Sistemes d'equacions lineals

Discussió, resolució i interpretació geomètrica

PID_00269003

Ángel Alejandro Juan Pérez
Cristina Steegmann Pascual
Bernat Anton

Universitat Oberta de Catalunya

Ángel Alejandro Juan Pérez

Llicenciat en Matemàtiques per la Universitat de València, màster en Tecnologies de la Informació per la UOC i doctor en Enginyeria Industrial per la UNED. Ha cursat postgraus a les universitats de Harvard, Alacant i València. Ha estat professor i director acadèmic en una *high school* de Boston, professor associat a la Universitat d'Alacant i professor coordinador a la UOC. Des de l'any 2003, és professor associat d'Estadística aplicada a la Universitat Politècnica de Catalunya i professor d'Informàtica en CFGS.

Cristina Steegmann Pascual

Llicenciada en Matemàtiques per la Universitat Autònoma de Barcelona (1993). Actualment, treballa en la seva tesi doctoral en l'àmbit de l'*e-learning* dins del programa de doctorat sobre la Societat de la Informació i el Coneixement de la UOC. Des de 1993, és funcionària de carrera del cos de professors d'ensenyament secundari, en la especialitat de Matemàtiques, tasca que compagina amb la de professora consultora de la UOC. Així mateix, ha publicat diversos articles sobre ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques.

Bernat Anton

Llicenciat en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona (2007), màster de Matemàtica Avançada (2008) i de Bioinformàtica per a les Ciències de la Salut (2013). Ha estat professor associat de la Universitat de Barcelona, de la Universitat Pompeu Fabra i del Tecnocampus de Mataró, a més de personal de suport al Parc de Recerca Biomèdica de Barcelona. Actualment treballa com a professor de secundària per la Generalitat de Catalunya.

La revisió d'aquest recurs d'aprenentatge UOC ha estat coordinada per la professora: Cristina Cano Bastidas (2020)

Cinquena edició: febrer 2020

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Realització editorial: FUOC

Índex

Introducció

En aquest mòdul es revisen els conceptes bàsics associats als sistemes d'equacions lineals (SEL), la seva expressió matricial, la seva discussió (és a dir, l'estudi de si el SEL té o no solució) i els mètodes de resolució de Gauss i de Cramer. El mòdul també inclou una aproximació a la interpretació geomètrica dels SEL de tres incògnites (és a dir, en l'espai tridimensional).

Molts dels fenòmens econòmics, físics i tecnològics es poden modelar, de manera exacta o aproximada, mitjançant sistemes d'equacions lineals. Així, per exemple, els models de Leontief, o taules *input/ouput*, fan ús de SEL per a descriure les relacions existents entre l'oferta i la demanda dels diferents sectors que formen part d'una economia nacional. Altres de les múltiples aplicacions dels SEL tracten àmbits tan diversos com el balanceig d'equacions químiques, l'estudi del flux en xarxes o la programació lineal.

Objectius

L'objectiu general d'aquest mòdul és dotar els estudiants dels fonaments matemàtics associats a la discussió, resolució i interpretació dels sistemes d'equacions lineals (SEL).

En particular, els objectius docents que es pretenen aconseguir amb aquest mòdul són els següents:

1. Entendre els conceptes associats a un sistema d'equacions lineals i saber expressar un SEL en forma matricial.

2. Ser capaç de determinar el rang d'una matriu i aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius a la discussió de SEL.

3. Conèixer les peculiaritats dels SEL homogenis.

4. Aprendre a resoldre SEL mitjançant els mètodes de Gauss i de Cramer.

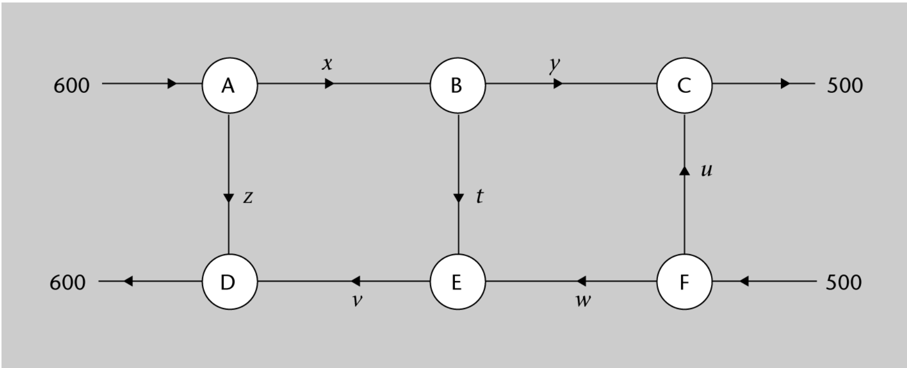
5. Saber interpretar els SEL des d'un punt de vista geomètric.

6. Descobrir com el programari matemàtic en general pot ser d'utilitat per a: (a) experimentar amb els conceptes principals d'aquest tema, i (b) automatitzar la discussió i resolució de SEL.

1. Exemple introductori

L'esquema següent mostra el flux de dades (en MB per hora) entre sis encaminadors o *routers* (A – F) que formen part d'una xarxa d'àrea estesa (WAN):

Figura 1



Es coneix el flux total de dades que entra en aquesta subxarxa, 1100 MB per hora (entrant pels encaminadors A i F), el qual coincidirà amb el flux total de dades que en surt (pels encaminadors C i D).

Se suposarà, a més, que el flux de dades que entra a cada encaminador serà igual al flux de dades que en surt.

En aquestes circumstàncies, es vol:

a) Calcular el flux de dades entre cada parell d'encaminadors directament enllaçats, és a dir, es vol trobar el valor de les incògnites x, y, z, t, u, v, w.

b) Sabent que $u = 300$ i que $v = 100$, calculeu el flux de dades entre cada parell d'encaminadors enllaçats.

Les preguntes d'aquest exemple es raonen i responen en el solucionari del final del mòdul.

2. Sistemes d'equacions lineals (SEL)

Un **sistema de *m* equacions lineals amb *n* incògnites (SEL)** és un conjunt de relacions de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

on:

- Els a_{ij} ($a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$) són els anomenats **coeficients** del sistema.
- Les x_j ($x_j \in \mathbb{R}$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$) són les anomenades **incògnites** del sistema.
- Els b_i ($b_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$) són els anomenats **termes independents** del sistema.

Amb freqüència, resultarà possible modelitzar problemes reals mitjançant sistemes d'equacions lineals. En aquests casos, els a_{ij} i els b_i seran valors coneguts, i l'objectiu que s'ha d'aconseguir serà descobrir els valors de les incògnites x_j que verifiquen totes les equacions del sistema de manera simultània. El conjunt d'aquests valors s'anomena **solució** del sistema, i el procés pel qual s'obté aquesta solució (quan aquesta existeixi) s'anomena **resolució** del sistema. A més, es diu que dos sistemes d'equacions són **sistemes equivalents** si tenen exactament les mateixes solucions. Encara que poden tenir un nombre diferent d'equacions, dos sistemes equivalents tindran sempre el mateix nombre d'incògnites.

Exemple 1. Diferents sistemes d'equacions amb la seva solució

a) El sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 2000 \\ y + z = 1500 \\ x + y + \frac{3}{4}z = 1800 \end{cases}$$

té per solució $\{x = 500, y = 700, z = 800\}$.

OBS

En un SEL de 3 incògnites, normalment s'utilitzen les lletres *x*, *y* i *z* per a denotar les incògnites.

b) El sistema de tres equacions lineals (SEL) amb tres incògnites:

$$\begin{cases} x + y + z = 2000 \\ y + z = 1500 \\ 4x + 4y + 3z = 7200 \end{cases}$$

té la mateixa solució que l'anterior, atès que són sistemes equivalents (les equacions de tots dos són equivalents).

c) El sistema (no linial) de dues equacions polinòmiques amb dues incògnites:

$$\begin{cases} y = 5(x-1) \\ y = x^3 - x^2 \end{cases}$$

té tres solucions, que són $(x,y) = (1,0)$, $(x,y) = \left(\sqrt{5}, 5\sqrt{5} - 5\right)$ i $(x,y) = \left(-\sqrt{5}, -5\sqrt{5} - 5\right)$.

OBS

Els exemples ***c*** i ***d*** no són SEL, perquè hi intervenen equacions no lineals.

d) El sistema de dues equacions exponencials (no lineals) i dues incògnites:

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 1 \\ 2^x - 2^{y+2} = 0 \end{cases}$$

té per solució: $\{x = 1, y = -1\}$.

e) El sistema de dues equacions lineals (SEL):

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

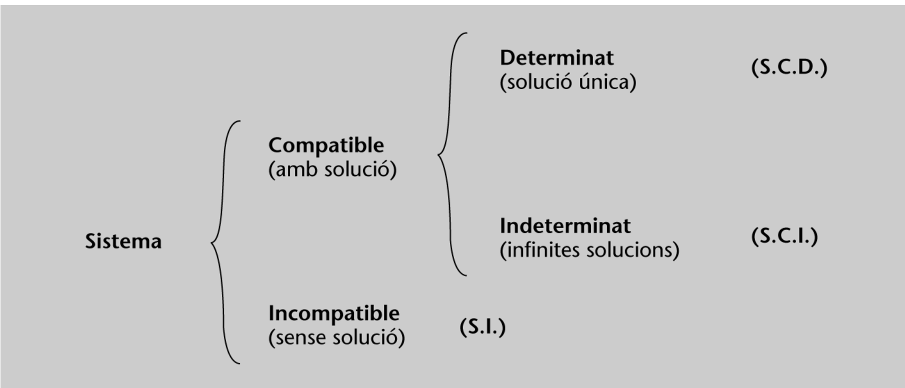
és incompatible, és a dir, no té solució, perquè dos nombres no poden sumar alhora 1 i 2.

Els sistemes d'equacions (de qualsevol tipus, linials o no linials) poden tenir solució –en aquest cas es parla de **sistema compatible**–, o no tenir-la –en aquest cas es parla de **sistema incompatible**. A més, en el cas de sistemes d'equacions lineals, si el sistema és compatible, la solució pot ser única –en aquest cas es parla de **sistemes compatibles determinats**–, o al contrari, pot ser que el sistema tingui infinites solucions –en aquest cas es parla de **sistemes compatibles indeterminats** (figura 2).

És important observar...

... que si un SEL té més d'una solució, llavors necessàriament tindrà infinites solucions. Aquest fet es comprendrà millor després de llegir l'apartat "Interpretació geomètrica dels SEL".

Figura 2. Classificació de sistemes d'equacions lineals (SEL)



3. Expressió matricial d'un SEL

Emprant les propietats del producte de matrius, és possible expressar el sistema d'equacions lineals (1) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

o, equivalentment:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \tag{3}$$

on $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ és la **matriu de coeficients**, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ és el vector d'incògnites i $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ és el vector de termes independents.

Com es veurà més endavant, una altra matriu important és la **matriu de coeficients ampliada**:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A} \,|\, \mathbf{B}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Exemple 2. Notació matricial d'un SEL

La representació matricial del següent sistema de tres equacions i quatre incògnites:

$$\begin{cases} x - 3y + 6z - 8t = 5 \\ y + z = 15 \\ x + y - 3z + t = 8 \end{cases}$$

és:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

OBS

Si desenvolupeu aquest producte de matrius, veureu que les dues expressions són equivalents.

La matriu de coeficients del sistema és:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriu de coeficients ampliada és:

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

4. Discussió de SEL

Abans de procedir a buscar les solucions d'un sistema d'equacions, pot resultar convenient estudiar el sistema per a saber si aquest serà o no compatible. Aquest procés de determinar el tipus de sistema al qual ens enfrontem s'anomena **discussió del sistema**. En sistemes d'equacions lineals, el següent teorema, el qual fa ús de la notació introduïda en els apartats anteriors, resulta ser una eina de gran ajuda:

Teorema de Rouché-Fröbenius. Donat un sistema de m equacions lineals i n incògnites, es compleix el següent:

- Si $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{M}) = n$ llavors es té un SCD.
- Si $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{M}) = r < n$ llavors es té un SCI. En aquesta situació es diu que el sistema té $n - r$ **graus de llibertat**.
- Si $\text{rg}(\mathbf{A}) < \text{rg}(\mathbf{M})$ llavors es té un SI.

Observeu que, en el context en què estem, sempre tindrem la desigualtat $\text{rg}(\mathbf{A}) \leq \text{rg}(\mathbf{M}) \leq n$, per la qual cosa en el teorema es consideren tots els casos possibles.

Vegeu la definició *de rang d'una matriu i* com calcular-lo en l'apartat 4 del mòdul "Elements d'àlgebra i geometria lineal".

Exemple 3. Discussió de sistemes mitjançant Rouché-Fröbenius

Estudiem la compatibilitat del següent SEL:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + y = 0 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$$

En primer lloc, es determina la matriu de coeficients del sistema i la matriu ampliada:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Atès que $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, es té que $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$, ja que a partir de $\mathbf{A}$ no es poden formar menors de major ordre.

A **M**, tanmateix, sí que és possible trobar un menor d'ordre 3, el qual, a més, és no nul:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (6+0-3)-(2+4+0) = -3 \neq 0$$

Per tant, rg(**M**) = 3.

En conclusió: rg(**A**) = 2 < rg(**M**) = 3, per tant, segons el teorema de Rouché-Fröbenius, estem davant un sistema incompatible (SI).

Exemple 4. Discussió de sistemes mitjançant Rouché-Fröbenius

Volem discutir la compatibilitat del següent SEL:

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+z=4 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$$

Les matrius associades són:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Observeu que rg(**A**) = 2, ja que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ i $|\mathbf{A}| = 0$.

Així mateix, rg(**M**) = 2, ja que l'última fila és la suma de les dues primeres (i, per tant, qualsevol menor d'ordre 3 serà nul).

