

# Estudi quantitatiu de la volatilitat i el preu de les opcions

Martí Cabanes Colom  
marticabanes@uoc.edu

**Directora del treball:** Dra. Marta Gómez Puig

**Treball Final de Grau**

**Àmbit d'especialització: Competitivitat i creixement**

**Memòria final**

---

**Curs 2023-2024, 2n semestre**



# Índex

<b>RESUM</b>	<b>4</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>5</b>
<b>1. INTRODUCCIÓ</b>	<b>7</b>
1.1 JUSTIFICACIÓ	8
1.2 OBJECTIU, ABAST I ADVERTÈNCIES	9
1.3 PYTHON I LLIBRERIES	10
<b>2. VOLATILITAT</b>	<b>11</b>
2.1 VOLATILITAT HISTÒRICA	11
2.2 VOLATILITAT HISTÒRICA CONDICIONAL	18
2.3 VOLATILITAT IMPLÍCITA	20
<b>3. HISTÒRIA I TEORIA DE LA VALORACIÓ D'OPCIONS</b>	<b>23</b>
3.1 SENSIBILITATS	26
<b>4. OBTENCIÓ DE LA VOLATILITAT IMPLÍCITA</b>	<b>27</b>
<b>5. SIMULACIÓ D'OPCIONS I PAYOFF</b>	<b>29</b>
5.1 SIMULACIÓ DE SENSIBILITATS	32
<b>CONCLUSIONS</b>	<b>37</b>
<b>FUTURES LÍNIES DE RECERCA</b>	<b>38</b>
<b>VALORACIÓ</b>	<b>38</b>
<b>AUTOAVALUACIÓ</b>	<b>38</b>
<b>REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES</b>	<b>39</b>

## Estudi quantitatiu de la volatilitat i el preu de les opcions

Martí Cabanes Colom (marticabanes@uoc.edu)

Grau d'Economia, Competitivitat i creixement

### Resum

Des del 1973 quan es va fundar el CBOE (Chicago Board Options Exchange), primer mercat estructurat d'opcions, fins a l'actualitat les opcions financeres han experimentat un important creixement i popularitat dins del món financer, tractant-se d'un derivat complex però molt versàtil. En aquesta publicació es tracta la valoració d'opcions des de la perspectiva teòrica fonamental de Fischer Black, Myron Scholes i Robert Merton, comprenent i exposant les bondats i inconvenients d'aquesta metodologia, explorant quins factors condicionen el preu i en quina mesura ho fan. Així mateix, s'aborda un extensiu estudi quantitatiu de la volatilitat de mercat, ja que es tracta d'un dels inputs més rellevants a estimar a l'hora de valorar opcions.

### Paraules clau:

Opcions financeres, Volatilitat implícita, Desviació standard, Model Black-Scholes, Python, Règims de volatilitat, Sensibilitats, Hedging.

### ODS:

- 8 Treball decent i creixement econòmic  
L'estabilitat financera, el creixement i el treball tenen una relació directa amb el risc associat o percebut en l'economia, per tant, la gestió dels riscos esdevé fonamental. Comprendre els potencials riscos com la volatilitat i gestionar-la mitjançant opcions financeres, contribueix a estabilitzar l'economia real, fomentant el creixement econòmic, la prosperitat i facilitant la creació d'oportunitats de treball digne a llarg termini.
- 9 Indústria, innovació i infraestructura  
Els derivats financers han evolucionat molt al llarg dels anys i el procés d'innovació, creativitat i complexitat ha estat indiscutible. Les opcions financeres i, els derivats en general, permeten millorar l'eficiència dels mercats, així com gestionar els riscos. Una gestió del risc adequada atrau inversió que es pot destinar tant a innovació com a infraestructura.

## **Quantitative study of volatility and option pricing**

Martí Cabanes Colom (marticabanes@uoc.edu)

Degree in Economics, Competitiveness and Growth

### **Abstract**

Since 1973, when the CBOE (Chicago Board Options Exchange) was founded, financial options have grown significantly in popularity. This publication examines the valuation of options through the fundamental theories of Fischer Black, Myron Scholes, and Robert Merton, discussing the pros and cons of their methodology and the factors that influence pricing. It also includes a quantitative study of market volatility, a key input for option valuation.

### **Keywords:**

Financial options, Implied volatility, Standard deviation, Black-Scholes model, Python, Volatility regimes, Sensitivities, Hedging.

### **SDG:**

- 8 Decent work and economic growth  
Financial stability, growth, and employment are closely tied to economic risk, making risk management crucial. Understanding and managing risks like volatility with financial options helps stabilize the economy, promote growth, and create long-term employment opportunities.
- 9 Industry, innovation and infrastructure  
Financial derivatives have evolved, driven by innovation and complexity. Options and derivatives enhance market efficiency and manage risks, attracting investment for innovation and infrastructure.

## 1. Introducció

Les opcions són un instrument financer molt útil i versàtil, per la gran quantitat d'estratègies que ens permet realitzar, així com per la flexibilitat d'invertir, no sols en l'actiu subjacent, sinó també d'invertir en volatilitat o en el simple pas del temps. Existeixen múltiples inputs que afecten la valoració d'aquest derivat financer, però tots els inputs es resumeixen en diferents mesures del risc potencial. Entenem el risc de mercat, de manera estadística, com a la desviació standard dels rendiments d'un actiu.<sup>1</sup> Així doncs, partint d'aquesta premissa podem desenvolupar múltiples inferències estadístiques basant-nos en la distribució normal, estudiar-ne correlacions o fer simulacions, entre d'altres. En aquesta ocasió ens recolzarem en el treball de (Black-Scholes, 1973)<sup>2</sup> per abordar el *pricing* o valoració de les opcions assumint que els rendiments segueixen una distribució normal.

Una opció financera és un contracte que atorga el dret a comprar o vendre un actiu subjacent durant un període de temps i en unes condicions preestablertes. Quan comprem una *call* estem pagant una prima per ostentar el dret a comprar l'actiu subjacent a un preu determinat, el *strike price* (*SP*). Per contra, si venem la *call* ingresem una prima per assumir l'obligació de vendre el subjacent al *SP*. El funcionament d'una *put* és l'invers, paguem una prima per tenir el dret a vendre en un determinat *strike* o ingresem la prima per comprometre'ns a comprar a un preu determinat. El *SP* o preu d'exercici és aquell preu de l'actiu subjacent al qual el comprador té dret a comprar o vendre. Un altre element clau és la data de venciment del contracte, doncs determina l'expiració del dret, a comprar o vendre, del comprador de l'opció. Ara bé, el comprador podrà exercir el seu dret qualsevol dia fins al dia de venciment si es tracta d'opcions Americanes. Si es tracta d'opcions Europees només podrà exercir el seu dret de comprar o vendre el subjacent, el dia de venciment, si l'opció expira amb valor s'exercirà el seu dret, en cas contrari no.

Un cop ens endinsem en el *pricing* de les opcions veurem que el valor prové de dos fons. La primera, del valor intrínsec influenciat pel *SP* i pel preu del subjacent. Si podem comprar el subjacent per un preu menor al qual cotitza o vendre per un preu major al qual cotitza, l'opció tindrà valor intrínsec. La segona, el valor temporal influenciat per la volatilitat, el temps fins al venciment, els dividendes previstos i els tipus d'interès a curt termini. El valor temporal és màxim quan el *SP* i el preu del subjacent coincideixen i decreix quan el preu del subjacent s'allunya del *SP*. Per tant, la prima serà la suma del valor intrínsec i del valor temporal. Al moment de venciment d'una opció, el valor de la prima està compost únicament pel valor intrínsec, ja que la incertesa que mesura el valor temporal desapareix. Però abans d'endinsar-nos en la valoració d'opcions cal entendre molt bé la volatilitat, ja que és l'únic factor, a priori, desconegut en el moment de la valoració d'opcions.

Després de fer un ràpid i breu repàs de les opcions establim algunes de les preguntes que s'intentarà buscar resposta en aquest treball:

Com es computa el risc de mercat associat? Com interpretar-lo? Quines implicacions té? Obtindrem la volatilitat de mercat amb diversos algorismes i abordarem el càlcul seguint diferents teories.

Quins factors afecten el preu d'una opció i en quina mesura ho fan? Com interactuen les sensibilitats entre si?

Com es relaciona la volatilitat històrica amb la volatilitat local<sup>3</sup> o implícita i quina implicació té amb el *SP* d'una opció?

Com podem obtenir la volatilitat implícita? Desenvoluparem un petit *script* en Python per realitzar aquesta aproximació.

A dia d'avui, quina metodologia s'aplica per la valoració d'opcions a nivell professional?

## 1.1 Justificació

L'estudi de la volatilitat en els mercats financers ha estat un tema que ha rebut molta atenció, i amb raó, doncs és el que explica la fluctuació del preu dels diferents actius. Per aquest motiu prenem la volatilitat com a mesura del risc de mercat, ja que és la mètrica de referència quan volem mesurar l'evolució que ha experimentat, o que està experimentant, un actiu. Comprendre els mercats financers, desenvolupar models i gestionar els riscos associats contribueix a millorar l'eficiència del mercat, aporta liquiditat i permet crear estratègies d'inversió o cobertura. Per tant, incideix de manera directa en l'economia i la societat doncs pot arribar a condicionar, des del preu de les matèries primeres com el cacau, el ferro o l'energia fins als plans de pensions o el finançament, entre d'altres.

Desenvolupar aquest projecte sorgeix de la genuïna curiositat personal de comprendre els complexos derivats financers, per explorar els avantatges que poden oferir i, al mateix temps, desenvolupar eines d'utilitat que permetin aplicar tot aquest coneixement. El preu de les opcions, en tractar-se d'un derivat, està condicionat pel subjacent, però també, el preu del subjacent està condicionat pel mercat de derivats, per tant, existeix una relació de reciprocitat. Així doncs, resulta imprescindible comprendre ambdues parts per tal de treballar-hi, sorgint la necessitat de desenvolupar eines, com algorismes, que ens permetin analitzar i extreure informació del mercat de derivats.

La motivació per emprendre tal repte sorgeix de la passió pels mercats i la curiositat intel·lectual que em genera el treballar amb multivariables recíproques i algorismes funcionals. Fusionant l'economia i les finances amb la part més tecnològica, que dia rere dia pren força en el camp, tant acadèmic com professional, dels mercats financers. Degut a la gran versatilitat que ens aporta l'ús d'avenços tecnològics, com ara Excel, els economistes hem pogut profunditzar en la comprensió de temes més complexos i cada cop comprenent-los millor. Ara bé, l'Excel té les seves limitacions i si volem profunditzar i seguir explorant nous horitzons ens toca crear a nosaltres mateixos les eines requerides, per això, l'ús de llenguatges de programació com R o Python ens permeten crear algorismes que donin resposta a qüestions més complexes o de major especialització.

Fent un primer breu diagnosi el treball pot tenir múltiples punts forts com ara la persecució d'uns objectius ambiciosos i de gran importància en el món financer, la confecció d'un estudi quantitatiu detallat i precís i l'experiència de l'autor en la matèria. Pel que fa als punts febles que detecto a priori és l'escàs temps del qual es disposa per fer tota la recerca i els possibles entrebancs o dificultats tècniques a l'hora de desenvolupar tal anàlisi quantitativa. Ara bé, no tinc cap dubte que aquest estudi resultarà de gran utilitat, no sols per a comprendre els factors més teòrics, sinó per comprendre les implicacions pràctiques de la volatilitat de mercat en la confecció del preu de les opcions financeres.

## 1.2 Objectiu, abast i advertències

Per a establir uns objectius clars primer cal determinar quin és l'abast d'aquest treball i quins són els límits. En primer lloc, es tracta d'un treball acadèmic on s'aportarà una sòlida base teòrica dels temes troncats de la recerca com són la volatilitat i les opcions financeres. En segon lloc, es desenvoluparà un algoritme en Python que permeti realitzar una exploració quantitativa, obtenir informació rellevant i comprendre les implicacions de múltiples variables en la formació del preu de les opcions Europees, així com les seves implicacions en els mercats financers. Per tant, l'abast del treball queda limitat a comprendre el funcionament de les opcions financeres des de diferents perspectives, comprendre la relació i l'efecte que té la volatilitat en la formació dels preus, identificar la influència de les sensibilitats i crear un algoritme que ens faciliti tots els càlculs i l'obtenció d'aquesta informació. Per això el treball es desenvolupa en un mixt teòric pràctic on s'exposen els conceptes i es recolzen en exemples reals de mercat o en exemples simplificats amb dades fictícies, amb base decimal, que permetin efectuar les operacions de forma clara per comprendre el funcionament d'una manera més simplificada i visual.

A continuació s'enumeren els objectius i propòsits a assolir en el desenvolupament del treball:

- Comprendre el risc de mercat a través de la volatilitat, entendre les diferències i implicacions entre la volatilitat implícita i la volatilitat històrica, classificar la volatilitat en diferents clústers de volatilitat (com percentils), generar cons de volatilitat i crear gràfiques que en facilitin la comprensió de manera visual.
- Entendre els tipus d'opcions financeres Europees que existeixen, com afecte al *moneyness*, com es forma el preu teòric, diferenciar entre valor temporal i valor intrínsec, quina probabilitat existeix que l'opció tingui valor al moment de venciment, quins elements el condicionen i exposar el delta, gamma, theta i vega. Així com comprendre les implicacions de l'estructura temporal i el *skew* de volatilitat.
- Calcular el preu teòric d'una opció mitjançant Python aplicant Black-Scholes, comprendre quins factors intervenen, ajustar les sensibilitats per comprendre les implicacions de cada variable i representar-ho gràficament per a una millor comprensió.

El treball següent es realitza en un entorn acadèmic i no pretén servir com a recomanació d'inversió. És important conèixer que els productes financers derivats comporten riscos significatius i tenen el potencial d'incórrer en pèrdues substancials. A més, les dades històriques i el rendiment passat no són indicatius de rendiments futurs. El valor del capital invertit en accions o derivats financers pot variar àmpliament, fet que pot provocar pèrdues financeres considerables pels inversors. Aquest treball implica l'anàlisi de la volatilitat de mercat, conceptes estadístics avançats, valoració d'opcions i sensibilitats, així com l'ús de Python per a la modelització financera. Aquests temes són complexos i requereixen un alt nivell d'experiència per comprendre'ls i interpretar-los amb precisió. Qualsevol model, algoritme o *script* proporcionat només té finalitats educatives i no s'ha provat la precisió o la fiabilitat en aplicacions del món real. Tenint en compte aquestes advertències, ni l'autor d'aquest treball, ni la direcció, ni la institució acadèmica associada, assumeixen cap responsabilitat pels danys o pèrdues que es puguin causar. L'autor, la direcció i la universitat declinen explícitament tota responsabilitat. Addicionalment, el contingut d'aquest treball pot contenir errors, modificacions o altres imprecisions que puguin alterar la realitat percebuda. La informació que s'ofereix aquí només té finalitats informatives i no s'ha d'interpretar com un assessorament professional, financer o d'inversió. Es recomana als usuaris d'aquesta informació que facin la seva pròpia investigació i consultin amb un assessor financer qualificat abans de prendre qualsevol decisió d'inversió. L'autor, la direcció i la institució acadèmica no són responsables dels resultats derivats de l'ús d'aquesta informació.



### 1.3 Python i llibreries

En tractar-se d'un treball de caràcter quantitatiu farem ús i ens recolzarem amb eines que donin resposta a aquestes necessitats. Per aquesta comesa, farem ús del llenguatge de programació Python, el qual ens permet fer anàlisis de dades, automatitzar tasques i, fins i tot, desenvolupar llocs web o software. La versatilitat d'aquest llenguatge de programació i la simplicitat, comparat amb altres llenguatges de programació, fan que resulti molt atractiu l'utilització d'aquest llenguatge de codi obert per molts professionals, acadèmics i població en general. Python té una sintaxi senzilla, intentant assimilar-se al llenguatge natural, això fa que sigui més senzill de llegir i comprendre, a més de facilitar el desenvolupament del codi. Per aquest mateix motiu és fàcil el seu ús també per a principiants, amb una corba d'aprenentatge no tan inclinada com en altres llenguatges de programació com ara Java o C++. Una altra característica de Python és que es tracta d'un codi obert, és a dir, de distribució i d'ús gratuït per a tots els usuaris. Finalment, gràcies a tenir una gran comunitat activa, aquest llenguatge de programació disfruta de moltes llibreries i mòduls específics, els quals són conjunts de codi creats per altres usuaris per a donar solució directa a problemes concrets i ampliar les capacitats d'aquest llenguatge de programació. Per a desenvolupar aquest treball i tot el tractament de dades associat farem ús de les següents llibreries:

**Yfinance:** Ens permet obtenir dades de mercat, pràcticament en temps real, a més de poder-nos baixar sèries de dades històriques de cotitzacions, entre d'altres. Ens resultarà molt útil per obtenir sèries de dades financeres per calcular-ne els rendiments i la volatilitat.

**Pandas:** Facilita l'estructuració de dades en *Data Frames* i sèries, permet la manipulació i anàlisis de dades i ens facilitarà el treballar quan estiguem manipulant grans bases de dades de manera estructurada i ordenada.

**Numpy:** Facilita el càlcul numèric, el processament de dades, permet realitzar càlculs i operacions complexes i també ens dona suport per treballar amb *arrays* i matrius multidimensionals.

**Scipy:** Basada en Numpy, proporciona una gran varietat d'algoritmes i funcions matemàtiques avançades, ens facilitarà el treball quan estiguem aplicant models estadístics i econòmics així com per a resoldre problemes d'optimització.

**Matplotlib:** Ens permetrà crear moltes de les gràfiques que es mostraran en aquest treball per a facilitar la comprensió de les dades i donar suport a l'explicació teòrica, mostrar exemples o simplement generar gràfiques il·lustratives.

**Seaborn:** Basada en Matplotlib, ens permet crear i millorar les gràfiques creades, generar altres estils i visualitzacions, i en definitiva, crear gràfics més visuals i fàcils d'interpretar com per exemple mapes de calor.

