Aplicacions lineals

Matriu associada, vectors i valors propis i diagonalització

PID_00269002

Ángel Alejandro Juan Pérez
Cristina Steegmann Pascual
Bernat Anton

Universitat Oberta de Catalunya

Ángel Alejandro Juan Pérez

Llicenciat en Matemàtiques per la Universitat de València, màster en Tecnologies de la Informació per la UOC i doctor en Enginyeria Industrial per la UNED. Ha cursat postgraus a les universitats de Harvard, Alacant i València. Ha estat professor i director acadèmic en una *high school* de Boston, professor associat a la Universitat d'Alacant i professor coordinador a la UOC. Des de l'any 2003, és professor associat d'Estadística aplicada a la Universitat Politècnica de Catalunya i professor d'Informàtica en CFGS.

Cristina Steegmann Pascual

Llicenciada en Matemàtiques per la Universitat Autònoma de Barcelona (1993). Actualment, treballa en la seva tesi doctoral en l'àmbit de l'*e-learning* dins del programa de doctorat sobre la Societat de la Informació i el Coneixement de la UOC. Des de 1993, és funcionària de carrera del cos de professors d'ensenyament secundari, en la especialitat de Matemàtiques, tasca que compagina amb la de professora consultora de la UOC. Així mateix, ha publicat diversos articles sobre ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques.

Bernat Anton

Llicenciat en Matemàtiques per la Universitat de Barcelona (2007), màster de Matemàtica Avançada (2008) i de Bioinformàtica per a les Ciències de la Salut (2013). Ha estat professor associat de la Universitat de Barcelona, de la Universitat Pompeu Fabra i del Tecnocampus de Mataró, a més de personal de suport al Parc de Recerca Biomèdica de Barcelona. Actualment treballa de professor de secundària per la Generalitat de Catalunya.

La revisió d'aquest recurs d'aprenentatge UOC ha estat coordinada per la professora: Cristina Cano Bastidas (2020)

Cinquena edició: febrer 2020

Av. Tibidabo, 39-43, 08035 Barcelona
Realització editorial: FUOC

Índex

Introducció

En aquest mòdul es presenten els principals conceptes associats a la idea d'aplicació lineal, i s'estableix la gran connexió existent entre les aplicacions lineals i les matrius (en cert sentit, tota aplicació lineal queda unívocament determinada per una matriu i, d'altra banda, a tota matriu se li pot associar una determinada aplicació lineal). En el mòdul s'introdueixen també els conceptes de vector i valor propi, tots dos associats a un endomorfisme (aplicació lineal d'un espai en si mateix), i s'analitza el problema de la diagonalització de matrius quadrades (o, equivalentment, el problema de la diagonalització d'endomorfismes).

A més del seu interès conceptual, les idees i resultats aquí presentats tenen aplicacions diverses, tant a àmbits teòrics com pràctics. D'una banda, s'apliquen en l'optimització de funcions de diverses variables i al càlcul de potències de matrius. De l'altra, també s'apliquen a l'estudi de sistemes dinàmics (sistemes que evolucionen amb el pas del temps), tant els de tipus discret com els de tipus continu. Al final del mòdul s'inclou un exemple en el qual s'analitza un d'aquests sistemes dinàmics.

Els abundants exemples i exercicis resolts que s'inclouen durant i al final del mòdul constitueixen una font d'aprenentatge addicional que ajudarà a comprendre millor les idees abstractes presentades aquí.

Objectius

L'objectiu general d'aquest mòdul és presentar els principals conceptes i resultats associats a la teoria de les aplicacions lineals entre espais vectorials.

En particular, els objectius docents que es pretenen aconseguir amb aquest mòdul són els següents:

1. Entendre els conceptes següents: aplicació entre conjunts, aplicació lineal entre espais vectorials, nucli d'una aplicació lineal i imatge d'una aplicació lineal.

2. Comprendre la relació existent entre les aplicacions lineals i les matrius.

3. Aprendre a efectuar canvis de base en una aplicació lineal.

4. Entendre els conceptes de valor propi, vector propi i la seva funció en la determinació d'una matriu diagonal.

5. Descobrir com el programari matemàtic en general pot ser útil per a automatitzar els càlculs matricials i el càlcul de valors i vectors propis.

Coneixements previs

Aquest mòdul es fonamenta en els conceptes i mètodes desenvolupats en els mòduls “Elements d’àlgebra lineal i geometria” i “Sistemes d’equacions lineals”. Ambdós mòduls són, per tant, d’obligada lectura prèvia.

1. Exemple introductori

Tothom sap que Google és, en l'actualitat, un dels motors de cerca més utilitzats i valorats a Internet. Això és degut, principalment, a la seva excel·lent capacitat per a proporcionar enllaços d'utilitat. El que no tothom coneix és que gran part del seu èxit es basa en algorismes que utilitzen la teoria de matrius i de vectors propis.

Google ordena les pàgines web seguint un ordre d'importància. A cada pàgina web, u, se li assigna un nivell d'importància, $R(u)$, que depèn de dos factors principals: d'una banda, el nombre d'enllaços que apunten a aquesta pàgina i, d'una altra, la importància de les mateixes pàgines que contenen aquests enllaços (és a dir, una pàgina que sigui apuntada per pocs enllaços pot tenir més importància que una altra apuntada per molts enllaços, sempre que els enllaços que apuntin a la primera estiguin ubicats en pàgines importants, com www.nasa.gov, www.mit.edu, www.yahoo.com, etc.).

En definitiva, el nivell o índex d'importància d'una pàgina serà proporcional a la suma dels índexs d'importància de les pàgines que apunten a ella. Més concretament, si denotem per B_u el conjunt de pàgines amb enllaços a u, es pot definir el nivell d'importància de u com a:

$$R(u) = c \cdot \sum_{v \in B_u} R(v),$$

on $c \neq 0$ és una constant de proporcionalitat.

En general, si considerem un conjunt de n pàgines web, $u_1, u_2, \ldots, u_n$, tindrem el següent sistema d'equacions lineals (on $a_{ij} = 1$ si existeix un enllaç de la pàgina j a la i, i $a_{ij} = 0$ si no existeix aquest enllaç):

$$\begin{cases} R(u_1) = c \cdot \left(a_{11} \cdot R(u_1) + a_{12} \cdot R(u_2) + \ldots + a_{1n} \cdot R(u_n)\right) \\ R(u_2) = c \cdot \left(a_{21} \cdot R(u_1) + a_{22} \cdot R(u_2) + \ldots + a_{2n} \cdot R(u_n)\right) \\ \qquad \vdots \\ R(u_n) = c \cdot \left(a_{n1} \cdot R(u_1) + a_{n2} \cdot R(u_2) + \ldots + a_{nn} \cdot R(u_n)\right) \end{cases}$$

El SEL anterior es pot expressar matricialment com a:

$$\begin{pmatrix} R(u_1) \\ R(u_2) \\ \vdots \\ R(u_n) \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R(u_1) \\ R(u_2) \\ \vdots \\ R(u_n) \end{pmatrix}$$

i. e., denotant $\mathbf{A} = (a_{ij})$ i $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} R(u_1) \\ R(u_2) \\ \vdots \\ R(u_n) \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{c} \cdot \mathbf{w}$$

expressió que ens permet convertir el problema de l'assignació d'índexs d'importància en un problema consistent a trobar els denominats *vectors propis* $\mathbf{w}$ *de* $\mathbf{A}$ *associats al valor propi* $\frac{1}{c}$ (a la secció 7 es defineixen formalment aquests conceptes).

2. Concepte d'aplicació lineal

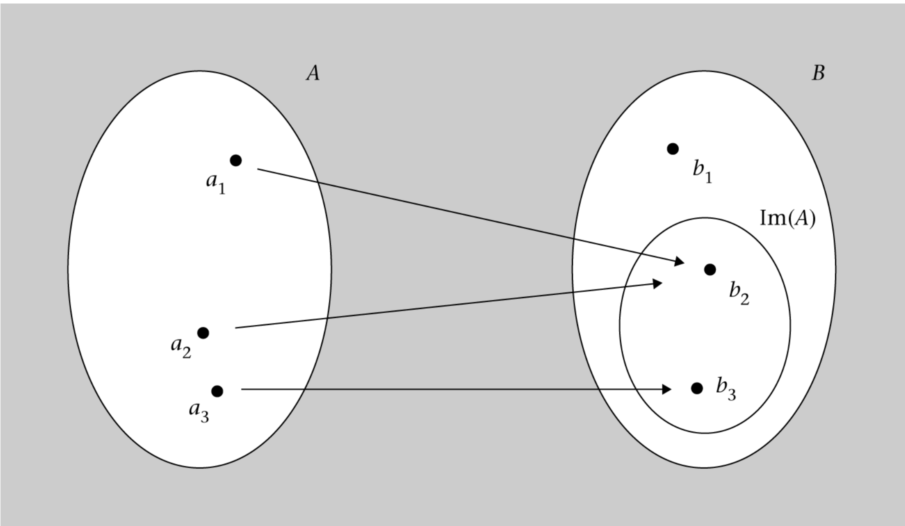
2.1. Aplicacions entre conjunts

Una **aplicació** f d'un conjunt origen A en un conjunt destinació B és una relació de correspondència que assigna a cada element $a \in A$ un únic element $b \in B$, per la qual cosa es diu que b és la **imatge** de a per f. Això es representa de la següent forma:

$$\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ a &\mapsto b = f(a) \end{aligned}$$

Per extensió, s'anomena **imatge** de A per f el subconjunt de B format per totes les imatges dels elements de A, és a dir: $\mathrm{Im}(A) = \{b \in B \mid b = f(a)$ per a algun $a \in A\}$ (figura 1).