En conclusió: rg(**A**) = rg(**M**) = 2 < n = 3, per la qual cosa el sistema és compatible indeterminat (SCI) i té un grau de llibertat.

En aquest cas, a més, és fàcil determinar totes les solucions del sistema, ja que l'última equació és la suma de les dues primeres. Suprimint aquesta equació, queda el sistema de dues equacions i tres incògnites següent:

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+z=4 \end{cases} \quad \textit{i. e.:} \quad \begin{cases} x+z=4 \\ 2x+y=4 \end{cases}$$

La solució del sistema s'obté expressant totes les variables en funció d'una d'elles. Per exemple, si aïllem les variables x i y en funció de z, s'obté:

$$\begin{cases} x=4-z \\ y=-4+2z \\ z=z \end{cases} \text{o, parametritzant } z\text{:} \begin{cases} x=4-t \\ y=-4+2t,\ t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

Exemple 5. Discussió de sistemes amb paràmetres

Estudiem el següent SEL en funció dels valors que prengui el paràmetre k ($k \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ky + kz = 2 \\ kx + ky + z = 1 \end{cases}$$

Les matrius associades són:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & k \\ k & k & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & k & 2 \\ k & k & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Atès que és un sistema de 3 equacions amb 3 incògnites, el rang de totes dues matrius serà menor o igual a 3. Perquè aquest sistema sigui compatible determinat, s'ha de complir que el determinant de la matriu de coeficients sigui diferent de zero. Vegem per a quins valors del paràmetre k el determinant de $\mathbf{A}$ és zero:

$$|\mathbf{A}| = (k + k^2 + 0) - (k^2 + k^2 + 0) = k - k^2 = k(1 - k)$$

Així, $|\mathbf{A}| = 0 \Leftrightarrow k = 0$ ó $k = 1$. D'aquest resultat podem concloure que: per a tots els valors del paràmetre k diferents de 0 i de 1 es compleix que $|\mathbf{A}| \neq 0$ i, per tant, $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{rg}(\mathbf{M}) = n = 3$. Dit d'una altra manera, el sistema serà compatible determinat per a tots els valors reals del paràmetre k diferents de 0 i 1.

Ara classifiquem el sistema per als casos $k = 0$ i $k = 1$:

Cas $k = 0$

Les matrius són

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ja sabem que $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) < 3$ perquè $|\mathbf{A}| = 0$. D'altra banda, $\mathrm{rg}(\mathbf{M}) = 3$, ja que és possible trobar un menor no nul d'ordre 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 2) = -2 \neq 0$$

Atès que $\mathrm{rg}(\mathbf{M}) = 3 > \mathrm{rg}(\mathbf{A})$, concloem que per a $k = 0$ el sistema és incompatible.

Cas $k = 1$

En aquest cas tenim

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad \mathbf{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ja sabem que $\text{rg}(\mathbf{A}) < 3$ perquè $|\mathbf{A}| = 0$. Si trobem un menor no nul de $\mathbf{A}$ d'ordre 2 podrem dir que $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$. Triem el menor que resulta de seleccionar les dues primeres files i les dues primeres columnes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

Per tant, concloem que $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$. Necessitem calcular el rang de la matriu ampliada. Ja sabem que $2 = \text{rg}(\mathbf{A}) \leq \text{rg}(\mathbf{M})$, per això passarem directament a calcular els menors d'ordre 3 de la matriu ampliada orlant el menor no nul amb la columna dels termes independents. Obtenim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Així doncs, $\text{rg}(\mathbf{M}) = 2 = \text{rg}(\mathbf{A})$. Ara podem concloure que per a $k = 1$ el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat ($n - \text{rg}(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$).

En resum:

- Si $k \neq 0, 1$ és un SCD.
- Si $k = 0$ és un SI.
- Si $k = 1$ és un SCI.

5. Sistemes lineals homogenis

Es diu que un SEL és **homogeni** si tots els seus termes independents són zero, és a dir, el SEL és de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Matricialment s'expressa així:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}, \tag{5}$$

on **A** és la matriu de coeficients, **X** el vector d'incògnites i $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Observació: en tot SEL homogeni la matriu ampliada, **M**, es forma afegint una columna de zeros a la matriu de coeficients, **A**, per la qual cosa sempre es tindrà que rg(**A**) = rg(**M**). Per tant, segons Rouché-Fröbenius, es pot afirmar que **els SEL homogenis sempre són compatibles**. En concret, els SEL homogenis sempre accepten, com a mínim, l'anomenada **solució trivial**: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Per a saber si un SEL homogeni té només una única solució (la trivial) o en té infinites, serà necessari esbrinar si rg(**A**) = n. En cas afirmatiu, es tractarà d'un SCD –l'única solució del qual serà la trivial. En cas negatiu, hi haurà infinites solucions –entre les quals la trivial.

Exemple 6. Discussió d'un SEL homogeni

Es vol discutir el SEL homogeni: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$

Observeu que:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad |\mathbf{A}| = (-1 - 1 + 2) - (1 + 2 + 1) = -4 \neq 0$$

Per tant, $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 3 = n$, *i. e.*: l'única solució del SEL és la trivial.

Es demostra que totes les solucions d'un sistema homogeni $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0}$ amb n incògnites formen un subespai vectorial de $\mathbb{R}^n$.

6. Resolució de SEL per Gauss

El **mètode de Gauss** consisteix a anar aplicant operacions especials sobre les files i columnes de la matriu de coeficients ampliada, **M**, de manera que aquesta es transformi en una nova matriu, **E**, amb les següents característiques:

1. Les matrius **E** i **M** representen sistemes d'equacions equivalents.

2. La matriu **E** està esglaonada inferiorment, és a dir, és de la forma:

$$\mathbf{E} = \left(\begin{array}{cccccc|c} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1m} & \dots & e_{1n} & d_1 \\ 0 & e_{22} & \dots & e_{2m} & \dots & e_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e_{mm} & \dots & e_{mn} & d_m \end{array}\right) \quad (6)$$

En altres paraules, $e_{ij} = 0, \forall i > j$.

Les operacions especials que es poden emprar per a aconseguir matrius equivalents són, bàsicament, les següents:

- Transposar dues files.
- Transposar dues columnes (en aquest cas s'ha de tenir present que també s'altera l'ordre de les variables en el SEL).
- Multiplicar una fila per un escalar no nul.
- Sumar a una fila una altra de multiplicada per un escalar (per extensió, sumar a una fila una combinació lineal de les altres).
- Eliminar una fila de zeros.

Una vegada obtinguda la matriu **E**, es considerarà el nou SEL associat (s'haurà de fer especial atenció a possibles canvis en l'ordre de les variables deguts a transposicions de columnes). A partir de l'última equació no trivial, es tractarà d'aïllar una de les incògnites en funció de les restants. A continuació, es prendrà l'equació immediatament superior, se substituirà la incògnita ja aïllada pel seu valor, i s'aïllarà una altra de les incògnites en funció de les restants. Aquest procés seguirà en ordre ascendent (cada vegada prenent l'equació immediatament superior a l'última tractada) fins a arribar a la primera de les equacions.

Exemple 7. Resolució de sistemes mitjançant Gauss

Es vol resoldre per Gauss el SEL següent:

$$\begin{cases} x + 3y - 2t = -1 \\ 2x + 6y + z + t = -12 \\ 3x - y + z - t = 7 \\ 2x + y + z + t = -2 \end{cases}$$

Es parteix de la matriu de coeficients ampliada, la qual s'anirà transformant fins a convertir-la en una esglaonada inferior:

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & -12 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \\ 0 & -10 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)}$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)}$$

$$\xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{(6)}$$

$$\xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(7)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 \end{array}\right)$$

S'expliquen a continuació els detalls, per a la qual cosa s'emprarà la notació:

F_i = fila *i*-èsima $\qquad\qquad$ C_j = columna *j*-èsima

1) Es pren com a "element pivot" el $m_{11} = 1 \neq 0$. Es redueixen a 0 els elements de la C1 que es troben sota el pivot, la qual cosa s'aconsegueix fent:

- F2 = F2 – 2 · F1
- F3 = F3 – 3 · F1
- F4 = F4 – 2 · F1

2) Com que $m_{22} = 0$, es transposen les files F2 i F4.

3) Es canvia el signe de la fila F2 multiplicant-la per (–1).

4) Es pren com a nou pivot l'element $m_{22} = 5 \neq 0$. Es redueixen a zero els elements situats per sota d'aquest, per a la qual cosa es fa:

- F3 = F3 + 2 · F2

5) Es canvia el signe de la F3 multiplicant-la per (–1).

6) Es pren com a nou pivot l'element $m_{33} = 1 \neq 0$. Es redueixen a zero els elements que estan per sota d'aquest de la següent manera:

- F4 = F4 – F3

7) S'elimina F4, és a dir, l'última equació.

La matriu resultant té una fila menys que el nombre d'incògnites. Això significa que es tindrà un grau de llibertat, és a dir: la λ podrà prendre qualsevol valor.

Substituint cap enrere en les altres equacions s'obté la solució general del sistema, la qual depèn d'un paràmetre arbitrari λ. La solució general és la següent:

$$\begin{aligned} x &= 2\lambda + 5 \\ y &= -2 \\ z &= -10 - 5\lambda \\ t &= \lambda \end{aligned}$$

El mètode de Gauss també proporciona el rang d'una matriu (nombre de files linealment independents), ja que aquest coincidirà amb el nombre de files no nul·les de la matriu esglaonada inferior **E**. A l'exemple anterior rg(**M**) = 3, ja que la matriu esglaonada resultant té rang 3.

Exemple 8. Resolució de sistemes mitjançant Gauss

Es vol resoldre per Gauss el sistema següent, expressat en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3/4 \end{pmatrix}$$

La matriu ampliada del sistema és: $\mathbf{M} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & -\frac{3}{4} \end{array}\right)$

Transformem la matriu **M** en una matriu triangular mitjançant transformacions per files. Recordem que el mètode de Gauss consisteix, bàsicament, a transformar el sistema donat en un altre d'equivalent en el qual la matriu de coeficients sigui triangular superior.

A continuació s'indiquen les transformacions realitzades sobre **M**:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & -\frac{3}{4} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & -\frac{3}{4} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -\frac{3}{4} \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -\frac{3}{4} \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A partir de l’última matriu, podem deduir el següent:

a) L’última fila és tota de zeros i, per tant, la podem eliminar.

b) De la segona fila, tenim que $z+t=\frac{1}{4}$, és a dir: $z=\frac{1}{4}-t$

c) Finalment, de la primera equació tenim $x+2y+\left(\frac{1}{4}-t\right)+2t=0$, d’on:

$$x=-t-2y-\frac{1}{4}$$

En conclusió: el sistema és compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat (hi ha dos paràmetres en la solució). La solució és:

$$\begin{cases} x=-t-2y-\frac{1}{4} \\ y=y \\ z=\frac{1}{4}-t \\ t=t \end{cases}$$

7. Sistemes de Cramer. Resolució de SEL per Cramer

El **mètode de Cramer** utilitza determinants per a resoldre SEL la matriu de coeficients dels quals, **A**, sigui quadrada i tingui inversa (és a dir, el sistema haurà de tenir el mateix nombre d'incògnites que d'equacions i, a més, el determinant de **A** haurà de ser no nul).

Quan la matriu de coeficients, **A**, és quadrada i el seu determinant és no nul, el sistema associat, anomenat **sistema de Cramer**, verifica que:

a) És compatible determinat.

b) La solució s'obté amb les expressions següents:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, n \qquad x_i = \frac{\det(\mathbf{C}_1,\ldots,\mathbf{C}_{i-1},\mathbf{B},\mathbf{C}_{i+1},\ldots,\mathbf{C}_n)}{\det(\mathbf{A})} \tag{7}$$

A l'expressió anterior, det(**A**) representa el determinant de la matriu de coeficients i det($\mathbf{C}_1$, ..., $\mathbf{C}_{i\text{-}1}$, **B**, $\mathbf{C}_{i+1}$, ..., $\mathbf{C}_n$ representa el determinant de la matriu que resulta de substituir la columna *i*-èsima de **A**, $\mathbf{C}_i$, per la columna de termes independents, **B**.

Exemple 9. Resolució de SEL per Cramer

Es vol resoldre el SEL següent (observeu que el nombre d'incògnites és igual que el nombre d'equacions):

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 10 \\ 4x + 3y + 4z = 21 \\ 2x + y + 2z = 9 \end{cases}$$

Per a saber si es pot aplicar Cramer, falta comprovar que el determinant de la matriu de coeficients és no nul:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 8 + 8 - 12 - 12 - 8 = 2 \neq 0$$

Aplicant la regla de Cramer s'obtindran les solucions del SCD:

Termes independents del sistema

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 21 \\ 9 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} \end{vmatrix}}{2} = \frac{60+36+42-54-40-42}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 21 \\ 9 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} \end{vmatrix}}{2} = \frac{126+80+72-84-108-80}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 10 \\ 21 \\ 9 \end{matrix}} \end{vmatrix}}{2} = \frac{81+42+40-60-63-36}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

D'aquesta manera, la solució del sistema és:

$$x = 1 \qquad y = 3 \qquad z = 2$$

Observació:
Si el sistema és compatible indeterminat de rang *r* menor que el nombre d'incògnites *n* (té $n - r$ graus de llibertat), fixem un menor d'ordre *r* no nul. Les equacions corresponents a les files no afectades pel menor poden ser eliminades. Les incògnites corresponents a les columnes no afectades pel menor d'ordre *r* no nul fixat es consideren com a paràmetres. Llavors, per a valors qualssevol d'aquests paràmetres el sistema és de Cramer i té una única solució.

Exemple 10

Donat el SEL

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ x-y+z&=2 \\ x+y-z&=3 \\ 3x+y+z&=6 \end{aligned}\right\} \text{ la matriu ampliada té determinant } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

i, per tant, el seu rang és menor que 4 i alguna de les seves equacions és combinació lineal de les altres. D'altra banda, el menor d'ordre 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

i, per tant, el rang de la matriu associada i el de l'ampliada és 3. En aquest cas el sistema és compatible determinat.

