Integración

Integral de Riemann

PID_00263094

Mei Calm
Ramon Masià
Joan Carles Naranjo
Núria Parés
Francesc Pozo
Jordi Ripoll
Teresa Sancho

Universitat
Oberta
de Catalunya

Mei Calm

Licenciada en Ciencias Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB) y Doctora en Matemáticas por la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC). Profesora Titular de la Universidad de Girona (UdG) y colaboradora docente de la Universitat Oberta de Catalunya (UOC). Sus áreas de investigación son el análisis intervalar modal y sus aplicaciones al modelaje y al control de sistemas biomédicos.

Ramon Masià

Licenciado en Ciencias Exactas y en Filología Clásica por la UB. Doctor por la UB. Profesor de la Universitat Oberta de Catalunya (UOC). Su ámbito de experiencia es la enseñanza de las matemáticas online y la historia de la matemática griega.

Joan Carles Naranjo

Profesor de la Facultad de Matemáticas de la UB y colaborador de la UOC, posee una dilatada experiencia docente en el Grado de Matemáticas y en enseñanza online. Profesor titular del área de Geometría y Topología, su ámbito de investigación es la Geometría Algebraica.

Núria Parés

Licenciada en Matemáticas por la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC) (1999) y doctora en Matemática Aplicada por la UPC (2005). Desde el año 2000 es profesora del Departamento de Matemática Aplicada III de la UPC, actualmente como profesora agregada. Como miembro del Centro Específico de Búsqueda LaCàN (www-lacan.upc.edu) su investigación se centra en los métodos numéricos en ciencias aplicadas e ingeniería. Miembro del Grupo de Innovación Matemática 'e-learning' (GIMEL - bibliotecnica.upc.edu/gimel) con el que ha participado en numerosos proyectos de innovación docente.

Francesc Pozo

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Barcelona (2000) y doctor en Matemática Aplicada por la Universidad Politécnica de Cataluña (2005). Ha sido profesor asociado en la Universidad Autónoma de Barcelona, y profesor asociado, colaborador y actualmente profesor agregado en la Universidad Politécnica de Cataluña. Cofunfador del Grupo de Innovación Matemática 'e-learning' (GIMEL), responsable de varios proyectos de innovación docente y autor de varias publicaciones. Miembro del grupo de investigación consolidado CoDAlab (www-ma3.upc.se/ codalab), su investigación se centra en la teoría de control y sus aplicaciones a la ingeniería mecánica y civil.

Jordi Ripoll

Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Barcelona (UB). Profesor de la Universidad de Girona (UdG) y colaborador docente de la Universitat Oberta de Catalunya (UOC). Investiga en modelos matemáticos de la biología y en particular en la propagación de epidemias sobre redes complejas.

Teresa Sancho

Doctora ingeniera en Electrónica y licenciada en Matemáticas. Profesora y directora de investigación de la Universitat Oberta de Catalunya (UOC). Investiga en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas en línea en educación superior.

Sexta edición: febrero 2019

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Diseño: Manel Andreu
Realización editorial: Oberta UOC Publishing, SL

Índice

Introducción

La integral de Riemann permite calcular el área limitada por la gráfica de una función y el eje de abscisas. El problema del cálculo de áreas es anterior al problema de la operación, la integración tal y como la hemos estudiado en el tema anterior. En todo caso, gracias al teorema fundamental del cálculo las dos ideas confluyen: el área cerrada por la gráfica de una función se calcula evaluando una primitiva de esta función en ciertos puntos.

1. Integral de Riemann y teorema fundamental del cálculo

1.1. Integral de Riemann

En este tema, estudiaremos la denominada integral de Riemann, que tiene como objetivo el cálculo del área limitada por la gráfica de una función y el eje de abscisas. Aunque este tema es posterior al del cálculo de primitivas o de integrales indefinidas, de manera histórica el problema del cálculo de áreas es anterior al problema de la operación inversa de la derivada. A continuación veremos cómo ligar estas dos ideas.

Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann, matemático alemán (Breselenz, Hannover, 1826 - Selesca, Lago Mayor, 1866).

1.1.1. Idea intuitiva

Dada una función $f(x)$ acotada y positiva, queremos resolver el problema de determinar el área limitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Podéis ver un ejemplo del área que hay que determinar en la figura 1.

Figura 1. Área bajo una función

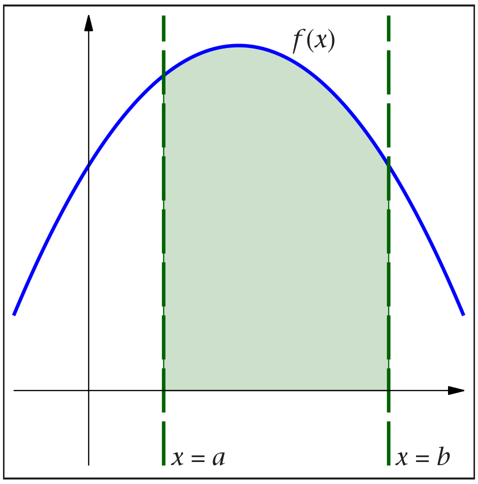


Figura 1

Área limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

Si la función fuera una función constante, el cálculo del área se limitaría al área de un rectángulo. Es evidente, sin embargo, que el área que queremos calcular ahora no se puede determinar como el área de un rectángulo. Sin embargo, podemos utilizar esta idea.

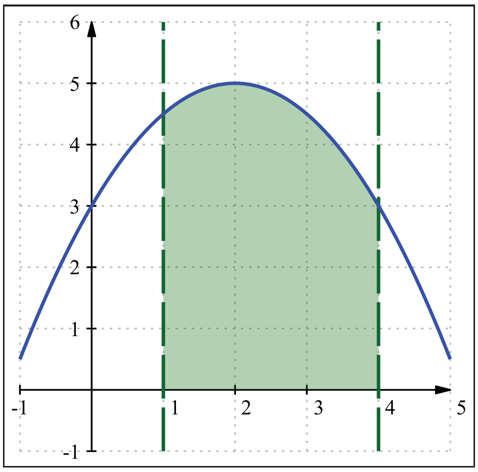
1.1.2. Idea para aproximar el área

Vamos a buscar una aproximación al área limitada por la gráfica de una función. Consideremos, para fijar ideas, una función, como por ejemplo la parábola

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + 3.$$

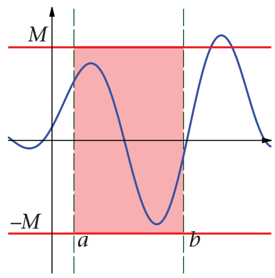
Esta es una función acotada y positiva. Queremos calcular el área bajo la gráfica de esta función entre las rectas verticales $x = 1$ y $x = 4$.

Figura 2. Área bajo la función $f(x) = -x^2/2 + 2x + 3$



Función acotada

Cuando decimos que una función es acotada en un intervalo cerrado $[a,b]$, queremos decir que hay un valor M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Es decir, que todos los valores que toma la función en $[a,b]$ caen en el intervalo $[-M,M]$ en el eje OY como se puede ver en la figura.



El esquema que seguiremos para aproximar el área es el siguiente:

Figura 2

Área limitada por la gráfica de la función $f(x) = -x^2/2 + 2x + 3$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 4$.

- Consideraremos algunos puntos equiespaciados entre $x = 1$ y $x = 4$, como por ejemplo $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 4$, que nos dividirán el intervalo inicial en algunos subintervalos (tres en este caso).

- Con el intervalo determinado por los primeros dos puntos, $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$, consideraremos el punto medio $x_{01} = \frac{x_0+x_1}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$ y construiremos un rectángulo de altura $h_{01} = f(x_{01}) = \frac{-1{,}5^2}{2}+2\cdot 1{,}5+3 = 39/8 = 4{,}875$. Hacemos lo mismo con el resto de los subintervalos para obtener las diferentes alturas de los rectángulos:

$$h_{12} = f(x_{12}) = f(2{,}5) = 39/8 = 4{,}875$$

$$h_{23} = f(x_{23}) = f(3{,}5) = 31/8 = 3{,}875$$

- Finalmente, aproximamos el área bajo la curva en cada uno de los intervalos para el área del rectángulo de base la longitud del subintervalo y altura, los valores de la función en x_{12} y x_{23}, que son h_{12} y h_{23}. Por lo tanto, el área total es aproximada para la suma de las áreas de los rectángulos:

$$s(f) = h_{01}(x_1 - x_0) + h_{12}(x_2 - x_1) + h_{23}(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{39}{8} + \frac{39}{8} + \frac{31}{8} = \frac{109}{8} = 13{,}625$$

  donde $s(f)$ es la aproximación del área asociada a los puntos que hemos elegido.