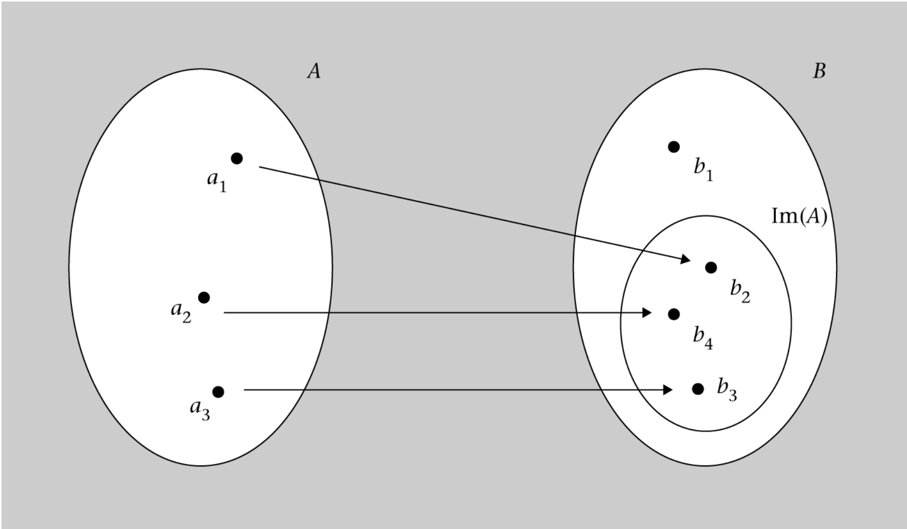
Figura 1. Aplicació entre dos conjunts



Si a elements diferents del conjunt origen els corresponen elements diferents del conjunt destinació, es diu que l'aplicació és injectiva. És a dir: f és una **aplicació injectiva** si

$$\forall a_1 \neq a_2,\ f(a_1) \neq f(a_2) \text{ (figura 2).}$$

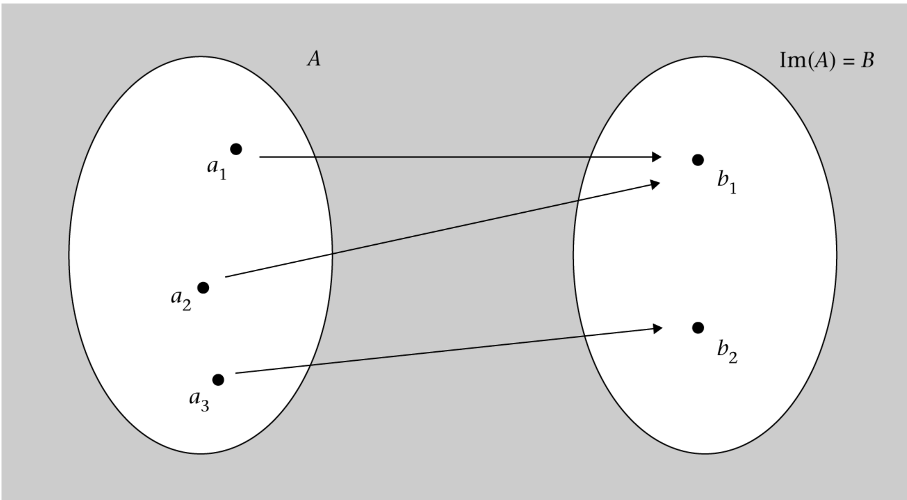
Figura 2. Aplicació injectiva



D'altra banda, es parla d'aplicació suprajectiva (o exhaustiva) quan la imatge del conjunt origen és tot el conjunt destinació, *i. e.*: f és una **aplicació suprajectiva (o exhaustiva)** si

$$\forall b \in B, \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b \quad \text{(figura 3).}$$

Figura 3. Aplicació suprajectiva (o exhaustiva)



Finalment, es diu que una aplicació és **bijectiva** quan és, al seu torn, injectiva i suprajectiva (és a dir, és una relació un a un o *one-to-one* que involucra tots els elements d'ambdós conjunts).

2.2. Aplicacions lineals entre espais vectorials

Siguin $(U, +, \cdot)$ y $(V, +, \cdot)$ espais vectorials sobre $\mathbb{R}$, i sigui f una aplicació entre U i V, *i. e.*:

$$\begin{aligned} f\colon U &\to V \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{v} = f(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Es diu que $f: U \to V$ és una **aplicació lineal** o **homomorfisme** si es verifiquen les següents condicions:

1. $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U, \quad f(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = f(\mathbf{u}_1) + f(\mathbf{u}_2)$
2. $\forall \mathbf{u} \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda \cdot \mathbf{u}) = \lambda \cdot f(\mathbf{u})$

O, el que és equivalent:

$$\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, f(\lambda_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{u}_2) = \lambda_1 \cdot f(\mathbf{u}_1) + \lambda_2 \cdot f(\mathbf{u}_2)$$

Una aplicació lineal s'anomena **endomorfisme** quan l'espai origen és el mateix que l'espai destinació, *i. e.*: $f: U \to U$.

Exemple 1. Exemple d'aplicació lineal

Sigui $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicació definida de la següent forma: $f(x, y, z) = (3x + y, 3y + z)$. Vegem si f és lineal:

Donats $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, es té que:

$$\begin{aligned}
& f(\lambda_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{u}_2) = f(\lambda_1(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2(x_2, y_2, z_2)) = \\
& = f((\lambda_1 x_1, \lambda_1 y_1, \lambda_1 z_1) + (\lambda_2 x_2, \lambda_2 y_2, \lambda_2 z_2)) = \\
& = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \\
& = (3(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2), 3(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \\
& = (3\lambda_1 x_1 + 3\lambda_2 x_2 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, 3\lambda_1 y_1 + 3\lambda_2 y_2 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \\
& = (\lambda_1(3x_1 + y_1) + \lambda_2(3x_2 + y_2), \lambda_1(3y_1 + z_1) + \lambda_2(3y_2 + z_2)) = \\
& = (\lambda_1(3x_1 + y_1), \lambda_1(3y_1 + z_1)) + (\lambda_2(3x_2 + y_2), \lambda_2(3y_2 + z_2)) = \\
& = \lambda_1(3x_1 + y_1, 3y_1 + z_1) + \lambda_2(3x_2 + y_2, 3y_2 + z_2) = \\
& = \lambda_1 \cdot f(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2, y_2, z_2) = \lambda_1 \cdot f(\mathbf{u}_1) + \lambda_2 \cdot f(\mathbf{u}_2)
\end{aligned}$$

Així doncs, hem comprovat que l'aplicació és lineal.

Exemple 2. Exemple d'aplicació no lineal

Sigui $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicació definida de la següent forma: $f(x, y) = (x + 2, y + 1)$. Com veurem, aquesta aplicació no serà lineal a causa dels termes independents que acompanyen les coordenades. Per a comprovar-ho, n'hi haurà prou de buscar un contraexemple:

Prenent $\mathbf{u} = (1, 0)$ i $\lambda = 2$, es té que $f(\lambda \cdot \mathbf{u}) = f(2, 0) = (4, 1)$, mentre que $\lambda \cdot f(\mathbf{u}) = 2 \cdot f(1, 0) = 2 \cdot (3, 1) = (6, 2)$.

3. Matriu associada a una aplicació lineal

Teorema. Siguin f: $U \to V$ una aplicació lineal, $B_U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ una base de U, i $B_V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m\}$ una base de V. En aquestes condicions, l'aplicació lineal f queda unívocament determinada per la matriu que conté les imatges dels elements de la base origen, B_U, en funció dels elements de la base destinació, B_V.

El teorema anterior s'ha d'interpretar de la següent forma: **"n'hi haurà prou de conèixer com actua l'aplicació lineal sobre els elements d'una base origen per a conèixer com actuarà aquesta sobre qualsevol altre vector de l'espai origen"**. Més formalment: per a conèixer el comportament de f n'hi haurà prou de conèixer el valor concret que prenen els a_{ij} ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$) en el següent conjunt de relacions (cada relació és l'expressió de la imatge d'un element de la base origen en funció dels elements de la base destinació):

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1) &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + ... + a_{m1}\mathbf{v}_m \\ f(\mathbf{u}_2) &= a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + ... + a_{m2}\mathbf{v}_m \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ f(\mathbf{u}_n) &= a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + ... + a_{mn}\mathbf{v}_m \end{aligned}$$

O, dit d'una altra manera, f queda unívocament determinada per la matriu de m files i n columnes següent:

Observació

La matriu associada a l'aplicació linial s'obté col·locant en columnes les coordenades de les imatges dels vectors de la base, expresades en la base de l'espai d'arribada.

$$\mathbf{M}(f \mid B_U, B_V) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La idea subjacent és que qualsevol vector de U es podrà expressar com a combinació lineal d'elements de B_U, per la qual cosa si es coneix com transforma f els elements de B_U, es podrà saber com transforma f qualsevol altre element de U. La proposició següent concreta aquesta idea:

Proposició. Donat un vector $\mathbf{u} \in U$, aquest es podrà expressar com a combinació lineal dels elements de B_U:

$$\mathbf{u} = x_1 \cdot \mathbf{u}_1 + x_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \ldots + x_n \cdot \mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

x_1, x_2, ..., x_n són les coordenades de $\mathbf{u}$ en la base B_U.

Per la seva banda, la seva imatge, $f(\mathbf{u}) \in V$, es podrà expressar com a combinació lineal d'elements de B_V:

$$f(\mathbf{u}) = y_1 \cdot \mathbf{v}_1 + y_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + y_m \cdot \mathbf{v}_m = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Doncs bé, es complirà que:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \mathbf{M}(f \mid B_U, B_V) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

i. e.:

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{M}(f \mid B_U, B_V) \cdot \mathbf{u}$$

És a dir, conegudes les coordenades del vector $\mathbf{u}$ en la base origen, i coneguda la matriu $\mathbf{M}(f \mid B_U, B_V)$, resulta immediat obtenir les coordenades de $f(\mathbf{u})$ en la base destinació.

Exemple 3. Matriu associada a una aplicació lineal

Sigui $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicació lineal. Es consideren les bases següents: $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 2, 2)\}$ i $B_{\mathbb{R}^2} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (és a dir, a $\mathbb{R}^2$ es considera la base canònica: $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ i $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$). Se sap, a més, que la imatge per f dels elements de $B_{\mathbb{R}^3}$ és:

$f(1, 0, 1) = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 = (2, 4)$
$f(0, 1, 1) = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 = (1, 3)$
$f(-1, 2, 2) = 3\mathbf{e}_2 = (0, 3)$

A partir de la informació anterior, és possible construir la matriu associada a f en les bases $B_{\mathbb{R}^3}$ i $B_{\mathbb{R}^2}$:

$$\mathbf{M}(f \mid B_{\mathbb{R}^3}, B_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Emprant aquesta matriu, podrem trobar l'expressió en $B_{\mathbb{R}^2}$ de la imatge per f de qualsevol vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Així, per exemple, donat el vector:

$$\mathbf{u} = -5 \cdot (1, 0, 1) + 1 \cdot (0, 1, 1) + 2 \cdot (-1, 2, 2) = (-7, 5, 0)$$

tenim que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -11 \end{pmatrix}$$

és a dir:

$$f(\mathbf{u}) = -9 \cdot \mathbf{e}_1 - 11 \cdot \mathbf{e}_2 = (-9, -11)$$

Exemple 4. Matriu associada a una aplicació lineal

Sigui $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal definida per $f(x, y, z) = (2x + y, y + z)$. Es vol calcular la matriu associada a f en les bases canòniques (per tant, la base origen serà $C_3 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, on $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ i $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ i la base de destinació serà $C_2 = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$, on $\mathbf{e}'_1 = (1,0)$ i $\mathbf{e}'_2 = (0,1)$).