## 2. Volatilitat

### 2.1 Volatilitat històrica

Cal iniciar el treball definint el concepte de volatilitat. Entenem la volatilitat com a mesura de la dispersió, o la variabilitat dels rendiments, de l'evolució d'una variable respecte la seva tendència central. I la variabilitat dels rendiments d'un actiu es pot expressar de manera estadística a través de distribucions. En les distribucions, la volatilitat es mesura com la variància ( $\sigma^2$ ).

Fixant-nos en distribucions normals la variable aleatòria tindrà el 68,3% dels valors a  $\pm \sigma$ , el 95,4% dels valors a  $\pm 2\sigma$  i el 99,7% dels valors a  $\pm 3\sigma$ . Ara bé, en les sèries financeres, la no normalitat dels rendiments és habitual degut a excessos de curtosi i asimetria.<sup>4</sup> Per tant, la correcta mesura de la volatilitat resulta fonamental, per això, utilitzarem el rendiment d'un actiu, i no el seu preu, d'aquesta manera evitarem l'efecte de la tendència. Obtenim el rendiment diari d'un actiu de la següent manera:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (1)$$

O el que és el mateix la diferència de preu entre el dia anterior i l'actual dividit pel preu del dia anterior. Comprentent que el preu sempre serà  $P_t > 0$  i, per tant,  $R_t > -1$ , podem reescriure la funció com a:

$$r_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad (2)$$

Per a obtenir el rendiment compost de diversos dies, és a dir, assumint que els rendiments es reinverteixen diàriament, podem fer-ho:

$$r_{t(k)} = \frac{P_t}{P_k} - 1 \rightarrow r_{t(k)} = \prod_{i=k}^t (1 + r_{it}) - 1 \quad (3)$$

Per contra, podem obtenir el rendiment acumulat simple fent senzillament el sumatori dels rendiments tal que:

$$r_{it(k)} = \sum_{i=k}^t r_{it} \quad (4)$$

També podem obtenir el rendiment de manera contínua aplicant el  $\ln()$ , d'aquesta manera el càlcul resultarà més precís i estable al llarg del temps, ja que mesurem el creixement o decreixement relatiu continu en els rendiments de l'actiu:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (5)$$

Per a obtenir el rendiment d'un període donat farem el sumatori:

$$r_{t(k)} = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-k}}\right) \rightarrow r_{it(k)} = \sum_{i=k}^t r_{it} \quad (6)$$

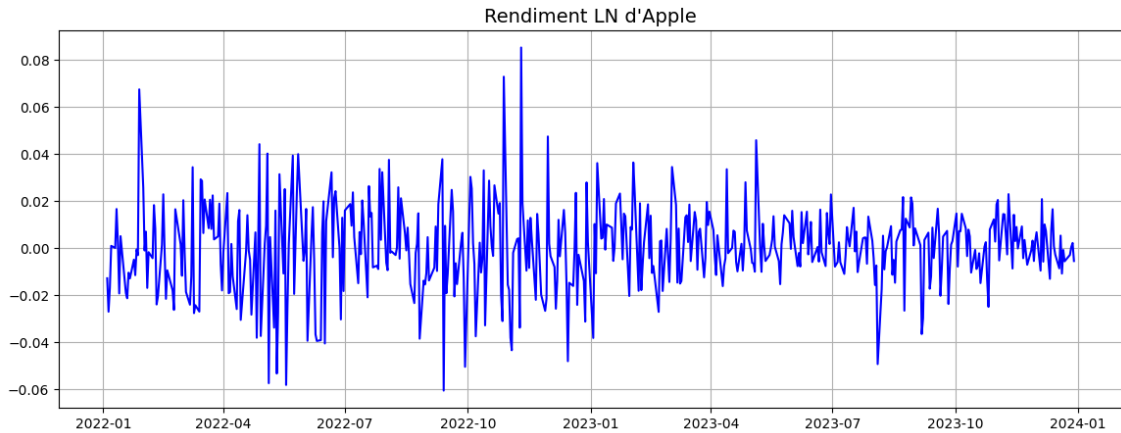
Un cop obtenim els rendiments, calcularem la desviació típica elevant els rendiments al quadrat per evitar que els valors positius i negatius es compensin:

$$\sigma = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\sum (r_t - \mu)^2} \quad (7)$$

Suposant que realitzem el càlcul amb dades d'un any de cotització, per a calcular la volatilitat mensual només caldrà dividir la desviació estàndar entre  $\sqrt{12}$  i tindrem la volatilitat mensual. Al mateix passa per obtenir-la per setmanes  $\sqrt{52}$  o diària  $\sqrt{252}$ . Cal mencionar que per realitzar comparacions treballarem sempre amb dades anuals, mensuals o setmanals, ja que d'aquesta manera evitem dies festius o altres factors que ens desquadrin la mostra.

A més sempre necessitarem unes dades ajustades per dividends, ampliacions de capital, *splits*, *reverse splits*, recompres, etc.

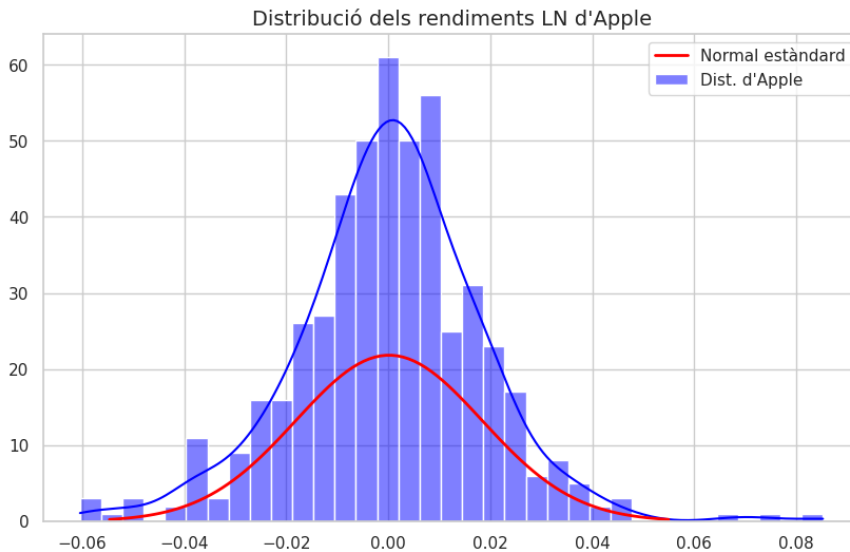
A continuació es mostra un exemple dels rendiments d'Apple, calculats amb la fórmula (5).



Gràfica nº 1

Font: Yahoo Finance  
Elaboració pròpia

En la gràfica nº1 observem el comportament relatiu d'aquest actiu al llarg del 2022 i 2023. Destaquen períodes de major dispersió, és a dir, major volatilitat i períodes de menor volatilitat. A continuació s'ha elaborat un histograma d'aquests rendiments.



Gràfica nº 2

Font: Yahoo Finance  
Elaboració pròpia

En la gràfica nº2 comprovem com l'histograma de freqüències està lluny de seguir una distribució normal estàndard, s'assembla a una distribució leptocúrtica, amb apuntament i cues pesades. Si calculem el coeficient d'asimetria<sup>5</sup>  $\gamma_1 = 0,065$  ens adonem que la distribució té una lleugera asimetria positiva i, pel que fa a la curtosi<sup>6</sup>  $\kappa_1 = 1,843$  ens confirma l'apuntament i unes cues més pesades.

Si calculem la desviació típica amb la fórmula (7) i anualitzem el resultat  $\sigma_1 * \sqrt{252}$  obtenim que la volatilitat històrica anual en aquest període ha estat del 29,01%. Ara bé, aquesta xifra no ens diu res, necessitem fer comparatives per saber si estem en un entorn de major o menor volatilitat.

Aquestes comparatives les podem fer de dues maneres. Podem comparar la volatilitat d'un actiu amb la volatilitat històrica d'altres períodes d'aquest mateix actiu o, també, podem comparar la volatilitat històrica d'aquest actiu amb la volatilitat que han experimentat actius similars en el mateix període.

Per realitzar la comparativa de la volatilitat amb altres períodes històrics del mateix actiu, agruparem aquestes dades en percentils, d'aquesta manera ens permetrà ubicar el valor obtingut anteriorment i discernir si es tracta d'una volatilitat alta, baixa o mitjana, i en quina mesura. A continuació, en la taula nº1, s'ha recopilat la volatilitat anual des de l'any 1970 d'Apple i s'ha agrupat en quartils.

Volatilitat històrica d'Apple des del 1970	
Vol. Històrica	
Mínim	17.528298
Q 1	28.905150
Q 2	39.489681
Q 3	51.296712
Màxim	101.529549

Taula nº1

Font: Yahoo Finance  
Elaboració pròpia

Volatilitat històrica d'Apple des del 2019	
Vol. Històrica	
Mínim	20.281265
Q 1	25.092006
Q 2	26.349157
Q 3	35.634741
Màxim	46.676324

Taula nº2

Font: Yahoo Finance  
Elaboració pròpia

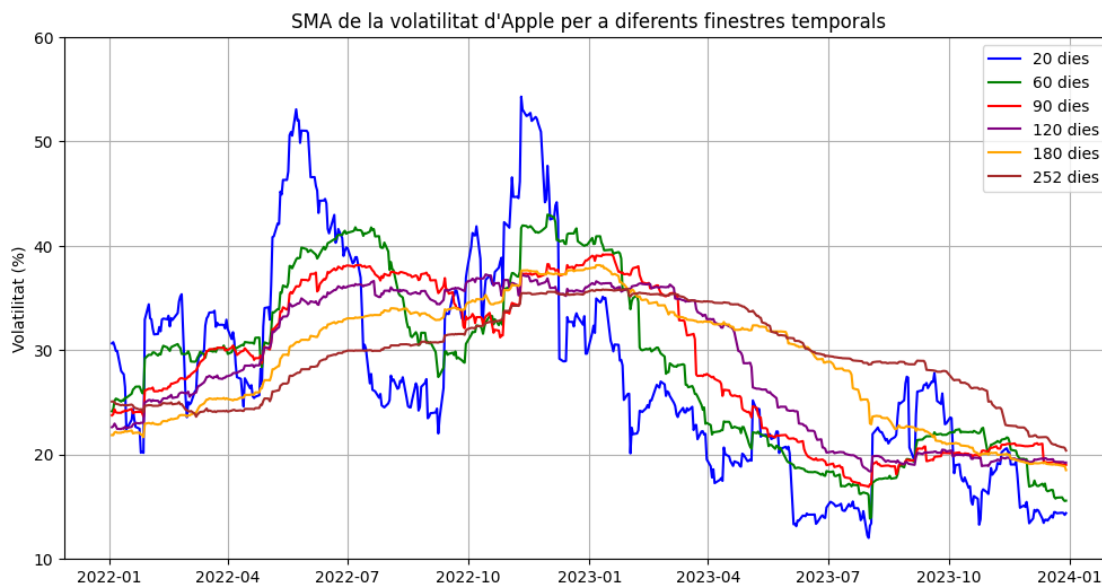
Podem comprovar com la volatilitat experimentada els dos últims anys es troba lleugerament per sobre del primer quartil. D'aquesta manera ja podem contextualitzar la volatilitat i compararla amb l'històric. Si bé els analistes de les cases d'inversió no recullen en el càlcul un històric tant llarg, ja que les dades estan condicionades pel cicle econòmic<sup>7</sup>, èpoques de crisi, d'expansió, etc. Normalment, es recullen dades dels últims cinc anys, tal com s'exposa en la taula nº2, doncs la mostra és suficientment gran, però s'eviten biaixos i altres factors que afegeixen soroll en la mostra. Observem una clara diferència, passem de classificar la volatilitat obtinguda del 29,01% en el Q1, en la taula nº1, a estar per sobre de la mediana, Q2, en la taula nº2.

Per observar aquest fet d'una manera més visual es creen cons de volatilitat<sup>8</sup>. Aquests parteixen de diferents finestres temporals, és a dir calculant la desviació típica cada t dies i dibuixant una mitjana mòbil simple. Com que es tracta d'una mitjana mòbil simple, cada valor té el mateix pes en el càlcul, per tant, com més petita sigui la finestra temporal més sensible serà la volatilitat. Al contrari, si treballem amb finestres temporals grans l'efecte d'un sol valor queda molt diluït i la volatilitat no reaccionarà gaire. El càlcul d'una mitjana mòbil simple (SMA), per les seves sigles en anglès, és la següent:

$$\bar{r}_t = \sum_{t=1}^n \frac{r_t}{n} \quad (8)$$

Per a crear una gràfica de con de volatilitat primer cal calcular la volatilitat històrica com s'ha indicat anteriorment i generar les diferents mitjanes mòbils segons la fórmula (8). El consens d'analistes realitzen el càlcul per a les finestres temporals de 20 dies, 60 dies, 90 dies, 120 dies, 180 dies i un any. En la gràfica nº3 s'ha dibuixat gràficament l'evolució de la volatilitat per a les finestres temporals mencionades. Comprovem com efectivament la SMA de 20 dies és la més reactiva a variacions de la volatilitat, doncs un valor major o menor efecte en major proporció que en una SMA amb una finestra temporal més llarga. Cal puntualitzar que per realitzar aquesta gràfica, s'han computat les dades dels anys 2021, 2022 i 2023, doncs necessitem 251 dies de l'any anterior per a calcular la mitjana mòbil del primer dia del 2022 per a la finestra temporal de 252 dies. El mateix succeeix amb les altres finestres temporals. Un altre factor d'interès, a part de les possibles tendències o patrons que es donen és l'ordre de les diferents finestres temporals. Quan les finestres temporals estan ordenades de tal manera que la finestra temporal més curta és la que té major volatilitat i la finestra temporal més llarga és la que té menor volatilitat, la volatilitat de l'actiu està incrementant. Per contra, si l'ordre és invers, la volatilitat de l'actiu està disminuint. No és habitual que totes les finestres temporals

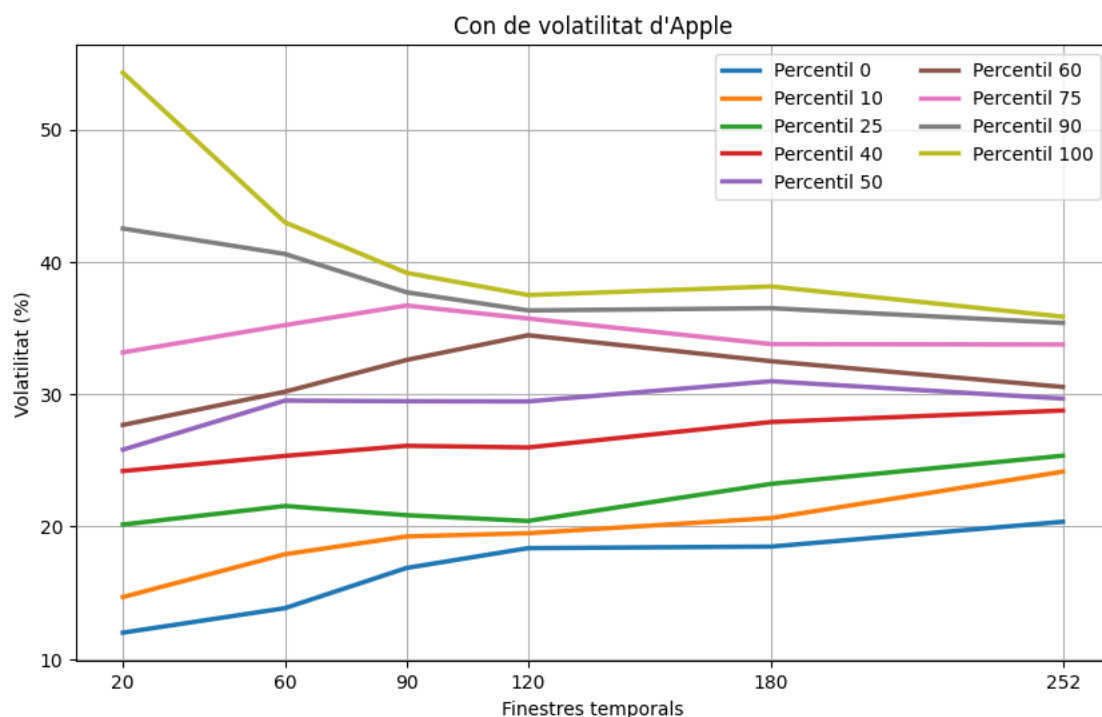
estiguin alineades, però sí que ens permet fer-nos una idea del moviment i la tendència que està adoptant l'actiu objecte d'anàlisi.



Gràfica n° 3

Font: Yahoo Finance  
Elaboració pròpia

Un cop ja tenim les dades de cada finestra temporal, cal agrupar-les en percentils per tal d'obtenir el con de volatilitat. D'aquesta manera obtenim el següent con de volatilitat on observem la volatilitat que expressa la gràfica anterior, però des d'una altra perspectiva.