Figura 3. Aproximación del área

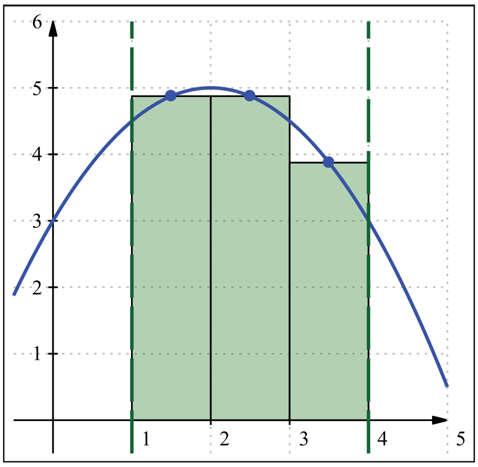


Figura 3

Cálculo de la aproximación del área de la función $f(x) = -x^2/2 + 2x + 3$ cuando se consideran los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 4$.

En este caso, representado en la figura 3, la aproximación del área es $s(f) = 13{,}625$, mientras que el valor exacto del área es $A = 13{,}5$.

Observad que si queremos obtener una mejor aproximación del área, solo es necesario que consideremos más rectángulos, de manera que estos se adapten mejor a la función.

Aunque es laborioso, resulta fácil calcular aproximaciones del área aumentando el número de rectángulos (o de manera equivalente, de intervalos). En la figura 4, podéis ver las aproximaciones que se obtienen considerando 6, 9, 12 y 15 intervalos de igual longitud. Observad que, aumentando el número de rectángulos, el valor de la aproximación del área se acerca cada vez más al valor exacto del área, que es de 13,5.

Cálculo laborioso

Aunque la aproximación al área bajo una curva como suma de áreas de rectángulos es laboriosa, la informática permite hoy día hacer estos cálculos de una manera muy sencilla.

Figura 4. Aproximación del área variando el número de intervalos

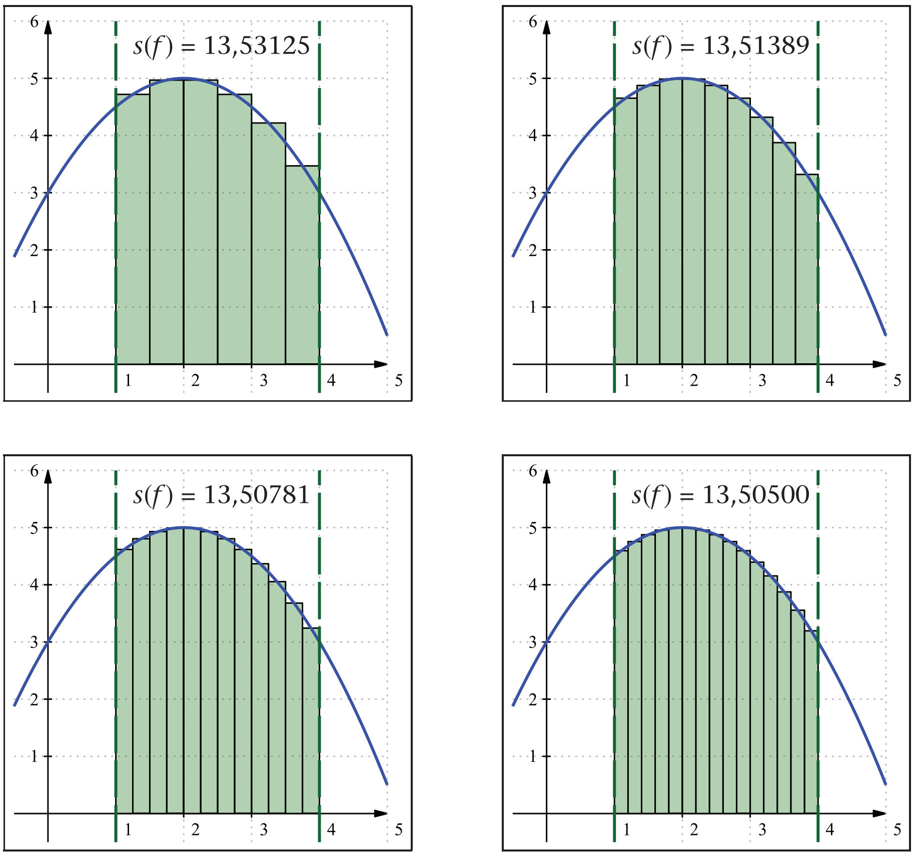


Figura 4

Cálculo de la aproximación del área de la función $f(x) = -x^2/2 + 2x + 3$ entre $a = 1$ y $b = 4$ cuando se consideran 6, 9, 12 y 15 intervalos de igual longitud.

En la tabla 1, podéis ver los valores de las aproximaciones a medida que se consideran más intervalos. Como se puede ver, a medida que se aumenta el número de rectángulos, los valores de las aproximaciones del área tienden a un valor. Este será el valor del área exacta: 13,5. Lo que es lo mismo, podríamos decir que el límite de las aproximaciones cuando el número de intervalos tiende a infinito es 13,5.

Tabla 1. Valores de las aproximaciones del área a medida que se toman participaciones más finas

Número de intervalos	$s(f)$
3	13,62500000
6	13,53125000
9	13,51388889
12	13,50781250
15	13,50500000
18	13,50347222
21	13,50255102
24	13,50195312
27	13,50154321
30	13,50125000
33	13,50103306
36	13,50086806
39	13,50073964
42	13,50063776
45	13,50055556
600	13,50000312
1200	13,50000078
2400	13,50000020
4800	13,50000005
A = 13,5	

Cuando esto sucede, es decir, cuando el límite de las aproximaciones existe, se dice que la función es integrable en el sentido de Riemann. El valor del límite se denomina integral de Riemann de f en $[a,b]$ y se denota por

$$\int_1^4 f(x)dx = 13{,}5.$$

Encontramos funciones no integrables en el sentido de Riemann, es decir, que a medida que hacemos más rectángulos, no tendemos a un valor fijo. Pese a ello, este tipo de funciones queda fuera del temario de este curso.

Funciones no integrables

Un ejemplo de función no integrable en el sentido de Riemann es la denominada función de Dirichlet. Si estáis interesados en esto, podéis consultar la web mathworld.wolfram.com/DirichletFunction.html.

1.1.3. Definición formal

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función *positiva*, acotada e integrable en el sentido de Riemann, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = A,$$

donde A es el área limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas verticales de ecuaciones $x = a$ y $x = b$.

Función positiva

Decimos que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es *positiva* si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Ejemplo 1

Considerad la función $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ en el intervalo [0,4]. Observad que, en este caso, el objetivo es calcular el área de un sector circular de amplitud 90° o $\pi/2$ radianes de una circunferencia de radio 4. Esta región se encuentra representada en la figura 5. Sabemos, en este caso, por las propiedades geométricas de la figura, que $A = \pi r^2/4 = 4\pi \approx 12{,}56637$.

Figura 5. Área de un cuarto de circunferencia

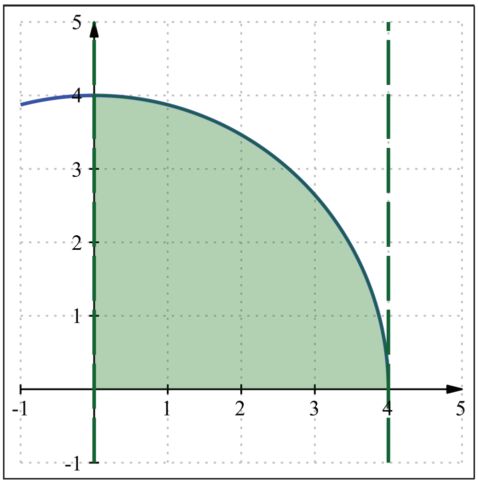


Figura 5

Área limitada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{16-x^2}$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 4$ (un cuarto de circunferencia).

Comprobaremos que, si consideramos aproximaciones del área utilizando rectángulos, convergemos al valor esperado. En la figura 6 podéis encontrar las aproximaciones de las áreas para 4, 8, 16 y 32 rectángulos y podéis observar cómo las aproximaciones tienden a 4π. De hecho, para 100 rectángulos obtenemos la aproximación 12,56775, que tiene dos decimales correctos del área; para 200 rectángulos obtenemos 12,56686, que tiene tres decimales correctos; y si consideramos 1400 rectángulos, obtenemos la aproximación 12,56639, que ya tiene cuatro decimales correctos.