La primera cosa serà calcular les imatges dels elements de la base origen:

$f(\mathbf{e}_1) = f(1,0,0) = (2,0) = 2 \cdot \mathbf{e}'_1$

$f(\mathbf{e}_2) = f(0,1,0) = (1,1) = \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2$

$f(\mathbf{e}_3) = f(0,0,1) = (0,1) = \mathbf{e}'_2$

La matriu associada serà, doncs: $\mathbf{M}(f \mid C_3, C_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Noteu que la matriu associada actua com l'aplicació lineal de la següent forma:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ y + z \end{pmatrix}.$$

Això vol dir que podem estudiar l'aplicació lineal a partir de la seva matriu associada. Naturalment, si canviem les bases, obtindrem una altra matriu associada.

4. Nucli i imatge d'una aplicació lineal

Una conseqüència immediata de la definició d'aplicació lineal és que la imatge del vector nul de l'espai origen és el vector nul de l'espai destinació. En efecte: $f(\mathbf{0}_U) = f(0 \cdot \mathbf{u}) = 0 \cdot f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V$.

S'anomena **nucli o *kernel*** de l'aplicació el conjunt de tots els vectors de l'espai origen la imatge dels quals sigui el vector nul de l'espai destinació, *i. e.*:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{u} \in U \,/\, f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V\}$$

Observeu que $\mathrm{Ker}(f) \neq \emptyset$, ja que, segons s'ha vist, $\mathbf{0}_U \in \mathrm{Ker}(f)$. Es compleix, a més, que $\mathrm{Ker}(f)$ és un subespai vectorial de l'espai origen, *i. e.*: $\mathrm{Ker}(f) \subseteq U$.

Exemple 5. Càlcul del nucli d'una aplicació lineal

Sigui $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicació lineal definida de la següent forma: $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y)$. Trobem el seu nucli:

$\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x, y, z) = (0, 0)\} =$
$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x + y + z, x + y) = (0, 0)\} =$
$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0, x + y = 0\} =$
$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = -x, z = 0\} = \{(x, -x, 0) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$

Així doncs, $\mathrm{Ker}(f)$ serà el subespai vectorial generat per un únic vector, el vector $(1, -1, 0)$, *i. e.*: $\mathrm{Ker}(f) = <(1, -1, 0)>$, per la qual cosa la seva dimensió serà 1. Observeu que, en aquest cas, $\mathrm{Ker}(f)$ és una recta en $\mathbb{R}^3$, el vector director de la qual és el $(1, -1, 0)$.

Exemple 6. Càlcul del nucli d'una aplicació lineal

Sigui $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal definida de la següent forma: $f(x, y, z, t) = (x + 2y + 5t, y - z + 3t, -x - y - z - 2t)$. Trobem el seu nucli:

$\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, f(x, y, z, t) = (0, 0, 0)\} =$
$= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, (x + 2y + 5t, y - z + 3t, -x - y - z - 2t) = (0, 0, 0)\} =$
$= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x + 2y + 5t = 0, y - z + 3t = 0, -x - y - z - 2t = 0\}$

Si resolem el sistema homogeni, obtenim infinites solucions amb dos graus de llibertat:

$x = -2y - 5t$
$y = y$
$z = y + 3t$
$t = t$

Per tant,

$\mathrm{Ker}(f) = \{(-2y - 5t, y, y + 3t, t) \,/\, y, t \in \mathbb{R}\} = \langle(-2, 1, 1, 0), (-5, 0, 3, 1)\rangle$.

En la resolució de l'exemple, fixeu-vos que, segons com es faci la resolució, es poden trobar unes altres bases del nucli. Si donem uns valors diferents a la y i a la t, obtenim una altra base del nucli; o si s'aïlla, per exemple, en funció de la z i de la t, apareixen altres bases, però el subespai és sempre el mateix.

És a dir, Ker(f) és el subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ generat pels dos vectors linealment independents (–2, 1, 1, 0) i (–5, 0, 3, 1), per la qual cosa la seva dimensió serà 2.

S'anomena **imatge** de l'aplicació el conjunt de tots els vectors de l'espai destinació que són imatge d'algun vector de l'espai origen, *i. e.*:

$$\mathrm{Im}(f) = \{\mathbf{v} \in V \;/\; \mathbf{v} = f(\mathbf{u}) \text{ per a algun } \mathbf{u} \in U\}$$

De manera anàloga al que ocorria amb el Ker(f), també Im(f) és un subespai vectorial, en aquest cas de l'espai vectorial destinació, *i. e.*: $\mathrm{Im}(f) \subseteq V$. D'altra banda, és obvi que $\mathrm{Im}(f) \neq \emptyset$, ja que, segons s'ha comentat, $f(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$, per la qual cosa $\mathbf{0}_V \in \mathrm{Im}(f)$.

Exemple 7. Imatge d'una aplicació lineal

Sigui f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal definida de la següent forma: $f(x, y) = (x + y, x - y, 3x)$. És cert que $(1, 2, 3) \in \mathrm{Im}(f)$?

$\mathrm{Im}(f) = \{(x + y, x - y, 3x) \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Així doncs, perquè el vector (1, 2, 3) pertanyi a Im(f), s'hauran de complir les següents condicions:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \\ 3x = 3 \end{cases}$$

Tanmateix, resulta immediat comprovar que el sistema anterior és incompatible, per la qual cosa $(1, 2, 3) \notin \mathrm{Im}(f)$.

Per a determinar una base del subespai vectorial Im(f), resulta de summa utilitat la següent proposició:

Proposició. Sigui f: $U \to V$ una aplicació lineal i $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ una base de U. Llavors, $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_1), ..., f(\mathbf{u}_n)\}$ constitueixen un sistema generador de Im(f).

Exemple 8. Càlcul d'una base per a la imatge d'una aplicació lineal

Sigui f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicació lineal definida de la següent forma: $f(x, y) = (2x + y, x + 3y, x + y)$. Determinem una base per a Im(f):

Una base de l'espai origen és $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Calculem la imatge de tots dos vectors:

$f(1, 0) = (2, 1, 1)$
$f(0, 1) = (1, 3, 1)$

Per tant, els vectors $(2, 1, 1)$ i $(1, 3, 1)$ constitueixen un sistema generador de $\mathrm{Im}(f)$, *i. e.*: $\mathrm{Im}(f) = \langle(2, 1, 1),\ (1, 3, 1)\rangle$. De fet, tots dos vectors constitueixen una base de $\mathrm{Im}(f)$, atès que són linealment independents (per a comprovar-ho, n'hi ha prou d'observar que el rang de la matriu que formen és 2 o, equivalentment, que l'un no és múltiple de l'altre). Per tant, la dimensió de $\mathrm{Im}(f)$ és 2. En aquest cas, $\mathrm{Im}(f)$ es pot interpretar com el pla de $\mathbb{R}^3$ generat pels vectors anteriors.

El següent resultat proporciona una relació fonamental entre les dimensions dels espais vectorials origen, nucli i imatge d'una aplicació lineal:

Teorema de la dimensió. Sigui $f\colon U \to V$ una aplicació lineal, es compleix

$$\dim U = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

5. Monomorfismes i epimorfismes

Quan una aplicació lineal o homomorfisme és injectiva, es parla de **monomorfisme**, quan és suprajectiva, es parla d'**epimorfisme**, i quan compleix totes dues condicions (és a dir, és bijectiva), es parla d'**isomorfisme**. Els següents resultats poden ser útils a l'hora de classificar una aplicació lineal:

Proposició. Sigui $f: U \to V$ una aplicació lineal, $B_U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ una base de U i $B_V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m\}$ una base de V. Són equivalents:

a) f és un monomorfisme (*i. e.*, f és injectiva)
b) $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ (*i. e.*: $\dim \mathrm{Ker}(f) = 0$)
c) $\mathbf{M}(f \mid B_U, B_V)$ té rang $n = \dim U$

Proposició. Sigui $f: U \to V$ una aplicació lineal, $B_U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ una base de U, i $B_V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m\}$ una base de V. Són equivalents:

a) f és un epimorfisme (*i. e.*, f és suprajectiva)
b) $\mathrm{Im}(f) = V$ (*i. e.*: $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim V$)
c) $\mathbf{M}(f \mid B_U, B_V)$ té rang $m = \dim V$

6. Canvis de base en una aplicació lineal

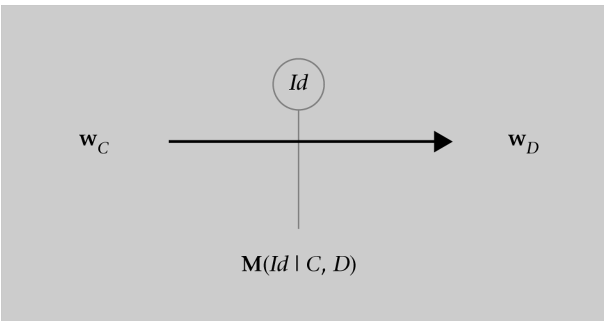
Com s'ha comentat anteriorment, donada una aplicació lineal $f: U \to V$ i una base per a cada espai vectorial, $B_U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ i $B_V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_m\}$, és possible considerar la matriu associada a f en aquestes bases, $\mathbf{M}(f \mid B_U, B_V)$. Recordeu que aquesta matriu defineix, de manera unívoca, l'aplicació lineal i que, de fet, les columnes de $\mathbf{M}(f \mid B_U, B_V)$ són les imatges dels vectors de la base origen, imatges expressades com a combinació lineal dels vectors de la base de destinació. És evident, per tant, la següent observació.

Observació: $\mathbf{M}(f \mid B_U, B_V)$ depèn de les bases escollides en cada espai vectorial, amb la qual cosa la matriu associada a f en altres bases serà diferent.

En un espai vectorial W, el procés que consisteix a canviar una base qualsevol $C = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, ..., \mathbf{c}_n\}$ per una altra $D = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, ..., \mathbf{d}_n\}$ es pot interpretar com un cas particular d'aplicació lineal. L'endomorfisme identitat $\forall \mathbf{w} \in W$ es defineix $Id(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$, *i. e.*: no canvia el vector, només la base de referència en la qual aquest s'expressa i, per tant, les seves coordenades (d'una banda, $\mathbf{w} = x_1 \cdot \mathbf{c}_1 + ... + x_n \cdot \mathbf{c}_n$, però també $\mathbf{w} = y_1 \cdot \mathbf{d}_1 + ... + y_n \cdot \mathbf{d}_n$).