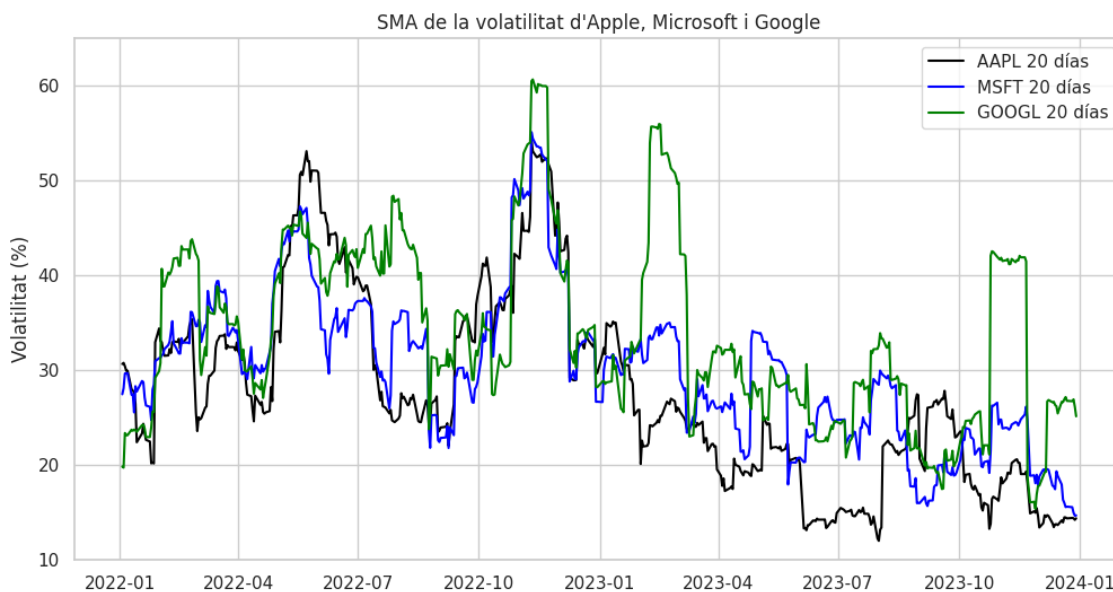
Gràfica n° 4

Font: Yahoo Finance  
Elaboració pròpia

Aquesta gràfica és de gran valor en el món professional de *trading* d'opcions, cobertures, *hedge funds*, etc. La interpretació és senzilla, per a cada finestra temporal, ens mostra la volatilitat classificada en diferents percentils. Una característica d'aquesta gràfica i el motiu que

l'hi dona el nom és la forma cònica que es dibuixa a mesura que la finestra temporal engloba més dies. Com hem comprovat en la gràfica n°3 a major finestra temporal, menor és la volatilitat. L'objectiu dels cons de volatilitat és oferir una visió clara i inequívoca de la volatilitat històrica d'un actiu en un període determinat. D'aquesta manera si volem estimar la volatilitat dels pròxims mesos seria raonable assumir que es comportarà de forma similar a com ho ha fet fins ara, a excepció d'esdeveniments inesperats, canvis macroeconòmics, etc.

També podem interpretar la volatilitat d'un actiu comparant-la amb altres actius o algun *benchmark*. En aquest cas, podem comparar la volatilitat d'Apple amb la de Microsoft i Alphabet (empresa matriu cotitzada de Google), amb una finestra temporal de 20 dies, per exemple.

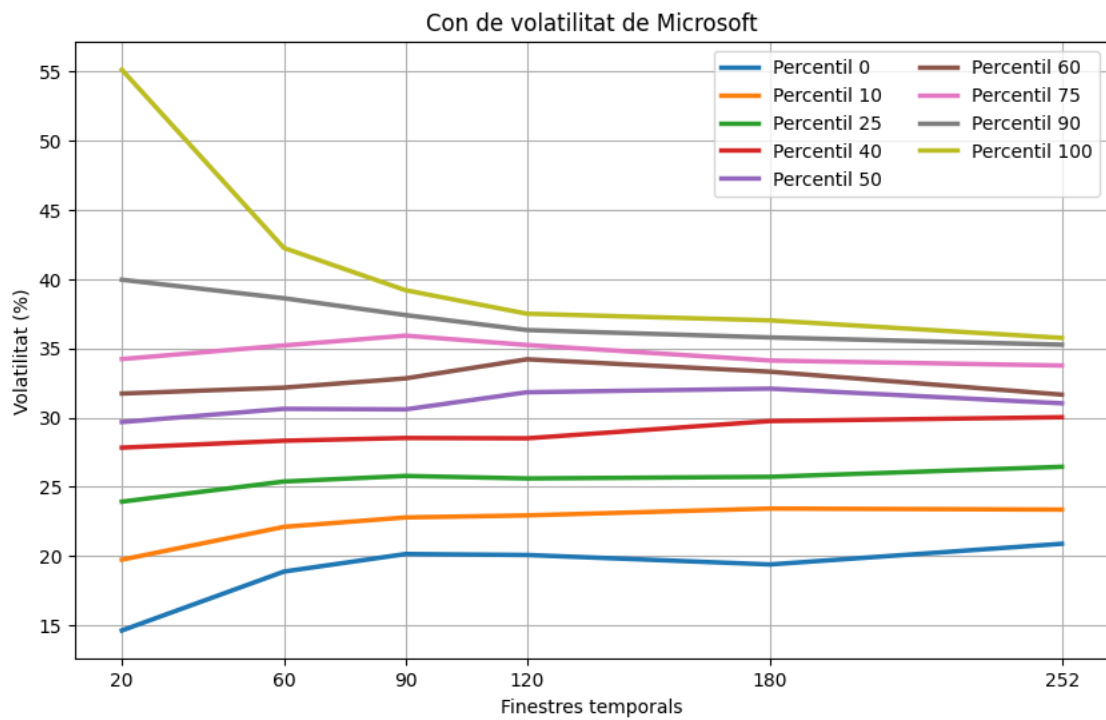


Gràfica n° 5

Font: Yahoo Finance  
Elaboració pròpia

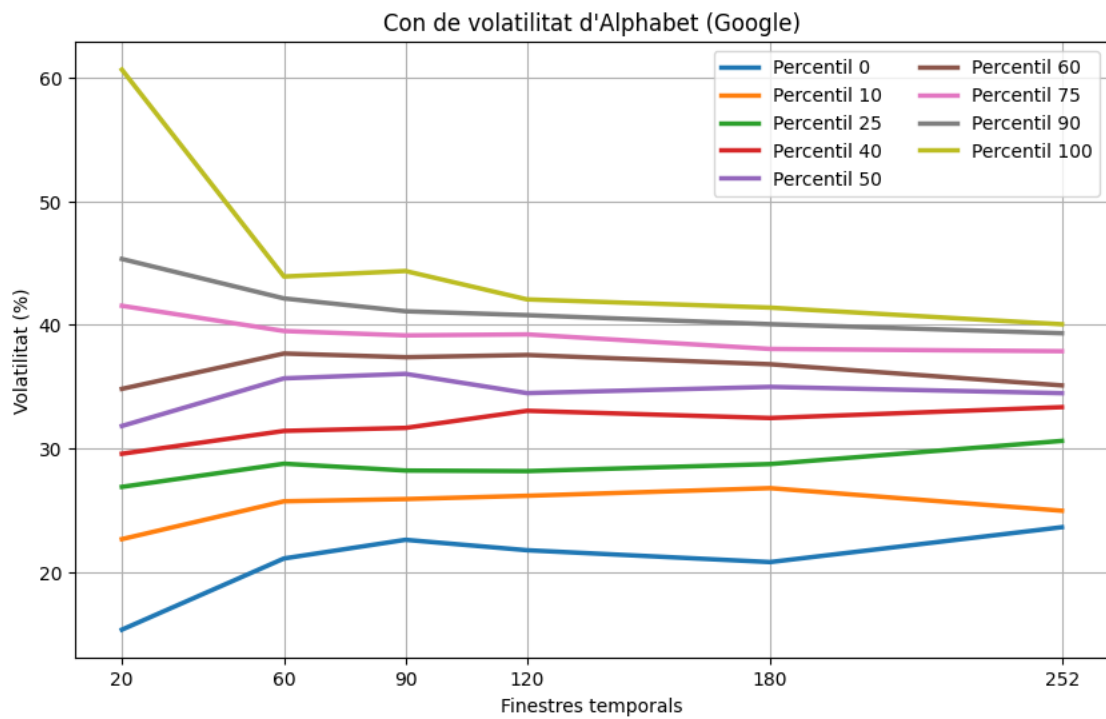
En la gràfica n°5 observem com Google experimenta una major volatilitat que Apple i Microsoft, tot i que es comporti de forma similar les fluctuacions de la volatilitat històrica de Google resulten notablement més pronunciades. Podem calcular la volatilitat anual de cada actiu per veure aquestes diferències. La volatilitat anual d'Apple en aquest període és del 29,01%, pel que fa a Microsoft és del 30,66% i la volatilitat de Google és del 34,89%. Podríem realitzar la mateixa comparativa amb algun índex o *benchmark* com podria ser el Nasdaq Composite. També podríem obtenir els diferents cons de volatilitat, obtenir les distribucions dels rendiments o calcular altres mètriques. A continuació adjunto els cons de volatilitat de Microsoft i Google. En la gràfica n°6 comprovem com Microsoft té un con de volatilitat realment similar al d'Apple amb valors de volatilitat històrica lleugerament més alts, però en general els percentils de volatilitat de les diferents finestres temporals són molt similars. Pel que fa a la gràfica n°7 observem la major volatilitat que comentàvem anteriorment amb el cas de Google, valors més elevats en totes les finestres temporals i una volatilitat més persistent al llarg de les diferents finestres temporals. Això indica que, per exemple, el percentil 10 i el 90 es mantenen relativament paral·lels des de la finestra temporal de 60 dies fins als 252 dies. Retornant a la gràfica n°4, el con de volatilitat d'Apple és el més tancat, en el sentit que els valors no estan tan dispersos, el màxim i el mínim són més baixos i a mesura que la finestra temporal creix la volatilitat es va estrenyent.

A continuació s'ha desenvolupat els cons de volatilitat de Microsoft i Alphabet. Aquesta tipologia de gràfica també s'aplica per a crear cons de betes  $\beta$  de mercat i, fins i tot, per a detectar correlació entre actius al llarg de diferents finestres temporals.



Gràfica nº 6

Font: Yahoo Finance  
Elaboració pròpia



Gràfica nº 7

Font: Yahoo Finance  
Elaboració pròpia



Fins ara hem estat treballant amb les dades *close to close*, és a dir fent els càlculs amb el preu de tancament diari de la cotització de l'actiu. Ara bé, durant el dia el preu fluctua molt més i d'alguna manera també seria interessant considerar el mínim i màxim que es marca en cada sessió de cotització i no només el preu de tancament diari. D'aquesta manera podem obtenir més dades pel nostre estudi i un nivell de precisió major. Per a realitzar les estimacions considerant el màxim i el mínim ens basarem en la fórmula de M. Parkinson<sup>9</sup>.

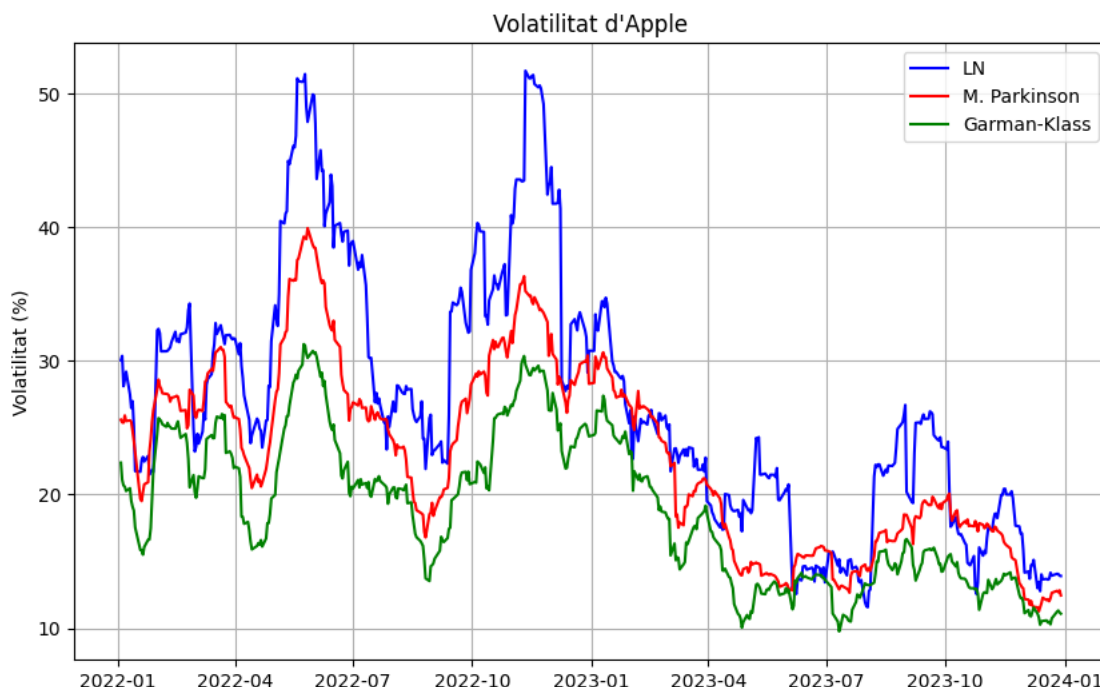
$$\sigma_p = k \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n \left( \ln \frac{H_t}{L_t} \right)^2} \quad (9)$$

On  $k$ , en aquest cas, serà igual a 0,601. D'aquesta manera obtindrem la volatilitat considerant el màxim o high (H) i mínim o low (L) en anglès. Aquest càlcul resulta entre 2,5 i 5 vegades més acurat<sup>9</sup> que el càlcul de l'equació número (7).

Podem incorporar en l'equació (9), també, el preu d'obertura i tancament de cada sessió de cotització. D'aquesta manera obtindrem la volatilitat considerant el OHLC, de l'anglès Open, High, Low, Close. Una metodologia que recull els quatre valors i que permet mostrar els coneguts gràfics *candlestick*, realitzar anàlisi tècnica de gràfiques o fer prediccions<sup>10</sup>. Així doncs, Garman-Klass<sup>11</sup> van suggerir incorporar els quatre valors OHLC en l'equació, d'aquesta manera no sols incorporem quatre vegades més d'informació en el càlcul, sinó que recollim la volatilitat intradia.

$$\sigma_{GK} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n \left( \frac{1}{2} \cdot \left( \ln \frac{H_t}{L_t} \right)^2 - (2 \ln 2 - 1) \cdot \left( \ln \frac{C_t}{O_t} \right)^2 \right)} \quad (10)$$

A continuació observem les lleugeres diferències en el càlcul de la volatilitat. Mencionar que gràcies a recollir el OHLC, Garman-Klass ens permet una major precisió a llarg termini. A més de requerir una sèrie de dades més curta per obtenir uns nivells de confiança similars.



Gràfica n° 8

Font: Yahoo Finance  
Elaboració pròpia



## 2.2 Volatilitat històrica condicional

Els càlculs realitzats per generar la gràfica nº8 assignen un pes igual a tots els valors, doncs es tracta d'una mitjana mòbil simple. En aquest apartat introduïrem una mitjana mòbil ponderada i una mitjana mòbil exponencial. La principal diferència és que aquest model assigna un pes diferent als valors més recents i un menor pes als valors més antics. D'aquesta manera capturem millor i més ràpid les variacions de la volatilitat de mercat en els nostres models i l'ajust pot ser més bo. Aquesta ponderació ens permet algunes bondats per ajustar els nostres models.

Com ja s'ha mencionat anteriorment la volatilitat varia al llarg d'una sèrie temporal, on tindrem èpoques de major volatilitat i èpoques de menor volatilitat. Robert F. Engle desenvolupa una nova visió d'estudi amb el concepte nomenat *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (ARCH)<sup>12</sup>. Aquest model és similar a l'equació (7), però amb algunes modificacions. En primer lloc, s'assumeix una  $\mu = 0$ , que resulta quasi veritat. En segon lloc, s'assigna diferents pesos  $\alpha_i$  a cada valor en funció del moment temporal. El sumatori de totes les  $\alpha_i$  sera igual a 1.

$$\sigma_n^2 = \sum_{t=i}^n \alpha_i \cdot r_{n-i}^2 \quad (11)$$

Partint d'aquesta base, Engle assumeix que existeix una variància incondicional a llarg termini ( $V$ ). La qual també té una ponderació en el model:

$$\sigma_n^2 = \gamma V + \sum_{t=i}^n \alpha_i \cdot r_{n-i}^2 \quad (12)$$

On  $\gamma$  és la ponderació de la variància incondicional a llarg termini i el sumatori de totes les  $\gamma$  resultarà 1. Ens referim a la fórmula de ARCH com a:

$$\sigma_n^2 = \omega + \sum_{t=i}^n \alpha_i \cdot r_{n-i}^2 \quad (13)$$

Pocs anys després que l'equació de ARCH, equació (13), sortís a la llum, Tim Bollerslev presenta el *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*<sup>13</sup>, una generalització del model d'Engle.

$$\sigma_n^2 = \gamma V + \alpha r_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \quad (14)$$

On  $\gamma + \alpha + \beta = 1$  i, assumint que  $\omega = \gamma V$  com s'ha mostrat en el model ARCH, tenim un model GARCH (1,1) tal que:

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha r_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \quad (15)$$

On  $\omega > 0$  i també  $0 \leq \alpha, \beta < 1$  on la variància incondicional a llarg termini ( $V$ ) serà:

$$V = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} \rightarrow \gamma = 1 - \alpha - \beta \quad (16)$$

A continuació detallem les característiques i funcionament d'un model AR(1,1). En primer lloc, l'equació (15) es tracta d'un model autoregressiu de primer ordre on tenim un terme d'error autoregressiu i un terme d'error d'heteroscedasticitat condicional de primer ordre. Generalment, aquest model l'expressem tal que:

$$X_t = c + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (17)$$

On tenim una constant  $c$ , un coeficient d'autoregressió  $\phi$  i el terme d'error  $\varepsilon$  que suposem que segueix una normal. On el terme d'error és:

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \quad (18)$$

I la variància condicional, o volatilitat condicional, s'expressa tal que:

$$\sigma_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

Aquest tipus de models econòmics ens permeten analitzar sèries temporals capturant la dinàmica autoregressiva i, alhora la variabilitat de la variància dels errors al llarg de la sèrie temporal. Es tracta d'un model freqüentment utilitzat en sèries temporals financeres. Després d'aquesta puntualització podem continuar desenvolupant el model GARCH.