Figura 6. Aproximación del área variando el número de intervalos

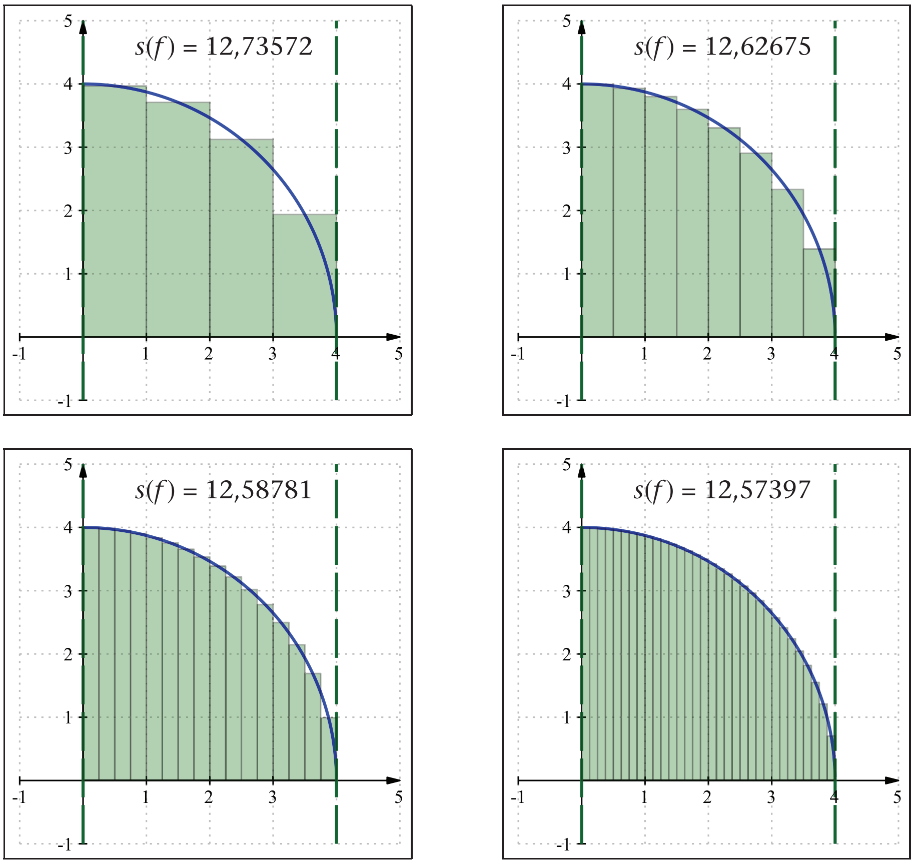


Figura 6

Cálculo de la aproximación del área de la función $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ entre $x = 0$ y $x = 4$ cuando se consideran 4, 8, 16 y 32 intervalos de igual longitud.

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función *negativa*, acotada e integrable en el sentido de Riemann, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = -A,$$

donde A es el área limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas verticales de ecuaciones $x = a$ y $x = b$.

Función negativa

Decimos que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es *negativa* si $f(x) < 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Ejemplo 2

Considerad ahora la función $f(x) = -\sqrt{16-x^2}$ en el intervalo $[0,4]$. Observad que, en este caso, el objetivo continúa siendo calcular el área de un sector circular de amplitud 90° o $\pi/2$ radianes de una circunferencia de radio 4, como se ve en la figura 7. Por lo tanto, también en este caso, aplicando las propiedades de la geometría, sabemos que $A = \pi r^2/4 = 4\pi \approx 12{,}56637$. En este caso, sin embargo, la función toma valores negativos en el intervalo $[0,4]$ (podéis ver la figura 7).

Figura 7. Área de un cuarto de circunferencia

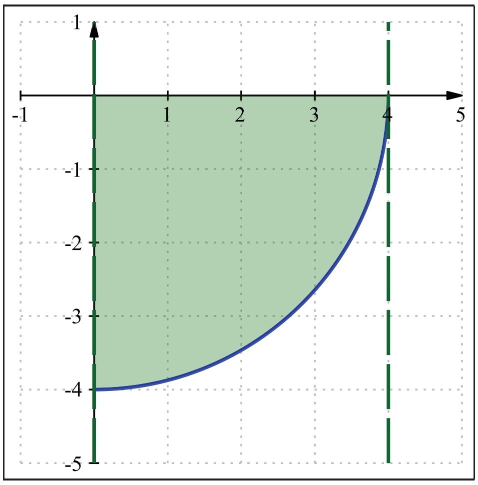


Figura 7

Área limitada por la gráfica de la función $f(x) = -\sqrt{16-x^2}$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 4$.

Si consideramos la misma distribución por rectángulos que hemos considerado en los ejemplos anteriores, las alturas de los rectángulos serán negativas porque la función toma valores negativos. Por lo tanto, el valor de la aproximación será un número negativo.

En efecto, si seguimos el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores, obtenemos el resultado siguiente.

- Consideramos tres puntos equiespaciados entre $x = 0$ y $x = 4$, como por ejemplo $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ y $x_4 = 4$ como se ve en la figura 8.

Figura 8. Aproximación del área de un cuarto de circunferencia

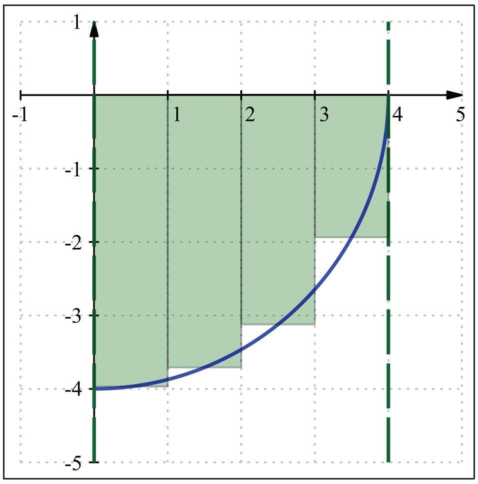


Figura 8

Cálculo de la aproximación del área de la función $f(x) = -\sqrt{16-x^2}$ cuando se consideran los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 4$.

- Con el intervalo determinado por los primeros dos puntos, $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$, consideraremos el punto medio $x_{01} = 0{,}5$ y construiremos un rectángulo de altura $h_{01} = f(x_{01}) = -\sqrt{16 - 0{,}5^2} \approx -3{,}9686$. Hacemos lo mismo con el resto de los subintervalos para obtener las distintas alturas de los rectángulos

$$
\begin{aligned}
h_{12} &= f(x_{12}) = f(1{,}5) \approx -3{,}7081\\
h_{23} &= f(x_{23}) = f(2{,}5) \approx -3{,}1225\\
h_{34} &= f(x_{34}) = f(3{,}5) \approx -1{,}9365.
\end{aligned}
$$

- Calculamos el valor aproximado sumando el área de cada rectángulo, es decir,

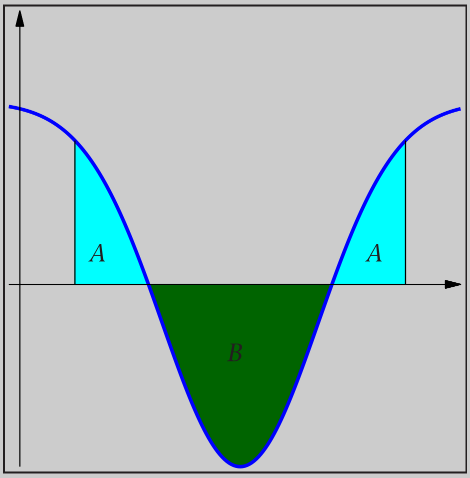
$$
\begin{aligned}
s(f) =& h_{01}(x_1 - x_0) + h_{12}(x_2 - x_1) + h_{23}(x_3 - x_2) + h_{34}(x_4 - x_3)\\
\approx& -3{,}9686 - 3{,}7081 - 3{,}1225 - 1{,}9365 = -12{,}7357.
\end{aligned}
$$

Es importante observar que, en el caso de una función negativa, la integral de Riemann (es decir, el límite de las áreas de los rectángulos cuando hacemos que el número de intervalos tienda a infinito) nos da el valor del área en negativo. Por lo tanto, para calcular el área, hay que cambiar el signo del resultado obtenido.

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada e integrable en el sentido de Riemann, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = A - B,$$

donde A es la suma de las áreas limitadas por la función f en los trozos en los que es *positiva*, y B es la suma de las áreas limitadas por la función f en los trozos en los que es *negativa*.



Es importante recordar que, aunque la integral de Riemann está relacionada de manera intrínseca con el cálculo de áreas, cuando tenemos funciones en las que se producen cambios de signo, la integral directamente no nos da el área que delimita la función con el eje de abscisas.

Esto lo veremos con más detalle en los subapartados siguientes.

1.2. Teorema fundamental del cálculo

Como hemos visto en el subapartado anterior, para calcular el valor de la integral de Riemann de una función, hay que considerar las aproximaciones mediante el área de rectángulos y observar si aumentando el número de intervalos convergemos a un valor. Por lo tanto, para calcular el valor de la integral de Riemann hay que calcular el valor de este límite. Este proceso es lento y costoso, sobre todo si no se dispone de un ordenador que haga los cálculos de manera rápida y segura.

Afortunadamente, el teorema fundamental del cálculo nos permite relacionar el cálculo de la integral de Riemann con el cálculo de primitivas, algo que es de gran utilidad para el cálculo de integrales definidas.

Teorema fundamental del cálculo (primera parte) o regla de Barrow

Si f es una función continua en $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

La notación habitual para la diferencia $F(b) - F(a)$ es:

$$F(x)\Big|_a^b \qquad \text{o} \qquad [F(x)]_a^b.$$

Ejemplo 3

Mediante la definición de la integral de Riemann utilizando rectángulos, hemos visto anteriormente que el área limitada por la gráfica de la función $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + 3$, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 4$ es 13,5.

