: $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 10(x-2) + 3$.

2) $f'(x) = 0$, $g'(x) = 2x$.

3) Función $f(x) = x^{-13/6}$ y derivada $f'(x) = -\frac{13}{6x^{19/6}}$ que existen para $x > 0$.

4) Función $y = 100e^x - 10x^4 - x^{-1}$ y derivada $y' = 100e^x - 40x^3 + \frac{1}{x^2}$.

5) Límite de la función para el Hôpital $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$. Derivada por la regla del cociente: $y' = \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2}$.

6) La derivada de la composición es $(1 + \tan(\ln(x))^2) \cdot \frac{1}{x}$.

7) La función $f(x)$ es continua en todos los puntos, ya que $f(0) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$, y es derivable en todos los puntos salvo en $x = 0$, donde no coinciden las derivadas laterales $f'_+(0) = 1/2$ y $f'_-(0) = 1$.

8) Derivadas segundas:

a) $x'' = -9(2\cos(3t) - \operatorname{sen}(3t))$	b) $y'' = 90(-1 + 3x)e^{-3x}$
c) $x'' = -4t\operatorname{sen}(2t)$	d) $z'' = -\frac{2y(y^2-3)}{(1+y^2)^3}$

9) $f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$, $f''(x) = \frac{2!}{(x+2)^3}$, $f'''(x) = \frac{-3!}{(x+2)^4}$, $f^{n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$,.

10)

a) De la función $f(x) = (x^2 - 4)^2$ calculamos la derivada $f'(x) = 4x(x^2 - 4)$ y estudiamos en qué puntos se anula esta derivada.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x(x^2 - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,\ x = -2,\ x = 2$$

Entonces estudiamos el signo de la derivada por la derecha y por la izquierda de estos puntos y tenemos que $f'(-3) < 0$, $f'(-1) > 0$, $f'(1) < 0$ y $f'(3) > 0$. Por lo tanto, $f(x)$ es creciente en $(-2,0) \cup (2,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-2) \cup (0,2)$.

b) De la función $f(x) = xe^x$ calculamos la derivada y estudiamos en qué puntos se anula.

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$$

Entonces estudiamos el signo de la derivada por la derecha y por la izquierda de $x = -1$ y tenemos que $f'(-2) < 0$ y $f'(0) > 0$, por lo tanto $f(x)$ es decreciente en $(-\infty,-1)$ y creciente en $(-1,+\infty)$.

11) Los posibles extremos de la función $f(x) = x - x^{2/3}$ los buscamos entre los puntos críticos

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{3}x^{-1/3} = 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sqrt[3]{x} - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{x} = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{8}{27}$$

y los puntos en los que la función no es derivable, que es el punto $x = 0$, ya que este punto anula el denominador de la derivada. Aplicamos el criterio de la primera derivada para clasificar los extremos relativos y obtenemos que $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto (0,0) y un mínimo relativo en el punto $(\frac{8}{27}, \frac{-4}{27})$.

12) Buscamos la primera derivada de la función $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ para encontrar los posibles extremos.

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = x^2(4x - 6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,\ x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Utilizamos el criterio de la segunda derivada para clasificar estos extremos.

$f''(x) = 12x^2 - 12x$

$f''(0) = 0$ por lo tanto, no clasifica

$f''(3/2) > 0$ por lo tanto, en $x = 3/2$ hay un mínimo relativo

Para encontrar los puntos de inflexión, buscamos los puntos que anulen la segunda derivada.

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,\ x = 1$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada por la derecha y por la izquierda de estos puntos y, puesto que hay un cambio de concavidad en ellos, podemos decir que $x = 0$ y $x = 1$ son puntos de inflexión.

13) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1,1\}$. La función tiene dos asíntotas verticales, $x = -1$ y $x = 1$, y una asíntota oblicua: $y = x$. El único punto de corte con los ejes de coordenadas es el punto (0,0). Para el estudio de la monotonía, calculamos la derivada $f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$. La función crece a $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y decrece a $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1,1) \cup (1, \sqrt{3})$, tiene un máximo relativo en $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$, un mínimo relativo en $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ y un punto de inflexión en (0,0). La función es convexa en $(-\infty,1) \cup (0,1)$ y cóncava en $(-1,0) \cup (1, +\infty)$.

14) $Dom(f) = (0, +\infty)$. $x = 0$ es una asíntota vertical por la derecha e $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$. La función crece en $(0, \exp(1/3))$

y decrece en $(\exp(1/3), +\infty)$. En $x = \exp(1/3)$ la función tiene un máximo relativo. La función es convexa en $(0, \exp(7/12)$ y cóncava en $(\exp(7/12), +\infty)$. El punto $\exp(7/12)$ es un punto de inflexión.

15) Posición $x(t) = 100 - 9{,}8\frac{t^2}{2}$ m, velocidad $v(t) = \frac{dx}{dt} = -9{,}8t$ m/s, posición inicial $x(0) = 100$, posición final: $0 = 100 - 9{,}8\frac{t^2}{2}$ en el tiempo $t = \sqrt{200/9{,}8} \simeq 4{,}52$ s y con velocidad $v = -9{,}8 \cdot 4{,}52 \simeq 44{,}3$ m/s.

16) Si aislamos x obtenemos la inversa: $(1 + x)y = x$, $xy - x = -y$, $x(y - 1) = -y$, $x = \frac{y}{1-y}$. Derivadas: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2}$ y $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{(1-y)^2}$.

17) Población $x(t) = 100(1 + 4e^{-2t})^{-1}$ y ritmo de crecimiento

$$\frac{dx}{dt} = -100(1 + 4e^{-2t})^{-2} \cdot 4e^{-2t} \cdot (-2) = \frac{800\, e^{-2t}}{(1 + 4e^{-2t})^2} > 0$$

utilizando de manera repetida la regla de la cadena.

Bibliografía

Aguiló, F.; Boadas, J.; Garriga, E.; Villalbí, R. (1994) *Temes Clau de Càlcul*. Edicions de la UPC. Servei de Publicacions. Barcelona, España.

Neuhauser, C. (2004). *Matemáticas para ciencias*. Pearson. Madrid, España.

Perelló, C. (1994). *Càlcul Infinitesimal. Amb mètodes numèrics i aplicacions*. Enciclopèdia Catalana. Barcelona, España.

Pozo, F.; Parés, N.; Vidal, Y. (2013). *Matemáticas para la ingeniería*. Pearson. Madrid, España.