Podem prescindir de l'última equació (que és combinació lineal de la resta) i, per tant, queda un sistema de Cramer

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=3 \end{array}\right\}$$ que ara podem resoldre per Cramer,

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4}=\frac{5}{2},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{4}=\frac{-1}{2},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{4}=-1$$

Exemple 11

Per a resoldre el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z+t=1 \\ x-y+z+t=2 \\ x+y-z+t=3 \end{array}\right\}, \text{ com que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4$$

tenim que el rang de la matriu associada és 3 i, per tant, el de la matriu ampliada també és 3. Però tenim 4 incògnites, així el sistema és compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat. Podem considerar la incògnita t com un paràmetre (correspon a la columna no afectada del menor d'ordre 3 no nul) i queda un sistema de Cramer per a cada valor de t

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1-t \\ x-y+z=2-t \\ x+y-z=3-t \end{array}\right\}$$

Es pot resoldre per Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 1 & 2-t \\ 1 & 1 & -1 & 3-t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-t \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$ i obtenim

$$x=\frac{5-2t}{2},\quad y=\frac{-1}{2},\quad z=-1,\quad t=t$$

També es pot resoldre per Cramer,

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 2-t & -1 & 1 \\ 3-t & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4}=\frac{5-2t}{2},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 1 & 3-t & -1 \end{vmatrix}}{4}=\frac{-1}{2},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2-t \\ 1 & 1 & 3-t \end{vmatrix}}{4}=-1,\quad t=t$$

8. Interpretació geomètrica dels SEL

Abans de centrar-nos en l'espai tridimensional (SEL amb tres incògnites), convé revisar breument el que ocorre en el pla (SEL amb dues incògnites): en un sistema de m equacions lineals amb 2 incògnites (x i y), cada equació representa una recta en el pla, per la qual cosa:

- Si el sistema és compatible determinat, existeix un únic valor (x_0, y_0) que és solución del sistema, *i. e.*: (x_0, y_0) pertany, simultàniament, a les m rectes; en altres paraules, les m rectes es tallen en aquest punt.

- Si el sistema és compatible indeterminat, totes les rectes tenen infinits punts en comú, per la qual cosa han de ser coincidents (es tracta de la mateixa recta expressada de diferents formes).

- Si el sistema és incompatible, s'esdevindrà que no hi ha cap punt en comú. Si $m = 2$ es tractarà de dues rectes paral·leles no coincidents.

A l'espai, un pla π és determinat per una equació lineal de tres incògnites (x, y, z). És a dir, és de la forma:

$$\pi : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d \tag{8}$$

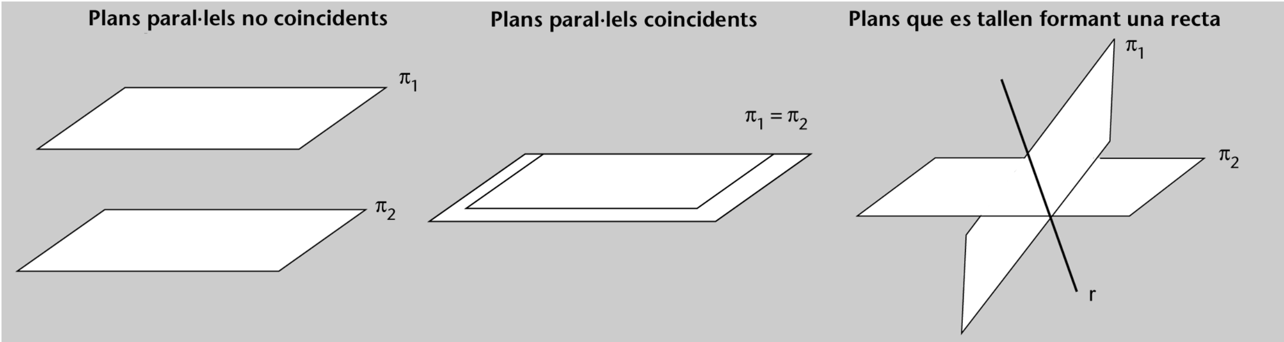
Això significa que quan es té un SEL format per m equacions amb 3 incògnites, aquest es pot interpretar com un conjunt de m plans a l'espai. En aquestes condicions, el teorema de Rouché-Fröbenius és una eina clau per a estudiar la posició relativa dels plans (és a dir, si aquests es tallen en algun punt o recta, si són paral·lels, etc.).

Si el SEL és compatible determinat, hi haurà una única solució, (x_0, y_0, z_0), que verifiqui –de manera simultània– les m equacions. En altres paraules, (x_0, y_0, z_0) és l'únic punt de l'espai que verifica les equacions dels m plans i, per tant, l'únic punt d'intersecció dels m plans.

Exemple 12. Intersecció de dos plans

Observeu que si $m = 2$ (és a dir, només tenim dos plans), no pot passar que aquests es tallin en un únic punt. Com s'observa a la figura 3, o bé seran paral·lels no coincidents (amb la qual cosa no es tallaran), o bé seran paral·lels coincidents (és a dir, tindran infinits punts en comú atès que són el mateix pla), o bé es tallaran en els infinits punts que constitueixen una recta r.

Figura 3. Possibles posicions relatives de dos plans a l'espai



Exemple 13. Intersecció de tres plans en un punt

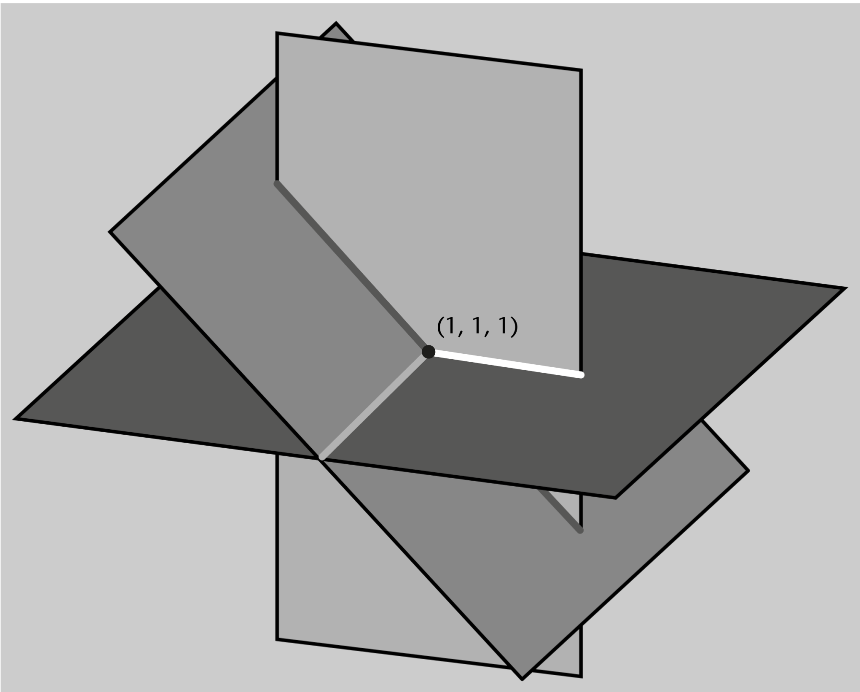
Considerem aquest sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x + y &= 2 \\ y + z &= 2 \\ x + z &= 2 \end{cases}$$

És fàcil veure que el sistema és compatible determinat, ja que $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{M}) = 3$. L'únic punt solució del sistema és $(1,1,1)$.

La figura següent mostra que aquest punt es pot veure com la intersecció dels tres plans definits per les tres equacions lineals del sistema.

Figura 4. Intersecció de tres plans en un punt



Exemple 14. Intersecció de dos plans en una recta

Considerem aquest sistema d'equacions lineals:

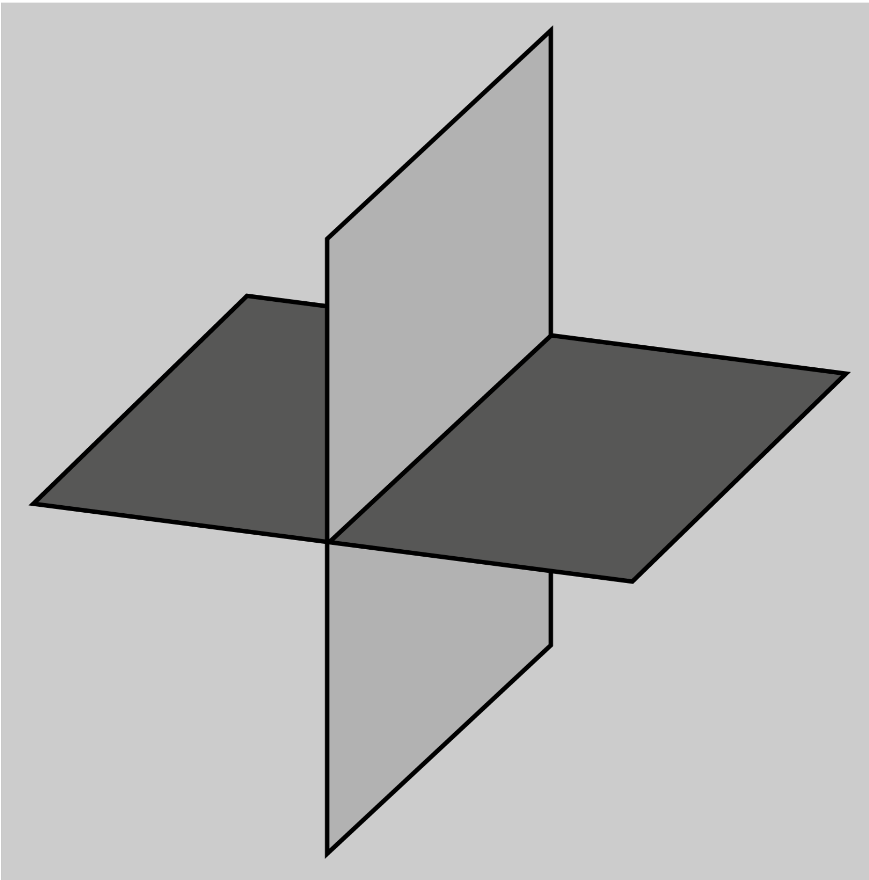
$$\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ 2x + y - z &= 3 \end{cases}$$

En aquest cas només tenim dues equacions linealment independents, però hi ha tres incògnites. Es compleix $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{rg}(\mathbf{M}) = 2 < 3$, per tant, tenim un sistema compatible indeterminat.

La figura següent mostra el pla solució de cadascuna de les dues equacions i que la intersecció de totes dues (és a dir, la solució de les dues equacions simultàniament) és una recta.

La solució parametritzada d'aquest sistema és $(1, z+1, z)$.

Figura 5. Intersecció de dos plans en una recta



Exemple 15. Intersecció de tres plans en una recta

Considerem aquest sistema d'equacions lineals:

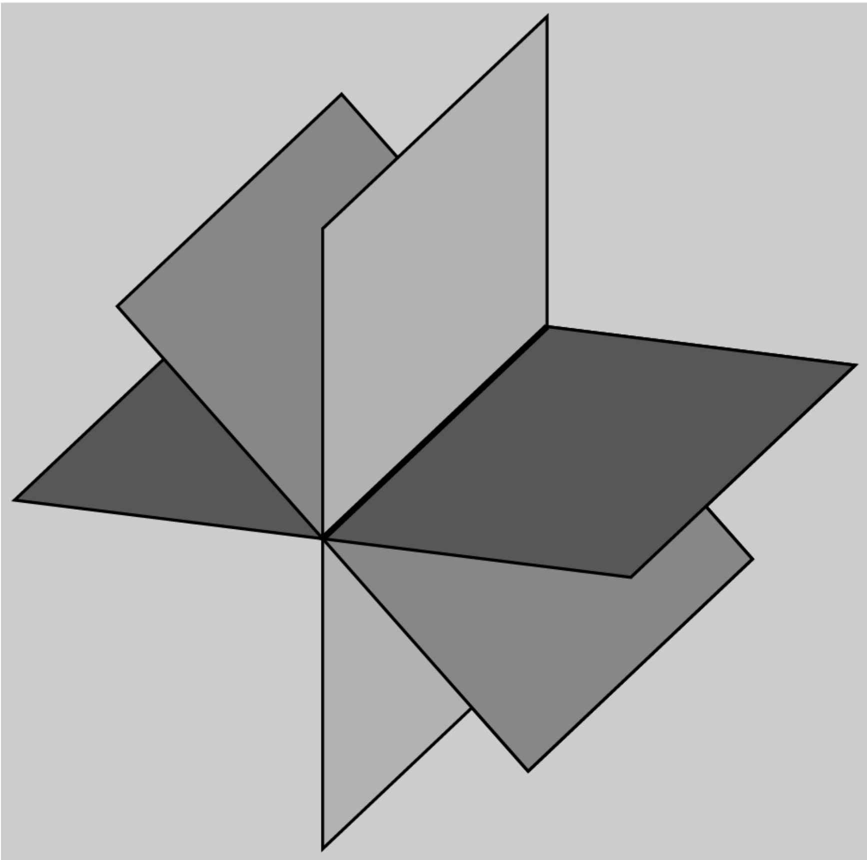
$$\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ 2x + y - z &= 3 \\ 3x = 3 \end{cases}$$

Fixem-nos que les dues primeres equacions són les mateixes que les de l'exemple anterior, mentre que la tercera és la suma de la primera i la segona equació. Per tant, resulta obvi que torna a complir-se $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{rg}(\mathbf{M}) = 2 < 3$; per tant, tenim de nou un sistema compatible indeterminat.

La figura següent mostra la mateixa intersecció de plans de l'exemple anterior, que representa les dues primeres equacions, i un tercer pla que s'interseca també en la mateixa recta.