A continuación, comprobaremos que obtenemos el mismo resultado utilizando la regla de Barrow, teniendo en cuenta que una primitiva de $f(x)$ es $F(x) = -\frac{x^3}{6} + x^2 + 3x$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x)dx &= \int_1^4 \left(-\frac{x^2}{2} + 2x + 3\right) dx = \left[-\frac{x^3}{6} + x^2 + 3x\right]_1^4 \\ &= \left(-\frac{4^3}{6} + 4^2 + 3\cdot 4\right) - \left(-\frac{1^3}{6} + 1^2 + 3\right) = \frac{27}{2} = 13{,}5\end{aligned}$$

Ejemplo 4

Mediante la definición de la integral de Riemann también hemos comprobado que si consideramos la función $f(x) = \sqrt{16-x^2}$ en el intervalo [0,4] –que genera un sector circular de amplitud de 90°–, entonces la integral de Riemann coincide con el área del sector y es $4\pi \approx 12{,}56637$.

Comprobamos que, en este caso, obtenemos el mismo resultado utilizando la regla de Barrow (primera parte del teorema fundamental del cálculo). Observemos que aquí el cálculo de la primitiva de la función es un poco más complicado y hay que utilizar un cambio de variable junto con propiedades trigonométricas.

Empezaremos aplicando el cambio de variable $x = 4\,\mathrm{sen}(t)$ y la propiedad $\mathrm{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_0^4 f(x)dx &= \int_0^4 \sqrt{16-x^2}dx \\
&= \left[\begin{array}{l|l} x = 4\,\mathrm{sen}(t) & x = 0 \longrightarrow t = \mathrm{arc\,sen}(0/4) = \mathrm{arc\,sen}(0) = 0 \\ dx = 4\cos(t)dt & x = 4 \longrightarrow t = \mathrm{arc\,sen}(4/4) = \mathrm{arc\,sen}(1) = \pi/2 \end{array}\right] \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{16-16\,\mathrm{sen}^2(t)}4\cos(t)dt = 4\cdot 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(t)}\cos(t)dt \\
&= 16\int_0^{\pi/2}\sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)dt = 16\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)dt
\end{aligned}$$

Observad que, en este caso, al tener una integral definida no solo hemos cambiado x y dx al hacer el cambio de variable, sino que también hemos hecho el cambio en los límites de la integral. Una vez hecho esto, tenemos que reescribir el $\cos^2(t)$ utilizando que $\cos(2t) = \cos^2(t) - \mathrm{sen}^2(t) = \cos^2(t) - (1-\cos^2(t)) = 2\cos^2(t) - 1$. Por lo tanto, $\cos^2(t) = \cos(2t)/2 + 1/2$. De este modo, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^4 f(x)dx &= 16\int_0^{\pi/2}\cos^2(t)dt = \frac{16}{2}\int_0^{\pi/2}(\cos(2t)+1)\,dx = 8\left[\frac{\mathrm{sen}(2t)}{2}+t\right]_0^{\pi/2} \\
&= [4\,\mathrm{sen}(2t)+8t]_0^{\pi/2} = \left(4\,\mathrm{sen}(2\frac{\pi}{2}) + 8\frac{\pi}{2}\right) - (4\,\mathrm{sen}(0)+0) = \frac{8\pi}{2} = 4\pi
\end{aligned}$$

Observad que, una vez hemos calculado la primitiva de la función, solo hay que aplicar la regla de Barrow evaluando la primitiva en $\pi/2$ (extremo derecho de la integral) y restándole la evaluación de la primitiva en el 0 (extremo izquierdo de la integral).

Ejercicio 1 *Calculad las integrales siguientes de Riemann utilizando la regla de Barrow:*

a) $\displaystyle\int_0^2 x^2 dx$

b) $\displaystyle\int_0^4 -e^x dx$

c) $\displaystyle\int_{-4}^4 (x^2-2)dx$

d) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} \mathrm{sen}(x)dx$

Decid, en cada caso, qué relación hay entre la integral de Riemann y el área que delimita la función con el eje de abscisas.

Por lo tanto, la regla de Barrow o la primera parte del teorema fundamental del cálculo nos permiten calcular integrales de Riemann en el caso en que sepamos calcular la primitiva de la función. El teorema siguiente nos permite calcular la derivada de una función definida de manera integral.

Regla de Barrow

La regla de Barrow nos permite calcular integrales de Riemann siempre que seamos capaces de calcular una primitiva de la función.

Teorema fundamental del cálculo (segunda parte)

Si f es continua en $[a,b]$, y $g(x)$ y $h(x)$ son dos funciones derivables en (a,b), entonces la función

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$$

es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y su derivada es

$$F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Función definida de manera integral

La expresión $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$ puede parecer extraña, pero hay que ser conscientes de que la variable de la función F es x, mientras que la variable de la integral es t. Dicho de otro modo, para cada valor de x, $F(x)$ es una integral de Riemann de extremos variables.

Ejemplo 5

Considerad la función

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{-t}dt$$

definida por las funciones $f(t) = e^{-t}$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = x^3$. Entonces, utilizando la segunda parte del teorema fundamental del cálculo, podemos calcular la derivada de la función $F(x)$ como

$$F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x) = e^{-x^3}3x^2 - e^{-x^2}2x = 3x^2e^{-x^3} - 2xe^{-x^2}.$$

Observad que, en este caso, puesto que es sencillo calcular una primitiva de la función $f(t)$, habríamos podido calcular la derivada de $F(x)$ primero calculando $F(x)$ y después derivando. Comprobamos que obtenemos el mismo resultado

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{x^3} e^{-t}dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\left[-e^{-t}\right]_{x^2}^{x^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(-e^{-x^3} + e^{-x^2}\right) = 3x^2e^{-x^3} - 2xe^{-x^2}.$$

Ejemplo 6

Considerad la función

$$F(x) = \int_{3}^{x^2} e^{t^3}dt$$

definida por las funciones $f(t) = e^{t^3}$, $g(x) = 3$ y $h(x) = x^2$. Entonces, utilizando la segunda parte del teorema fundamental del cálculo, tenemos que calcular la derivada de la función $F(x)$ como

$$F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x^{2^3}} \cdot 2x - e^{3^3} \cdot 0 = 2xe^{x^6}.$$

Frecuentemente nos encontramos con el hecho de que la función $g(x)$ está determinada por una constante. Dado que $g'(x) = 0$ tenemos, tal y como lo hemos obtenido en la ecuación anterior, que

$$F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x).$$

Observamos además que, en este caso, no es nada sencillo calcular una primitiva de la función e^{t^3}. Por lo tanto, para calcular la derivada de $F(x)$ no podemos calcular la primitiva primero y después derivar. Sin el teorema fundamental del cálculo, no habríamos podido calcular la derivada.

Ejercicio 2 *Calculad las derivadas de las funciones siguientes:*

a) $F(x) = \int_0^x t^2 dt$

b) $F(x) = \int_0^{e^{3x}} \operatorname{sen}(t) dt$

c) $F(x) = \int_x^1 \frac{1}{1+t^2} dt$

1.3. Propiedades de la integral de Riemann

A continuación, se detallan algunas propiedades de la integral de Riemann que pueden ser de interés.

Dadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables en el sentido de Riemann en $[a,b]$ se verifican las propiedades siguientes:

a) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

b) $\int_a^a f(x)dx = 0$

c) $\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

d) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \ \forall k \in \mathbb{R}$

e) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \ \forall c \in [a,b]$

2. Aplicaciones de la integral de Riemann: cálculo de áreas

2.1. Área delimitada por una función y el eje de abscisas

Recordemos que la integral de Riemann de una función f que tiene cambios de signo en un intervalo $[a,b]$ nos da la suma de las áreas limitadas por la función f cuando es positiva, menos la suma de las áreas limitadas por la función f cuando es negativa. Por lo tanto, **la integral no nos da directamente el valor del área**.

De hecho, el área delimitada por una función, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$ está determinada por:

$$A = \int_a^b |f(x)|dx,$$

ya que lo que hace el valor absoluto es transformar en positivos –cambiar de signo– los trozos en los que la función es negativa. Un ejemplo de esto se puede ver en la figura 9.

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 + A_2 - B, \qquad \int_a^b |f(x)|dx = A_1 + A_2 + B$$

Figura 9. Área delimitada por la gráfica de una función y el eje de abscisas

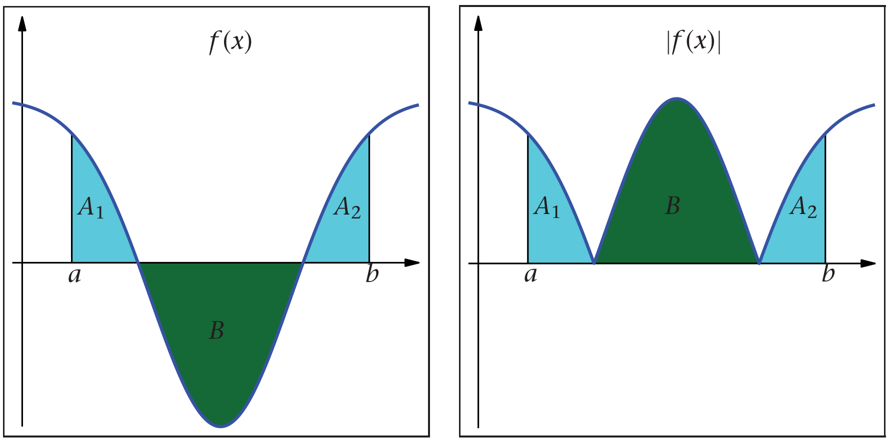


Figura 9

Regiones que delimitan las gráficas de las funciones $f(x)$ y $|f(x)|$. Si se quiere calcular el área de una función $f(x)$ con el eje de abscisas, hay que considerar la función $|f(x)|$.