Com tota aplicació lineal, l'endomorfisme identitat també tindrà la seva matriu associada en les bases triades, $\mathbf{M}(Id \mid C, D)$ (figura 4).

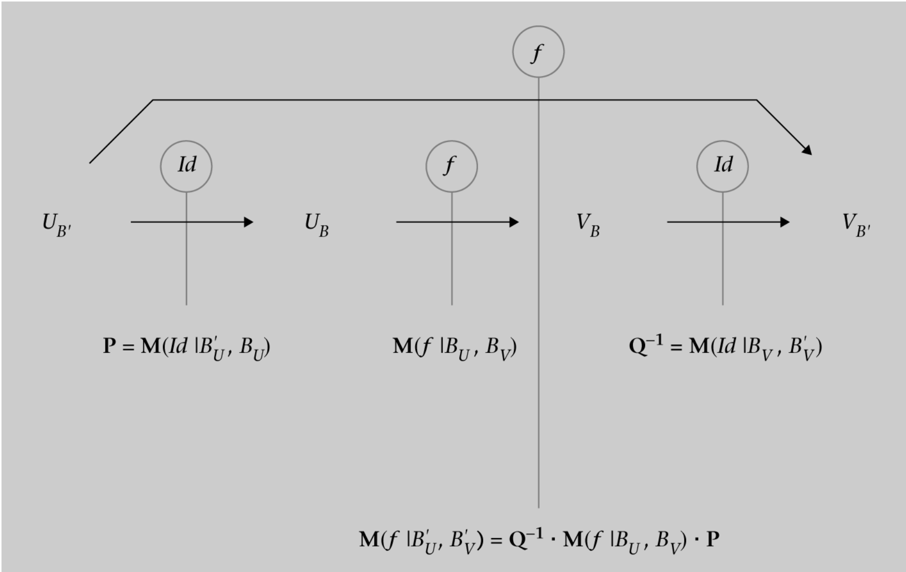
Figura 4. Matriu associada a l'endomorfisme identitat



Es compleix, per tant, que $\mathbf{M}(Id \mid C, D) = \mathbf{M}(Id \mid D, C)^{-1}$, és a dir, que la matriu associada al canvi de la base C a la base D és la inversa de l'associada al canvi de la base D a la base C.

Així doncs, quan es considera l'aplicació f: $U \to V$ en dues noves bases, $B_U^{'} = \{\mathbf{u}_1^{'}, \mathbf{u}_2^{'}, ..., \mathbf{u}_n^{'}\}$ i $B_V^{'} = \{\mathbf{v}_1^{'}, \mathbf{v}_2^{'}, ..., \mathbf{v}_n^{'}\}$, el que es fa és una composició d'aplicacions lineals, $Id \circ f \circ Id$ (figura 5).

Figura 5. Matriu associada després d'un canvi de bases



Atès que es tracta d'una composició d'aplicacions, es compleix el següent resultat:

Proposició. La matriu associada a l'aplicació lineal $f: U \to V$ en les noves bases B'_U i B'_V, $\mathbf{M}(f \mid B'_U, B'_V)$ verifica la relació

$$\mathbf{M}(f \mid B'_U, B'_V) = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{M}(f \mid B_U, B_V) \cdot \mathbf{P}$$

on

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}(f \mid B'_V, B_V) \qquad \mathbf{P} = \mathbf{M}(f \mid B'_U, B_U)$$

Exemple 9. Canvi de base en una aplicació lineal

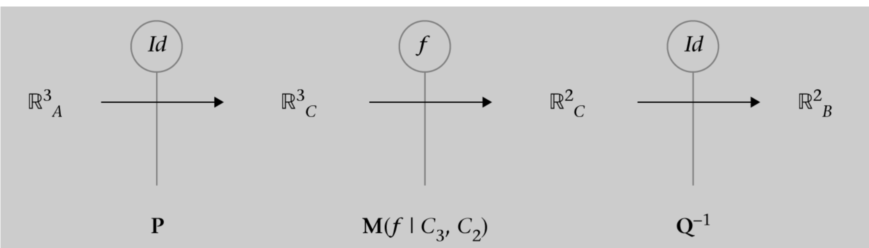
En un exemple anterior ja s'ha comprovat que l'aplicació lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x, y, z) = (2x + y, y + z)$ tenia per matriu associada en les bases canòniques la matriu:

$$\mathbf{M}(f \mid C_3, C_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Suposem que es consideren ara les noves bases $A = \{(1, 0, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ i $B = \{(2, 0), (1, -1)\}$, quina serà ara la matriu associada, $\mathbf{M}(f \mid A, B)$?

L'esquema, en aquest cas, és el següent:

Figura 6



En primer lloc, calculem la matriu **Q**, que és la matriu associada al canvi de base de $B = \{(2, 0), (1, -1)\}$ a $C_2 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{(1, 0,), (0, 1)\}$. Es pot observar que:

$Id(2, 0) = (2, 0) = 2 \cdot \mathbf{e}_1$
$Id(1, -1) = (1, -1) = \mathbf{e}_1 - 1 \cdot \mathbf{e}_2$

Per la qual cosa la matriu serà $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ i, per tant, la matriu de canvi de base de C_2 a B serà la seva inversa, *i. e.*: $\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

El segon pas serà obtenir la matriu **P**, que és la matriu associada al canvi de base de $A = \{(1, 0, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ a $C_3 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. És obvi que:

$Id(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = \mathbf{e}_1$
$Id(1, -1, 0) = (1, -1, 0) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$
$Id(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = \mathbf{e}_3$

I, per tant, la matriu buscada és $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Arribats a aquest punt, ja tenim totes les matrius que intervenen en l'expressió de la matriu associada a f en les bases A i B:

O el que és igual:

$$\mathbf{M}(f \mid A, B) = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{M}(f \mid C_3, C_2) \cdot \mathbf{P}$$

És a dir,

$$\mathbf{M}(f \mid A, B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Vectors i valors propis

Si $f: U \to U$ és un endomorfisme, es diu que un vector no nul de U, $\mathbf{u} \in U \setminus \{\mathbf{0}\}$, és **vector propi** de f (**VEP**) si existeix $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{u}) = \lambda \cdot \mathbf{u}$. El valor λ s'anomena **valor propi** associat al vector propi $\mathbf{u}$ (**VAP**).

Exemple 10. Valors i vectors propis

Sigui $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorfisme que, en la base canònica $C_2 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, té per matriu associada $\mathbf{M}(f \mid C_2, C_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Comprovarem que el vector $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ és vector propi de f amb valor propi associat $\lambda = 4$. Efectivament:

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{M}(f \mid C_2, C_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, comprovarem que $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ és vector propi de f amb valor propi associat $\mu = -1$, atès que:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}(f \mid C_2, C_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Segons la definició anterior, si $\mathbf{M}(f \mid A, B)$ és la matriu associada a l'endomorfisme en les bases A i B, els vectors propis de f seran aquells vectors no nuls, $\mathbf{u} \in U \setminus \{\mathbf{0}\}$, que verifiquin la condició:

$$\mathbf{M}(f \mid A, B) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u} \text{ per a algun } \lambda \in \mathbb{R}$$

i. e.:

$$(\mathbf{M}(f \mid A, B) - \lambda \cdot \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ per a algun } \lambda \in \mathbb{R}$$

on $\mathbf{I}_n$ és la matriu identitat d'ordre $n = \dim U$.

Atès que el sistema homogeni anterior ha d'admetre solució no trivial i que es busca $\mathbf{u} \neq 0$, l'equació que permet trobar els valors i vectors propis de f es pot expressar en forma de determinants com segueix:

$$|\mathbf{M}(f \mid A, B) - \lambda \cdot \mathbf{I}_n| = 0 \text{ per a algun } \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'expressió $|\mathbf{M}(f \mid A, B) - \lambda \cdot \mathbf{I}_n|$ s'anomena **polinomi característic** de f, $p(\lambda)$. Es pot demostrar que $p(\lambda)$ és independent de les bases A i B escollides, per la qual cosa se sol denotar per $p(\lambda) = |\mathbf{M} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n|$.

Vist que el conjunt de VEP per a un cert VAP és el nucli de l'aplicació lineal $\mathbf{M} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n$, aquest serà sempre un subespai vectorial de U.

Exemple 11. Càlcul de valors i vectors propis

Sigui f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfisme definit, en bases canòniques, per: $f(x, y, z) = (3x - 2y, -2x + 3y, 5z)$.

Trobem els valors i vectors propis de l'endomorfisme:

La matriu de f en la base canònica és:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculem el polinomi característic:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5)$$

Resolent l'equació característica, $p(\lambda) = 0$, obtenim dos valors propis: el VAP $\lambda = 1$ (amb multiplicitat 1) i el VAP $\lambda = 5$ (amb multiplicitat 2).

Els VEP corresponents al VAP $\lambda = 1$:

$$(\mathbf{M} - 1 \cdot \mathbf{I})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = x, \quad z = 0$$

Per tant, els VEP associats al VAP $\lambda = 1$ seran $\{(x, x, 0) \,/\, x \in \mathbb{R}\} = \langle(1, 1, 0)\rangle$

Els VEP corresponents al VAP $\lambda = 5$:

$$(\mathbf{M} - 5 \cdot \mathbf{I})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -y$$

Per tant, els VEP associats al VAP $\lambda = 5$ seran $\{(-y, y, z)\} = \langle(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle$.