La solució parametritzada d'aquest sistema encara és $(1, z+1, z)$.

Figura 6. Intersecció de tres plans en una recta



Exemple 16. Dos plans paral·lels i no coincidents

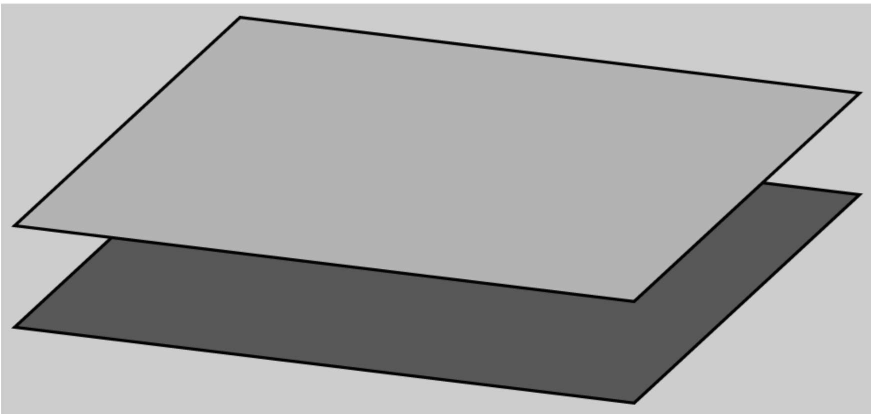
Considerem aquest sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x - y + z & = & 0 \\ x - y + z & = & 1 \end{cases}$$

Aquest sistema és incompatible, ja que no pot ser que simultàniament $x - y + z$ valgui 0 i 1 alhora. Efectivament, en fer el càlcul veiem $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 1$ i $\mathrm{rg}(\mathbf{M}) = 2$.

Geomètricament, la manca de solució del sistema vol dir que els dos plans que representen les dues equacions lineals no es tallen. En altres paraules, els dos plans són paral·lels, com es mostra a la figura següent.

Figura 7. Dos plans paral·lels



Exemple 17. Tres plans que no s’intersequen

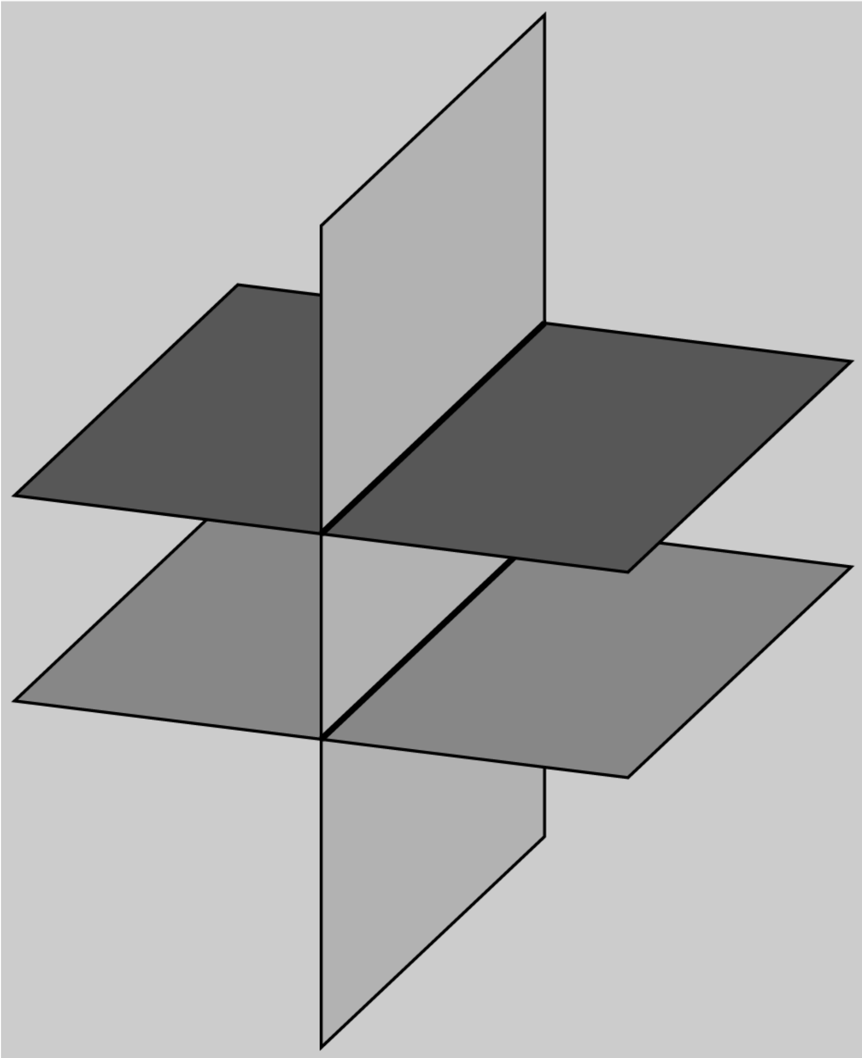
Considerem aquest sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x - y + z & = & 0 \\ 2x + y - z & = & 3 \\ 2x + y - z & = & 0 \end{cases}$$

Les dues primeres equacions, igual que la primera i la tercera, formen sistemes compatibles indeterminats, representats per dos plans que es tallen en una recta. Tot i així, els plans que representen la segona i la tercera equació són paral·lels, de manera que el sistema que formen aquestes dues equacions és incompatible. Així doncs, si no hi ha solució que satisfaci alhora la segona i la tercera equació, afegir-hi la primera equació no canviaria aquesta situació, amb la qual cosa el sistema serà incompatible.

Efectivament, si calculem el rang, tenim que $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 2 < \mathrm{rg}(\mathbf{M}) = 3$. A la figura es pot veure la representació explicada anteriorment.

Figura 8. Tres plans sense cap punt en comú

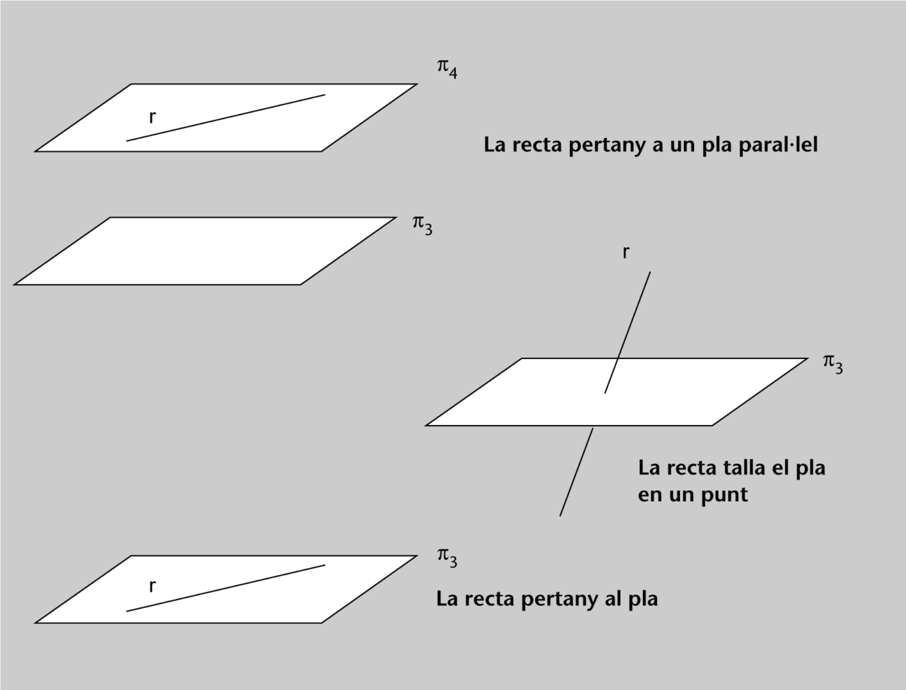


En alguns dels exemples anteriors s'ha pogut comprovar com la intersecció de dos plans no coincidents, π_1 i π_2, dóna lloc a una recta *r*. Per aquest motiu, és freqüent veure expressada l'equació d'una recta com un sistema compatible indeterminat format per 2 equacions amb 3 incògnites, *i. e.*:

$$r : \begin{cases} \pi_1 : & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ \pi_2 : & a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad (9)$$

D'aquesta manera, és possible estudiar la posició relativa entre una recta *r* (donada per les equacions de π_1 i π_2) i un pla π_3 a partir de la discussió del corresponent sistema de 3 equacions i 3 incògnites. Quan el sistema resultant sigui incompatible (recta i pla no tenen cap punt en comú), la recta *r* estarà situada en un pla π_4 paral·lel (no coincident) a π_3 (figura 9). Quan el sistema resultant sigui compatible determinat (recta i pla tenen un únic punt en comú), *r* tallarà π_3 en un únic punt. Finalment, quan el sistema resultant sigui compatible indeterminat (recta i pla tenen infinits punts en comú), *r* estarà inclosa en π_3.

Figura 9. Possibles posicions relatives de recta i pla a l'espai



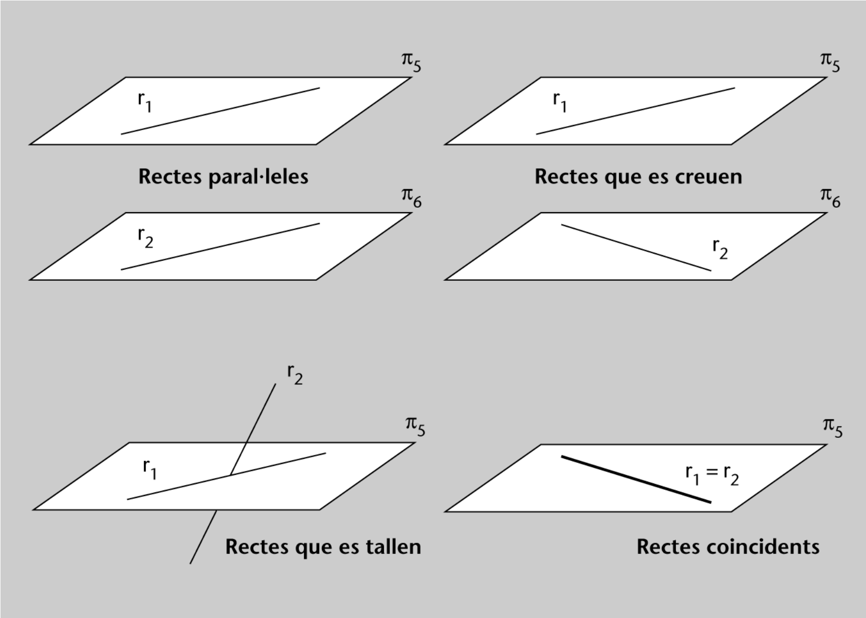
Anàlogament, també és possible estudiar la posició relativa entre dues rectes, r_1 i r_2, a l'espai: cada una de les rectes serà definida per la intersecció de dos plans, és a dir, cada recta serà determinada per un sistema compatible indeterminat de 2 equacions amb 3 incògnites, per la qual cosa el sistema resultant serà un sistema compost per 4 equacions i 3 incògnites:

$$r_1:\begin{cases}\pi_1: & a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ \pi_2: & a_2x+b_2y+c_2z=d_2\end{cases} \tag{10}$$

$$r_2:\begin{cases}\pi_3: & a_3x+b_3y+c_3z=d_3\\ \pi_4: & a_4x+b_4y+c_4z=d_4\end{cases}$$

Quan el sistema anterior sigui incompatible (ambdues rectes no tenen cap punt en comú), r_1 i r_2 seran paral·leles (no coincidents) o es creuaran (en tots dos casos pertanyen a sengles plans, π_5 i π_6, paral·lels entre si) (figura 10). Quan el sistema resultant sigui compatible determinat (les rectes tenen un únic punt en comú), r_1 tallarà r_2 en un únic punt. Finalment, quan el sistema resultant sigui compatible indeterminat (totes dues rectes tenen infinits punts en comú), r_1 i r_2 seran la mateixa recta (rectes paral·leles i coincidents).

Figura 10. Possibles posicions relatives de dues rectes a l’espai



Resum

En aquest mòdul s'han presentat les principals idees i resultats associats als sistemes d'equacions lineals. Els conceptes clau del mòdul són els següents:

- Sistema d'equacions lineals (SEL), coeficients, incògnites i termes independents. Sistemes equivalents.
- Sistemes compatibles (determinats i indeterminats) i sistemes incompatibles.
- Expressió matricial d'un SEL, matriu de coeficients i matriu de coeficients ampliada.
- Discussió de sistemes. Teorema de Rouché-Fröbenius.
- SEL homogenis. Solució trivial.
- Mètode de resolució de Gauss.
- Sistema de Cramer. Mètode de resolució de Cramer.
- Interpretació geomètrica de SEL amb 2 i 3 incògnites (paral·lelisme de rectes i plans, intersecció de rectes i plans, etc.).

El mòdul s'ha completat amb exemples i activitats resoltes (amb l'ajuda de programari i sense) en les quals també s'han introduït algunes aplicacions de la teoria exposada a diferents àmbits temàtics.

Exercicis d'autoavaluació

Amb l'ajuda de programari i sense

1. Calculeu el rang de la següent matriu en funció dels valors del paràmetre s:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} s+3 & 1 & 2 & -s \\ s & s-1 & 1 & 2s \\ 3s+3 & s & s+3 & 3 \end{pmatrix}$$

Per a $s = 0$ doneu les solucions del sistema:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Discutiu el següent sistema d'equacions segons el valor del paràmetre $k \in$ R:

$$\begin{cases} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k \end{cases}$$

3. Trobeu els valors de a i b perquè el sistema homogeni següent admeti solucions diferents de la trivial:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 5y - 8z = 0 \\ ax + by + 3z = 0 \\ ax + y + bz = 0 \end{cases}$$

4. Una empresa fabrica 3 tipus de productes: A, B i C. La següent taula reflecteix les unitats venudes de cada producte en els 3 últims anys i els beneficis totals (en euros) de cada any per la venda dels 3 productes:

Observació

Se suposa que el benefici per unitat venuda de cada producte no varia en els 3 anys tinguts en compte.