Per a estimar els paràmetres del model GARCH ho farem per màxima versemblança, assumint que els residus  $\varepsilon_t = \frac{r_t}{\sqrt{V}}$  segueixen una normal i són independents. Així mateix, l'optimització del logaritme neperià, o natural, de la funció de màxima versemblança, ignorant els factors que estan multiplicant els paràmetres resulta:

$$\text{Max } f(\omega, \alpha, \beta | r_t) = \sum_{t=1}^n \left( -\ln(V) - \frac{r_t^2}{V} \right) \quad (19)$$

En el model GARCH no podem multiplicar la volatilitat obtinguda per l'arrel quadrada de la fracció de temps per convertir la volatilitat obtinguda en altres fraccions de temps, tal i com com fèiem anteriorment amb altres metodologies de càlcul. Més endavant, gràfica nº9, trobaran la predicció del model de volatilitat GARCH (1,1) comparat amb la volatilitat calculada com a LN del preu de tancament diari amb la fórmula (7) i el model EWMA que exposem a continuació.

L'altre model per calcular la volatilitat condicional que veurem va estar impulsat per la companyia de gestió de riscos RiskMetrics. Aquest consisteix en una *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA)<sup>14</sup> de manera que:

$$\sigma = \sqrt{(1 - \lambda) \cdot \sum_{t=1}^t \lambda^{t-1} (r_t - \bar{r})^2} \quad (20)$$

On  $\lambda$  estableix el pes relatiu de cada rendiment del model. El model dependrà del paràmetre  $\lambda$ , també conegut com a *decay factor*, el qual sempre serà  $0 < \lambda < 1$ .

$$\frac{\lambda^{t-1}}{\sum_{j=1}^t \lambda^{j-1}} \rightarrow \sum_{j=1}^t \lambda^{j-1} \cong \frac{1}{(1-\lambda)} \quad (21)$$

En el cas de que  $\lambda = 1$  estariem calculant una SMA, assignant el mateix pes a totes les observacions del model. Quan més proper a 0 sigui el  $\lambda$  del model més ràpidament s'obliden les observacions anteriors i més pes tenen les observacions més recents. RiskMetrics recomana aplicar un  $\lambda = 0,94$  per a rendiments diaris i un  $\lambda = 0,97$  per a rendiments mensuals.

El model EWMA té una característica molt atractiva i és que a diferència d'altres models, el podem escriure de manera recursiva i fer-lo servir com a base per fer estimacions de volatilitat. Tot i ser un model més sofisticat que el SMA és fàcil d'implementar. Assumint que la mitjana és zero,  $\mu = 0$ , podem fer una predicció, amb una confiança donada, de la volatilitat de  $t+1$ .

$$\sigma_{t+1|t} = \sqrt{\lambda \sigma^2_{1,t|t-1} + (1 - \lambda) r^2_{1,t}} \quad (22)$$

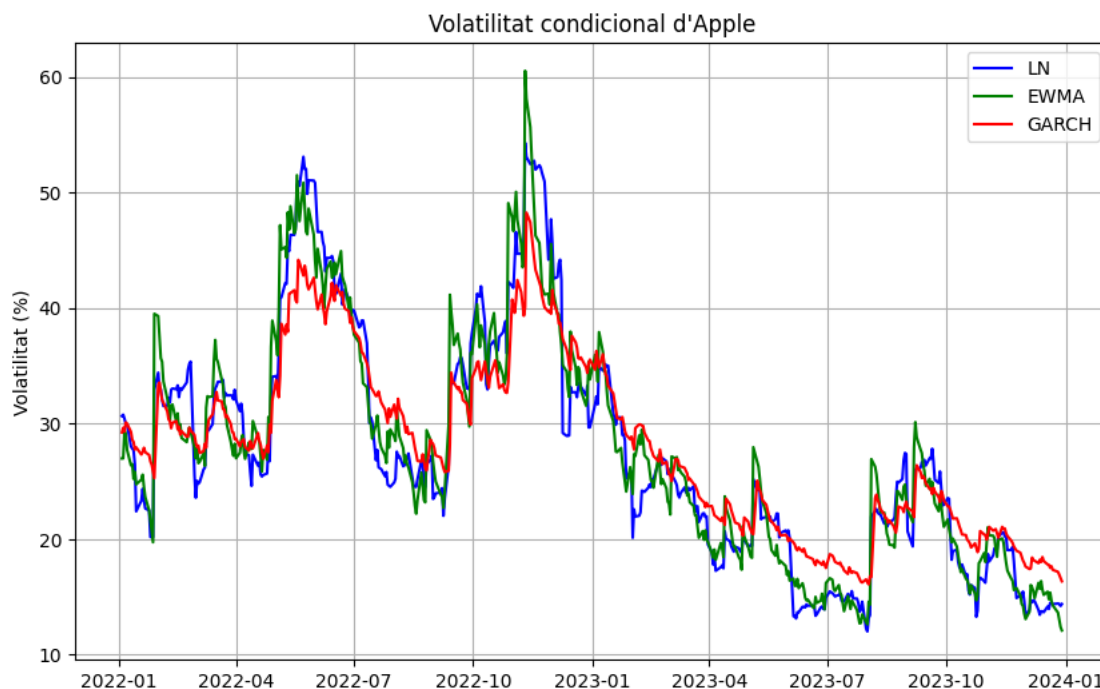
Finalment, tot i que RiskMetrics faci unes recomanacions de quin  $\lambda$  usar depenent de la temporalitat, podem realitzar nosaltres mateixos l'estimació de  $\lambda$  per errors quadrats mitjans:

$$\varepsilon_{t+1|t} = r_{t+1}^2 - \sigma_{t+1|t}^2 \quad (23)$$

On el valor de  $\lambda$  ha de minimitzar els errors quadrats mitjans:

$$EQM_v = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{t=1}^t (r_{t+1}^2 - \sigma_{t+1|t}^2(\lambda))^2} \quad (24)$$

A continuació tenim una gràfica que mostra l'evolució de les metodologies exposades, comparant la volatilitat condicional amb la volatilitat calculada amb la fórmula (7):



Gràfica nº 9

Font: Yahoo Finance  
Elaboració pròpia

Comprovem com el model EWMA captura més ràpidament les variances de volatilitat gràcies a l'assignació de ponderacions desiguals basades en un  $\lambda = 0,94$ .

Una última puntualització, si apliquéssim un GARCH amb  $\gamma = 0$ ,  $\alpha = 1 - \lambda$  i  $\beta = \lambda$  obtindríem un resultat extremadament similar a un model EWMA, ja que, el model EWMA és un cas particular de GARCH. També mencionar que EWMA ens simplifica les estimacions, ja que només cal obtenir un paràmetre, en lloc de tres paràmetres en el cas de GARCH. Finalment, un punt molt interessant, GARCH té reversió a la mitjana i EWMA no, ja que  $\alpha + \beta$  en el model EWMA és 1 i en GARCH resulta  $<1$ , aquest és el motiu pel qual depenent de la temporalitat treballarem amb un  $\lambda$  o un altre.

Així doncs, el càlcul de la volatilitat històrica ens permetrà, un cop estiguem fent el *pricing* d'opcions, conèixer en quin context o règim de volatilitat ens trobem, com ens afecta la volatilitat i ens permetrà contextualitzar el preu de les opcions, entre d'altres.

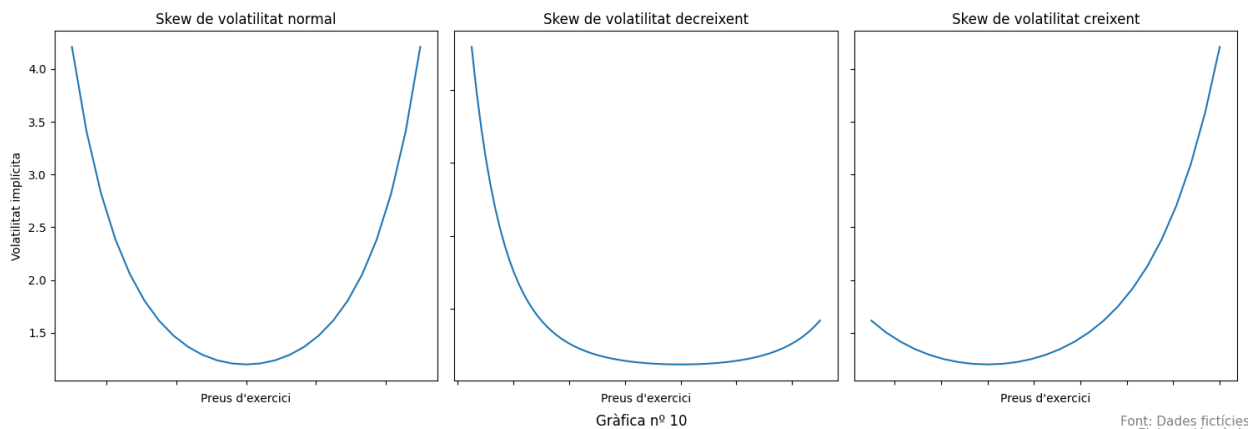
### 2.3 Volatilitat implícita

Fins ara treballàvem obtenint la volatilitat de mercat de l'actiu subjacent, calculada via diferents metodologies i models, ara per obtenir la volatilitat implícita haurem de recórrer a les cotitzacions de les opcions i aïllar-ne la volatilitat a la qual estan cotitzant aquelles opcions en qüestió. Per fer-ho es desenvoluparà un codi que faciliti l'estimació. Per aquest motiu ens referim a ella com a volatilitat implícita, perquè el preu de les opcions reflecteixen les expectatives de mercat sobre la volatilitat de l'actiu subjacent en un període de temps concret.

Per a calcular el preu d'una opció tenim en compte el preu de l'actiu subjacent (PS), el preu d'exercici (PE), el temps a venciment del contracte (t), la volatilitat ( $\sigma$ ), la taxa d'interès lliure de

risc ( $r$ ) i els dividendes en cas que n'hi haguessin ( $d$ ). Per tant, tots els paràmetres són coneguts, o fàcil d'estimar, com podria ser el cas dels dividendes, a excepció de la volatilitat.

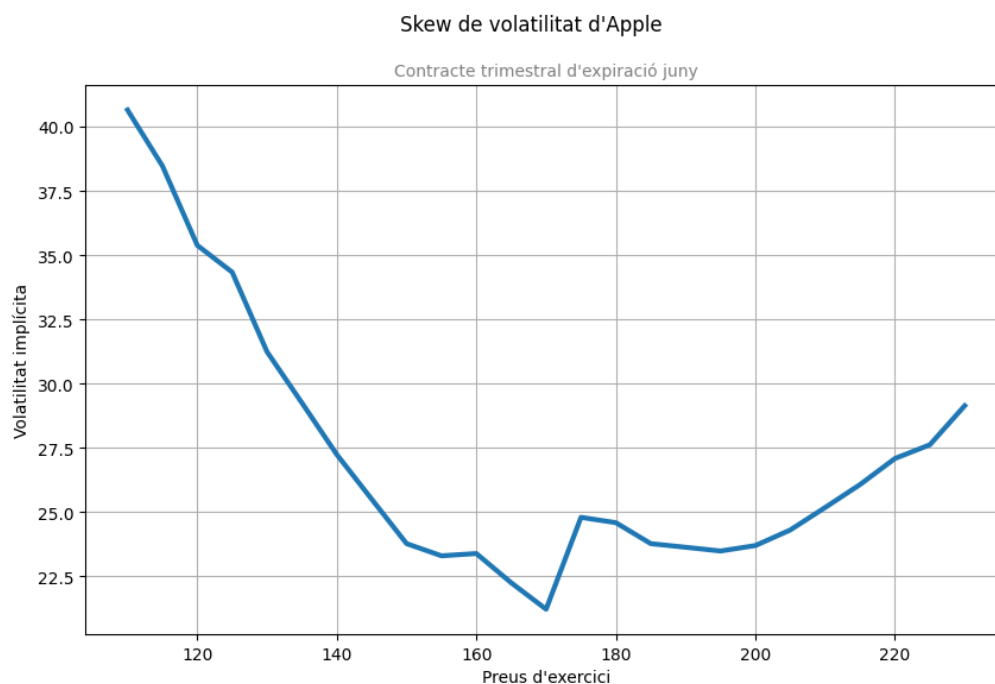
Arribats a aquest punt cal introduir el *Skew*<sup>15</sup> de volatilitat que és la funció que relaciona la volatilitat implícita per a diferents preus d'exercici. A continuació tenim tres *Skews* de volatilitat a mode d'exemple:



Si analitzem la volatilitat implícita de les opcions d'un mateix venciment comprovem com depenent del preu d'exercici, la volatilitat varia. Prenem com a referència la volatilitat del preu d'exercici el qual coincideix amb el preu del subjacent, aquest l'anomenem ATM, per les seves sigles en anglès *at the money*. Depenent del tipus de mercat i d'actiu tindrà un *skew* normal, creixent o decreixent. A aquesta variació s'incorpora un risc addicional en l'operativa d'opcions, el que anomenem risc de *skew* de volatilitat. Generalment, els mercats de deute tenen un *skew* normal, mentre que les accions i actius de renda variable solen tenir un *skew* decreixent, finalment el *skew* creixent és característic de les matèries primes.

Com hem comprovat, cada preu d'exercici té una volatilitat implícita diferent, però això no vol dir que una opció amb un preu d'exercici que tingui associada una volatilitat més alta sigui més volàtil, la volatilitat sempre es refereix a l'actiu subjacent. Per això, en el cas de les accions, generalment tenim *skews* decreixents, ja que el mercat quan puja ho fa lentament, però quan baixa ho fa de manera brusca, en *shocks* de mercat. Per tant, per capturar aquesta asimetria s'atribueix un major risc, una major volatilitat, als preus d'exercici més baixos.

A continuació s'exposa el *skew* de volatilitat d'Apple pel contracte trimestral que expira el dia 21 de juny on el subjacent estava cotitzant a 170. Comprovem, com ja s'ha mencionat que el *skew* de volatilitat adopta una pendent decreixent, on els *strikes* a l'esquerra del ATM tenen una volatilitat que creix a mesura que ens allunyem del ATM. Per altra banda, a la dreta del *strike* ATM la volatilitat també creix però en menor mesura. Aquest fet és dona per múltiples raons. En primer lloc, les *put* serveixen com assegurança davant el risc de mercat, per tant, una major demanda de *puts* amb *strikes* per sota del ATM comporta un increment dels preus, i conseqüentment, un increment de la volatilitat a la qual cotitzen les opcions. Un altre factor que podria explicar aquesta major volatilitat és l'asimetria dels rendiments dels mercats financers, doncs les caigudes de preus solen ser ràpides i de molts punts en el preu, per contra els increments del preu acostumen a ser més progressius. Així mateix, un altre factor que destaca és el salt de volatilitat entorn el *strike* ATM, aquest fet és deu a dos factors: el primer, l'asimetria de volatilitat entre el costat de les *call* i el costat de les *put*, el segon motiu és que els salts dels *strike prices* són cada 5 punts, o dòlars, en el cas d'Apple. Simplement, mencionar que una opció cotitzi a  $x$  preu de prima no vol dir que el valor nominal del contracte sigui aquest, sinó que hem de recórrer al multiplicador per a conèixer el valor nominal real de l'operació o del contracte en qüestió. Pel cas d'Apple, aquestes opcions, que cotitzen en el NASDAQ Options Market, tenen un multiplicador de 100. És a dir, cada contracte d'opcions equival, en cas d'exercici, a 100 accions d'Apple, per tant, el nominal de l'operació serà el *strike* pel nominal.

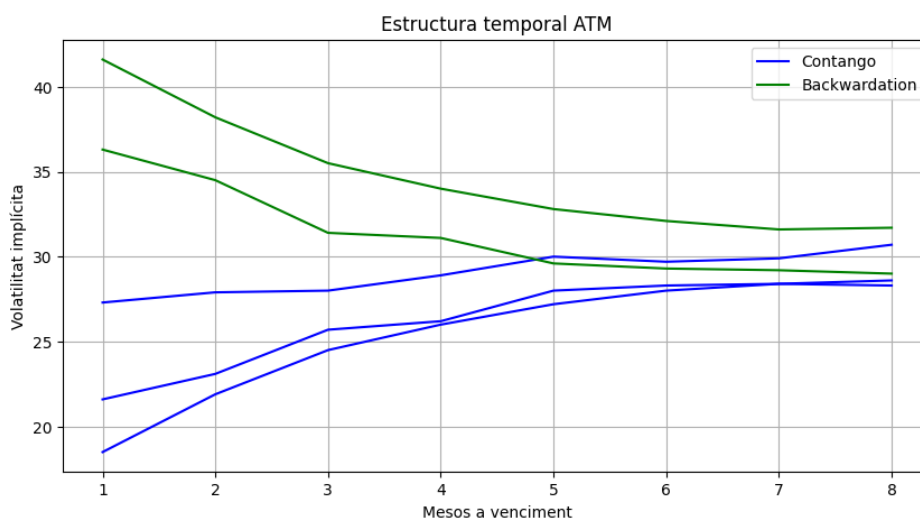


Gràfica nº 11

Font: Yahoo Finance  
A dia 03/05/2024  
Elaboració pròpia

Si en lloc de relacionar la volatilitat amb els preus de venciment d'un mateix contracte relacionem la volatilitat amb la volatilitat ATM de diferents venciments, obtenim el que anomenem estructura temporal<sup>16</sup>. Generalment, l'estructura temporal té una pendent positiva doncs a major temps fins a venciment del contracte, més esdeveniments poden passar, per això la part llarga cotitzarà amb una volatilitat implícita major. Ara bé, en situacions d'estrès de mercat, de gran incertesa o d'esdeveniments inesperats, la volatilitat implícita de la part curta de l'estructura temporal incrementa molt més ràpid que la volatilitat de la part llarga. Quan la part curta de l'estructura temporal cotitza a una major volatilitat que la part llarga diem que l'estructura temporal està invertida, o té pendent negatiu.