8. Diagonalització d'endomorfismes

8.1. Diagonalització: conceptes i resultats

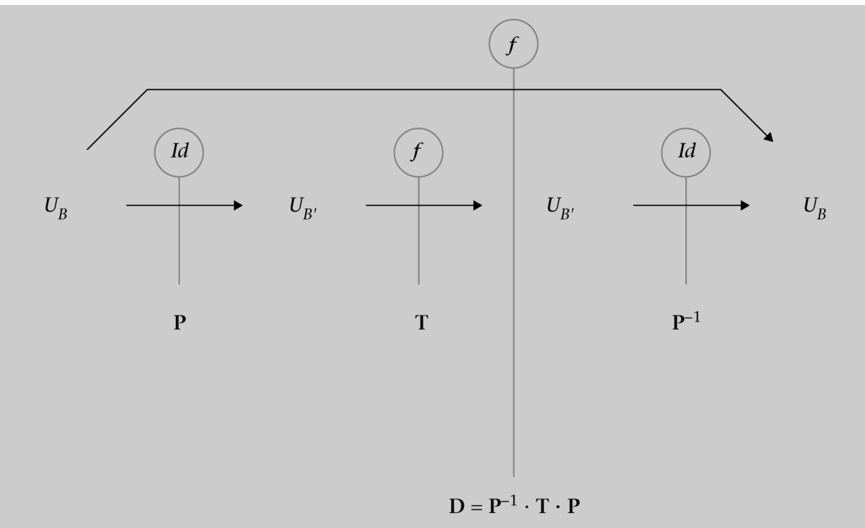
Segons el que hem vist en els apartats anteriors, donat f: $U \rightarrow U$, aquest endomorfisme unívocament el determinarà la matriu associada a f en les bases escollides, $\mathbf{M}(f \mid A, B)$. És a dir: per a trobar les coordenades en B de $f(\mathbf{u})$, n'hi haurà prou de multiplicar $\mathbf{M}(f \mid A, B)$ per les coordenades en A del vector $\mathbf{u}$. Òbviament, el càlcul de $f(\mathbf{u})$ resultarà molt més senzill de realitzar com més senzilla sigui l'expressió de la matriu associada a l'endomorfisme, la qual dependrà de les bases A i B escollides.

En aquest sentit, resulta interessant la cerca d'unes bases en les quals la matriu associada sigui diagonal (és a dir, una matriu en la qual siguin nuls tots els elements situats fora de la diagonal principal). Com es veurà en aquest apartat, els valors i vectors propis de l'endomorfisme tenen un paper fonamental en la cerca de la matriu diagonal associada a l'endomorfisme, si bé és important aclarir que no en tots els casos serà possible representar l'endomorfisme mitjançant una matriu diagonal.

Un **endomorfisme** f: $U \rightarrow U$ és **diagonalitzable** si hi ha alguna base B de U en la qual la matriu associada a f sigui diagonal. Per analogia, es diu que una **matriu** quadrada $\mathbf{T}$ és **diagonalitzable** si hi ha una altra matriu diagonal $\mathbf{D}$ que estigui associada al mateix endomorfisme (*i. e.*, $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}$ o, el que és el mateix, $\mathbf{T} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$, essent $\mathbf{P}$ una matriu de canvi de base) (figura 7).

Teorema. Un endomorfisme f: $U \rightarrow U$ és diagonalitzable si, i només si, té n VEP linealment independents, essent $n = \dim U$.

Figura 7. Diagonalització d'un endomorfisme



A l'hora d'estudiar la independència lineal d'un conjunt de VEP, convé tenir present el següent resultat:

Proposició. Vectors propis associats a valors propis diferents són linealment independents.

El problema de la diagonalització d'un endomorfisme f: $U \to U$ es tradueix a trobar, si existeix, una base B de U formada únicament per vectors propis de f. Si existeix aquesta base $B = \{VEP\}$, la matriu associada serà diagonal, essent els elements d'aquesta diagonal els valors propis, *i. e.*:

$$\mathbf{M}\left(f \mid \{VEP\},\{VEP\}\right) = \begin{pmatrix} V & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & P & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Els següents resultats poden ser útils a l'hora d'agilitzar l'estudi de la diagonalització d'un endomorfisme:

Proposició. Sigui f: $U \to U$ un endomorfisme, i sigui $n = \dim U$.

a) Si en una base ortonormal la matriu associada a f és simètrica, llavors f és diagonalitzable.
b) Si f té n VAP reals i diferents, llavors f és diagonalitzable a $\mathbb{R}$.
c) Si f té algun VAP complex, llavors f no serà diagonalitzable a $\mathbb{R}$.

Teorema. Sigui f: $U \to U$ un endomorfisme i sigui $n = \dim U$, f és diagonalitzable si, i només si:

1) el polinomi característic descompon completament en factors reals de grau 1 (possiblement repetits)

2) la multiplicitat de cada VAP coincideix amb la dimensió de l'espai vectorial generat pels seus VEP associats.

Exemple 12. Diagonalització de matrius

Sigui f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfisme definit per:

$$f(x, y, z) = (-2x + 4y + 5z, -3x + 5y + 5z, z)$$

Vegem si f és diagonalitzable i, en cas afirmatiu, determinem una base en què diagonalitzi i la matriu diagonal associada.

La matriu associada a f en la base canònica és:

$$\mathbf{M}(f \mid C_3, C_3) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomi característic és:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & 5 \\ -3 & 5-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Descompon completament.

Les arrels del polinomi característic són els valors propis, que són: $\lambda = 1$, de multiplicitat 2, i $\lambda = 2$, de multiplicitat 1.

El subespai $V_{\lambda=1}$, associat al valor propi $\lambda = 1$, està format per les solucions del següent SEL homogeni:

$$\begin{pmatrix} -2-1 & 4 & 5 \\ -3 & 5-1 & 5 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$V_{\lambda=1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ -3x + 4y + 5z = 0\} = \langle(4, 3, 0)(5, 0, 3)\rangle$.

El subespai propi $V_{\lambda=2}$, associat al valor propi $\lambda = 2$, està format per les solucions del següent SEL homogeni:

$$\begin{pmatrix} -2-2 & 4 & 5 \\ -3 & 5-2 & 5 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$V_{\lambda=2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x,\ z = 0\} = \langle(1, 1, 0)\rangle$.

Atès que els VEP obtinguts són linealment independents, $B = \{(4, 3, 0), (5, 0, 3), (1, 1, 0)\}$ és base de $\mathbb{R}^3$. La matriu associada a f en la base B és la matriu diagonal:

$$\mathbf{M}(f \mid B, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Observació: permutant els vectors de la base B, obtenim una altra base de VEP i, per tant, una altra matriu diagonal. Així, per exemple, prenent $B' = \{(4, 3, 0), (1, 1, 0), (5, 0, 3)\}$, la matriu associada a f en aquesta base és:

$$\mathbf{M}(f \mid B', B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 13. Diagonalització de matrius

Determinem els valors i vectors propis de l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ la matriu associada del qual, respecte a la base canònica, és:

$$\mathbf{M}(f \mid C_3, C_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

És diagonalitzable la matriu $\mathbf{M}(f \mid C_3, C_3)$?

El polinomi característic és:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (2-\lambda)(\lambda+1)^2$$

Les arrels del polinomi característic són els valors propis, que són: $\lambda = -1$, de multiplicitat 2, i $\lambda = 2$, de multiplicitat 1.

El subespai $V_{\lambda=2}$, associat al valor propi $\lambda = 2$, està format per totes les solucions del següent SEL homogeni:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$V_{\lambda=2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -3x,\ z = -2x\} = \langle(1, -3, -2)\rangle$.

El subespai $V_{\lambda=-1}$, associat al valor propi $\lambda = -1$, està format per totes les solucions del següent SEL homogeni:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$V_{\lambda=-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x,\ y = 0\} = \langle(1, 0, 1)\rangle$.

La matriu $\mathbf{M}(f \mid C_3, C_3)$ no és diagonalitzable perquè la multiplicitat del valor propi $\lambda = -1$ és $2 \neq \dim(V_{\lambda=-1}) = 1$, amb la qual cosa no es podrà formar una base de VEP per a $\mathbb{R}^3$.

Exemple 14. Diagonalització de matrius

Determinem si la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ és diagonalitzable.

El polinomi característic és:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

Aquest polinomi no té arrels reals i, per tant, la matriu $\mathbf{A}$ no és diagonalitzable.

Exemple 15. Diagonalització de matrius

L'endomorfisme $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es defineix a partir de la imatge dels vectors de la base canònica:

$f(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$
$f(0, 1, 0) = (0, 1, 2)$
$f(0, 0, 1) = (0, -2, 1)$

És f diagonalitzable?

La matriu associada a f en la base canònica és:

$$\mathbf{M}(f \mid C_3, C_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomi característic és:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$$

L'única arrel real del polinomi característic és $\lambda = 1$, i aquesta té multiplicitat 1, per la qual cosa el polinomi característic no descompon completament. Per tant, l'endomorfisme f no és diagonalitzable.

8.2. Aplicació al càlcul de potències d'una matriu

Un dels avantatges de treballar amb matrius diagonals és que elevar una matriu diagonal a una potència és equivalent a elevar a aquesta potència cada un dels elements de la diagonal principal, és a dir:

Proposició. Sigui $\mathbf{D}$ una matriu diagonal, *i. e.*, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$, i sigui $m \in \mathbb{N}$. Llavors: $\mathbf{D}^m = \begin{pmatrix} d_{11}^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^m & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^m \end{pmatrix}$.

La facilitat amb la qual es poden calcular potències d'una matriu diagonal és una de les raons per les quals pot resultar útil buscar la matriu diagonal associada a un endomorfisme. En concret:

Teorema. Sigui **T** una matriu quadrada diagonalitzable, i **D** la seva forma diagonal, *i. e.*, $\mathbf{T} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ per a alguna matriu de canvi de base **P**.

Llavors,

$$\mathbf{T}^m = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^m \cdot \mathbf{P}^{-1} \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Exemple 16. Aplicació de la forma diagonal d'un endomorfisme

Es vol calcular $\mathbf{A}^{100}$, essent $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 42 & -42 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ la matriu associada a un endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ en la base canònica.

El polinomi característic de **A** és:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda) = (1 - \lambda)\,\lambda\,(\lambda + 1).$$

Per tant, **A** té tres valors propis diferents: $\lambda = 0$ (multiplicitat 1), $\lambda = 1$ (multiplicitat 1) i $\lambda = -1$ (multiplicitat 1), així doncs la matriu és diagonalitzable.

Calculem els vectors propis associats a cada valor propi:

Per a $\lambda = 0$, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 6 & 42 & -42 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad x = 7\lambda,\; y = 0,\; z = \lambda$$

Per tant, un VEP associat al VAP $\lambda = 0$ és $\mathbf{u} = (7, 0, 1)$.

Per a $\lambda = 1$, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 42 & -42 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad x = 0,\; y = \lambda,\; z = \lambda.$$

Per tant, un VEP associat al VAP $\lambda = 1$ és $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.

Per a $\lambda = -1$, resolem el sistema:

$$\begin{pmatrix} 7 & 42 & -42 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad x = 6\lambda,\; y = 0,\; z = \lambda$$

Per tant, un VEP associat al VAP $\lambda = -1$ és $\mathbf{w} = (6, 0, 1)$.