Any	Unitats venudes de A	Unitats venudes de B	Unitats venudes de C	Beneficis totals
1	100	500	200	39700
2	300	400	300	45600
3	200	800	500	73300

Plantegeu un sistema d'equacions i resoleu-lo pel mètode de Gauss per trobar quin benefici obté l'empresa per cada unitat venuda de A, B i C respectivament.

5. Discutiu el següent sistema en funció dels paràmetres a i b:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = b \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$$

Resoleu-lo en aquells casos en els quals sigui compatible.

6. Determineu per a quins valors del paràmetre a és compatible el sistema següent i trobeu les solucions quan n'hi hagi:

$$\begin{cases} x-2y+az=1-a \\ x+4y+a^2z=6 \\ x-8y+a^2z=-6 \end{cases}$$

7. Determineu la posició relativa dels dos plans següents:

Amb l'ajuda de programari i sense

$$\pi_1:\ 2x+3y-z+8=0 \qquad \pi_2:\ -4x-6y+2z-16=0$$

8. Determineu el valor del paràmetre m perquè la recta r sigui paral·lela al pla π:

Amb l'ajuda de programari i sense

$$r:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-3}{2} \qquad \pi:\ 4x+my+z-2=0$$

9. Determineu el valor de a perquè les rectes r i r' es tallin:

Amb l'ajuda de programari i sense

$$r:\ \frac{x-2}{5}=\frac{y}{6}=\frac{z+1}{2} \qquad r':\ \frac{x-a}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{3}$$

10. Estudieu i resoleu el sistema d'equacions lineal següent:

Amb l'ajuda de programari i sense

$$\begin{cases} x-2y = 3 \\ 2x-4y+2z-4t = 4 \\ -3x+6y+z-2t=-10 \end{cases}$$

11.

a) Discutiu el següent sistema segons el valor del paràmetre k:

$$\begin{cases} x+y+kz=1 \\ x+2y+8z=k \\ x+y+7z=1 \\ 2x+y+kz=2 \end{cases}$$

b) En el cas (o en els casos) en què sigui compatible, determineu-ne la solució mitjançant el mètode de Gauss.

c) Considereu les rectes de $\mathbb{R}^3$:

$$r\begin{cases} x+y+kz=1 \\ x+2y+8z=k \end{cases} \qquad s\begin{cases} x+y+7z=1 \\ 2x+y+kz=2 \end{cases}$$

Utilitzeu l'apartat **a** per determinar per a quins valors del paràmetre k les rectes r i s es tallen.

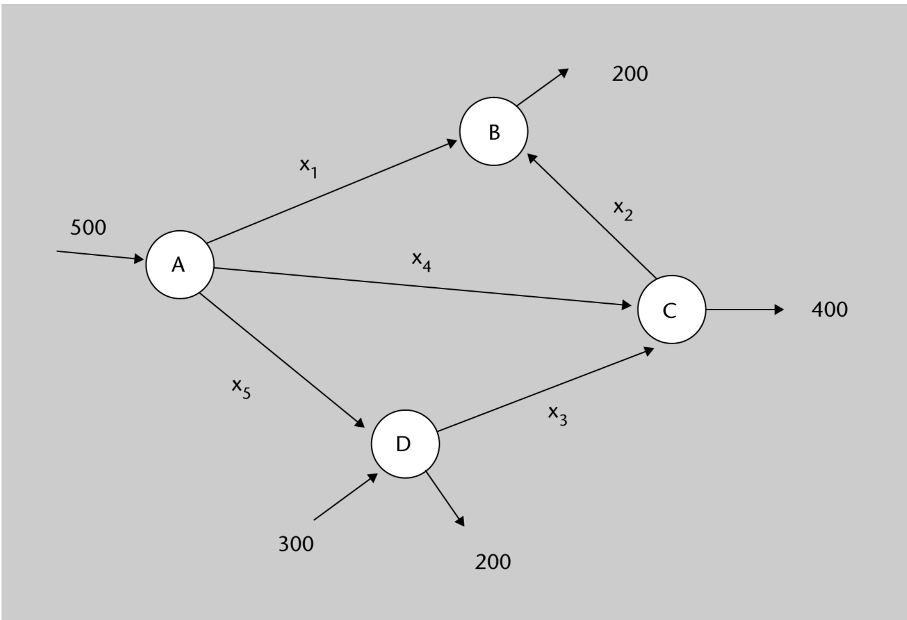
12. Discutiu el sistema següent segons els valors dels paràmetres a i b, i resoleu-lo –utilitzant el mètode de Cramer– en els casos de compatibilitat:

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Què en podeu dir, de la posició relativa dels tres plans, segons els valors dels paràmetres?

13. L'esquema de la figura 11 representa una xarxa de repetidors en la qual les dades es transmeten segons la direcció i sentit marcats. Després d'analitzar un històric de dades, s'ha aconseguit obtenir informació sobre la quantitat mitjana, en MB per hora, de dades que es reben o s'envien des de cada node:

Figura 11



Suposant una condició d'equilibri en el flux de dades que travessa cada node (és a dir, que el flux total de dades que entra en cada node coincideix amb el flux total de dades que surt de cada node), es demana plantejar, discutir i resoldre (si això és possible) el corresponent sistema d'equacions.

Amb l'ajuda de programari

14. En nombroses branques de la Ciència, la distribució de recursos és un problema important: tant pel que fa a fer inventari dels recursos disponibles com a decidir com distribuir-los de manera òptima. Els recursos, a la vegada, poden ser tant materials como humans (per exemple, l'entrenador d'un equip de futbol ha de plantejar-se en quina posició alinear els seus jugadors de manera que el rendiment de l'equip sigui òptim). En aquest tipus de problemes, el càlcul matricial en facilita la resolució.

Suposem que un enginyer informàtic supervisa l'assemblatge de 4 tipus de xarxes per a informatitzar una empresa. La taula següent proporciona les quantitats necessàries de cada recurs per a completar cadascun dels serveis que es desitja informatitzar:

Recursos				
Tipus servei	**Impressores**	**Scanners**	**Ordinadors**	**Llapis de memòria**
A	1	2	2	0
B	10	1	1	1
C	0	4	1	0
D	10	0	1	1

Si es disposa de 152 impressores, 550 scanners, 4 llapis de memòria i 309 ordinadors, quants serveis de cada tipus es podran abastar?

Nota

Plantegeu un sistema d'equacions i resoleu-lo mitjançant el mètode de Gauss.

15. Un estudiant pren fotografies amb una càmera digital. Se sap que cada fotografia de qualitat normal ocupa sempre 0.2 MB de memòria i que cada fotografia de qualitat òptima ocupa sempre una quantitat a de MB, que no recorda. Aquesta setmana ha portat a revelar 24 fotografies que li han ocupat un total de 9.2 MB de memòria.

Es demana:

a) Planteja un sistema d'equacions (en funció d'a) en què les incògnites siguin el nombre de fotos de cada classe que ha pres l'estudiant, estudieu-ne la compatibilitat i resoleu-lo –mitjançant el mètode de Cramer– en el cas que hi hagi compatibilitat.

b) Hi ha alguna quantitat de MB que sigui impossible que ocupi cada foto de qualitat òptima?

c) Trobeu la quantitat de MB que ha d'ocupar una fotografia de qualitat òptima per tal que el nombre de fotos d'ambdues qualitats sigui el mateix.

16. L'administrador d'una LAN té per objectiu maximitzar, sota unes determinades condicions restrictives, la quantitat d'espai de disc dur que els seus servidors ofereixen als usuaris de la xarxa. Per a això, pot adquirir dos tipus de discos durs SCSI, cada un dels quals té uns requeriments quant a preu, quantitat de treball (en hores setmanals) per al seu manteniment, i electricitat necessària per al seu funcionament durant les 24 h del dia, tots els dies de l'any. La capacitat de cada disc dur de tipus A és de 300 GB, mentre que un disc dur de tipus B pot emmagatzemar fins a 200 GB.

Pel que fa al preu, cada disc de tipus A costa 200 euros, mentre que cada disc de tipus B costa 100 euros. El nostre pressupost no pot superar els 1500 euros.

Pel que fa a les hores de dedicació setmanal de l'administrador, cada disc de tipus A requereix 1 hora, mentre que cada disc de tipus B requereix 2 hores. El nombre d'hores que l'administrador té disponibles per a aquesta tasca no pot excedir de 27.

Finalment, pel que fa a l'energia elèctrica necessària, cada disc de tipus A consumeix 15 unitats diàries, mentre que cada disc de tipus B en consumeix només 3. La quantitat total d'unitats diàries consumides no pot excedir de 100.

Quants discos de cada tipus s'han de comprar per a aconseguir l'objectiu? (plantegeu el problema emprant equacions i inequacions lineals).

Resoleu-lo amb l'ajuda d'algun programari matemàtic.

17. Es consideren les matrius **B** i **C** següents:

$$B(a) := \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 12a-15 & -12a+3 & 15 & 12a-3 & 0 & -9 \\ 2a-13 & 2a-5 & 2a+9 & -1 & 4a+3 & 0 & -13 \\ 30 & 12a-18 & -12a+18 & 18 & 12a-18 & 0 & 6 \\ 2a-16 & -4a+16 & 8a & -16 & -2a+12 & 0 & -4 \\ 22a-5 & -14a+11 & 16a-3 & 6a-5 & -16a+3 & 6a+12 & -5 \\ 0 & -6a+6 & 6a-6 & 0 & -6a+6 & 0 & 12 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculeu el determinant de la matriu **B**.
b) Per a quins valors del paràmetre a la matriu **B** no té rang màxim?
c) Determineu, en funció del valor del paràmetre a, el rang de **B**.
d) Discutiu, segons els valors del paràmetre a, el sistema **BX** = **C**, essent **X** el vector columna que té per elements les variables $x_1, x_2, \ldots, x_7$.

18. Considereu els plans següents:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x + 3y + z &= 3 \\ kx + 10y + 4z &= 11 \end{aligned}$$

a) Determineu el valor del paràmetre k per tal que la seva intersecció sigui una recta. Per a aquest valor de k, resoleu el SEL resultant mitjançant el mètode de Gauss (comproveu amb la Wiris els resultats que heu obtingut).

b) Determineu el valor del paràmetre k per tal que la seva intersecció sigui un punt. Per a $k = 10$, determineu les coordenades del punt mitjançant el mètode de Cramer (comproveu amb la Wiris els resultats que heu obtingut).

19. Donat el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 3x + ky + kz = 0 \\ x - y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

a) Discutiu-lo per als diferents valors del paràmetre k.

b) Per al valor $k = 1$, resoleu el sistema pel mètode de Gauss.

20. Donat el sistema d'equacions següent (tres plans a $\mathbb{R}^3$):

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y + z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) Proveu de resoldre'l fent ús del mètode de Cramer.

b) Què podeu dir de la posició relativa dels tres plans? (intersequen en una recta, intersequen en un punt, són paral·lels...).

Solucionari

Solució de l’exemple introductori inicial

1.

a) Imposant la condició que el flux entrant en cada encaminador o node de la xarxa ha de ser igual al flux sortint, ens queda el següent SEL:

$$\begin{cases} 600 = x + z \\ x = y + t \\ y + u = 500 \\ z + v = 600 \\ t + w = v \\ 500 = w + u \end{cases} \quad \text{o, equivalentment,} \quad \begin{cases} x + z = 600 \\ x - y - t = 0 \\ y + u = 500 \\ v + z = 600 \\ t - v + w = 0 \\ u + w = 500 \end{cases}$$

Estudiant els rangs, arribem a la conclusió que es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb dos graus de llibertat. Té, per tant, infinites solucions. Utilitzant qualsevol programari matemàtic podeu trobar que aquestes solucions tenen aquesta forma $(x, y, z, t, u, v, w) =$ $(600 - z, y, z, 600 - y - z, 500 - y, 600 - z, y)$.

b) Ara, el nou sistema serà:

$$\begin{cases} x + z = 600 \\ x - y - t = 0 \\ y = 200 \\ z = 500 \\ t + w = 100 \\ w = 200 \end{cases}$$

Es pot comprovar que el sistema és compatible determinat estudiant-ne el rang. La solució del sistema serà $(x, y, z, t, w) =$ (100,200,500,–100,200).

Observeu que, segons la solució obtinguda, $t = -100$. Això significa que, en realitat, el flux de dades no va des de l’encaminador B a l’E (com apareixia en l’esquema), sinó a la inversa.

Exercicis d’autoavaluació

1. Per a calcular el rang de la matriu **A**, primer calculem el valor del determinant generat a partir de les tres primeres columnes:

$$\begin{vmatrix} s+3 & 1 & 2 \\ s & s-1 & 1 \\ 3s+3 & s & s+3 \end{vmatrix} =$$

$$= (s + 3)^2(s - 1) + (3s + 3) + 2s^2 - 6(s + 1)(s - 1) - 2s^2 - 6s =$$

$$= (s - 1)[(s + 3)^2 - 3 - 6(s + 1)] = (s - 1)s^2$$

Per tant, si el paràmetre s és diferent de 0 o d'1, el determinant serà diferent de zero i, en conseqüència, el rang de la matriu serà 3. Per als valors $s = 0$, 1 hi pot haver altres menors d'ordre 3 no nuls, estudiem-ho (per a això podem utilitzar Gauss):

Si $s = 0$, llavors:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) a la tercera fila li hem restat la primera.
(2) a la tercera fila li hem restat la segona.

Per tant, el rang és 3.

Si $s = 1$, llavors:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \end{pmatrix} \sim^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) hem permutat la primera i la segona fila.
(2) a la segona fila li hem restat 4 vegades la primera i a la tercera, 6 vegades la primera.
(3) a la tercera fila li hem restat la segona.