Ens referim a una estructura *Contango* quan l'estructura temporal és normal, positiva. Per altra banda, direm que es tracta d'una estructura temporal en *Backwardation* quan l'estructura temporal sigui negativa. És important comprendre la naturalesa de l'estructura temporal i les implicacions que té, doncs ens revela molta informació de la volatilitat implícita, les expectatives del mercat, etc. A continuació tenim un exemple d'estructura temporal:

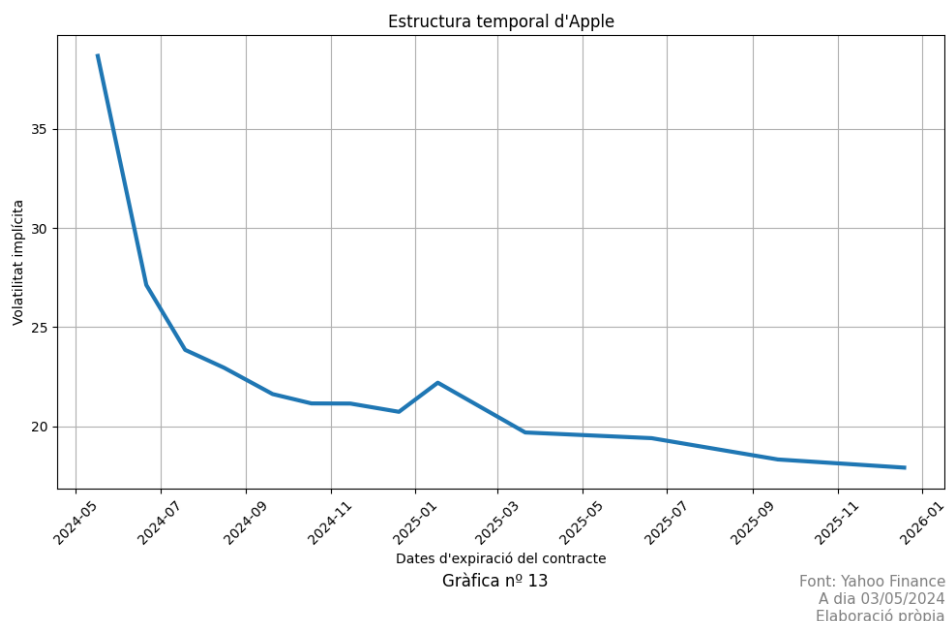


Gràfica nº 12

Font: Dades fictícies  
Elaboració pròpia

Cal remarcar que la gràfica n° 12 és a mode d'exemple i que en cap cas ens trobaríem diverses línies en una gràfica d'estructura temporal, però per exemplificar-ho s'han creat cinc possibles escenaris d'estructura temporal, classificant-les segons si tenen base positiva o negativa. Un cas real d'estructura temporal el trobaran en la grafica n°13.

Un factor a destacar en l'estructura temporal és la diferència de volatilitat que pot arribar a existir en els venciments més curts, per altra banda, els venciments més llargs, de vuit o més mesos, acostumen a ser més *sticky*, i en conseqüència fluctuen en menor mesura, ja que s'espera que els *shocks* de mercat que poden afectar en el curt termini, en un període de sis a vuit mesos, per norma general, estiguin resoltos. A continuació tenim l'estructura d'Apple:



Observem una estructura temporal en *backwardation*, és a dir, amb pendent negatiu. Aquest fet es pot donar per múltiples factors, com per exemple incertesa respecte a l'acció d'Apple, un entorn macroeconòmic desfavorable, etc. En aquest cas, la companyia va publicar els resultats trimestrals del Q1, els quals han provocat certa volatilitat en el mercat i un brusc moviment alcista. Més enllà de les implicacions macroeconòmiques o l'efecte que hagi tingut la publicació dels resultats ens serveix per comprovar el fet que s'exposava anteriorment, els venciments més pròxims són molt més sensibles a esdeveniments que els venciments a més llarg termini.

### 3. Història i teoria de la valoració d'opcions

Existeixen múltiples maneres de valorar el *fair value* d'una opció. Com s'ha introduït en l'apartat anterior hi ha diversos paràmetres que condicionen el preu o valor teòric d'una opció, però tots aquests paràmetres els podem agrupar en dos grups. Distingim entre el valor intrínsec (VI) i el valor temporal (VT). El valor intrínsec d'una opció de compra, o *call option*, serà la diferència entre el preu del subjacent i el preu d'exercici. En el cas de les opcions de venda, o *put option*, el valor intrínsec es calcula com la diferència entre el preu d'exercici i el preu del subjacent. Per altra banda, el valor temporal està compost pel temps a venciment ( $t$ ), la volatilitat ( $\sigma$ ), la taxa d'interès ( $r$ ) i els dividends ( $d$ ). Podem entendre el VT com al preu a pagar, o cobrar, per la incertesa futura des d'ara fins al venciment. Sumarem el VI+VT per obtenir el preu de la prima d'una opció. Ens referim a una opció ITM, *in the money*, quan aquesta té valor intrínsec i direm que una opció està OTM, *out of the money*, quan no té valor intrínsec i només està composta per valor temporal.

Per a fer els càlculs existeixen diverses aproximacions com ara Black-Scholes, Merton o Black 76. A continuació es detallen les diferents metodologies.

En primer lloc, presentarem alguns antecedents per posteriorment entrar en detall en el model de Black-Scholes, que és el pilar mestre de la valoració d'opcions Europees. El model assumeix que els preus d'una opció no poden ser negatius i, per tant, es basen en una distribució que s'aproximaria a una *lognormal*. Puntualitzar que estem treballant amb el preu de les opcions i no amb els rendiments de l'actiu subjacent, com fèiem en la gràfica nº2. Alguns autors com ara Sprenkle, Samuelson, Baumol<sup>17</sup> o Chen<sup>18</sup> ja proposaven diverses fórmules o metodologies de valoració d'opcions Europees, però totes elles estaven incompletes i requerien de paràmetres arbitraris. Per exemple, Sprenkle<sup>19</sup> planteja la següent fórmula de valoració d'opcions:

$$P_s = KXN(b_1) - K^*CN(b_2) \quad (25)$$

On  $b_1$  i  $b_2$  s'obtenen:

$$b_1 = \frac{\ln KX/C + \frac{1}{2}v^2(t^*-t)}{v\sqrt{(t^*-t)}} \quad (26)$$

$$b_2 = \frac{\ln KX/C - \frac{1}{2}v^2(t^*-t)}{v\sqrt{(t^*-t)}} \quad (27)$$

Essent  $X$  el preu del subjacent,  $C$  el preu d'exercici,  $t^*$  és el dia de venciment del contracte,  $t$  la data d'actual,  $v^2$  la variància dels rendiments i  $N(b_i)$  és la funció de la densitat normal acumulada. Ara bé,  $K$  i  $K^*$  resulten paràmetres desconeguts a estimar. Sprenkle en la mateixa publicació exposa la incapacitat d'estimar aquests dos paràmetres, ja que  $K$  representaria el preu esperat del subjacent a venciment entre el preu actual del subjacent i  $K^*$  la taxa de descompte basada en el risc del subjacent. Posteriorment, Samuelson<sup>20</sup> publica un model on existeixen també dos paràmetres desconeguts,  $\alpha$  i  $\beta$ . Un temps després de publicar el model, junt amb Robert Merton<sup>21</sup> publiquen una nova visió basada en estimar el preu de les opcions com a funció del preu del subjacent tenint en compte el risc diversificable i els riscos inherents indiversificable. Black-Scholes, per tant, són els primers a proposar un model on totes les variables són conegudes i permet obtenir un preu o valoració de les opcions que no depèn de paràmetres arbitraris. Ara bé, fent un seguit s'assumeix: que no hi ha costos de transacció, que no hi ha restriccions per vendes al descobert, que els actius són infinitament divisibles, que el tipus d'interès és el mateix per finançar-se que per finançar i que l'actiu subjacent no paga dividends durant la vida del contracte d'opció. Així mateix, s'assumeix un mercat eficient sense oportunitats d'arbitratge on els actius sense risc creixen a una taxa constant, la taxa a la que ens referim com el tipus d'interès lliure de risc. A continuació, tenim la fórmula que presenten Black-Scholes per a una opció de compra, o *call option*:

$$P_c = S_t N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (28)$$

Per a una opció de venda o *put option* serà:

$$P_v = X e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \quad (29)$$

On  $d_1$  i  $d_2$  són:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (30)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (31)$$

On  $X$  és el *strike price*,  $S_t$  és el preu del subjacent en el moment  $t$ ,  $r$  és el tipus d'interès lliure de risc,  $T$  el moment d'expiració del contracte i  $N(d_i)$  és la funció de la densitat normal acumulada.



Partint d'aquesta base existeixen variants, com per exemple la de Merton<sup>22</sup>, el qual incorpora el rendiment dels dividends  $q$  en la valoració. Considera un dividend anual continu i publica la fórmula següent:

$$P_c = S_t e^{-q(T-t)} N(d_1) X e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (32)$$

$$P_v = X e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t e^{-q(T-t)} N(-d_1) \quad (33)$$

Essent  $d_2$  igual que en la fórmula (31) de Black-Scholes i  $d_1$  la següent:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (34)$$

Finalment, mencionar el treball de Black 76<sup>23</sup> el qual proposa una variant per a calcular el preu de la prima de les opcions, sempre i quan el venciment del contracte coincideixi amb l'expiració d'un contracte de futurs, doncs en aquest cas el subjacent no és un actiu, com podria ser una acció o un índex, sinó que és un futur o *forward*. Generalment, aquesta metodologia resultarà útil quan estiguem fent valoracions d'opcions per a matèries primes, les quals liquidin per entrega<sup>24</sup> o, en anglès, *physical delivery*. D'aquesta manera el subjacent és el preu del futur amb el mateix venciment que les opcions així, si el contracte d'opcions expira amb valor s'abonarà el preu establert, el *strike price*, i es liquidarà entregant la mercaderia, sinó el contracte expirarà sense valor. També es pot usar per al càlcul prenent com a subjacent un contracte de futurs per diferència o, en anglès, *cash settlement*, però no és tan habitual. Així doncs, la fórmula que proposa és:

$$P_c = e^{-r(T-t)} (FN(d_1) - XN(d_2)) \quad (35)$$

$$P_v = e^{-r(T-t)} (XN(-d_2) - FN(-d_1)) \quad (36)$$

On  $d_2$  serà igual que en la fórmula (31) de Black-Scholes i  $d_1$  s'expressa:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{X}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (37)$$

Per tant, comprovem que en lloc de treballar amb  $S_t$  que expressa el preu del subjacent, treballem amb  $F$  que expressa el preu del futur de referència.

Per exemplificar les diferències en la metodologia de càlcul, s'ha realitzat una simulació dels tres models prenent com a referència les dades següents: *Strike price* 100, preu del subjacent 105, preu del futur 105, mig any pel venciment del contracte d'opció i del futur, una taxa lliure de risc del 5%, una volatilitat del 25% anual i un dividend anual del 10%. Obtenim el següent *output*:

Model	Preu teòric de l'opció
Black-Scholes	11.4774
Merton	8.18873
Black-76	9.74504

Taula nº3

Font: Dades fictícies  
Elaboració pròpia

Les diferències de preu es deuen a les diferents metodologies de càlcul i a les variables que el condicionen, com per exemple, en el cas de Merton el dividend anual o en el cas de Black 76 el futur del subjacent. Degut als avantatges i la senzillesa del càlcul de la fórmula de Black-Scholes, d'ara endavant treballarem basant-nos en aquesta fórmula.



### 3.1 Sensibilitats

La fórmula de Black-Scholes ens permet calcular sensibilitats<sup>25</sup>, realitzant derivades per conèixer la variació del preu de la prima de l'opció en relació a una variable en concret, com ara la variació del preu del subjacent, el pas del temps, la variació de la volatilitat del mercat o un canvi en els tipus d'interès, entre d'altres. Aquestes sensibilitats s'expressen amb lletres gregues, d'aquí que també ens referim a elles simplement com a gregues, en lloc de sensibilitats. Existeixen cinc gregues principals que són: Delta, Gamma, Theta, Vega i Rho.

Delta  $\delta$  expressa la variació de la prima de l'opció ( $P_i$ ) en relació a la variació del preu de l'actiu subjacent (AS). S'expressa com a la primera derivada de la prima respecte al preu de l'actiu subjacent:

$$\delta = \frac{dP_i}{dAS} \quad (38)$$

És a dir delta expressa la variació que experimenta la prima de l'opció davant del moviment d'un punt, o *tick*<sup>26</sup>, de l'actiu subjacent. Quan l'opció estigui OTM el  $\delta$  tendirà a 0, quan l'opció estigui ATM el  $\delta$  serà molt pròxim a 0,5 i quan l'opció estigui ITM el  $\delta$  tendirà a 1. Per això, la suma del delta, en valor absolut, d'un *call* i una *put* del mateix *strike price* i del mateix venciment serà 1, o extremadament pròxim a la unitat.

Gamma  $\gamma$  és la segona derivada de la prima de l'opció respecte al preu de l'actiu subjacent. És a dir, expressa el canvi del delta en funció del moviment del subjacent:

$$\gamma = \frac{d^2P_i}{dAS^2} = \frac{d\delta}{dAS} \quad (39)$$

Gamma té signe positiu per les opcions comprades,  $\gamma > 0$  i signe negatiu per les opcions venudes  $\gamma < 0$ . No confondre amb opcions de compra, *call*, i opcions de venda, *put*. Un altre factor a puntualitzar és que la gamma d'una opció serà màxim ATM i disminueix quan el preu del subjacent s'allunya del *strike price*, posteriorment s'expressarà aquest fet gràficament per una millor comprensió.

Theta  $\theta$  mostra la variació de la prima de l'opció en funció del temps a venciment (T). És a dir, quan varia el preu de l'opció pel simple pas del temps. Les opcions perden valor, en termes de valor temporal, a mesura que s'acosta el venciment del contracte.

$$\theta = \frac{dP_i}{dT} \quad (40)$$

Així doncs, theta mesura la pèrdua de valor de la prima en funció del pas del temps. Theta serà negativa en les opcions comprades i positiva en les opcions vengudes. El valor absolut de theta serà màxim ATM i incrementarà amb el pas del temps, creixent ràpidament els últims dies abans del venciment del contracte. Com comprovarem posteriorment, existeix una important correlació entre gamma i theta.

Vega  $\nu$  expressa la variació que experimenta la prima en funció de la volatilitat implícita. És a dir, ens indica la variació del preu de l'opció davant la fluctuació d'un punt percentual de la volatilitat implícita.

$$\nu = \frac{dP_i}{dVI} \quad (41)$$

Les opcions comprades tindran una vega positiva i les opcions vengudes una vega negativa. Novament, la vega serà màxima ATM i disminuirà a mesura que el preu del subjacent s'allunyi del *strike*. Un altre punt a remarcar és que a mesura que falta menys pel venciment, la vega va disminuint, fent que l'efecte de la volatilitat implícita sigui cada cop menor.

Rho  $\rho$  mostra la variació del preu de les opcions en funció del canvi en els tipus d'interès ( $r$ ) de referència, el *risk-free rate*. Com que usem els tipus d'interès per fer càlculs de *time value of money*<sup>27</sup> rho resulta una variable important per conèixer com pot afectar una variació, d'un punt percentual, dels tipus d'interès en el cost de mantenir la posició al llarg del temps.

$$\rho = \frac{dP_i}{dr} \quad (42)$$

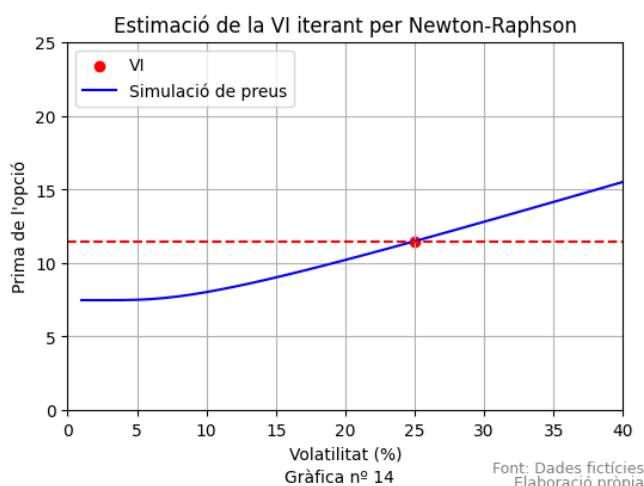
Quan major sigui el preu del subjacent i major sigui el temps a venciment, l'efecte de rho en el preu de les opcions serà major. Rho és positiva per a opcions *calls* comprades i *puts* venudes. D'altra banda, serà negativa per *calls* venudes i *puts* comprades. Un punt a destacar és que rho mesura la variació de la prima en funció d'un increment o disminució dels tipus d'interès del 1%, és a dir 100bps, de les sigles en anglès *basis points*. Ara bé, rarament el tipus d'interès de referència que fem servir per el càlcul fluctuarà tant dràsticament. Sempre es procurarà pendre com a referència un *benchmark* adient a les opcions que volem valorar, doncs procurarem que el tipus d'interès que fem servir sigui adequat amb la geografia de les opcions que volem valorar i la temporalitat.

#### 4. Obtenció de la volatilitat implícita

Com hem vist, per obtenir el preu d'una opció necessitem, d'alguna manera, obtenir la volatilitat de mercat, la volatilitat implícita. Per fer això caldria aïllar  $\sigma$  de la fórmula (27) o (28) de Black-Scholes, ara bé degut a la impossibilitat d'aïllar aquesta variable per resoldre de manera directa la volatilitat, cal usar metodologies iteratives o d'optimització. Per fer-ho, usarem la metodologia de Newton-Raphson<sup>28</sup>, la qual ens permetrà anar iterant fins que el preu de mercat de l'opció coincideixi amb el preu que calculem amb Black-Scholes, d'aquesta manera, quan els dos valors coincideixin, ja coneixerem la volatilitat implícita. La metodologia de càlcul resulta senzilla i es tracta de començar per un valor estimat i anar iterant en base a:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (43)$$

Quan el valor estimat i el valor real coincideixen, o són extremadament similars, podem dir que ja hem obtingut l'arrel, o la solució. A continuació s'exposa aquest fet gràficament, partint de les dades del model Black-Scholes de la taula n<sup>o</sup>3.