Podem prendre, doncs, la base de VEP, $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, en la qual la matriu diagonal és:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenim, doncs, que $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$, on $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ és la matriu de canvi de base de $B = \{VEP\} = \{(7, 0, 1), (0, 1, 1), (6, 0, 1)\}$ a la base canònica $C_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Pel teorema anterior sabem que $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^{100} \cdot \mathbf{P}^{-1}$, és a dir:

$$\mathbf{A}^{100} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^{100} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{100} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -42 & 42 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

8.3. Aplicació a l'estudi de sistemes dinàmics. Estudi d'un cas

Enunciat del cas

Considerem una LAN (*local area network*) formada per 3 servidors (A, B i C) i diverses desenes d'ordinadors clients. Entre altres funcions, els servidors emmagatzemen arxius de dades que són transferides diàriament d'un servidor a altre a petició dels clients. S'estima que, al llarg d'una jornada laboral qualsevol, els fitxers seran transferits d'un servidor a la resta segons el següent esquema:

- El 50% dels GB disponibles en el servidor A a l'inici de la jornada romandrà en A al final de la jornada; un 20% seran transferits al servidor B i la resta seran transferits a C.

- El 20% dels GB disponibles en el servidor B a l'inici de la jornada seran transferits al servidor A, un 40% al servidor C i la resta romandrà en B.

- El 80% dels GB disponibles en el servidor C a l'inici de la jornada romandran en C i la resta serà transferida al servidor A.

Suposant que el nombre total de GB és aproximadament constant durant tot un any (més de 300 jornades), es fa el següent:

a) Plantejar el sistema d'equacions que representa la distribució dels GB en la LAN.

Nota: si $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ representen, respectivament, el nombre de GB ubicats la jornada t en els servidors A, B i C, es tractarà d'obtenir –a partir de l'esquema de distribució anterior– un sistema d'equacions de la forma:

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= a_{11}\, x(t) \;+\; a_{12}\, y(t) \;+\; z_{13}\, z(t)\\
y(t+1) &= a_{21}\, x(t) \;+\; a_{22}\, y(t) \;+\; z_{23}\, z(t)\\
z(t+1) &= \mathrm{a}_{31}\, x(t) \;+\; a_{32}\, y(t) \;+\; z_{33}\, z(t)
\end{aligned}$$

on els a_{ij} són els coeficients que s'han de determinar.

b) Escriure el sistema anterior en forma matricial, essent **M** la matriu de coeficients.

c) Denotant per 0 la jornada inicial i per k una jornada qualsevol ($0 < k < 300$), raonar breument per què es complirà que:

$$\begin{pmatrix} x(k)\\ y(k)\\ z(k)\end{pmatrix} = \mathbf{M}^k \cdot \begin{pmatrix} x(0)\\ y(0)\\ z(0)\end{pmatrix}$$

Observació: l'expressió anterior ens permet predir la "càrrega" (nombre de GB) que tindrà cada un dels servidors la jornada k-èsima a partir de la "càrrega inicial" de cada servidor.

d) Trobar els VAP i VEP de **M**, i també la seva matriu diagonal associada.

e) Sabent que les càrregues inicials són $x(0) = 350$, $y(0) = 500$ i $z(0) = 200$, utilitzar els resultats que s'han obtingut a l'apartat anterior per a predir la "càrrega" de cada servidor les jornades: $k = 3$, $k = 5$, $k = 10$, $k = 15$, $k = 20$, $k = 50$ i $k = 100$.

Resolució del cas

a) El sistema d'equacions és:

$$\begin{aligned}
x(t+1) &= 0.5\, x(t) \;+\; 0.2\, y(t) \;+\; 0.2\, z(t)\\
y(t+1) &= 0.2\, x(t) \;+\; 0.4\, y(t)\\
z(t+1) &= 0.3\, x(t) \;+\; 0.4\, y(t) \;+\; 0.8\, z(t)
\end{aligned}$$

b) Matricialment:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \\ z(t+1) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

c) Observar que:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} x(k-1) \\ y(k-1) \\ z(k-1) \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} x(k-2) \\ y(k-2) \\ z(k-2) \end{pmatrix} = \ldots =$$

$$= \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} \cdot \ldots \cdot \mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} x(k-k) \\ y(k-k) \\ z(k-k) \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{\mathrm{k}} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}$$

d) Considerem el polinomi característic, que és el determinant:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 0.5-\lambda & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4-\lambda & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.8-\lambda \end{vmatrix}$$

Solucionant l'equació característica $p(\lambda) = 0$ arribem als valors propis $\lambda = 1, 0.4, 0.3$.

Ara busquem els vectors que generen el subespai V_λ pels valors de λ trobats.

Quan $\lambda = 1$, solucionem el sistema

$$\begin{pmatrix} 0.5-1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4-1 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.8-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que no és més que

$$\begin{cases} -0.5x & +0.2y & +0.2z & = & 0 \\ 0.2x & -0.6y & & = & 0 \\ 0.3x & +0.4y & -0.2z & = & 0 \end{cases}$$

Els vectors propis de valor propi $\lambda = 1$ són les solucions d'aquest sistema, és a dir:

$$(x, y, z) = (0.46z, 0.15z, z)$$

Quan $\lambda = 0.4$, solucionem el sistema

$$\begin{pmatrix} 0.5-0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4-0.4 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.8-0.4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que no és més que

$$\begin{cases} 0.1x & +0.2y & +0.2z & = & 0 \\ 0.2x & & & = & 0 \\ 0.3x & +0.4y & +0.4z & = & 0 \end{cases}$$

Els vectors propis de valor propi $\lambda = 0.4$ són les solucions d'aquest sistema, és a dir:

$$(x, y, z) = (0, -z, z)$$

Quan $\lambda = 0.3$, solucionem el sistema

$$\begin{pmatrix} 0.5-0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4-0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.8-0.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que no és més que

$$\begin{cases} 0.2x & +0.2y & +0.2z & = & 0 \\ 0.2x & +0.1y & & = & 0 \\ 0.3x & +0.4y & +0.5z & = & 0 \end{cases}$$

Els vectors propis de valor propi $\lambda = 0.3$ són les solucions d'aquest sistema, és a dir:

$$(x, y, z) = (z, -2z, z)$$

Per tant, la matriu diagonal D i la seva matriu de canvi de base associada P són:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0.46 & 0 & 1 \\ 0.15 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Per teoria, sabem que $\mathbf{M}^k = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{P}^{-1}$, per tant (emprant programari en els càlculs):

$$\text{càrrega}(0) := \begin{pmatrix} 350 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix} \qquad \text{càrrega}(k) := \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^k \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \text{càrrega}(0)$$

$$\text{càrrega}(1) = \begin{pmatrix} 315 \\ 270 \\ 465 \end{pmatrix}, \text{càrrega}(2) = \begin{pmatrix} 304.5 \\ 171 \\ 574.5 \end{pmatrix}, \text{càrrega}(3) = \begin{pmatrix} 301.35 \\ 129.3 \\ 619.35 \end{pmatrix}, \text{càrrega}(5) = \begin{pmatrix} 300.12 \\ 104.88 \\ 645 \end{pmatrix}$$

$$\text{càrrega}(10) = \begin{pmatrix} 300 \\ 100.05 \\ 649.95 \end{pmatrix}, \text{càrrega}(15) = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 650 \end{pmatrix}, \text{càrrega}(50) = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 650 \end{pmatrix}, \text{càrrega}(100) = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 650 \end{pmatrix}$$

S'observa que la càrrega de cada servidor serà estable (romandrà constant) a mitjà-llarg termini (aproximadament a partir de $k = 10$).

Resum

En aquest mòdul s'han presentat els principals conceptes i resultats associats a la teoria d'aplicacions lineals entre espais vectorials.

Entre els aspectes tractats, destaquen els següents conceptes clau (consulteu també el glossari al final del mòdul):

- Aplicació entre conjunts (injectiva, exhaustiva, bijectiva)
- Aplicació lineal (homomorfisme) entre espais vectorials
- Matriu associada a una aplicació lineal
- Nucli i imatge d'una aplicació lineal
- Monomorfisme, epimorfisme i isomorfisme
- Canvis de base en una aplicació lineal
- Valors i vectors propis associats a un endomorfisme
- Diagonalització d'un endomorfisme (quan això sigui possible)

El mòdul inclou també alguns exemples d'aplicació de la teoria presentada. En concret es presenten aplicacions al càlcul de potències d'una matriu i a l'estudi de sistemes dinàmics.

Exercicis d'autoavaluació

1. Sigui f: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal definida per:

$$f(x, y, z, t) = (3y + 6t, 2x - y + z + t, x + z, x + 3t)$$

a) Trobeu la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^4$.
b) Trobeu una base del nucli de f i la dimensió.
c) Trobeu una base del subespai imatge de f i la dimensió.
d) Trobeu l'antiimatge del vector (3, 5, 2, 4) per f.

2. Sigui f: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal definida per:

$$f(x, y, z, t) = (y, 0, z, -2y + 2t)$$

a) Trobeu la dimensió i una base del nucli de f.
b) Trobeu la dimensió i una base de la imatge de f.
c) Raoneu si el vector $(a, 1, a^3, a^5)$ pertany o no a la imatge de f (a és un paràmetre).

3. Donada l'aplicació lineal f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per:

$$f(x, y, z) = (ax + y + z, x - y + z, 2y + z)$$

a) Trobeu la matriu de f en la base canònica.
b) Proveu que {(3, 1, 3), (2, 1, –1), (1, 0, 3)} és base de $\mathbb{R}^3$.
c) Trobeu la matriu de f en la base {(3, 1, 3), (2, 1, –1), (1, 0, 3)}.
d) Per a quins valors de a es compleix que (3, 1, –2) pertany a Ker(f)?
e) Per a quins valors de a es compleix que (0, 3, –2) pertany a Im(f)?
f) Per a quins valors de a es compleix que f és bijectiva?

4. Considereu l'endomorfisme f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit per:

$$f(x, y, z) = (2x, 3x + 4y - z, 3x + 5y - 2z)$$

És f diagonalitzable? Justifiqueu la resposta i, en cas afirmatiu, trobeu la matriu diagonal resultant i una base on f prengui la forma diagonal.

5. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ que, en la base canònica, té per matriu:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Estudieu si diagonalitza i, en cas afirmatiu, trobeu la matriu diagonal corresponent.

6. Són diagonalitzables les següents matrius?

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

7. Sigui f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfisme definit, en bases canòniques, per l'expressió: $f(x, y, z) = (3x - 2y, -2x + 3y, 5z)$.

a) Trobeu els valors i vectors propis de la matriu associada a l'endomorfisme, **A.**
b) Estudieu si f és diagonalitzable. En cas afirmatiu, trobeu la matriu diagonal associada, **D.**
c) Si f és diagonalitzable, empreu la matriu diagonal per a calcular $\mathbf{A}^4$.