Així que el rang és 2.

En conclusió:

Si $s = 1$, el rang és 2
Si $s \neq 1$, el rang és 3

Prenent $s = 0$, resolem ara el sistema: $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Com que per a $s = 0$ el rang de **A** és 3, ja sabem que el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Per a calcular les solucions, apliquem el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

(1) a la tercera fila li hem restat la primera.
(2) a la tercera fila li hem restat la segona.

Deduïm de la tercera fila que $t = 0$ i de les dues primeres que:

$$y = z - 1, \quad x = 1 - z, \text{ essent } z = z.$$

2. En primer lloc determinem la matriu del sistema i la matriu ampliada:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{array}\right)$$

Estudiem un sistema de 3 equacions amb 3 incògnites, per això el rang de la matriu del sistema és menor o igual que 3. Perquè aquest sistema sigui compatible determinat, s'ha de complir que el determinant de la matriu del sistema sigui diferent de zero.

Vegem per a quins valors del paràmetre k el determinant és zero. El determinant de **A** és:

$$|\mathbf{A}| = (k^3 + 1 + 1) - (k + k + k) = k^3 - 3k + 2 = (k - 1)^2(k + 2)$$

Així, $|\mathbf{A}| = 0 \Leftrightarrow k = 1$ o $k = -2$. Llavors podem concloure que per a tots els valors del paràmetre k diferents d'1 i de -2 es compleix que $|\mathbf{A}| \neq 0$ i, per tant, $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{rg}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = n = 3$. És a dir, el sistema serà compatible determinat per a tots els valors reals del paràmetre k diferents de $k = -2$ i $k = 1$.

Ara classifiquem el sistema per als casos $k = -2$ i $k = 1$.

Cas $k = -2$

Les matrius són:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Ja sabem que en aquest cas $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) < 3$ perquè $|\mathbf{A}| = 0$. Vegem si $\mathrm{rg}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 3$. Per a això triem menors d'ordre 3 per a veure si cap és diferent de zero.

En efecte, el menor format per les tres últimes columnes és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-2 - 8 - 2) - (-2 + 4 + 4) = -18 \neq 0.$$

És per això que $\mathrm{rg}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 3 > \mathrm{rg}(\mathbf{A})$ i concloem que per a $k = -2$ el sistema és incompatible.

Cas $k = 1$

En aquest cas tenim:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El rang d'aquestes matrius no és zero perquè tenen elements (menors d'ordre 1) diferents de zero. A més, com que en ambdues matrius les tres files són iguals, obtenim que rg(**A**) = rg(**A**|**B**) = 1. Ara podem concloure que per a $k = 1$ el sistema és compatible indeterminat amb 2 graus de llibertat (n – rg(**A**) = 3 – 1 = 2).

3. La matriu del sistema és:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ a & b & 3 \\ a & 1 & b \end{pmatrix}$$

El sistema és homogeni, per això sempre admet la solució trivial. Com que busquem solucions diferents de la trivial, necessitem determinar els valors de a i b tals que rg(**A**) < 3. En altres paraules, necessitem determinar els valors de a i b tals que tots els menors d'ordre 3 siguin zero. Com que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rang 2 està garantit. Orlant aquest menor i igualant a zero, obtenim el sistema següent:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ a & b & 3 \end{vmatrix} = (15 - 6b - 16a) - (-15a + 12 - 8b) = -a + 2b + 3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ a & 1 & b \end{vmatrix} = (5b - 6 - 16a) - (-15a + 4b - 8) = -a + b + 2 = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} -a + 2b = -3 \\ -a + b = -2 \end{array}\right\}$$

La solució del sistema és: $b = -1$, $a = 1$.

Així doncs, concloem que les solucions no trivials del SEL inicial s'obtenen per als valors $b = -1$ i $a = 1$.

4. Anomenem:

x = benefici que obté l'empresa per cada unitat venuda de A.
y = benefici que obté l'empresa per cada unitat venuda de B.
z = benefici que obté l'empresa per cada unitat venuda de C.

Utilitzant aquesta nomenclatura, el que ens demana l'exercici és trobar els valors de x, y, z. Per a això, plantegem el sistema:

$$\begin{cases} 100x + 500y + 200z = 39700 \\ 300x + 400y + 300z = 45600 \\ 200x + 800y + 500z = 73300 \end{cases}$$

I el resolem pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 500 & 200 & 39700 \\ 300 & 400 & 300 & 45600 \\ 200 & 800 & 500 & 73300 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{1a. fila/100} \\ \text{2a. fila/100} \\ \text{3a. fila/100}}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 397 \\ 3 & 4 & 3 & 456 \\ 2 & 8 & 5 & 733 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{2a. fila - 3} \cdot \text{1a. fila} \\ \text{3a. fila - 2} \cdot \text{1a. fila}}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 397 \\ 0 & -11 & -3 & -735 \\ 0 & -2 & 1 & -61 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{11} \cdot \text{fila 3.a - 2} \cdot \text{fila 2.a}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 397 \\ 0 & -11 & -3 & -735 \\ 0 & 0 & 17 & 799 \end{array}\right)$$

Resolem el sistema que ens ha quedat:

$$\left.\begin{array}{r} x+5y+2z=397 \\ -11y-3z=-735 \\ 17z=799 \end{array}\right\} \Rightarrow z=799/17=47$$

$$-11y-3\cdot 47=-735 \Rightarrow y=\frac{-735+3\cdot 47}{-11}=54$$

$$x+5\cdot 54+2\cdot 47=397 \Rightarrow x=397-5\cdot 54-2\cdot 47=33$$

Per tant, el benefici que l'empresa obté per cada unitat venuda és:

x = 33 euros per cada unitat venuda de A.
y = 54 euros per cada unitat venuda de B.
z = 47 euros per cada unitat venuda de C.

5. La matriu de coeficients i la matriu ampliada corresponents a aquest sistema són:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{+}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & b \\ 2 & -5 & a & -2 \end{pmatrix}$$

Estudiem el rang de **A**:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 13a-13=0 \Rightarrow a=1$$

a) Si $a \neq 1$ tenim: rg(**A**) = rg(**A**$^+$) = 3 = nre. d'incògnites $\Rightarrow$ el sistema és compatible determinat (té una única solució).

Per a trobar la solució podem utilitzar, per exemple, el mètode de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ b & 4 & 1 \\ -2 & -5 & a \end{vmatrix}}{13a-13}=\frac{4a-10b+ab+23}{13a-13}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 \\ 2 & -2 & a \end{vmatrix}}{13a - 13} = \frac{-a - 4b + 3ab + 4}{13a - 13}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix}}{13a - 13} = \frac{13b - 39}{13a - 13}$$

b) Per a $a = 1$, la matriu de coeficients i la matriu ampliada del sistema resulten:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & b \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Estudiem el rang de **A**:

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{A}| = 0 \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 2$$

Estudiem ara el rang de $\mathbf{A}^+$ (per a això ampliem el menor d'ordre 2 anterior amb l'última columna i l'última fila de $\mathbf{A}^+$):

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 13b - 39 = 0 \Rightarrow b = 3$$

- Per tant, si $a = 1$ i $b \neq 3$:

  $$\left. \begin{array}{r} \mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 2 \\ \mathrm{rg}(\mathbf{A}^+) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{el sistema és incompatible (no té solució).}$$

- Si $a = 1$ i $b = 3$, llavors:

  $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^+) = 2 <$ nre. d'incògnites $\Rightarrow$ el sistema és compatible indeterminat (té infinites solucions).

  Per a trobar les solucions podem fer $z = \lambda$ i obtenir les solucions. Per exemple, emprant novament Cramer:

$$z = \lambda \left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 1 - 2\lambda \\ x + 4y = 3 - \lambda \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-2\lambda & -1 \\ 3-\lambda & 4 \end{vmatrix}}{13} = \dfrac{-9\lambda + 7}{13} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1-2\lambda \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}}{13} = \dfrac{-\lambda + 8}{13} \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

6. La matriu del sistema és: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \\ 1 & -8 & a^2 \end{pmatrix}$

Si calculem el seu determinant, aquest resulta ser:

$$12a^2 - 12a = 12a(a - 1)$$

a) Si $a \neq 0$ i $a \neq 1$ llavors el rang de la matriu **A** és igual al de la matriu ampliada i igual al nombre d'incògnites = 3 i, pel teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema és compatible determinat. Podem trobar la solució utilitzant Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-a & -2 & a \\ 6 & 4 & a^2 \\ -6 & -8 & a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \\ 1 & -8 & a^2 \end{vmatrix}} = \frac{36a^2 - 12a^3 - 24a}{12a^2 - 12a} = \frac{12a(3a - a^2 - 2)}{12a(a-1)} = \frac{12a(a-1)(2-a)}{12a(a-1)} = 2 - a$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-a & a \\ 1 & 6 & a^2 \\ 1 & -6 & a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \\ 1 & -8 & a^2 \end{vmatrix}} = \frac{12a^2 - a}{12a^2 - a} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1-a \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & -8 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \\ 1 & -8 & a^2 \end{vmatrix}} = \frac{-12 + 12a}{12a^2 - 12a} = \frac{12(a-1)}{12a(a-1)} = \frac{1}{a}$$

b) Estudiem, ara, el cas en què $a = 0$:

La matriu del sistema és: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & -8 & 0 & -6 \end{array}\right)$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, el rang de la matriu **A** és 2.

En canvi, el rang de la matriu ampliada és 3, ja que

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & -8 & -6 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

I, segons el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema és incompatible (no té solució).

c) Per acabar, si $a = 1$, la matriu ampliada és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & -8 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

Fixem-nos, per una banda, que la 1a. i la 3a. columnes són iguals i, per l'altra, que

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Per tant: rg(**A**) = 2.

Calculem ara el rang de la matriu ampliada. Es pot fer de dues maneres diferents:

Veient que

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & -8 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

o aplicant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & -8 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Passos seguits:

(1) 2a. fila = 2a. fila – 1a. fila i 3a. fila = 3a. fila – 1a. fila
(2) 3a. fila = 3a. fila + 2a. fila

En tots dos casos, observem que rg($\mathbf{A}^+$) = 2. Pel teorema de Rouché-Fröbenius, com que rg(**A**) = rg($\mathbf{A}^+$) = 2 < 3 = nre. incògnites, el sistema és compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat.

Mirant l'última matriu que hem trobat en fer el mètode de Gauss veiem que:

$x - 2y + z = 0$
$6y = 6 \qquad \Rightarrow y = 1$

I substituint obtenim la solució per a aquest cas:

$x = 2y - z = 2 - \lambda$
$y = 1$
$z = \lambda$

7. En ser dos plans, o bé seran paral·lels no coincidents, paral·lels coincidents o bé es tallaran en una recta. Discutim el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -8 \\ -4x - 6y + 2z = 16 \end{cases}$$

La matriu de coeficients i l'ampliada són, respectivament:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -8 \\ -4 & -6 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

Tots els menors de segon ordre que es poden extreure de la matriu **A** són nuls:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

Per tant, rg(**A**) = 1. Per altra banda, la 4a. columna de **B** és múltiple de les de **A** i per tant rg(**B**) = 1. Aleshores, segons el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema és compatible i indeterminat amb dos graus de llibertat, *i. e.*: els dos plans són coincidents.

8. La recta r serà paral·lela a π si el sistema d'equacions és incompatible (per tant, pel teorema de Rouché-Fröbenius, s'ha de complir que rg(**A**) ≠ rg(**B**), on **A** és la matriu de coeficients i **B** l'ampliada). Aquest sistema és:

$$\begin{cases} 4x - 4 = 2y + 10 \\ 2x - 2 = 2z - 6 \\ 4x + my + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 14 \\ 2x - 2z = -4 \\ 4x + my + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - z = -2 \\ 4x + my + z = 2 \end{cases}$$

Per tal que el sistema sigui incompatible, el determinant de la matriu dels coeficients s'ha d'anul·lar, és a dir:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 + 2m + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{5}{2}$$

En conclusió, per a aquest valor de m, rg(**A**) = 2 i rg(**B**) = 3, ja que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 7 + 28 + 4 = 35 \neq 0$$

Per tant, per a $m = -\frac{5}{2}$, π i r són paral·lels.

9. Construïm el sistema d'equacions lineals resultant:

$$\begin{cases} 6x - 12 = 5y \\ 2y = 6z + 6 \\ 3x - 3a = 2y + 2 \\ 3y + 3 = 3z - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 5y = 12 \\ 2y - 6z = 6 \\ 3x - 2y = 2 + 3a \\ 3y - 3z = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 5y = 12 \\ y - 3z = 3 \\ 3x - 2y = 2 + 3a \\ y - z = -3 \end{cases}$$

Que les dues rectes es tallin implica que el sistema ha de ser compatible determinat (ha de tenir una única solució, que correspondrà al punt en què es tallen totes dues rectes) i, per tant, s'ha de complir que rg(**A**) = rg(**B**) = 3 = nre. incògnites, on **A** és la matriu de coeficients i **B** la seva ampliada. Es pot extreure un menor no nul de la matriu de coeficients:

$$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 45 - 36 = 9 \neq 0$$

Per tant, rg(**A**) = 3.

Perquè les rectes es tallin, el determinant de la matriu ampliada haurà de ser nul (amb la qual cosa ens assegurarem que rg(**B**) = 3), és a dir:

$$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 2+3a \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -5 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6a-8 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 6a-8 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$= 3 \cdot (-18a + 24 - 3 + 6a - 8 - 9) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (4 - 12a) = 0 \Rightarrow a = 1/3$

Per a a =1/3, tenim que rg(**A**) = rg(**B**) = 3 = nre. incògnites i, pel teorema de Rouché-Fröbenius, és un sistema compatible determinat. En conseqüència, r i r' es tallen.

10. En forma matricial, el sistema s'escriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -4 \\ -3 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}, \text{ on } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -4 \\ -3 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ és la matriu del sistema.}$$

La matriu ampliada del sistema és: $\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & -4 & 4 \\ -3 & 6 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right)$.