Ahora bien, ¿cómo se calcula $\int_a^b |f(x)|dx$? Observad que para calcular el valor absoluto, necesitamos saber cuándo $f(x)$ es *positiva* y cuándo $f(x)$ es *negativa*. Por lo tanto, para calcular el área es necesario:

1) calcular los puntos de intersección de la función $f(x)$ con el eje de abscisas en el intervalo $[a,b]$;

2) determinar los subintervalos en los que $f(x) \geq 0$ y los subintervalos en los que $f(x) \leq 0$;

3) el área es la suma de la integral de f en la que f es positiva y las integrales en las que f es negativa cambiadas de signo.

Ejemplo 7

Queremos calcular el área de la función sen(x) con el eje de abscisas entre las rectas $x = 0$ y $x = 3\pi/2$. En este caso, la función sen(x) tiene un cambio de signo en este intervalo, y por lo tanto primero hemos de encontrar los puntos de corte con el eje.

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{sen}(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ se anula en el punto $x = \pi \in [0,3\pi/2]$.

Una vez determinado el punto de corte, tenemos que determinar en qué intervalos la función es positiva y en qué intervalos la función es negativa. En este caso, $f(x) \geq 0$ en $[0,\pi]$ y $f(x) \leq 0$ en $[\pi,3\pi/2]$ como podéis ver en la figura 10.

Figura 10. Función $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ entre 0 y $3\pi/2$

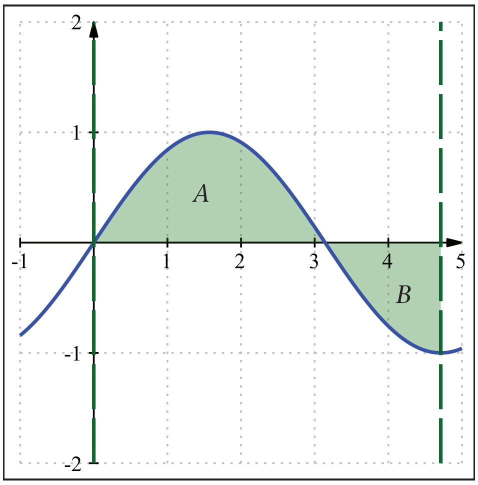


Figura 10

Regiones que delimita la gráfica de la función $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ y las rectas $x = 0$ y $x = 3\pi/2$. Es importante notar que $f(x) < 0$ en intervalo abierto: $(\pi,3\pi/2)$.

Por lo tanto, el área está determinada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} f(x)dx - \int_{\pi}^{3\pi/2} f(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} - [-\cos(x)]_{\pi}^{3\pi/2} \\ &= -\cos(\pi) + \cos(0) + \cos(3\pi/2) - \cos(\pi) = 1 + 1 + 0 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Ejemplo 8

Queremos calcular el área de la función $x^2 - 2$ con el eje de abscisas entre las rectas $x = -4$ y $x = 4$. En este caso, la función $x^2 - 2$ tiene dos cambios de signo en este intervalo, y por lo tanto primero hay que encontrar los puntos de corte con el eje.

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ se anula en los puntos $x = \pm\sqrt{2} \in [-4,4]$.

Una vez determinados los puntos de corte, tenemos que determinar en qué intervalos la función es positiva y en qué intervalos la función es negativa. En este caso, $f(x) \geq 0$ en $[-4,-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},4]$ y $f(x) \leq 0$ en $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ como podéis ver en la figura 11.

Figura 11. Función $f(x) = x^2 - 2$ entre -4 y 4

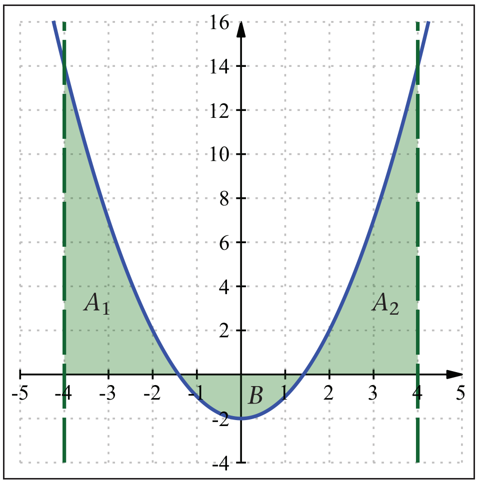


Figura 11

Regiones que delimita la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2$ y las rectas $x = -4$ y $x = 4$. Es importante notar que $f(x) < 0$ en $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que la primitiva de $f(x)$ es $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x$, que es una función impar, es decir $F(-x) = -F(x)$, el área está determinada por

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-4}^{-\sqrt{2}} f(x)dx - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x)dx + \int_{\sqrt{2}}^{4} f(x)dx \\
&= [F(x)]_{-4}^{-\sqrt{2}} - [F(x)]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} + [F(x)]_{\sqrt{2}}^{4} \\
&= F(-\sqrt{2}) - F(-4) - F(\sqrt{2}) + F(-\sqrt{2}) + F(4) - F(\sqrt{2}) \\
&= -F(\sqrt{2}) + F(4) - F(\sqrt{2}) - F(\sqrt{2}) + F(4) - F(\sqrt{2}) = -4F(\sqrt{2}) + 2F(4) \\
&= -4\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2}\right) + 2\left(\frac{64}{3} - 8\right) = -\frac{8\sqrt{2}}{3} + 8\sqrt{2} + \frac{128}{3} - 16 = \frac{16\sqrt{2}}{3} + \frac{80}{3} \\
&\approx 34{,}2091.
\end{aligned}$$

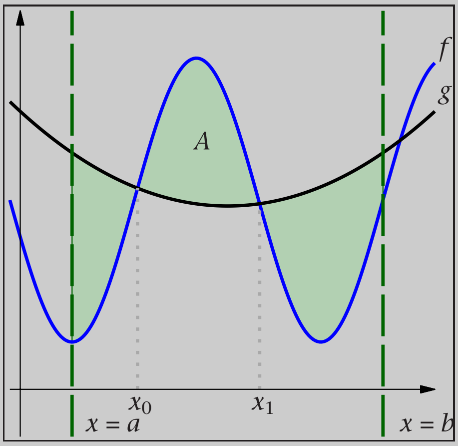
Ejercicio 3 *Determinad el área que delimitan las funciones siguientes, el eje de abscisas y las rectas dadas en cada caso:*

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $x = -2$ *y* $x = 6$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, $x = -2$ *y* $x = 4$
c) $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$, $x = 0$ *y* $x = \ln(2)$

Ayuda: haced el cambio de variable en la integral $t^2 = e^x - 1$.

2.2. Área delimitada por dos funciones cualesquiera

Sean f y g dos funciones cualesquiera acotadas e integrables en el sentido de Riemann en el intervalo $[a,b]$, como las que se muestran en la figura siguiente.



El área delimitada entre las dos curvas y las rectas $x = a$ y $x = b$ está determinada por:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Ahora bien, ¿cómo se calcula $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$? Observad que para calcular el valor absoluto, necesitamos saber cuándo $f(x)–g(x) \geq 0$ y cuándo $f(x)–g(x) \leq 0$. Por lo tanto, para calcular el área es necesario:

1) calcular los puntos de intersección de las dos funciones en el intervalo $[a,b]$;

2) determinar los subintervalos en los que $f(x) \geq g(x)$ y los subintervalos en los que $g(x) \geq f(x)$;

3) el área es la suma de las integrales de $f - g$ cuando f es mayor que g y las integrales de $g - f$ cuando g es mayor que f.

En el caso de las funciones f y g de la figura anterior, el área se calcularía como:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \\ &= \int_a^{x_0} (g(x) - f(x))\, dx + \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{x_1}^{b} (g(x) - f(x))\, dx \end{aligned}$$

Ejemplo 9

Queremos calcular el área de la región cerrada en forma de media luna que delimita con la recta $x = 0$, las funciones $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ y $g(x) = 3\sqrt{x}$.

La figura 12 muestra el área limitada por las gráficas de las funciones f y g.