8. Sigui f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal definida per

$$f(x,y,z) = (2x - y + z, x + 2y - z)$$

a) Trobeu la matriu **A** de f en les bases canòniques.
b) Trobeu una base del *Ker*(f). És injectiva f?
c) Trobeu una base de *Im*(f). És exhaustiva f?
d) Trobeu l'antiimatge per a f del vector (1,1).

9. Donada l'aplicació lineal f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per:

$$f(x,y,z) = (-x + 2y - z, ax - y + az, -x + z)$$

a) Trobeu la matriu de f en la base canònica.
b) Demostreu que {(1, –1, 3), (2, 1, –1), (2, 0, 1)} és una base de $\mathbb{R}^3$.
c) Trobeu la matriu de f en la base anterior.
d) Per a quins valors de a es satisfà que (2, 3, –1) pertany a *Ker*(f)?
e) Per a quins valors de a es satisfà que (–1, 1/2, –1) pertany a *Im*(f)?
f) Per a quins valors de a es satisfà que f és bijectiva?

10. Se sap que la matriu:

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$$

admet el vector (1, 1, 0) com a vector propi associat al valor propi 3 i el vector (–1, 0, 2) com a vector propi associat al valor propi 0.

a) Trobeu el valor dels paràmetres a, b, c, p, q, r de la matriu **A.**
b) Un cop hàgiu trobat a, b, c, p, q, r, estudieu si la matriu diagonalitza i, en cas afirmatiu, trobeu la seva forma diagonal.

11. Sabem que la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -1 & 0 & 2 \\ c & d & e \end{pmatrix}$ admet com a vectors propis (1, 1, 0), (2, 0, 1) i (1, –1, 0)

a) Determineu la matriu **A** i els seus valors propis.

b) Calculeu la forma diagonal de la matriu **B** i doneu-ne la base en què diagonalitza si:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Donada la matriu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$, es demana:

a) Estudieu per a quins valors dels paràmetres a i b, la matriu és diagonalitzable.

b) Trobeu, si és possible, $\sqrt[3]{\mathbf{A}}$, per al cas $a = 1$, $b = 10$

13. L'empresa Promasa compra de manera continuada ordinadors a Telecom. Els ordinadors de Promasa es classifiquen segons el temps que fa que s'han comprat en quatre grups:

nous:	[0, 3)
seminous:	[3, 6)
antics:	[6, 9)
superantics:	[9, 12)

Quan un ordinador té 12 anys d'antiguitat, Promasa el renova automàticament. S'ha observat que la relació existent entre els ordinadors que hi ha en un període $k + 1$ respecte als que hi havia en el període anterior k és la que es recull en la taula següent, expressada en tant per un, i entenent-se que un període és un trienni.

		Període *k*			
		Nous	**Seminous**	**Antics**	**Superantics**
Període *k* + 1	**Nous**	0.25	0.25	0.25	0.25
	Seminous	0.25	0	0.5	0.25
	Antics	0.25	0.5	0.25	0
	Superantics	0.25	0.25	0	0.5

A partir de la formulació del model matemàtic que representa l'evolució temporal de l'antiguitat del conjunt dels ordinadors de l'empresa:

a) Indiqueu quins són els valors i vectors propis associats a la matriu del model.
b) Quina és la distribució dels ordinadors a llarg termini ($k \to \infty$) si en l'actualitat, ($k = 0$), la proporció d'ordinadors en cada un dels quatre grups és del 20%, 20%, 20% i 40% respectivament? (és a dir, heu de predir quina serà la distribució d'ordinadors a llarg termini).

A continuació es representa el model de l'evolució temporal de l'antiguitat del conjunt dels ordinadors de l'empresa.

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{nombre d'ordinadors nous } [0-3) \\ y(t) &= \text{nombre d'ordinadors seminous } [3-6) \\ z(t) &= \text{nombre d'ordinadors antics } [6-9) \\ v(t) &= \text{nombre d'ordinadors molt antics } [9-12) \end{aligned}$$

Després de t períodes

$$\begin{cases} x(t+1) = 0.25x(t) + 0.25y(t) + 0.25z(t) + 0.25v(t) \\ y(t+1) = 0.25x(t) + 0.5z(t) + 0.25v(t) \\ z(t+1) = 0.25x(t) + 0.5y(t) + 0.25z(t) \\ v(t+1) = 0.25x(t) + 0.25y(t) + 0.5v(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \\ z(k) \\ v(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

14. Sigui $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per:

$$f(x,y,z) = (x-y, 2x+4y, 2x+2y+2z)$$

Se sap que el polinomi característic de f és

$$p(\lambda) = (2-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Estudieu si f diagonalitza i, si escau, doneu una base de $\mathbb{R}^3$ formada per vectors propis de f.

15. Sigui $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal definida per:

$$f(x,y,z,t) = (t, x+2y+z+2t, 0, x+y)$$

a) Trobeu una base del nucli de f. És f injectiva?
b) Trobeu una base de la imatge de f. És f exhaustiva?
c) Per a quins valors dels paràmetres a i b el vector $(a, 1, b, 0)$ és de la imatge de f?

16. Sigui **A** la matriu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sabent que $B = \{(0,1,-1),(1,-2,1),(1,-1,1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ i que la matriu **S** i la inversa $\mathbf{S}^{-1}$ són:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Comproveu que **B** és una base de vectors propis d'**A**.

b) Calculeu la matriu diagonal d'**A**.

c) Calculeu $\mathbf{A}^{16}$.

17. Sigui $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un endomorfisme definit, en bases canòniques, per:

$$f(x, y, z) = (x + 3y + 3z, -3x - 5y - 3z, 3x + 3y + z)$$

a) Trobeu els valors i els vectors propis de la matriu associada a l'endomorfisme, **A**.

b) Estudieu si l'endomorfisme és diagonalitzable. En cas afirmatiu, trobeu la matriu diagonal associada, **D**.

c) Si l'endomorfisme és diagonalitzable, empreu la matriu diagonal per a calcular $\mathbf{A}^6$.

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1.

a) La matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^4$ és:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Per a trobar una base del nucli hem de resoldre el SEL:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una base del subespai de solucions és (–3, –2, 3, 1), per la qual cosa la dimensió del nucli és 1.

c) El subespai imatge de f el generen les imatges de la base canònica, és a dir, les columnes de la matriu **A**. Com que la dimensió del nucli és 1, llavors la dimensió de la imatge ha de ser 3 (ja que les dimensions del nucli i imatge sempre sumen la dimensió de l'espai de sortida, 4 en aquest cas). Els vectors (0, 2, 1, 1), (3, –1, 0, 0), (0, 1, 1, 0) són linealment independents (per a comprovar-ho, n'hi ha prou de veure que el rang de la matriu que formen és 3). Per tant, aquests vectors formen una base del subespai imatge de f.

d) Per a trobar l'antiimatge del vector (3, 5, 2, 4), s'ha de resoldre el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Com que el rang de la matriu del sistema és 3 i el rang de l'ampliada també és 3, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat. Resolent el sistema, ens queda que les solucions són vectors de la forma:

$(x, y, z, t) = (1, -1, 1, 1) + \lambda(-3, -2, 3, 1)$, on λ és un paràmetre.

2. La matriu de f en la base canònica és:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Per a trobar el nucli de f, s'ha de resoldre el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solució és el subespai vectorial d'equacions: $y = 0$, $z = 0$, $-2y + 2t = 0$. O sigui, són els vectors (x, y, z, t) que compleixen $y = z = t = 0$. Per tant: una base del nucli de f és (1, 0, 0, 0) i la dimensió del nucli és 1.

b) El subespai imatge de f és el generat per les imatges de la base canònica, és a dir, les columnes de la matriu **A**. Per tant: imatge de f està generat pels vectors (1, 0, 0, –2), (0, 0, 1, 0) i (0, 0, 0, 2), que són linealment independents. Així, la dimensió de la imatge de f és 3.

c) Per a veure si el vector $(a, 1, a^3, a^5)$ pertany o no a la imatge de f, s'ha de resoldre el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a^3 \\ a^5 \end{pmatrix}$$

Però aquest sistema és incompatible, ja que el rang de la matriu del sistema és 3 mentre que el rang de la matriu ampliada es pot comprovar que és 4, independentment del valor del paràmetre a. Per tant, el vector $(a, 1, a^3, a^5)$ no pertany a la imatge de f.

3.

a) La matriu de f en la base canònica s'obté en escriure, en columnes, les imatges dels vectors de la base canònica, *i. e.*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Per a comprovar que els tres vectors que ens donen són linealment independents, n'hi ha prou de verificar que el rang de la matriu que formen és 3, és a dir, que el següent determinant és no nul:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

c) Emprant la fórmula del canvi de base, tenim que la matriu de f en la base $\{(3, 1, 3), (2, 1, -1), (1, 0, 3)\}$ és:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \\ 4 & -9 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -9a+28 & -6a+1 & -3a+22 \\ 9a-23 & 6a-1 & 3a-18 \\ 12a-34 & 8a-1 & 4a-27 \end{pmatrix}$$

d) Es tracta de trobar els valors de a per als quals $(3, 1, -2)$ pertany al nucli de f. És a dir, aquells a que verifiquen:

$$f(3, 1, -2) = (0, 0, 0)$$

En altres paraules, s'ha de complir que:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'on es dedueix que $a = \frac{1}{3}$.

e) Es tracta ara de trobar els valors de a per als quals $(0, 3, -2)$ és imatge per f d'algun vector. És a dir, s'ha de complir:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

El determinant de la matriu de coeficients és $-3a+1$. Per tant, si $a \neq \frac{1}{3}$, el rang de la matriu és 3 i el sistema és compatible determinat (*i. e.*, $(0, 3, -2)$ és un vector de Im(f)). Al contrari, si $a = \frac{1}{3}$, llavors el rang de la matriu és 2, mentre que el de l'ampliada es pot comprovar que és 3, amb la qual cosa el sistema seria incompatible.

f) L'aplicació f és bijectiva si el determinant de la matriu **A** és no nul. O sigui, si $a \neq \frac{1}{3}$.

4. La matriu de f en la base canònica és:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Per a saber si és diagonalitzable, calcularem els valors propis.

Per a això, calculem el polinomi característic:

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 4-\lambda & -1 \\ 3 & 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = -(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda+1)$$

Els VAP de f són: 2, 3, –1.