La línia discontinua mostra el preu teòric de l'opció, 11,4774 i la línia de color blau exposa el preu teòric per a diferents valors de volatilitat. El punt de tall entre ambdues línies és del 25% que és la volatilitat que vam introduir per a calcular el preu teòric de l'opció en la taula n<sup>o</sup>3.

A continuació adjunto un codi<sup>29</sup> de Python<sup>30</sup> desenvolupat per aïllar la volatilitat implícita d'una call:

```
import numpy as np
from scipy import stats, optimize

def black_scholes_call(S, K, T, r, v): #Definim funció black scholes
    d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * v ** 2) * T) / (v * np.sqrt(T))
    d2 = d1 - v * np.sqrt(T)
    return S * stats.norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r * T) *
stats.norm.cdf(d2)

def vola_implicita(S, K, T, r, preu): #Definim funció objectiu
    funcio_objectiu = lambda v: black_scholes_call(S, K, T, r, v) -
preu
    return optimize.newton(funcio_objectiu, 0.20)

S, K, T, r, preu = 105,100,0.5,0.05,11.4774 #Introduïm els paràmetres

vola_imp = round(vola_implicita(S, K, T, r, preu) * 100, 3)

print("La volatilitat implícita és del", vola_imp, "%")
```

Per aïllar la volatilitat implícita d'una put:

```
import numpy as np
from scipy import stats, optimize

def black_scholes_put(S, K, T, r, v): #Definim funció black scholes
    d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * v ** 2) * T) / (v * np.sqrt(T))
    d2 = d1 - v * np.sqrt(T)
    return K * np.exp(-r * T) * stats.norm.cdf(-d2) - S *
stats.norm.cdf(-d1)

def vola_implicita(S, K, T, r, preu): #Definim funció objectiu
    funcio_objectiu = lambda v: black_scholes_put(S, K, T, r, v) -
preu
    return optimize.newton(funcio_objectiu, 0.20)

S, K, T, r, preu = 105,100,0.5,0.05,4.0084 #Introduïm els paràmetres

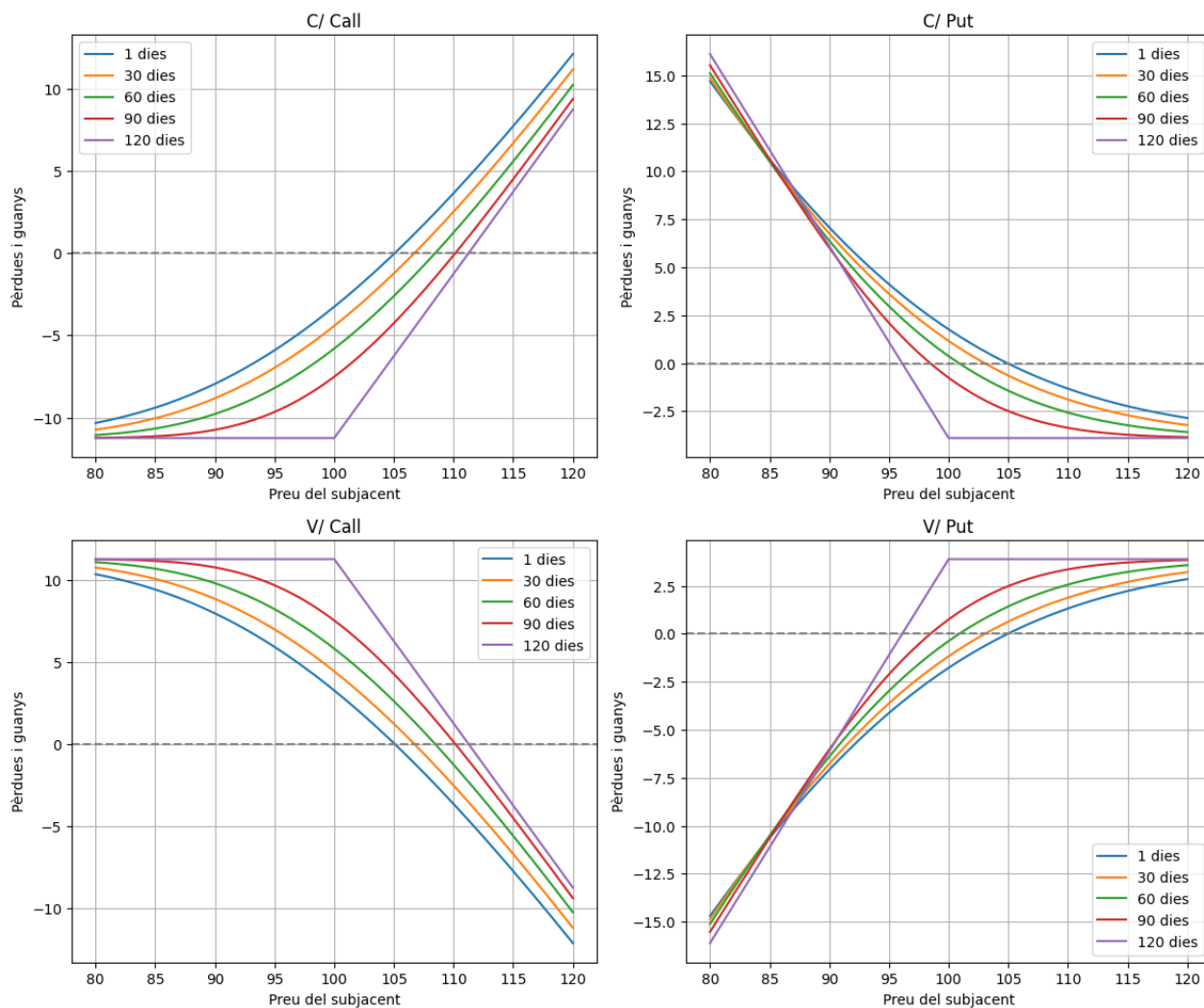
vola_imp = round(vola_implicita(S, K, T, r, preu) * 100, 3)

print("La volatilitat implícita és del", vola_imp, "%")
```

## 5. Simulació d'opcions i *payoff*

Coneixent com obtenir la volatilitat implícita ja podem calcular el possible *payoff*, o possible pèrdues i guanys, de la prima d'una opció. Aquest ens mostra el potencial benefici i pèrdua de manera gràfica per als diferents *strikes*. A continuació tenim la representació d'una *call* i d'una *put*, comprades i venudes, realitzant els càlculs amb la fórmula (28) i (29) respectivament.

Payoff en funció del temps a venciment



Gràfica nº 15

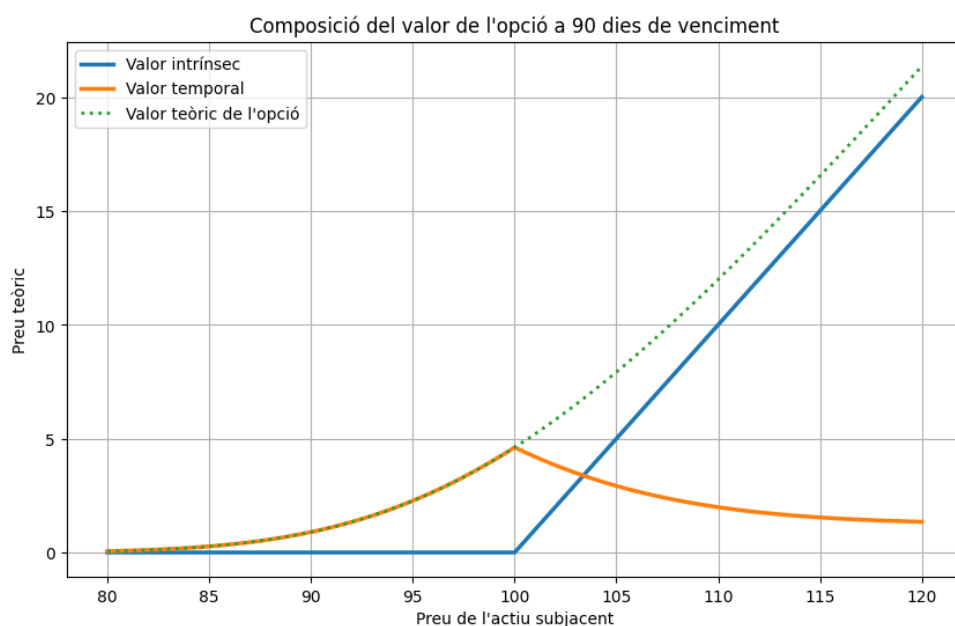
Font: Dades fictícies

Elaboració pròpia

En primer lloc, al comprar una opció, ja sigui una *call* o una *put*, estem pagant una prima, per tenir el dret a comprar o vendre, per això, el *payoff* de l'opció en el preu d'exercici 100, és negatiu, doncs la opció està OTM i no té valor, ja que el subjacent està en 105. Ara bé, en el cas de la *call*, el 111,4774 és el *break even*, és a dir, el punt a partir del qual la nostra opció ens comença a reportar beneficis. Aquest valor s'obté de la suma del nostre *strike* i la prima pagada. Pel que fa a la *put*, el *break even* està en 95,99. El càlcul resulta l'invers que el de la *call*, en aquest cas, cal fer la diferència entre el *strike* i la prima pagada. Per a les opcions venudes els papers es giren i cobrem una prima per comprometre'ns a comprar o vendre en un cert *strike*, a canvi d'aquesta obligació, ingresem una prima. En el cas de la venda de *call* obtindrem beneficis, sempre i quan el subjacent no superi el *strike* més la prima, és a dir, per sota dels 111,4774 obtenim beneficis i per sobre d'aquest nivell comencen les pèrdues. Pel que fa a la venda de *put* ingresem la prima i, sempre que el preu del subjacent es mantingui per

sobre del 95,99, obtenim beneficis, per sota d'aquest nivell, la nostra venda començarà a incórrer en pèrdues.

En aquest cas s'ha suposat una opció que expira d'aquí a mig any, per tant, la gràfica nº17 mostra l'evolució, des del primer dia fins al dia d'expiració del contracte, on ja han passat els cent vint dies. Així doncs, comprovem com a mesura que s'acosta la data de venciment, l'opció va perdent valor temporal, fins al moment d'expiració, on ja han transcorregut els cent vint dies i l'opció només té valor intrínsec. Comprovem aquest fet a continuació on es desglossa el valor intrínsec i valor temporal de l'opció quan han passat 30 dies de la creació de l'opció, o el que és el mateix, quan falten 90 dies. No confondre's en aquest punt, doncs el que es representa a continuació és la línia de color groc de la gràfica nº15, C/ Call, on falten 90 dies pel venciment de l'opció, desglossant el valor intrínsec i el valor temporal per a cada valor de l'actiu subjacent.



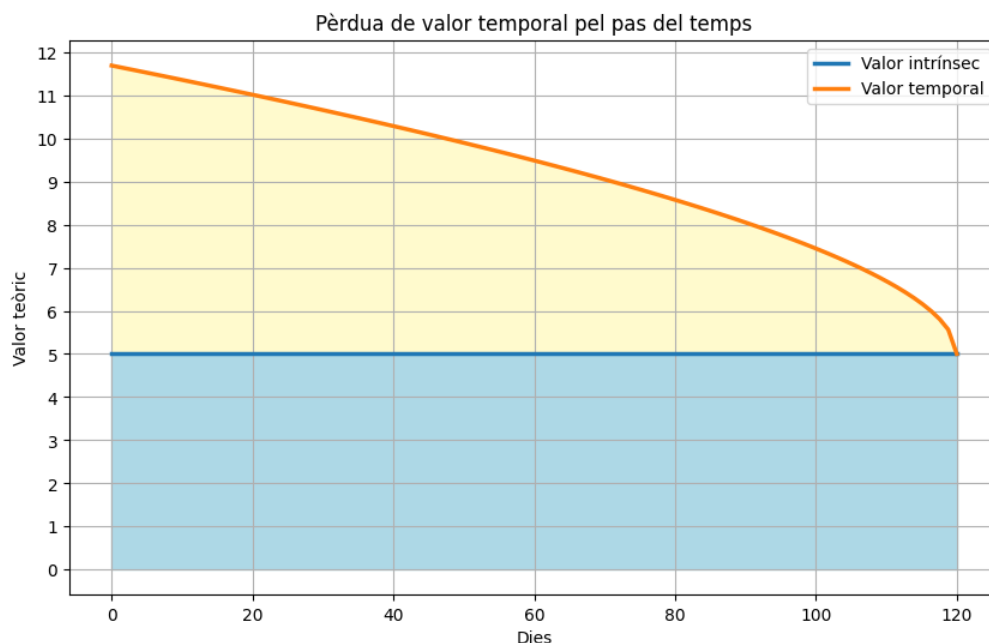
Gràfica nº 16

Font: Dades fictícies  
Elaboració pròpia

Comprovem com el valor teòric de l'opció està compost per la suma del valor intrínsec i el valor temporal. En aquest cas, en una compra de *call*, existeix valor intrínsec quan el preu del subjacent és major que el preu d'exercici, ja que ens permet comprar a un preu menor. Per això, no existeix valor intrínsec per sota del nostre *strike*, que és 100. Per altra banda, comprovem que el valor temporal és màxim quan el preu d'exercici i el preu del subjacent coincideixen. Un fet a destacar és que el valor temporal decreix pel pas del temps, per tant, si agafem com a referència el preu d'exercici 100, amb el preu del subjacent a 105 el valor intrínsec serà 5 i seguirà sent 5, per a una *call* comprada indiferentment del temps a venciment. Obtenim el valor intrínsec fent la diferència, entre el preu del subjacent i el preu d'exercici de l'opció en qüestió, tal i com ja s'ha esmentat. Un altre factor que té influència en el valor temporal és la volatilitat, doncs aquesta, expressa la potencial desviació, o moviment, del preu. Per tant, si comprem que el valor temporal recull la incertesa de mercat fins a venciment, a major volatilitat major incertesa i, per tant, el valor temporal serà major. Per aquest mateix motiu, a mesura que s'acosta el venciment, el valor temporal és menor, ja que la incertesa va desapareixent i el temps perquè succeeixi algun esdeveniment inesperat és menor.

Ara bé, el valor temporal decreix amb el temps, com acabem d'esmentar, però experimenta una pèrdua, o un pendent, més lleuger a l'inici i s'incrementa els últims dies abans del venciment. Acostuma a ser els últims 45 - 30 dies on s'experimenta una pèrdua substancial del valor temporal. Observem gràficament el mencionat, en la següent gràfica nº17. Aquesta pèrdua del valor temporal reflecteix la menor probabilitat de que l'opció fluctui i expiri amb o sense valor,

doncs els dies perquè expiri cada vegada són menys i, per tant, les possibilitats es redueixen. Aquest fet explica perquè, a l'inici de la vida de l'opció, el simple pas d'un dia no causa un deteriorament notable del valor temporal, ja que és indiferent que faltin 120 dies o 119. Ara bé, quan en falten 10 o 9 la diferència ja és més notable, doncs al final, d'un dia per l'altre és perd un 10% de la vida del contracte. Aprofundirem en aquest fet quan desenvolupem l'estudi del comportament de la theta, doncs veurem com theta incrementa notablement els últims dies del contracte d'opció.



Gràfica n° 17

Font: Dades fictícies  
Elaboració pròpia

Com ja s'ha mencionat anteriorment la influència de la volatilitat en el preu de les opcions resulta una variable clau a seguir, doncs té una influència notable en el preu. A major volatilitat més cares seran les primes de les opcions, doncs la volatilitat és la variable que recull el risc de mercat associat, d'aquí la importància de conèixer i analitzar correctament la volatilitat històrica.

En les taules n°4 i n°5 podem comprovar aquest fet. Els càlculs s'han realitzat seguint els paràmetres següents: mig any a venciment, un tipus d'interès del 5%, un *strike* de 100, el subjacent cotitzant a 105 en la taula n°4 i a 95 en la taula n°5 i les diferents volatilitats s'expressen en les taules.