Solució pel mètode de Gauss:

Transformem la matriu **B** en una matriu triangular mitjançant transformacions per files. Emprarem la notació següent: denotem per f_1, f_2, f_3 les files 1, 2 i 3 de **B**. Per a posar un zero al 2 (de la fila 2, columna 1), a la fila 2 li restem 2 vegades la fila 1. Això ho escriurem: $f_2^* = f_2 - 2f_1$. Anàlogament, per a posar un zero al –3 (de la fila 3, columna 1), a la fila 3 li sumem tres vegades la fila 1. És a dir, $f_3^* = f_3 + 3f_1$. Ens queda:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & -4 & 4 \\ -3 & 6 & 1 & -2 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

No només ens han quedat zeros a la primera columna, sinó que també ens han quedat zeros a la segona columna. Això significa que el següent pivot que prendrem serà de la tercera columna. Per a operar sempre és més senzill prendre com a pivot un 1 (si n'hi ha). En aquest cas, tenim un 1 a la fila 3, columna 3. Permutem, doncs, les files 2 i 3. I ens queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right).$$

Ara posem un zero al 2 (de la columna 3, fila 3). Per a això, a la fila 3 li restem dues vegades la fila 2. És a dir, $f_3^* = f_3 - 2f_2$. I ens queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

És a dir, el sistema s'ha transformat en:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y \qquad\qquad = 3 \\ z - 2t = -1 \end{array}\right\}$$

La solució és: $x = 3 + 2y$, $y = y$, $z = -1 + 2t$, $t = t$. O sigui, no podem dir res sobre les incògnites y, t. És a dir, es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb dos graus de llibertat.

Solució pel mètode d'orlar:

Per començar, calculem el rang de la matriu **A** orlant. El coeficient de la primera fila i primera columna és 1, no nul. Per tant, la matriu **A** té un menor 1×1 amb determinant no nul. Això vol dir que el rang de **A** és com a mínim 1.

Considerem els menors 2×2 que contenen aquest menor 1×1. El primer és el format per les columnes 1, 2 i les files 1, 2. El seu determinant és: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$. Com que el determinant és zero, hem de trobar un altre menor. Considerem el menor format per les columnes 1, 3 i les files 1, 2. El seu determinant és: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$. Com que el determinant és no nul, podem assegurar que el rang de la matriu **A** és almenys 2. Per a veure si **A** té rang 3, és necessari trobar un menor 3×3, que contingui aquest menor 2×2, i que tingui determinant no nul. Només n'hi ha dos. El primer menor és el format per les columnes 1, 2, 3 i les files 1, 2, 3. El seu determinant és:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 12 + 4 - 12 = 0.$$

El segon menor és el format per les columnes 1, 3, 4 i les files 1, 2, 3. El seu determinant és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0.$$

Com que tots els menors que contenen el menor 2×2 anterior tenen determinant nul, podem assegurar que el rang de **A** no és 3. Per tant, el rang de **A** és 2.

Considerem ara la matriu ampliada del sistema:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & -4 & 4 \\ -3 & 6 & 1 & -2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Com que les quatre primeres columnes de **B** són justament les de **A**, el rang de **B** com a mínim és 2 (el menor 2×2 amb determinant no nul que hem trobat, recordem-ho, és el format per les columnes 1, 3 i les files 1, 2). L'única manera que el rang de **B** podria ser més gran que el de **A** seria que en afegir la cinquena columna a aquest menor 2×2, el determinant sortís no nul. Però el determinant del menor format per les columnes 1, 3, 5 i files 1, 2, 3 és:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & -10 \end{vmatrix} = -20 + 6 + 18 - 4 = 0.$$

Per tant, el rang de **B** també és 2. Això vol dir que el rg(**A**) = rg(**B**) = 2. Per tant, el sistema és compatible (és a dir, té solució). Com que el nombre d'incògnites és 4 i el rang del sistema és 2, els graus de llibertat són 2. El menor 2×2 que marca el rang és el format per les columnes 1 i 3. Això vol dir que les incògnites 1 i 3 (és a dir, la x i la z) es poden posar en funció de les incògnites y i t. A més, com que el menor 2×2 que marca el rang és el format per les files 1 i 2, això significa que la tercera fila es pot suprimir. És a dir, el sistema inicial és equivalent al sistema:

$$\begin{cases} x = 3 + 2y \\ 2x + 2z = 4 + 4y + 4t \end{cases}$$

Això és, és un sistema de Cramer amb determinant del sistema:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Les solucions són:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3+2y & 0 \\ 4+4y+4t & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6+4y}{2} = 3 + 2y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3+2y \\ 2 & 4+4y+4t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4+4y+4t-6-4y}{2} = \frac{-2+4t}{2} = -1+2t$$

En definitiva: el sistema és compatible indeterminat amb dos graus de llibertat. Les solucions són de la forma:

$$\begin{aligned} x &= 3+2y \\ y &= y \\ z &= -1+2t \\ t &= t \end{aligned}$$

11.

a) Per discutir el sistema utilitzarem el teorema de Rouché-Frobenius. Necessitem calcular els rangs de la matriu del sistema (**M**) i de la matriu ampliada (**AM**).

Així doncs, tenim

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Si calculem determinants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 7-k$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix} = 13-k$$

veiem que el primer s'anul·la quan $k = 7$ i el segon quan $k = 13$, per tant, els dos no poden valer 0 alhora. Com que sempre hi ha un menor 3×3 amb determinant no nul, $\text{rg}(\mathbf{M}) = 3$.

Per altra banda,

$$\mathbf{AM} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 8 & k \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

i $|\mathbf{AM}| = -k^2 + 8k - 7$, les solucions de la qual són $k = 1$ i $k = 7$. Per aquests valors, doncs, $\text{rg}(\mathbf{AM}) = 3$, mentre que per a qualsevol altre k el rang de **AM** serà 4.

Concloem, doncs:

- Per a $k = 1$ o $k = 7$, el sistema és compatible determinat.
- Per a $k \neq 1,7$, el sistema és incompatible.

b) Reduim la matriu per Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 8 & k \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & k & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \xrightarrow{f2-f1} \\ \xrightarrow{f3-f1} \\ \xrightarrow{f4-2^*(f1)} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 8-k & k-1 \\ 0 & 0 & 7-k & 0 \\ 0 & -1 & -k & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{permutem } f3 \text{ i } f4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 8-k & k-1 \\ 0 & -1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 7-k & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f3+f2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 8-k & k-1 \\ 0 & 0 & 8-2k & k-1 \\ 0 & 0 & 7-k & 0 \end{pmatrix}$$

- En el cas $k = 1$, obtenim $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, amb la qual cosa tenim que:

$$\begin{aligned} &z = 0 \\ &y = -7z = 0 \\ &x = 1 - y - z = 1 \end{aligned}$$

- En el cas $k = 7$, obtenim $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, amb la qual cosa tenim:

$$\begin{aligned} &z = -1 \\ &y = 6 - z = 7 \\ &x = 1 - y - 7z = 1 \end{aligned}$$

c) En el sistema de l'apartat **a)** les dues primeres equacions corresponen a la recta r i les altres dues, a la recta s. Amb la discussió de l'apartat a obtenim:

- Per a $k = 1$ o $k = 7$, el sistema és compatible determinat i les rectes es tallen en un punt que és el punt trobat anteriorment (el punt $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ per a $k = 1$, i el punt $(x, y, z) = (1, 7, -1)$ per a $k = 7$).

- Per a $k \neq 1, 7$, el sistema és incompatible i les rectes no es tallen.

12. Comparem els rangs de la matriu de coeficients, **A** i de l'ampliada, **AM**, seguint el teorema de Rouché-Frobenius, començant per la matriu de coeficients, **A**. Estudiem el rang per determinants, analitzant quins valors dels paràmetres permeten que el rang sigui màxim:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = b(a-1)^2(a+2)$$

Els valors dels paràmetres que anul·len aquest determinant són $b = 0$ i $a = 1, -2$. Es presenten, per tant, les següents disjuncions:

- Suposem que $b \neq 0$ i $a \neq 1, -2$. En aquest cas $rang(\mathbf{A}) = 3$ i el màxim rang de la matriu ampliada és 3 i no pot ser menor que 3, ja que **AM** conté una matriu de rang 3, que és la pròpia **A**. Per tant: $rang(\mathbf{A}) = rang(\mathbf{AM}) = 3$. Pel teorema de Rouché-Frobenius, aquest sistema és compatible determinat. Utilitzarem la regla de Cramer per a calcular-ne la solució:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}}{b(a-1)^2(a+2)} = \frac{b(a-b)(a-1)}{b(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-b)}{(a-1)(a+2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{b(a-1)^2(a+2)} = \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}}{b(a-1)^2(a+2)} = \frac{b(a-1)(a-b)}{b(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-b)}{(a-1)(a+2)}$$

  Per tant, la solució del sistema és el punt:

$$\left(\frac{(a-b)}{(a-1)(a+2)}, \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}, \frac{(a-b)}{(a-1)(a+2)}\right)$$

- Suposem que $b = 0$. En aquest cas la matriu **A** és:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}; \text{ i l'ampliada: } \mathbf{AM} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right)$$

  Observem que el rang d'**A** depèn del valor del paràmetre a. És clar que el rang no serà 3 perquè $b = 0$ és un dels valors que anul·len el determinant d'**A**. Busquem, doncs, menors d'ordre 2. Així,

  $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a-1$, per la qual cosa tenim de nou dos casos dins el cas $b = 0$.

– Si $a \neq 1$, aleshores *rang*(**A**) = 2. Per altra banda tenim que *rang*(**AM**) = 3 per ser no nul el menor següent per $a \neq 1$.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2(a-1) \neq 0$$

Pel teorema de Rouché-Frobenius el sistema és incompatible en aquest cas.

– Si $a = 1$, avaluant les matrius de coeficients i ampliada, tenim que aquestes són:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{AM} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

D´on s´observa que *rang*(**A**) = 1 i, tanmateix, *rang*(**AM**) = 2. Per tant, el sistema és incompatible.

• Suposem que $a = 1$. En aquest cas la matriu **A** és:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \text{ i l'ampliada: } \mathbf{AM} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Observem que el *rang*(**A**) = 1 independentment del valor de b, mentre que el rang de l’ampliada sí depèn del valor d’aquest paràmetre, ja que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - 1$.

Es té, llavors, la disjuntiva dins el cas $a = 1$.

– Si $b \neq 1$, aleshores *rang*(**AM**) = 2. El sistema és, per tant, incompatible.

– Si $b = 1$, les matrius **A** i **AM** són:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{AM} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

totes dues de rang 1. El sistema resultant és $x + y + z = 1$, que és del tipus compatible indeterminat, amb dos graus de llibertat. Considerant com a paràmetres y, z per a resoldre aquest sistema, la solució general és:

$$(1-y-z, y, z) \text{ per a qualssevol valors } y, z \in \mathbb{R}$$

• Suposem que $a = -2$. En aquest cas la matriu **A** és:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & b & 1 \\ 1 & -2b & 1 \\ 1 & b & -2 \end{pmatrix}; \text{ i l'ampliada: } \mathbf{AM} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & -2b & 1 & b \\ 1 & b & -2 & 1 \end{array}\right)$$

per la qual cosa *rang*(**A**) = 2 i *rang*(**AM**) depèn del valor del paràmetre *b*, ja que:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6-3b$$

I tenim una nova disjunció de casos:

- Si $b \neq -2$, aleshores *rang*(**AM**) = 3. El sistema és, per tant, incompatible.
- Si $b = -2$, aleshores *rang*(**AM**) = 2 i el sistema és, per tant, compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Per resoldre'l pel mètode de Cramer, prenem les dues equacions del sistema inicial els menors de les quals són diferents de zero:

$$\begin{cases} x+4y+z=-2 \\ x-2y-2z=1 \end{cases}$$

Prenent z com a paràmetre, el sistema queda així:

$$\begin{cases} x+4y=-2-z \\ x-2y=1+2z \end{cases}$$

Matricialment:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-z \\ 1+2z \end{pmatrix}$$

El resolem per Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2-z & 4 \\ 1+2z & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-6z}{-6}=z\,,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2-z \\ 1 & 1+2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{1+2z+2+z}{-6}=\frac{3z+3}{-6}=\frac{z+1}{-2}$$

la solució d'aquest sistema és $(z,\frac{-1-z}{2},z)$ per a qualsevol $z \in \mathbb{R}$.

En resum:

- Si $b \neq 0$ i $a \neq 1, -2$ → Sistema compatible determinat → La solució és: $(\frac{(a-b)}{(a-1)(a+2)}, \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}, \frac{(a-b)}{(a-1)(a+2)})$ Els tres plans es tallen en un únic punt.

- Si $b = 0$ i $a \neq 1$ → Sistema incompatible → Els tres plan no intersecten

- Si $b = 0$ i $a = 1$ → Sistema incompatible → Els tres plan no intersecten

- Si $a = 1$ i $b \neq 1$ → Sistema incompatible → Els tres plan no intersecten

- Si $a = 1$ i $b = 1$ → Sistema compatible indeterminat amb dos graus de llibertat → La solució general és: $(1 - y - z, y, z)$ per a qualssevol valors $y, z \in \mathbb{R}$ → Els tres plans es tallen en un pla; de fet, els tres plans són el mateix pla.

- Si $a = -2$ i $b \neq -2$ → Sistema incompatible → Els tres plan no intersecten.

- Si $a = -2$ i $b = -2$ → Sistema compatible indeterminat amb 1 grau de llibertat → La solució general és: $(z, \frac{-1-z}{2}, z)$ per a qualsevol $z \in \mathbb{R}$ → Els tres plans es tallen en una recta.