Figura 12. Área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ y $g(x) = 3\sqrt{x}$

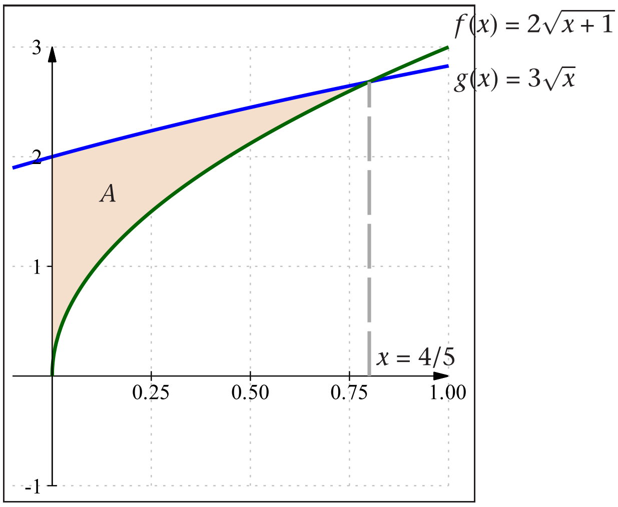


Figura 12

Región que delimitan las gráficas de las funciones $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ y $g(x) = 3\sqrt{x}$ y la recta $x = 0$. Es importante notar que $f(x) \geq g(x)$ en todo el intervalo de integración.

Lo primero que tenemos que hacer es determinar el punto de corte entre las dos funciones, es decir, el punto x tal que $f(x) = g(x)$:

$$2\sqrt{x+1} = 3\sqrt{x} \iff 4(x+1) = 9x \iff 5x - 4 = 0 \iff x = \frac{4}{5}$$

Puesto que en el intervalo $[0, \frac{4}{5}]$ tenemos que $f(x) \geq g(x)$, el área está determinada por:

$$A = \int_0^{\frac{4}{5}} (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^{\frac{4}{5}} \left(2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x}\right) dx$$

Por lo tanto,

$$A = \int_0^{\frac{4}{5}} \left(2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{4}{5}} = \frac{4}{3}\left(\frac{9}{5}\right)^{\frac{3}{2}} - 2\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\frac{27}{5\sqrt{5}} - 2\frac{8}{5\sqrt{5}} - \frac{4}{3} = \frac{20}{5\sqrt{5}} - \frac{4}{3} = \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{4}{3} \approx 0{,}4556$$

Ejemplo 10

En este ejemplo, queremos calcular el área delimitada por las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = 1/2$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$ (podéis ver la figura 13).

Figura 13. Gráfica de las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = 1/2$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$

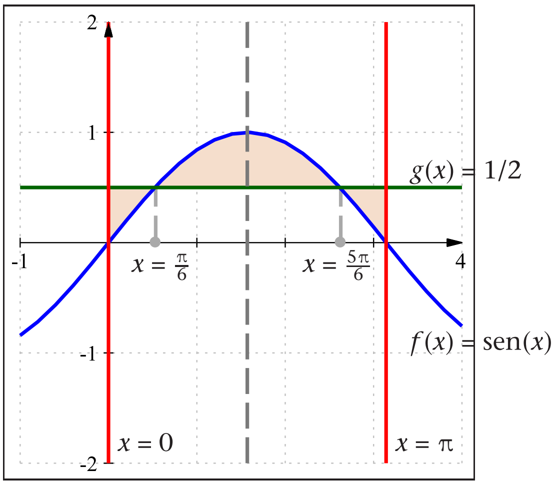


Figura 13

Región que delimitan las gráficas de las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = 1/2$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$. Es importante notar dos cosas: (1) la simetría de la función respecto de la recta $x = \pi/2$ y (2) que $g(x) \geq f(x)$ en $[0,\pi/6]$ y que $f(x) \geq g(x)$ en $[\pi/6,\pi/2]$.

En primer lugar, necesitamos saber los puntos en los que la función seno corta la recta $g(x) = 1/2$. Para esto, necesitamos igualar las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \frac{1}{2}$:

$$\text{sen}(x) = \frac{1}{2}, x \in [0,\pi] \iff x = \text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Por lo tanto, los dos puntos de corte que estamos buscando son $x = \dfrac{\pi}{6}$ y $x = \dfrac{5\pi}{6}$. Observemos, sin embargo, que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son simétricas en el intervalo $[0,\pi]$. Por lo tanto, aprovechando la simetría de las funciones podemos calcular el área que delimitan en el intervalo $[0,\pi]$ como dos veces el área que delimitan en el intervalo $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Para calcular el área, utilizamos las observaciones siguientes:

- en el intervalo $[0,\dfrac{\pi}{6}]$, la función $g(x)$ es mayor o igual que $f(x)$,
- en el intervalo $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}]$, la función $f(x)$ es mayor o igual que $g(x)$.

Por lo tanto, el área delimitada por las dos curvas en el intervalo $[0,\pi]$ es

$$\begin{aligned} A &= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} (g(x) - f(x))dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x))dx\right) \\ &= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \text{sen}(x)\right) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\text{sen}(x) - \frac{1}{2}\right) dx\right) \\ &= 2\left[\frac{1}{2}x + \cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + 2\left[-\cos(x) - \frac{1}{2}x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6} + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos(0)\right) + 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + 2\left(0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - 2 \simeq 0{,}9405. \end{aligned}$$

Ejercicio 4 *Determinad el área que delimitan las funciones siguientes:*

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ *y* $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ *y las rectas* $x = 1$ *y* $x = 2$

b) $f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ *y* $h(x) = 10 + x$

Soluciones a los ejercicios

1. a) 8/3, la integral coincide con el área entre la función y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.
b) $1-e^4$, la integral coincide con el área entre la función y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 4$ cambiada de signo.
c) 80/3, la integral de Riemann coincide con las sumas de las áreas en las que la función es positiva $[-4,-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2},4]$ menos el área en la que la función es negativa $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.
d) 1, la integral de Riemann coincide con la suma del área en la que la función es positiva $[0,\pi]$ menos el área donde la función es negativa $[\pi,3\pi/2]$.

2. a) $F'(x) = x^2$, b) $F'(x) = 3e^{3x}\,\mathrm{sen}(e^{3x})$, c) $F'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

3. a) $A = 40$, b) $A = \dfrac{41}{2}$, c) $A = 2 - \dfrac{\pi}{2}$

4. a) $A = \ln\left(\frac{8}{5}\right)$, b) 215/6

Resolución detallada de los ejercicios

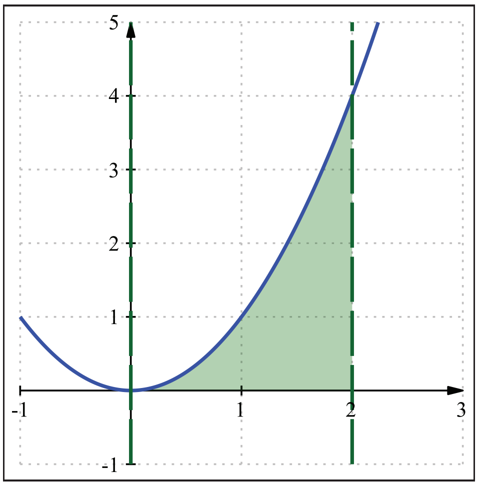
1)

a) Recordemos que para calcular una integral definida, la regla de Barrow nos dice que basta con calcular una primitiva de la función y evaluarla en los dos extremos.

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

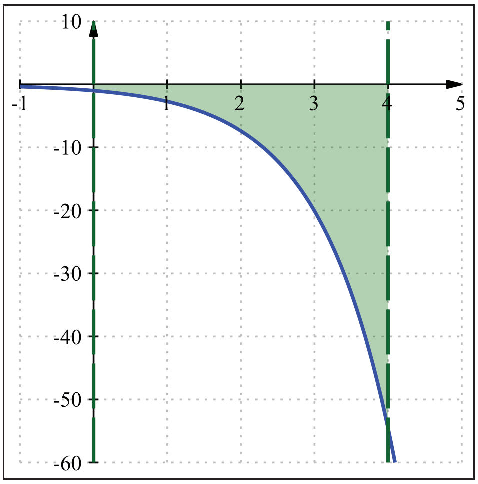
En este caso, como se puede ver en la figura 14, la función $f(x)$ es positiva en [0,2]. Por lo tanto, la integral de Riemann coincide con el área que limita la función con el eje de abscisas, $A = 8/3$.

Figura 14. Función $f(x) = x^2$ entre 0 y 2



b) $\int_0^4 -e^x dx = \left[-e^x\right]_0^4 = -e^4 + e^0 = 1 - e^4 \approx -53{,}59815.$
En este caso, como se puede ver en la figura 15, la función $f(x)$ es negativa en [0,4]. Por lo tanto, la integral de Riemann coincide con el área que limita la función con el eje de abscisas cambiada de signo, es decir, $A = 53{,}598$.

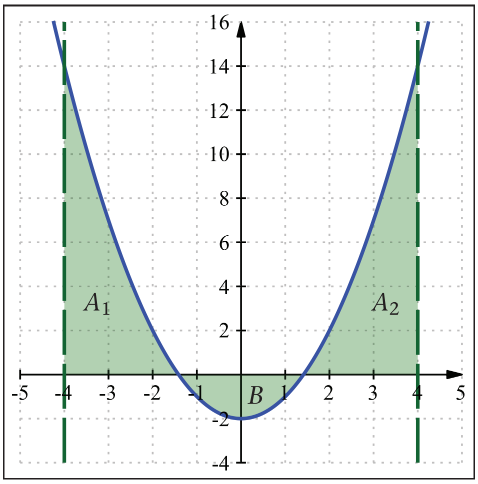
Figura 15. Función $f(x) = -e^x$ entre 0 y 4



c) $\int_{-4}^{4}(x^2-2)dx = \left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_{-4}^{4} = \left(\frac{4^3}{3}-8\right)-\left(\frac{-4^3}{3}+8\right) = \frac{128}{3}-16 = \frac{80}{3}.$

En este caso, como se puede ver en la figura 16, la función $f(x)$ tiene dos cambios de signo en el intervalo [–4,4]. Por lo tanto, la integral de Riemann coincide con las sumas de las áreas en las que la función es positiva $[-4,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},4]$ menos el área en la que la función es negativa $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. Es decir, $A_1+A_2-B = 80/3$.