Volatilitats	Preu CALL	Preu PUT
0.05	7.7322	0.019673
0.1	8.22353	0.510999
0.2	10.3662	2.65364
0.3	12.9441	5.2316
0.4	15.6395	7.92696
0.5	18.3739	10.6614
0.75	25.2205	17.5079
1	31.9607	24.2482
1.25	38.514	30.8015
1.5	44.8262	37.1137

Taula n°4

Font: Dades fictícies  
Elaboració pròpia

Volatilitats	Preu CALL	Preu PUT
0.05	0.451237	2.98223
0.1	1.63501	4.16601
0.2	4.25454	6.78553
0.3	6.9282	9.45919
0.4	9.60723	12.1382
0.5	12.2791	14.8101
0.75	18.8895	21.4205
1	25.3528	27.8838
1.25	31.6198	34.1508
1.5	37.6479	40.1789

Taula n°5

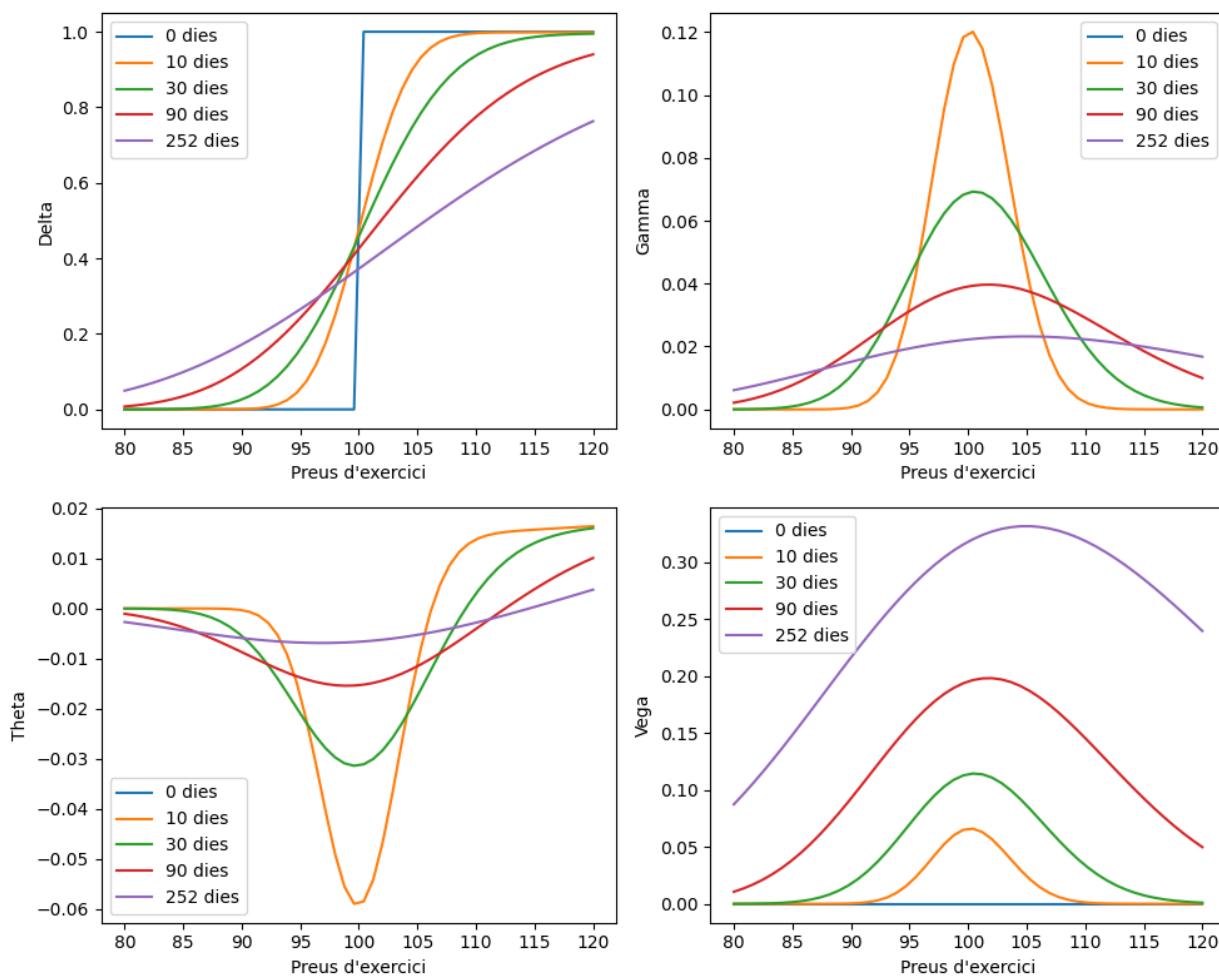
Font: Dades fictícies  
Elaboració pròpia

Dos punts a mencionar; el primer, la diferència entre el preu de les *call* i *puts* es veu influenciat pel valor intrínsec. En la taula n°4 les *call* estan 5 punts ITM i les *puts* només tenen valor temporal, ja que estan 5 punts OTM. En la taula n°5 tenim un cas invers, on les *put* estan 5 punts ITM i les *calls* 5 punts OTM. El segon punt a destacar, és el preu lleugerament més elevat de les *calls*. Aquest fet es pot donar per múltiples causes, una de les quals pot ser les expectatives futures de mercat. És a dir, si els inversors estan adquirint el dret a comprar el subjacent és precisament perquè esperen que en un futur el preu del subjacent serà més elevat, i es volen assegurar el fet de poder comprar l'actiu a un preu més baix que el de mercat en t+6 mesos, per exemple.

### 5.1 Simulació de sensibilitats

Arribats a aquest punt, ens falta conèixer com poden influir en el preu de les opcions, canvis en el preu del subjacent, el pas del temps o la volatilitat. Com ja s'ha introduït, les sensibilitats<sup>31</sup> ens permeten fer aquests càlculs per estimar l'efecte en el preu d'aquestes fluctuacions. A continuació, tenim la simulació de les sensibilitats d'una *call* comprada a diferents dies fins a venciment. És a dir, des de 0 fins a 252 dies a venciment. D'aquesta manera podem observar com varien les sensibilitats. Destacar que el preu del subjacent és 100, la volatilitat anual és del 25% i el tipus d'interès del 5%.

Sensibilitats d'una Call comprada



Gràfica n° 18

Font: Dades fictícies  
Elaboració pròpia



En primer lloc, delta de l'opció ens mostra la sensibilitat davant de canvis del preu del subjacent, com ja hem vist anteriorment. Aquesta sensibilitat és cada vegada major, doncs quan falten 252 dies a venciment la corba és més plana i a mesura que els dies a venciment es redueixen va prenent un caràcter binomial, fins arribar al moment de l'expiració del contracte on el delta serà o bé 1 si l'opció està ITM, i té valor, o bé 0 si l'opció està OTM, i no té valor. També fem servir el delta com la probabilitat de què, a venciment, l'opció tingui valor, doncs la metodologia de càlcul no deixa de ser la funció de distribució acumulada de probabilitat<sup>32</sup>, o dit d'una altra manera, la probabilitat que la variable aleatòria, en el nostre cas l'actiu subjacent, sigui igual o menor a  $x$ , en el nostre cas el preu d'exercici. Un fet similar al que ens mostren les taules de la distribució normal estàndard. El delta és positiu per la compra de *call* i per la venda de *put*, serà negatiu per la compra de *put* i per la venda de *call*. Aquest fet, és dona perquè tant la compra de *call* com la venda de *put* són posicions alcistes i es beneficien de l'increment del preu del subjacent. Hi ha inversors o estratègies d'inversió que cobreixen el delta, conegut com a *delta hedging*<sup>33</sup>, això implica que els beneficis i pèrdues vindran pel pas del temps i de variacions de la volatilitat implícita, però no del moviment del subjacent, eliminant el factor de risc de mercat per la variació del preu. Aquest tipus d'estratègies les anomenem no direccionals. A continuació es facilita la fórmula pel càlcul del delta:

$$\delta = e^{-r \cdot T} \cdot N(-d_1) \quad (44)$$

On  $e$  es la base del LN elevat al tipus d'interès invers o negatiu pel temps a venciment i  $N(d_1)$  és la funció de distribució acumulada, tal i com s'exposa en la fórmula (28). Pel que fa a  $d_1$  cal recórrer a la fórmula (30), especificada anteriorment en la valoració d'opcions.

Gamma<sup>34</sup> mesura la variació de delta en funció del subjacent, o el que és el mateix, la segona derivada de la variació de la prima respecte al subjacent. Comprovem que quan falten 252 dies a venciment, l'efecte que té gamma és baix, doncs la variació del preu del subjacent tampoc efecte excessivament en el preu de l'opció. Ara bé, el pas del temps accentua el gamma, sobretot els valors més pròxims al ATM, que en el nostre cas és 100. Observem aquest fet amb l'important increment que experimenta gamma a 10 dies pel venciment, ja que a tan pocs dies un lleuger moviment del subjacent pot fer que l'opció tingui valor o no. El càlcul resulta el següent:

$$\gamma = \frac{e^{-r \cdot T} \cdot N(d_1)}{S \cdot \sigma \cdot \sqrt{T}} \quad (45)$$

Observem que és similar al càlcul del delta, però en aquest cas dividim el delta entre el preu del subjacent per la volatilitat per l'arrel del temps a venciment. La gamma serà positiva en les opcions comprades i negativa en les opcions vengudes.

Theta exposa la variació de la prima respecte al pas del temps i mesura la pèrdua o deteriorament del valor temporal. Com ja hem vist, el valor temporal decreix lentament quan falten molts dies pel venciment, però s'accelera els últims dies de la vida del contracte. Evidenciem aquest fet de manera molt visual en la gràfica n°18 on theta resulta màxim ATM i creix a mesura que passa el temps. Un fet a destacar és que gamma i theta es comporten de manera inversa i guarden una alta correlació. Theta, per tant, serà negativa per les opcions comprades i positiva per les opcions vengudes. Aquest fet es dona perquè si tenim una opció comprada, el pas del temps ens perjudica, doncs falta menys perquè expiri el contracte i perdrem el dret que vam adquirir. Per contra, si estem venuts d'opcions, el pas del temps ens beneficia, doncs falta menys perquè expiri el compromís o l'obligació que tenim. A més, la pèrdua de valor temporal pel pas del temps fa que la prima sigui menor, com s'ha vist en la gràfica n°17, per tant, si vam comprar una opció fa un any i actualment només faltant 3 mesos perquè expiri, el valor temporal haurà caigut notablement, reduint el preu de la prima. Així mateix si vam vendre l'opció fa un any, la pèrdua de valor temporal fa que la prima sigui més barata i, per tant, ens beneficiem del pas del temps. Un punt a destacar en la gràfica de theta



és que quan falten pocs dies a venciment, el valor de theta en les opcions que estan molt ITM, per exemple el preu d'exercici 110 o 120, theta és lleugerament positiu. Aquest fet indica que el pas del temps no sols no resta valor a la prima, sinó que l'incrementa lleugerament. Això és degut a la metodologia de càlcul que tenim a continuació; fórmula (46). Ja que la funció de probabilitat acumulada de  $d_2$  resulta major que la resta de la fracció, per aquest motiu obtenim valors lleugerament positius. Ara bé, en cap cas, en situació de mercat real ens trobarem que el pas del temps incrementi el valor temporal de la prima d'una opció, aquesta alteració només la trobarem a nivell teòric.

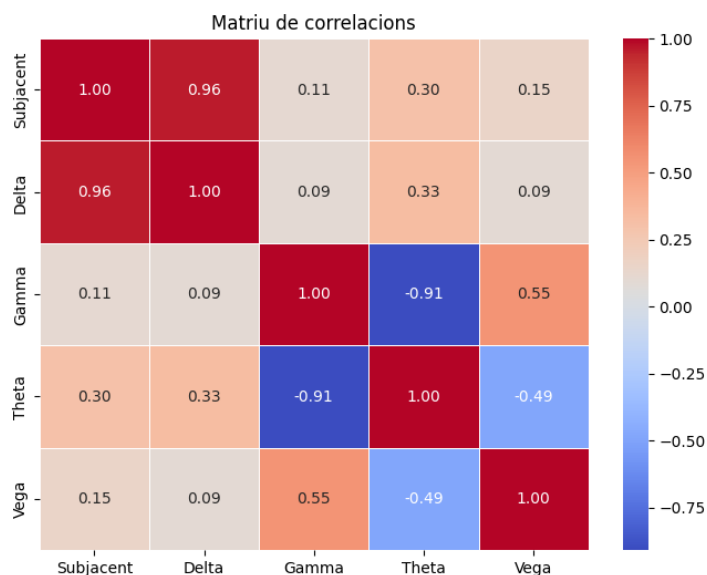
$$\theta = r \cdot K \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(-d_2) - \frac{S \cdot N(-d_1) \cdot \sigma}{2 \cdot \sqrt{T}} \tag{46}$$

Per  $d_2$  igual a la fórmula (31) de l'equació de Black Scholes.

Finalment, vega recull la variació de la prima en funció de la volatilitat. Observem com vega és màxim ATM. També destacar que l'efecte de la volatilitat disminueix conforme s'aproxima el venciment, per això vega serà major quan faltin 252 dies a venciment que quan faltin 10 dies per l'expiració del contracte. La prima de les opcions augmenta o disminueix en funció d'augmentos o disminucions de la volatilitat implícita, i com hem vist, la volatilitat implícita fluctua en funció del moviment del subjacent, però també en funció d'altres paràmetres com ara les expectatives de mercat, la demanda, etc. Vega serà positiva per opcions comprades i negativa per opcions venudes, ja que si la volatilitat augmenta el preu de les opcions també ho farà, fet que beneficia als compradors i perjudica els venedors. El càlcul de vega és el següent:

$$v = S \cdot \sqrt{T} \cdot N(d_1) \tag{47}$$

En la gràfica n°19 s'han calculat les correlacions de les diferents sensibilitats exposades anteriorment i es mostren en un mapa de calor. En primer lloc, destaca l'alta correlació entre el delta i el subjacent<sup>35</sup>, fet que té molt sentit si recordem que delta és la primera derivada de la prima respecte al subjacent. Per tant, quan major sigui el preu del subjacent, el delta serà major, més pròxim a 1, i viceversa.



Gràfica n° 19

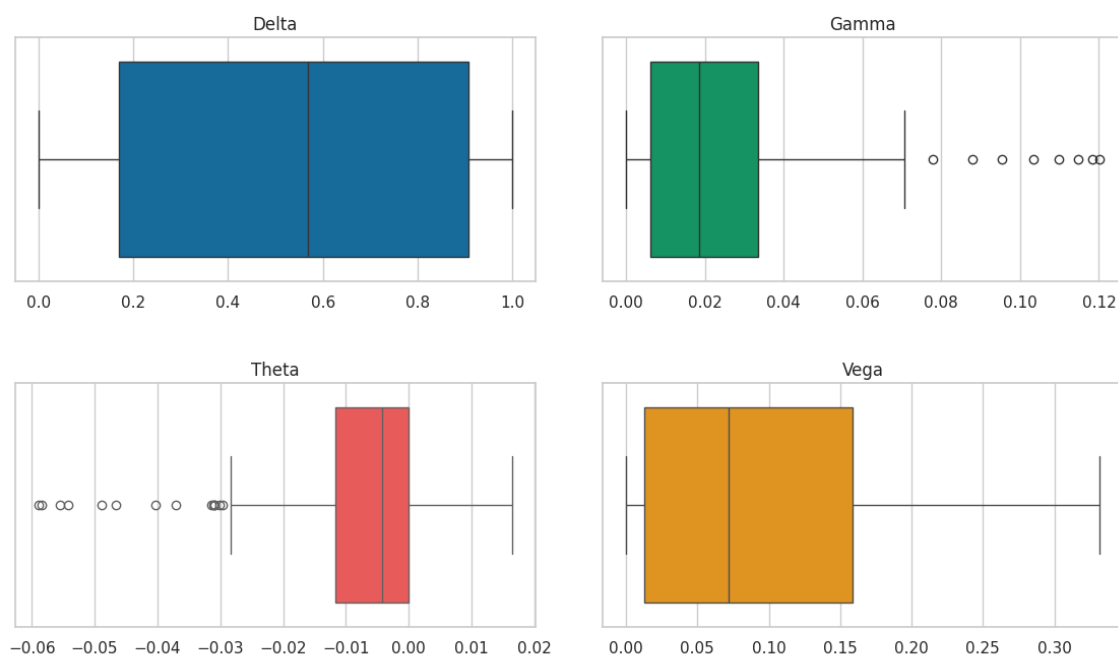
Font: Dades fictícies  
Elaboració pròpia

En segon lloc, també la correlació que observàvem en la gràfica n°18 on gamma i theta es comporten de manera inversa, fet que comprovem amb aquesta correlació negativa del -0,91. Com ja hem exposat, ATM gamma és màxim, per tant, al tenir correlació inversa amb theta, el pas del temps quan el subjacent està ATM és menor, doncs el valor que es perd per theta es

compensa per l'increment de gamma, això explica aquesta alta correlació inversa entre les dues sensibilitats. A part del que hem esmentat, les altres correlacions són insignificants i no presenten valors elevats com per prestar-los atenció.

Fins aquí hem observat com evolucionen les diferents sensibilitats<sup>36</sup>, o gregues, de manera independent, en funció del pas del temps, de l'evolució del preu del subjacent o de la volatilitat aplicant *ceteris paribus* als altres paràmetres. Però aquestes condicions són poc realistes, doncs en un dia de cotització el temps passa, el subjacent fluctua i la volatilitat també. Per tant, les sensibilitats han de treballar de forma conjunta per anar readaptant el preu de l'opció. És a dir, a mercat, la fluctuació del preu d'una opció es deu a la combinació de tots, o pràcticament tots, els *inputs*. A continuació, podem visualitzar les dades que tenim, les mateixes que s'han usat per generar la gràfica nº18, però des d'una altra perspectiva i de manera agregada, sense discriminar per temporalitats. Seguidament, tenim una representació de la dispersió dels valors de les sensibilitats en un *box plot*.

Boxplot de les sensibilitats



Gràfica nº 20

Font: Dades fictícies  
Elaboració pròpia

En primer lloc, destaca la gran dispersió i la quantitat de valors atípics que tenen les variables gamma i theta. Aquest fet s'explica pel fort increment, en valor absolut, d'aquestes variables ATM quan el temps a venciment és baix, tal com s'ha observat en la gràfica nº18. Delta té una dispersió menor pel simple fet que els seus valors estan compresos entre 0 i 1, en aquest cas. Finalment, vega mostra, també certa dispersió, però lliure de valors atípics. Ara bé, si en la mostra, els dies a venciment fossin majors, la dispersió augmentaria, ja que la vega creixeria ràpidament, en aquest cas el temps a venciment màxim és de 252 dies.

Així doncs, comprovem com l'efecte o influència que pot tenir cada sensibilitat en l'explicació de la variació del preu de la prima depèn de múltiples factors com ara la volatilitat, el temps a venciment, la proximitat o *moneyness*, del preu del subjacent al *strike*, etc. A més, cal notar que l'escala és diferent, és a dir, algunes variables influeixen molt més que d'altres, ja que no és el mateix l'efecte de delta degut a la variació del preu del subjacent, que l'efecte que tindrà vega a

causa de la variació de la volatilitat en la prima. Per exemplificar aquest fet, seguirem amb les dades d'exemples anteriors on el *strike* és 100, el preu del subjacent a l'obertura de la sessió és 105, falta mig any a venciment i tenim un 25% de volatilitat; la *call* estarà valorada en 11,4774 i delta serà de 0,6684. Així doncs, si assumim que en el mateix dia el subjacent incrementa un punt, és a dir  $S=106$ , la *call* valdrà 12,1458.