13. En imposar la condició d'equilibri del flux sobre cada node (flux entrant = flux sortint), obtenim el següent SEL:

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_4 + x_5 = 500 \\
&x_1 + x_2 = 200 \\
&x_4 + x_3 - x_2 = 400 \\
&x_3 - x_5 = 100
\end{aligned}$$

Les matrius de coeficients, **A**, i de coeficients ampliada, **M**, són, respectivament,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 100 \end{pmatrix}$$

El SEL és compatible indeterminat, ja que rg(**A**) = 3 = rg(**M**) = 3 (el nombre d'incògnites és 5, superior al rang de les matrius, amb la qual cosa hi haurà dos graus de llibertat).

Resolent el sistema obtenim:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (500 - x_4 - x_5, x_4 + x_5 - 300, 100 + x_5, x_4, x_5)$$

Així, per exemple, prenent $x_4 = 100$ i $x_5 = 200$, s'obtindria la solució particular:

$$\begin{cases} x_1 = 200 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 300 \\ x_4 = 100 \\ x_5 = 200 \end{cases}$$

14. Siguin:

A = nombre total de serveis del tipus A
B = nombre total de serveis del tipus B
C = nombre total de serveis del tipus C
D = nombre total de serveis del tipus D

I tenim les següents expressions:

$$\begin{array}{l} A + 10B + 0C + 10D = 152 \\ 2A + B + 4c + 0D = 550 \\ 2A + B + C + D = 309 \\ 0A + B + 0C + D = 4 \end{array}$$

que formen un sistema de quatre equacions amb quatre incògnites que resolem mitjançant el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 10 & 0 & 10 & 152 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 550 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 309 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) (1)\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 10 & 0 & 10 & 152 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 550 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 309 \end{array}\right) (2)\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 10 & 0 & 10 & 152 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -19 & 4 & -20 & 246 \\ 0 & -19 & 1 & -19 & 5 \end{array}\right)$$

$$(3)\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 10 & 0 & 10 & 152 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 322 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 81 \end{array}\right) (4)\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 10 & 0 & 10 & 152 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 322 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

(1) Traslladem la 4a. fila a la 2a.
(2) 3a. fila = 3a. fila –2 · 1a. fila i 4a. fila = 4a. fila – 2 · 1a. fila
(3) 3a. fila = 3a. fila + 19 · 2a. fila i 4a. fila = 4a. fila + 19 · 2a. fila
(4) 4a. fila = 4 · 4a. fila – 3a. fila

Amb la qual cosa obtenim que $A = 112$, $B = 2$, $C = 81$ i $D = 2$.

15.

a) Sigui x el nombre de fotos de qualitat normal i y el nombre de fotos de qualitat òptima. A partir d'aquí, plantegem el sistema d'equacions següent:

$$y, \begin{cases} x + y = 24 \\ 0.2x + ay = 9.2 \end{cases}$$

A continuació, n'estudiem la compatibilitat. Per a això tenim la matriu de coeficients i la matriu ampliada per comparar els rangs i aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.2 & a \end{pmatrix};\ \mathbf{AM} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 24 \\ 0.2 & a & 9.2 \end{array}\right)$$

$$|\mathbf{A}| = a - 0.2$$

- Si $a = 0.2$ → $rang(\mathbf{A}) = 1$ i $rang(\mathbf{AM}) = 2$ → Sistema incompatible

  Observació

  El rang de la matriu ampliada és 2, ja que:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 0.2 & 9.2 \end{vmatrix} = 9.2 - 4.8 = 4.4 \neq 0$$

- Si $a \neq 0,2$ → $rang(\mathbf{A}) = 2 = rang(\mathbf{AM})$ = núm. incògnites → Sistema compatible determinat

Utilitzem el mètode de Cramer per trobar la solució del sistema en el cas que $a \neq 0.2$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 1 \\ 9,2 & a \end{vmatrix}}{a - 0,2} = \frac{24a - 9,2}{a - 0,2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 0,2 & 9,2 \end{vmatrix}}{a - 0,2} = \frac{4,4}{a - 0,2}$$

Per tant:

- el nombre de fotos de qualitat normal és $\dfrac{24a - 9.2}{a - 0.2}$
- i el nombre de fotos de qualitat òptima és: $\dfrac{4.4}{a - 0.2}$

b) Sí, si $a = 0.2$ MB, és impossible trobar el nombre de fotos de qualitat òptima, ja que el denominador de la fracció $\dfrac{4.4}{a - 0.2}$ és 0.

c) Cal trobar el valor d'a per tal que x sigui igual a y.

Igualem:

$$24a - 9,2 = 4,4 \rightarrow 24a = 13,6 \rightarrow a = 0,56 \text{ MB}$$

16. Si denotem per x i y, respectivament, el nombre d'unitats que adquirirem de discos tipus A i B, el problema anterior es pot formular com a:

Maximitzar la capacitat d'emmagatzematge, *i. e.*,

maximitzar $f(x, y) = 300x + 200y$

Respectant les condicions següents:

$200x + 100y \le 1500$	(restricció de preu)
$x + 2y \le 27$	(restricció d’hores)
$15x + 3y \le 100$	(restricció energètica)

A més, sembla lògic imposar les següents condicions:

$x \ge 0$, $y \ge 0$ (és a dir, les quantitats que s’adquiriran no podran ser negatives).

Aquest tipus de problemes pertany a una àrea de coneixement de les matemàtiques anomenada *programació lineal*. Per a la seva resolució s’utilitzen complexos algorismes de càlcul (com el Simplex). Afortunadament, la majoria de programes matemàtics actuals incorporen funcions que automatitzen els càlculs.

Utilitzant algun d'aquests programes podem trobar que la solució del problema d’optimització donat és $x = 1, y = 13$.

Així doncs, la quantitat màxima d’espai, sota les condicions establertes, s’obté en comprar 1 unitat de tipus A i 13 de tipus B. Amb això aconseguirem un total de $300 \cdot 1 + 200 \cdot 13 = 2900$ MB.

17.

a) El determinant de **B** és:

$$\det(\mathbf{B}) = -3359232a^3 - 16796160a^2 - 26873856a - 13436928$$

El rang de **B** no serà màxim per a aquells valors del paràmetre a que facin nul el determinant, és a dir, per als valors $a = -1$ i $a = -2$.

b) És clar que si a és un valor distint dels valors –1 i –2, llavors rang(**B**) = 7. Amb l’ajut d’un programari, és immediat comprovar que si $a = -1$ llavors rang(**B**) = 6, mentre que si $a = -2$ llavors rang(B) = 5.

c) Si denotem per **D** la matriu ampliada, és a dir:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}(a) \mid \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 12a-15 & -12a+3 & 15 & 12a-3 & 0 & -9 & 0 \\ 2a-13 & 2a-5 & 2a+9 & -1 & 4a+3 & 0 & -13 & 0 \\ 30 & 12a-18 & -12a+18 & 18 & 12a-18 & 0 & 6 & 0 \\ 2a-16 & -4a+16 & 8a & -16 & -2a+12 & 0 & -4 & 0 \\ 22a-5 & -14a+11 & 16a-3 & 6a-5 & -16a+3 & 6a+12 & -5 & -4 \\ 0 & -6a+6 & 6a-6 & 0 & -6a+6 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Llavors quina relació hi ha entre els rangs de la matriu i de la matriu ampliada?

Rang($\mathbf{B}(-1)$) = 6,	Rang($\mathbf{B}(-2)$) = 5
Rang($\mathbf{D}(-1)$) = 6,	Rang($\mathbf{D}(-2)$) = 6

És a dir que:

- Si a és diferent dels valors –1 i –2, llavors rang(**B**) = rang(**D**) = 7. Per tant, sistema compatible determinat.
- Si a = –1, llavors rang(**B**) = 6 = rang(**D**) < n. Per tant, sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.
- Si a = –2, llavors rang(**B**) = 5 < rang(**D**) (que lògicament serà 6). Per tant, sistema incompatible.

18.

a) Les matrius associades al SEL són les següents:

$$\mathbf{A}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ k & 10 & 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

La matriu ampliada és la següent:

$$\mathbf{C}(k) = \mathbf{A}(k) \mid \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ k & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Per tal que la intersecció dels tres plans sigui una recta, cal que rang(**A**) = = rang(**C**) = 2 (SCI amb un grau de llibertat), la qual cosa se satisfà si k = 7.

Si resolem el sistema per a k = 7 fent servir Gauss obtenim:

$$\mathbf{C}(7) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 4 & 11 \end{pmatrix} \underset{F_3-7F_1}{\overset{F_2-2F_1}{\rightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \underset{F_3-3F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Els sistemes d'equacions són equivalents.

És a dir:

$$z = z\,; \qquad y - z = -1\,; \qquad x + y + z = 2$$

substituint, obtenim:

$$z = z; \qquad y = z - 1; \qquad x = 3 - 2z$$

b) Per tal que la intersecció sigui un punt, cal que k agafi un valor qualsevol distint de 7, ja que llavors rang(**A**) = 3 = rang(**C**) (SCD).

Per a k = 10, podem aplicar Cramer per a obtenir les coordenades del punt:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}(10) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 10 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Considerem les matrius resultants de substituir la columna corresponent pel vector columna de termes independents:

$$\mathbf{M1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 11 & 10 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 10 & 11 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 10 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

I calculem:

$$x = \frac{|\mathbf{M1}|}{|\mathbf{M}|} = 0, \quad y = \frac{|\mathbf{M2}|}{|\mathbf{M}|} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{|\mathbf{M3}|}{|\mathbf{M}|} = \frac{3}{2}$$

19.

a) Per a fer la discussió del sistema farem ús del teorema de Rouché-Fröbenius.

Les matrius del sistema són les següents:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & k & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{A^*} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & k & k & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Com que el sistema és homogeni (tots els elements de la darrera columna de la matriu ampliada són zeros), és clar que Rang(**A**) = Rang(**A***) i, per tant, el sistema sempre serà compatible.

Cal notar que Rang(**A**) ≥ 2, ja que: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

Ara bé, com que $|\mathbf{A}| = -2k + 3k = k$ es té que:

- Si $k = 0$ → Rang(**A**) = 2 = Rang(**A***) < n → SC Indeterminat
- Si $k \neq 0$ → Rang(**A**) = 3 = Rang(**A***) = n → SC Determinat

b) Per a $k = 1$, tindrem:

$$\mathbf{A^*} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \text{ \{intercanvi de F1 i F2\} } \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \text{ \{F2 = F1*(−3) + F2\}\{F3 = F1*(−3) + F3\} } \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De la darrera equació es té que $y = 0$; substituint en la primera, es té que $x = y = 0$; finalment, substituint en la segona es té que $z = 0$. Per tant, la solució del sistema és la següent:

$$x = y = z = 0$$

Observació: També es pot raonar en aquest apartat que l'SCD té per solució la trivial ($x = y = z = 0$), atès que es tracta d'un sistema homogeni.

20.

a) Les matrius del sistema són:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{A^*} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Observeu que $|\boldsymbol{A}| = 6 - 3 - 6 - 12 + 1 + 9 = -5$. Per tant:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{3}{5}\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{1}{5}\,; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = 0$$

b) Segons s'ha vist en l'apartat anterior, el sistema és compatible determinat; és a dir, tots tres plans es tallen en un únic punt, el punt (3/5, 1/5, 0).

Glossari

Cramer, regla de *f* Conjunt de fórmules tancades, en forma de quocient de determinants, que donen el valor de les incògnites en un sistema de n equacions i n incògnites compatible i determinat.

Gauss, mètode de *m* Mètode d'eliminació d'incògnites que permet reduir un sistema lineal de manera esglaonada.

matriu ampliada d'un sistema *f* Matriu d'un sistema d'equacions lineals formada mitjançant l'ampliació de la matriu del sistema amb la columna dels termes independents.

matriu d'un sistema *f* Matriu formada pels coeficients de les variables $x_1, \ldots, x_n$ en cada una de les equacions del sistema. Cada fila de la matriu correspon a una equació.

pivot *m* Element diferent de zero que es tria per a reduir a zero els restants coeficients en una etapa donada del mètode de Gauss.

Rouché-Fröbenius, teorema de *m* Teorema que permet saber si un sistema lineal és compatible o no ho és. En el cas que sigui compatible, permet saber si és determinat o indeterminat, i en l'últim cas, quants graus de llibertat té la solució general.

sistema compatible *m* Sistema d'equacions que té alguna solució. Si no en té cap, diem que és incompatible.

sistema determinat *m* Sistema que té una única solució. Si en té més d'una, diem que és indeterminat.

sistema homogeni *m* Sistema d'equacions amb termes independents nuls.

sistema lineal *m* Conjunt d'equacions de primer grau en n variables.

Bibliografia

Bibliografia bàsica

Anton, H. (2002). *Introducción al Álgebra Lineal*. Mèxic, DF: Limusa Wiley.
Llibre complet que tracta amb profunditat els conceptes desenvolupats en aquest mòdul. Inclou bastants demostracions, exemples i activitats resoltes.

Lay, M. (1999). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Prentice-Hall.
Llibre complet, especialment orientat a les aplicacions de l'àlgebra lineal en diversos camps.

Vizmanos, J.; Anzola, M. (1995). *Matemáticas I*. Madrid: SM.
Explica clarament els conceptes i inclou abundants exemples.

Bibliografia complementària

Bermúdez, L. i altres (1995). *Álgebra Lineal*. Barcelona: Media.

Fraleigh, J.; Beauregard, R. (1989). *Álgebra Lineal*. Argentina: Addison-Wesley.

Hernández, E. (1994). *Álgebra y geometría*. Addison-Wesley.

Lipschutz, S. (1992). *Álgebra Lineal*. Madrid: McGraw-Hill.

Meyer, C. (2004). *Matrix Analysis and Applied Algebra*. <http://matrixanalysis.com>

Porter, G.; Hill, D. (1996). *Interactive Linear Algebra*. Nova York: Springer-Verlag.

Sydsaeter, K.; Hammond, P. (1996). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Madrid: Prentice-Hall.