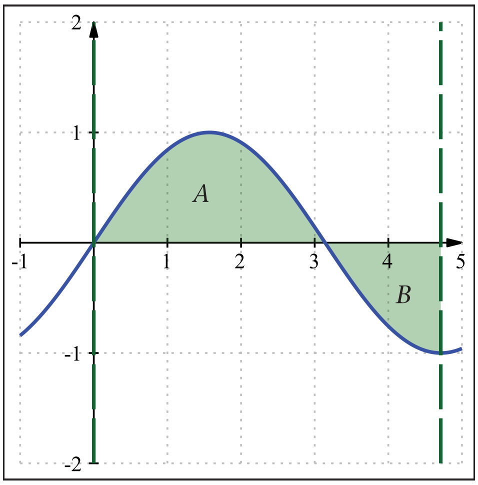
Figura 16. Función $f(x) = x^2 - 2$ entre –4 y 4



d) $\int_{0}^{3\pi/2} \text{sen}(x)dx = [-\cos(x)]_0^{3\pi/2} = -\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\cos(0) = 1.$

En este caso, como puede verse en la figura 17, la función $f(x)$ tiene un cambio de signo en el intervalo $[0,3\pi/2]$. Por lo tanto, la integral de Riemann coincide con la suma del área en la que la función es positiva $[0,\pi]$ menos el área en la que la función es negativa $[\pi,3\pi/2]$. Es decir, $A-B = 1$.

Figura 17. Función $f(x) = \text{sen}(x)$ entre 0 y $3\pi/2$



2)

a) En este caso, la función $F(x)$ está definida por las funciones $f(t) = t^2$, $g(x) = 0$ y $h(x) = x$, es decir

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $g'(x) = 0$ y $h'(x) = 1$ y que $f(g(x)) = f(0) = 0^2 = 0$ y $f(h(x)) = f(x) = x^2$, aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$F'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x) = x^2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = x^2.$$

b) En este caso, la función $F(x)$ está definida por las funciones $f(t) = \text{sen}(t)$, $g(x) = 0$ y $h(x) = e^{3x}$. De este modo, teniendo en cuenta que $g'(x) = 0$ y $h'(x) = 3e^{3x}$ y que $f(g(x)) = f(0) = 0$ y $f(h(x)) = f(e^{3x}) = \text{sen}(e^{3x})$, aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$F'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x) = \text{sen}(e^{3x}) \cdot 3e^{3x} - 0 \cdot 0 = 3e^{3x}\,\text{sen}(e^{3x}).$$

c) En este caso, la función $F(x)$ está definida por las funciones $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $g(x) = x$ y $h(x) = 1$. Por lo tanto, si tenemos en cuenta que $g'(x) = 1$ y $h'(x) = 0$ y que $f(g(x)) = f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $f(h(x)) = f(1) = \dfrac{1}{2}$, aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$F'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x) = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{1+x^2} \cdot 1 = -\frac{1}{1+x^2}.$$

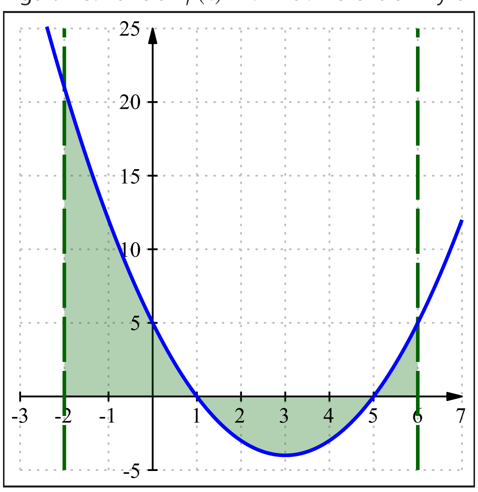
3)

a) Queremos calcular el área de la función $x^2 - 6x + 5$ con el eje de abscisas entre las rectas $x = -2$ y $x = 6$. En este caso, la función $x^2 - 6x + 5$ tiene dos cambios de signo en este intervalo, y por lo tanto, en primer lugar es necesario que encontremos los puntos de corte con el eje.

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 6x + 5 = 0 \iff x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \iff x = 1{,}5.$$

De este modo, la función $f(x)$ se anula en los puntos $x = 1{,}5 \in [-2{,}6]$.
Una vez determinados los puntos de corte, tenemos que determinar en qué intervalos la función es positiva y en qué intervalos la función es negativa. Dado que la función es continua, lo podemos hacer simplemente evaluándola en puntos intermedios. Por ejemplo, $f(-2) = 21$, $f(3) = -4$ y $f(6) = 5$. Por lo tanto, en este caso, $f(x) \geq 0$ en $[-2{,}1] \cup [5{,}6]$ y $f(x) \leq 0$ en $[1{,}5]$ como podéis ver en la figura 18.

Figura 18. Función $f(x) = x^2 - 6x + 5$ entre -2 y 6



Así pues, teniendo en cuenta que la primitiva de $f(x)$ es $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x$, el área está determinada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{5} f(x)dx + \int_{5}^{6} f(x)dx \\ &= [F(x)]_{-2}^{1} - [F(x)]_{1}^{5} + [F(x)]_{5}^{6} \\ &= F(1) - F(-2) - F(5) + F(1) + F(6) - F(5) \\ &= -F(-2) + 2F(1) - 2F(5) + F(6) = \frac{74}{3} + \frac{14}{3} + \frac{50}{3} - 6 = 40. \end{aligned}$$

Observad que también habríamos podido obtener el área total sumando las tres áreas que la determinan

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{1} f(x)dx = [F(x)]_{-2}^{1} = F(1) - F(-2) = 27 \\ A_2 &= -\int_{1}^{5} f(x)dx = -[F(x)]_{1}^{5} = -F(5) + F(1) = \frac{32}{3} \\ A_3 &= \int_{5}^{6} f(x)dx = [F(x)]_{5}^{6} = F(6) - F(5) = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

de manera que $A = A_1 + A_2 + A_3 = 40$.

b) Queremos calcular el área de la función $x^3 - 3x^2 - x + 3$ con el eje de abscisas entre las rectas $x = -2$ y $x = 4$. En este caso, la función $x^3 - 3x^2 - x + 3$ tiene tres cambios de signo en este intervalo y, por lo tanto, primero es necesario que encontremos los puntos de corte con el eje.

$$f(x) = 0 \iff x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0.$$

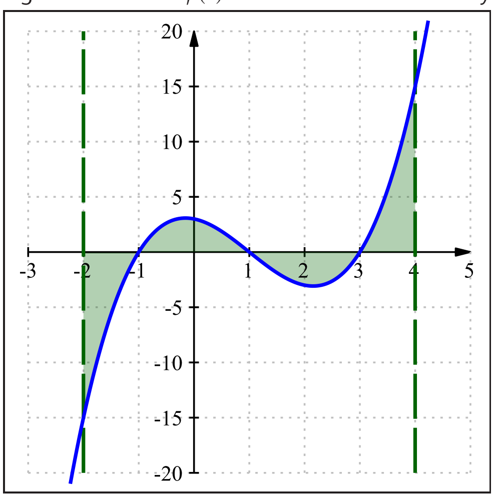
Puesto que tenemos un polinomio de grado 3, tendremos que utilizar Ruffini para intentar encontrar primero una raíz entera. Observemos que $f(1) = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$, por lo tanto, $x = 1$ es una raíz y podemos utilizar Ruffini con este valor.

De este modo, $f(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 3) = (x-1)(x+1)(x-3)$, ya que utilizando la fórmula para encontrar los ceros de una ecuación de segundo grado tenemos que $x^2 - 2x - 3$ se anula en $x = -1$ y $x = 3$.

Por lo tanto, la función $f(x)$ se anula en los puntos $x = -1,1,3 \in [-2,4]$.

Una vez determinados los puntos de corte, debemos determinar en qué intervalos la función es positiva y en qué intervalos la función es negativa. Dado que la función es continua, lo podemos hacer simplemente evaluándola en puntos intermedios. Por ejemplo, $f(-2) = -15$, $f(0) = 3$, $f(2) = -3$ y $f(4) = 15$. Por lo tanto, en este caso, $f(x) \geq 0$ en $[-1,1] \cup [3,4]$ y $f(x) \leq 0$ en $[-2,-1] \cup [1,3]$ como podéis ver en la figura 18.