Finalment, com comentàvem, la fluctuació de la prima de les opcions es veu afectada per tots els *inputs* i resulta impossible crear un model o equació que determini l'efecte conjunt de la variació del subjacent, a l'hora del pas del temps i la volatilitat, doncs tenen un efecte recíproc entre si. No tindria cap sentit crear un model com per exemple el següent:

$$prima = \beta_0 + \beta_1 \cdot \delta + \beta_2 \cdot \gamma + \beta_3 \cdot \theta + \beta_4 \cdot v + \epsilon \quad (48)$$

Primer, perquè la prima no està composta per delta, gamma, theta i vega, sinó que aquestes gregues expliquen com fluctua la prima, és a dir, com afecten els *inputs*. Segon, perquè quan el subjacent, per exemple, varii un punt, la prima es veu afectada per delta, fet que obliga a recalculer totes les altres derivades. Ja que recordem, totes les sensibilitats són la derivada de  $x$  respecte a la prima, per tant, si la prima varia s'hauria de recalculer la derivada a l'hora que es modifica la prima, fet matemàticament impossible d'implementar. Per aquest motiu, la fórmula de Black-Scholes és la més acceptada entre el concens d'analistes i no existeixen fórmules que millorin notablement la precisió del model. A més, recordem que Black-Scholes assumeix que els rendiments de mercat es distribueixen segons una normal, fet que des de l'inici del treball hem exposat que no és així. En l'actualitat, i des de ja fa uns anys, els *dealers* o *market makers* apliquen tècniques més avançades i precises com ara *machine learning* o *AI*. Aquests models es basen en xarxes neuronals<sup>37</sup>, lògica difusa, *deep learning*<sup>38</sup>, entre d'altres i fins i tot, es crea un mixt entre diferents tècniques de *machine learning*.

A causa de la gran complexitat tècnica d'aquestes metodologies de tractament de dades com ara el *deep learning*, en aquest treball no entrarem en la valoració d'opcions via aquestes metodologies, però deixem la porta oberta a realitzar futurs treballs acadèmics que donin continuïtat a aquest treball i aprofundeixin en aquestes tecnologies d'avantguarda. No obstant això, per si els lectors volen conèixer més a fons com es fa la valoració d'opcions avui en dia, trobaran un apartat de futures línies de recerca on s'esbossa la metodologia i les limitacions que ja hem anat veient amb el càlcul convencional via la fórmula (28) de Black-Scholes.

## Conclusions

En primer lloc, responent a les preguntes plantejades inicialment i, tal com hem vist al llarg del treball, l'obtenció de la volatilitat i la valoració d'opcions no són una ciència exacte, és a dir, depenent de la metodologia i les assumpcions que fem, obtenim uns resultats o uns altres. Aquest fet explica perquè dos analistes que segueixen el mateix actiu tenen unes expectatives diferents, doncs un estarà aplicant una metodologia i l'altre una de diferent, condicionant la seva percepció del risc de mercat. Com hem observat en les gràfiques n°8 i n°9, la volatilitat històrica varia lleugerament, en funció de la metodologia de càlcul, efectant les expectatives futures de l'analista. Tot i tractar-se d'un treball quantitatiu, resulta cabdal la interpretació humana i per això es realitzen els cons de volatilitat, gràfica n°4, els quals permeten una comprensió clara de la volatilitat històrica en el període d'estudi.

Un altre punt a destacar, és la importància del *skew* de volatilitat i l'estructura temporal, dues gràfiques que tot analista té sempre a la vista, ja que faciliten una gran quantitat d'informació de manera ràpida i visual. En aquest cas, tant el *skew* com l'estructura temporal seran els mateixos per a tothom, doncs aquests valors de volatilitat implícita els estableix el propi mercat. Així mateix, per obtenir la volatilitat implícita de mercat podem aproximar el càlcul des de Black-Scholes mitjançant el *script* que s'ha desenvolupat, tot i que té certes limitacions com ja hem comprovat. Així mateix, la relació i interpretació entre la volatilitat històrica i implícita ens permetrà contextualitzar la volatilitat actual de mercat dins de la situació històrica per tal de prendre decisions.

Passant a la valoració d'opcions, hem comprovat que l'aproximació realitzada per Black-Scholes resulta la més encertada, tot i les grans limitacions d'aquest model, com ara els rendiments de mercat que no es distribueixen segons una normal, gràfica n°2. Aquest fet, implica que quan calculem la funció de densitat normal acumulada no recollim les característiques de la distribució dels rendiments, com el risc de cues pesades i certa asimetria. De tota manera, aquest model ens permet fer aproximacions teòriques a la valoració d'opcions i comprendre la variació del preu o valor de la prima, en funció de diferents *inputs* que condicionen la formació de preus.

Desenvolupant la valoració d'opcions, ens hem adonat que la prima pot estar formada per valor temporal i valor intrínsec, on la suma d'ambdós recull el valor de la prima, gràfica n°16. On l'obtenció del valor intrínsec resulta inequívoc, però l'estimació del valor temporal presenta majors dificultats. Com s'ha demostrat, el valor temporal recull la possibilitat de que l'opció expiri amb valor, per tant, aquesta variable, conformada per múltiples subvariables, recull la incertesa futura fins a l'expiració del contracte. Així mateix, la variació del valor temporal estarà condicionada, principalment, pel pas del temps i la volatilitat de mercat.

Finalment, per donar resposta i comprendre com efecte cadascun dels *inputs* principals en la variació del preu de la prima s'ha realitzat una exploració de sensibilitats. On s'ha simulat la variació de la prima en funció de la variació del subjacent, el pas del temps i la volatilitat. Ara bé, a causa de la complexitat tècnica i la incapacitat de realitzar l'aproximació de la variació de la prima mitjançant tècniques convencionals, no s'ha pogut donar resposta a com treballen les diferents sensibilitats de manera conjunta. Per afrontar aquest punt, caldria portar a terme una profunda recerca i desenvolupar algun model que abordi el problema via *machine learning* o *AI*. Ja que gràcies a la no-linealitat d'aquestes metodologies i a la naturalesa del problema a resoldre, amb el coneixement i tecnologia actual, només podem realitzar l'aproximació per alguna d'aquestes vies, aplicant la tecnologia més puntera.

## Futures línies de recerca

Com anticipàvem abans de les conclusions, a dia d'avui el *pricing* d'opcions es realitza amb tècniques més avançades que eviten l'assumpció esbiaixada i errònia de Black-Scholes dels rendiments normals, tal com s'ha exposat des de l'inici del treball. Pròximes línies d'investigació haurien d'anar encarades a recopilar dades de forma massiva de mercat, englobant preu d'exercici, preu de la prima de les opcions, volatilitat implícita, cotització del subjacent, temps a venciment i taxa d'interès lliure de risc per a cada valor. Un cop recopilada tota la data de forma massiva es pot iniciar a plantejar algun model de *machine learning* per entrenar. Caldrà determinar molt bé quin resulta el model més adequat, optimitzar-lo i fer els respectius testos. Ara bé, el principal repte esdevindrà en evitar o intentar mitigar l'efecte de múltiples biaixos que afegeixen soroll<sup>39</sup>, com ara el biaix de supervivència<sup>40</sup> o el biaix de selecció de les dades<sup>41</sup>, entre d'altres. Poden consultar treballs ja realitzats en aquest camí com aquest<sup>42</sup> de Stanford, on usen la llibreria Keras per desenvolupar una xarxa neuronal o aquest<sup>43</sup> altre publicat a *International Journal of Financial Studies* on apliquen AI per a generar enginyeria inversa del preu de les opcions.

## Valoració

Des d'un inici existia una alta motivació i afany per comprendre millor la part quantitativa de la valoració de les opcions, un producte financer amb una història relativament curta. La idea inicial es tractava de veure les diferents metodologies de valoració que s'han proposat pels autors més rellevants però al veure la importància de la volatilitat com a variable clau, es va decidir incorporar un minuciós i detallat estudi de la volatilitat per comprendre aquest factor abans d'entrar en la modelització de la valoració d'opcions.

L'etapa inicial va consistir en fer una gran recerca de publicacions i articles per a comprendre com funcionen els models de valoració d'opcions, quines són les variables i de què es compon el valor de la prima. Posteriorment, tot desenvolupant el treball s'ha hagut d'afrontar infinitat de reptes com ara la complexitat dels articles consultats, els models proposats pels autors o dificultats tècniques a l'hora de fer el tractament de les dades en Python. Ara bé, totes aquestes dificultats han derivat en una profunda comprensió del tema alhora que desenvolupava l'habilitat de programar en aquest llenguatge. Mencionar també la dificultat d'obtenir dades de mercat reals, ja que la gran majoria de dades s'obtenen sota subscripció de pagament i estan pensades per empreses i institucions. Exemples d'aquest tipus de plataforma són Bloomberg<sup>44</sup> o Reuters, entre d'altres. Per sort, hem pogut fer servir Yahoo Finance que proporciona unes dades suficientment fiables de forma oberta.

Ha resultat un treball de gran aprenentatge pel mixt teoricopràctic mesclant no només coneixements adquirits al llarg del programa del grau, sinó també molta informació de publicacions de referència en la categoria de derivats financers i opcions.

## Autoavaluació

Des d'una perspectiva personal considero que el treball ha donat resposta a les preguntes plantejades en un inici i ha sobrepassat amb escreix les expectatives inicials. S'ha desenvolupat un sòlid i robust argument que condueix als usuaris i lectors per tal de comprendre amb un nivell de detall acurat la valoració d'opcions i l'estudi quantitatiu de la volatilitat. Tot aquest treball no hagués set possible si l'organització i planificació no hagués estat l'adequada. A més, l'ús de tecnologies avançades, la recerca extensiva i el tractament d'informació han estat cabdals per tal de plasmar el treball en aquest document.

## Referències bibliogràfiques

- [1] Parsons, J. i Mello, A. (2010) "Advanced Corporate Financial Risk Management" [Lecture Notes on Advanced Corporate Financial Risk Management] Massachusetts Institute of Technology  
[http://web.mit.edu/15.423/test/notes/pdf/Text\\_Ch\\_5\\_Measuring\\_Risk\\_Introduction.pdf](http://web.mit.edu/15.423/test/notes/pdf/Text_Ch_5_Measuring_Risk_Introduction.pdf)
- [2] Black, F. i Scholes, M. (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" The Journal of political Economy, 81 (3), 637-654
- [3] Derman, E., Kani, I., i Zou, J. (1995) "The Local Volatility Surface" [Quantitative Strategies Research Notes] Goldman Sachs  
[https://emanuelderman.com/wp-content/uploads/1996/06/gs-local\\_volatility\\_surface.pdf](https://emanuelderman.com/wp-content/uploads/1996/06/gs-local_volatility_surface.pdf)
- [4] Blanca, M., Arnau J., López-Montiel D., Bono R. i Bendayan R. (2013) "Skewness and Kurtosis in Real Data Samples" Methodology, 9 (2), 78-84
- [5] Doane, D. i Seward, L. (2011) "Measuring Skewness: A Forgotten Statistic?" Journal of Statistics Education, 19 (2)
- [6] DeCarlo, L. (1997) "On the Meaning and Use of Kurtosis" Psychological Methods, 2 (3), 292-307  
<http://www.columbia.edu/~ld208/psymeth97.pdf>
- [7] L. Emsbo-Mattingly, D. Hofschire i J. Weinstein (2020) "The Business Cycle Approach to Equity Sector Investing" [Research] Fidelity Investments  
[https://www.fidelity.com/webcontent/ap101883-markets\\_sectors-content/20.10.0/business\\_cycle/Business\\_Cycle\\_Sector\\_Approach\\_2020.pdf](https://www.fidelity.com/webcontent/ap101883-markets_sectors-content/20.10.0/business_cycle/Business_Cycle_Sector_Approach_2020.pdf)
- [8] Montréal Exchange (2004) "Trading Volatility Using Historical Volatility Cones"  
[https://www.m-x.ca/f\\_publications\\_en/cone\\_vol\\_en.pdf](https://www.m-x.ca/f_publications_en/cone_vol_en.pdf)
- [9] Parkinson, M. (1980) "The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return" The Journal of Business (Chicago, Ill), 53 (1), 61-65
- [10] Wang, H., Huang, W i Wang, S. (2021) "Forecasting open-high-low-close data contained in candlestick chart" arXiv.org  
<https://arxiv.org/abs/2104.00581>
- [11] Garman, M. i Klass, M. (1980) "On the Estimation of Security Price Volatility from Historical Data" The Journal of Business (Chicago, Ill), 53 (1), 67-78
- [12] Engle, R. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation" Econometrica, 50 (4), 987-1007
- [13] Bollerslev, T. (1986) "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity" Journal of Econometrics, 31 (3), 307-327
- [14] Longerstaey, J. i Spencer, M. (1996) "RiskMetrics - Technical Document" J.P. Morgan / Reuters  
<https://www.msci.com/documents/10199/5915b101-4206-4ba0-ae2-3449d5c7e95a>
- [15] Figueroa-Lopez, J. i Olafsson, S. (2016) "Short-term asymptotics for the implied volatility skew under a stochastic volatility model with Lévy jumps" Finance and Stochastics, 20 (4), 973-1020



- [16] Bennett, C. i Gil, M. (2012) "Volatility Trading" [Equity Derivatives] Santander Investment Securities  
[https://www.academia.edu/5758335/Equity\\_Derivatives\\_Europe\\_VOLATILITY\\_TRADING\\_Trading\\_Volatility\\_Correlation\\_Term\\_Structure\\_and\\_Skew](https://www.academia.edu/5758335/Equity_Derivatives_Europe_VOLATILITY_TRADING_Trading_Volatility_Correlation_Term_Structure_and_Skew)
- [17] Baumol, W., Malkiel, B. i Quandt, E. (1966) "The Valuation of Convertible Securities" The Quarterly Journal of Economics, 80 (1), 48-59
- [18] Chen, A. (1970) "A Model of Warrant Pricing in a Dynamic Market" The Journal of Finance, 25 (5), 1041-1059
- [19] Sprenkle, C. (1961) "Warrant Prices As Indicators of Expectations and Preferences" Yale Economic Essays, 1 (2), 179-231
- [20] Samuelson, P. (1965) "A Theory of Induced Innovation along Kennedy-Weisäcker Lines" The Review of Economics and Statistics, 47 (4), 343-356
- [21] Samuelson, P. i Merton, R. (1969) "A Complete Model of Warrant Pricing that Maximizes Utility" Industrial Management Review, 10 (2), 17-46
- [22] Merton, R. (1974) "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates" Journal of Finance, 29 (2), 449-470
- [23] Black, F. (1976) "The pricing of commodity contracts" Journal of Financial Economics, 3 (1-2), 167-179
- [24] Kuen, Y. (2006) "A survey on physical delivery versus cash settlement in futures contracts" International Review of Economics & Finance, 15 (1), 15-29
- [25] Ursone, P. (2015) "How to calculate options prices and their greeks: exploring the black scholes model from delta to vega" (1a edició). Wiley
- [26] Chen, J. (2024) "What Is a Tick in Securities Trading and How Does It Work?" Investopedia  
<https://www.investopedia.com/terms/t/tick.asp>
- [27] Carolin, E. (2016) "A Journey Through Time: From The Present Value To The Future Value And Back" American Journal of Business Education, 9 (3), 137-143
- [28] n/a (n/a) "The Newton-Raphson Method" University of British Columbia  
<https://personal.math.ubc.ca/~ansteemath104/104newtonmethod.pdf>
- [29] Polanitzer, R. (2023) "Implied Volatility in Python; Compute the Volatilities Implied by Option Prices Observed in the Market using the SciPy Library" Medium  
<https://medium.com/@polanitzer/implied-volatility-in-python-compute-the-volatilities-implied-by-option-prices-observed-in-the-e2085c184270>
- [30] Python Software Foundation. Python Language Reference, versió 3.12.3  
<https://www.python.org/>
- [31] Cuomo, S., Sica, F. i Toraldo, G. (2020) "Greeks computation in the option pricing problem by means of RBF-PU methods" Journal of Computational and Applied Mathematics, 376 (1), 112882
- [32] Mizrach, B. (2010) "Estimating Implied Probabilities from Option Prices and the Underlying" Lee, C., Lee, C. i Lee, J. "Handbook of Quantitative Finance and Risk Management" (515-529) Springer
- [33] A Biegler-König, R. (2020). "Hedging Strategies in Commodity Markets - Rolling Intrinsic and Delta Hedging for Virtual Power Plants" Applied Mathematical Finance, 27 (6), 550-582

- [34] Soebhag, A. (2023) "Option gamma and stock returns" *Journal of Empirical Finance*, 74, 101442
- [35] Xia, K., Yang, X. i Zhu, P. (2023) "Delta hedging and volatility-price elasticity: A two-step approach" *Journal of Banking & Finance*, 153, 106898
- [36] Chan, T. (2019) "Efficient computation of european option prices and their sensitivities with the complex fourier series method" *The North American Journal of Economics and Finance*, 50, 100984
- [37] Amilon, H. (2003) "A neural network versus Black-Scholes: a comparison of pricing and hedging performances" *Journal of Forecasting*, 22 (4), 317-335
- [38] Jang, J., Yoon, J., Kim, J., Gu, J. i Kim, H. (2021) "Deep Option: A novel option pricing framework based on deep learning with fused distilled data from multiple parametric methods" *Information Fusion*, 70, 43-59
- [39] Barber, B., Odean, T. i Zhu, N. (2009) "Systematic noise" *Journal of Financial Markets*, 12 (4), 547-569
- [40] Edwin, J., Martin, J. i Christopher, R. "Survivor Bias and Mutual Fund Performance" *The Review of Financial Studies*, 9 (4), 1097-1120
- [41] Heckman, J. (1979) "Sample Selection Bias as a Specification Error" *Econometrica*, 47 (1), 153-161
- [42] Ke, A. i Yang, A. (2019) "Option Pricing with Deep Learning" Stanford University  
[https://cs230.stanford.edu/projects\\_fall\\_2019/reports/26260984.pdf](https://cs230.stanford.edu/projects_fall_2019/reports/26260984.pdf)
- [43] Herzog, B. i Osamah, S. (2019) "Reverse engineering of option pricing: An AI application" *International Journal of Financial Studies*, 7 (4), 1-12
- [44] Bloomberg (2024) Bloomberg Terminal  
<https://www.bloomberg.com/professional/products/bloomberg-terminal/>