Figura 19. Función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ entre -2 y 4



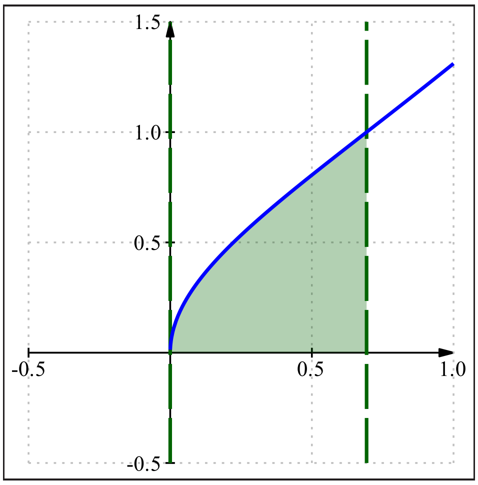
Por lo tanto, teniendo en cuenta que la primitiva de $f(x)$ es $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$, el área está determinada por

$$\begin{aligned}
A \quad &= -\int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{4} f(x)dx \\
&= -[F(x)]_{-2}^{-1} + [F(x)]_{-1}^{1} - [F(x)]_{1}^{3} + [F(x)]_{3}^{4} \\
&= -F(-1) + F(-2) + F(1) - F(-1) - F(3) + F(1) + F(4) - F(3) \\
&= F(-2) - 2F(-1) + 2F(1) - 2F(-3) + F(4) = 4 + \frac{9}{2} + \frac{7}{2} + \frac{9}{2} + 4 = \frac{41}{2}.
\end{aligned}$$

c) Queremos calcular el área de la función $\sqrt{e^x - 1}$ con el eje de abscisas entre las rectas $x = 0$ y $x = \ln(2)$. En este caso, la función raíz cuadrada es siempre positiva en su dominio de definición. Comprobamos primero que el intervalo $[0, \ln(2)]$ está contenido dentro del dominio de definición de la función

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}, e^x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R}, x \geq \ln(1) = 0\} = [0, +\infty).$$

Figura 20. Función $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ entre 0 y $\ln(2)$



De este modo, puesto que $[0, \ln(2)] \subset \mathrm{Dom}(f)$ y la función en este intervalo es siempre positiva (como se puede ver en la figura 20) tenemos que

$$A \quad = \int_0^{\ln(2)} f(x)dx.$$

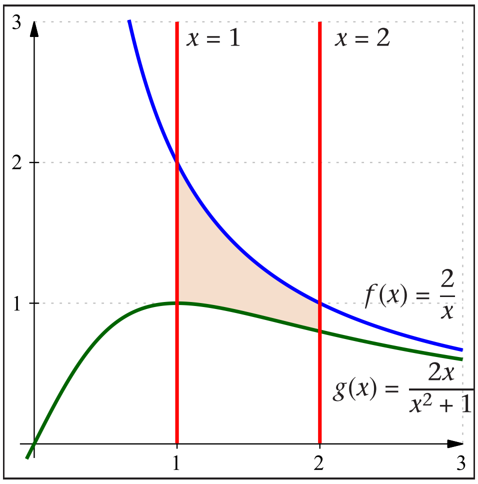
En este caso, para calcular la integral tenemos que hacer un cambio de variable, $t^2 = e^x - 1$.

$$\begin{aligned}
A \quad &= \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1}dx \\
&= \left[\begin{array}{l|l} t^2 = e^x - 1 & x = 0 \longrightarrow t = \sqrt{e^0 - 1} = 0 \\ 2tdt = e^x dx \Longrightarrow dx = \frac{2t}{e^x}dt = \frac{2t}{t^2+1}dt & x = \ln(2) \longrightarrow t = \sqrt{e^{\ln(2)} - 1} = \sqrt{1} = 1 \end{array} \right] \\
&= \int_0^1 \sqrt{t^2}\frac{2t}{t^2+1}dt = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}dt = \int_0^1 \frac{2(t^2+1) - 2}{t^2+1}dt = \int_0^1 \left[2 - \frac{-2}{t^2+1}\right] dt = [2t - 2\arctan(t)]_0^1 \\
&= 2 - 2\arctan(1) + 2\arctan(0) = 2 - \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

4)

a) Se nos pide que calculemos el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$. En la figura 21 hemos representado las funciones que hemos dado en el enunciado.

Figura 21. Gráfica de las funciones $f(x) = \dfrac{2}{x}$ y $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$



Para calcular el área, lo primero que tenemos que hacer es calcular los puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$:

$$f(x) = g(x) \iff \frac{2}{x} = \frac{2x}{x^2+1} \iff 2x^2 + 2 = 2x^2 \iff 2 = 0$$

Vemos entonces que las dos funciones no tienen ningún punto de corte, es decir, que podremos expresar el área como una sola integral. Para hacerlo, debemos determinar cuál de las dos funciones es mayor en el intervalo [1,2] simplemente evaluándolas en un punto. En este caso, tenemos que

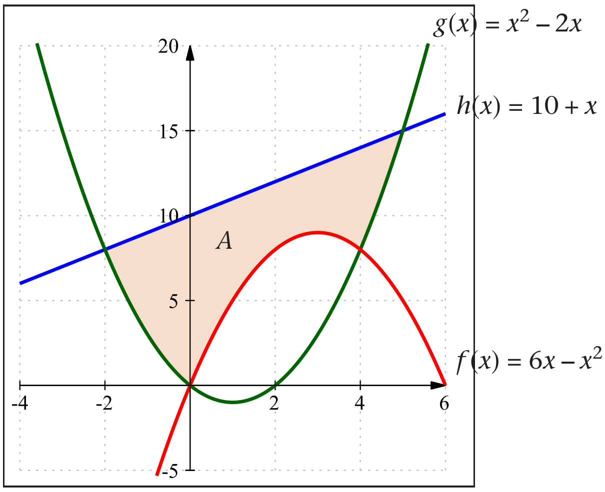
$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2 \\ g(1) = \frac{2}{2} = 1 \end{array}\right\} \qquad f(1) > g(1) \Rightarrow f(x) > g(x)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 (f(x) - g(x))dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right) dx = \int_1^2 \frac{2}{x}dx - \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}dx \\ &= \Big[2\ln(x)\Big]_1^2 - \Big[\ln(x^2+1)\Big]_1^2 = 2\ln(2) - 2\ln(1) - \ln(5) + \ln(2) \\ &= 3\ln(2) - \ln(5) = \ln(2^3) - \ln(5) = \ln\left(\frac{8}{5}\right). \end{aligned}$$

b) En este caso, tenemos que calcular el área delimitada por las tres curvas $f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ y $h(x) = 10 + x$. La figura 22 muestra el área delimitada por las gráficas de las funciones f, g y h.

Figura 22. Área limitada por las funciones
$f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ y $h(x) = 10 + x$



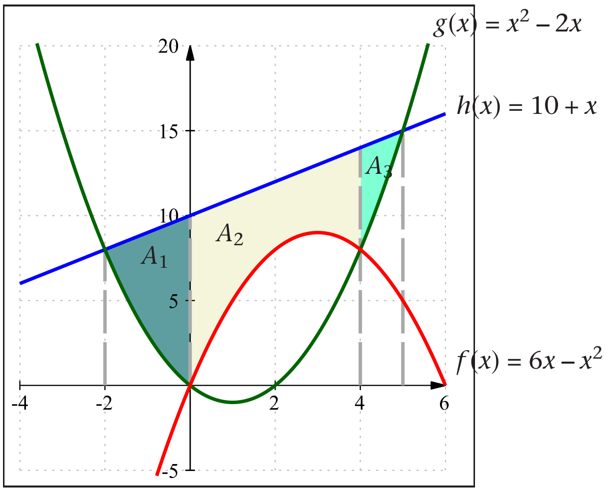
Si calculamos los cortes de las tres funciones, tenemos que

$$f(x) = g(x) \implies x = 0,\ 4$$

$$g(x) = h(x) \implies x = -2,\ 5$$

Observemos que para calcular el área, tenemos que dividir el área total en tres regiones $x \in [-2,0]$, $x \in [0,4]$ y $x \in [4,5]$, tal y como se ve en la figura 23.

Figura 23. División en tres regiones del área
limitada por f, g y h



Por lo tanto:

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{\int_{-2}^{0} (h(x) - g(x))dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{0}^{4} (h(x) - f(x))dx}_{A_2} + \underbrace{\int_{4}^{5} (h(x) - g(x))dx}_{A_3} \\ &= 34/3 + 64/3 + 19/6 = 215/6. \end{aligned}$$

Bibliografía

Aguiló, F.; Boadas, J.; Garriga, E.;Villalbí, R. (1994) *Temes Clau de Càlcul*. Edicions de la UPC. Servei de Publicacions. Barcelona, España.

Neuhauser, C. (2004). *Matemáticas para ciencias*. Pearson. Madrid, España.

Perelló, C. (1994). *Càlcul Infinitesimal. Amb mètodes numèrics i aplicacions*. Enciclopèdia Catalana. Barcelona, España.

Pozo, F.; Parés, N.; Vidal, Y. (2013). *Matemáticas para la ingeniería*. Pearson. Madrid, España.