Com que els tres VAP són diferents, f és diagonalitzable. Això vol dir que hi ha bases formades per VEP de f.

Aquestes bases estaran formades per un vector propi de valor propi 2, un vector propi de valor propi 3 i un vector propi de valor propi –1. Busquem-los:

- VEP de VAP 2:

Els VEP associats al VAP 2 són les solucions del sistema:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hem de resoldre el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -3x, \quad z = -3x$$

Un vector propi de valor propi 2 serà, per exemple, (–1, 3, 3).

- VEP de VAP 3:

Els vectors propis de valor propi 3 són les solucions del sistema:

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad y = z$$

Un vector propi de valor propi 3 serà, per exemple, (0, 1, 1).

- VEP de VAP –1:

Els vectors propis de valor propi –1 són les solucions del sistema:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{I})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad z = 5y$$

Un vector propi de valor propi –1 serà, per exemple, (0, 1, 5).

Per tant, responent les preguntes formulades, f és diagonalitzable, la matriu diagonal resultant és:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i una base on f pren la forma diagonal anterior és la de VEP en el mateix ordre:

$$\{(-1, 3, 3), (0, 1, 1), (0, 1, 5)\}$$

5. D'entrada, com que la matriu no és simètrica, hem de trobar els seus VAP. Per a això, calculem el polinomi característic:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -2 - 5\lambda - 4\lambda^2 - \lambda^3 = -(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2) = -(\lambda + 2)(\lambda + 1)^2$$

Els valors propis de **A** són –2 (amb multiplicitat 1) i –1 (amb multiplicitat 2).

Si els VAP haguessin estat tots reals i diferents, és a dir, el polinomi característic no hagués tingut cap arrel múltiple, ja s'hauria acabat l'exercici perquè podríem afirmar que la matriu **A** diagonalitzava, i donar la matriu diagonal. Però en aquest cas no succeeix així: la matriu **A** és diagonalitzable si, i només si, l'espai de vectors propis de valor propi –1 té dimensió 2 (igual que la seva multiplicitat).

Trobem els VEP associats al VAP –1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

El sistema anterior queda reduït a dues equacions amb un grau de llibertat; és a dir, el rang de la matriu és 2, ja que les dues primeres columnes són proporcionals.

Per tant, només podem obtenir un VEP independent. La dimensió de l'espai de VEP associats al VAP –1 és 1. Aquest espai el genera el vector (1, 1, 0) i, per tant, **A** no és diagonalitzable.

6.

a) En no ser la matriu **A** simètrica, s'han de calcular els valors propis.

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

En haver-hi un VAP repetit, per a saber si la matriu diagonalitza, és necessari trobar els vectors propis:

- Vector propi de valor propi 5:

  Els VEP de VAP 5 són les solucions del sistema:

  $$(\mathbf{A} - 5\,\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

  Si denotem per x, y, z les coordenades del vector **v**, el sistema que s'ha de resoldre és:

  $$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

  La seva solució és:

  $$x = t,\ y = 2t,\ z = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

  Segons això, l'espai de VEP de VAP 5 serà <(1, 2, 1)>.

- Vector propi de valor propi 1:

  Hem de resoldre el sistema següent:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

  La seva solució és:

  $$x = t,\ y = s,\ z = -t - s \quad \forall t,s \in \mathbb{R}.$$

  Per tant, l'espai de VEP de VAP 1 és <(1, 0, –1), (0, 1, –1)>.

  En ser la dimensió de cada subespai propi igual a l'ordre de multiplicitat del valor propi corresponent, la matriu **A** és diagonalitzable.

b) Tampoc la matriu **B** és simètrica, per la qual cosa és necessari trobar els VAP:

$$|\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 1 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

En haver-hi un VAP repetit, per a saber si la matriu diagonalitza, és necessari trobar els vectors propis.

- Vector propi de valor propi 1:

Els VEP de VAP 1 són les solucions del sistema:

$$(\mathbf{B}-\mathbf{I})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Si anomenem x, y, z les coordenades del vector **v**, el sistema que s'ha de resoldre és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Resolent el sistema, resulta que la seva solució és:

$$x = 3t \,,\; y = -t,\; z = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Per tant, l'espai de VEP de VAP 1 és <(3, –1, 1)>.

En ser la dimensió del subespai propi igual a 1 i diferent de l'ordre de multiplicitat d'aquest valor propi (que és 2), la matriu **B** no és diagonalitzable.

7.

a) La matriu de f en la base canònica (que és ortonormal) és:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La matriu és simètrica i, per tant, serà diagonalitzable.

Calculem el polinomi característic:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5)$$

Resolent l'equació característica, $p(\lambda) = 0$, obtenim dos valors propis: el VAP 1 (amb multiplicitat 1) i el VAP 5 (amb multiplicitat 2).

- VEP corresponents al VAP 1:

$$(\mathbf{A}-1\mathbf{I})\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow y=x,\quad z=0$$

Per tant, un VEP associat al VAP 1 serà el (1, 1, 0).

- VEP corresponents al VAP 5:

$$(\mathbf{A}-5\mathbf{I})\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow x=-y$$

Per tant, (1, –1, 0) i (0, 0, 1) són VEP (linealment independents) associats al VAP 5.

b) Atès que hem trobat tres VEP linealment independents, f diagonalitza (com ja sabíem perquè la matriu és simètrica en una base ortonormal) i:

a. B = {(1, –1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0)} és una base en la qual la matriu associada a l'endomorfisme és diagonal, i

b. La matriu diagonal associada és: $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

c) Sabem que $\mathbf{A}^4 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{D}^4\cdot\mathbf{P}^{-1}$, essent **P** la matriu de VEP, *i. e.*:

$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, com que $\mathbf{D}^4=\begin{pmatrix}5^4&0&0\\0&5^4&0\\0&0&1^4\end{pmatrix}$, se segueix que:

$$\mathbf{A}^4=\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}^4\cdot\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}313&-312&0\\-312&313&0\\0&0&625\end{pmatrix}.$$

8.

a) En primer lloc, recordem que els vectors, (1, 0, 0), (0, 1, 0) i (0, 0, 1) són els vectors de la base canònica de l'espai. Llavors calcularem la imatge d'aquests 3 vectors per calcular la matriu **A**.

$f(1,0,0)=(2,1)$

$f(0,1,0)=(-1,2)$

$f(0,0,1)=(1,-1)$

Ara només queda posar aquestes imatges en columna:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Ara veurem qui n'és el nucli. Recordeu que són els vectors la imatge dels quals és nul·la. $f(x,y,z) = (2x - y + z, x + 2y - z) = (0, 0)$

Per tant, cal resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

és un sistema indeterminat que té per solució $x = \frac{-z}{5}$ i $y = \frac{3z}{5}$. D'aquesta manera, el nucli de l'aplicació és el subespai format pels vectors de la forma $\left(\frac{-z}{5}, \frac{3z}{5}, z\right)$. Per simplificar, agafarem $z = 5$ i direm que el nucli és el subespai generat pel vector (–1, 3, 5). Ara, com que la dimensió del nucli és 1, tenim que **no** es pot tractar d'una aplicació injectiva.

c) Per a fer aquest apartat, utilitzarem el teorema de la dimensió:

$$\mathbf{dim} U = \mathbf{dim} Ker(f) + \mathbf{dim}\, \mathrm{Im}(f)$$

Ara, com que la **dim** $\mathbb{R}^3 = 3$ i la **dim** *Ker*(f) = 1 cal que **dim** *Im*(f) = 2 i, per tant, sols cal triar dos vectors de la imatge que siguin independents de (2, 1) i (1, –1). A més, tenim que és exhaustiva, ja que fent servir la segona proposició de l'apartat 5 tenim que: **dim** $\mathbb{R}^2$ = **dim** *Im*(f) = 2

d) Per a trobar l'antiimatge del vector (1, 1), cal trobar els vectors que tenen per imatge el (1, 1), és a dir, cal resoldre el sistema:

$$(2x - y + z,\ x + 2y - z) = (1, 1)$$

o escrit d'una altra manera:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

és un sistema indeterminat que té per solució $x = \frac{-z}{5} + \frac{3}{5}$ i $y = \frac{3z}{5} + \frac{1}{5}$. Així, els vectors que tenen per imatge el vector (1, 1) són els de la forma:

$$\left(\frac{-z}{5} + \frac{3}{5}, \frac{3z}{5} + \frac{1}{5}, z\right).$$

9.

a) La matriu de f en la base canònica s'obté en escriure en columnes les imatges dels vectors de la base canònica, és a dir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ a & -1 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Per a demostrar que tres vectors formen una base de $\mathbb{R}^3$ serà suficient provar que són linealment independents, és a dir, que el rang de la matriu que formen és 3. Això és cert en aquest cas, atès que:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad |\mathbf{P}| = -1 \neq 0 \qquad \rightarrow Rang(\mathbf{P}) = 3$$

c) Emprant la fórmula del canvi de base, tenim que la matriu buscada és:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ a & -1 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 14+16a & -11+4a & 1+12a \\ 15+20a & -12+5a & 1+15a \\ -25-28a & 18-7a & -3-21a \end{bmatrix}$$

d) Es tracta de trobar aquells valors d'a tals que $f(2, 3, -1) = (0, 0, 0)$, és a dir:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ a & -1 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'equació anterior no té cap solució, atès que:

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ a-3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Per tant, valgui el que valgui a, el vector $(2, 3, -1)$ no pertany mai al nucli de l'aplicació.

e) Es tracta de trobar aquells valors de a que satisfan, per a algun vector (x, y, z), la condició següent:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ a & -1 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Observeu que: $|\mathbf{A}| = 2 - 4a = 0 \leftrightarrow a = 1/2$

Per tant, el $Rang(\mathbf{A})$ serà 3 excepte per al cas $a = 1/2$. En aquest cas $Rang(\mathbf{A}) = 2$. D'altra banda, es pot comprovar que el rang de la matriu ampliada també serà 2 per al cas $a = 1/2$. Per tant, el sistema d'equacions resultant sempre serà compatible, és a dir: el vector $(-1, 1/2, -1)$ serà un vector de $Im(f)$ per a qualsevol valor de a.

f) L'aplicació serà bijectiva si el determinant de la matriu **A** és no nul, és a dir: si $a \neq 1/2$.

10.

a) En l'enunciat es diu que el vector **v** = (1, 1, 0) és un vector propi associat al valor propi 3. Per tant, sabem que: (**M** – 3**I**) · **v** = 0, és a dir:

$$(\mathbf{M}-3\mathbf{I})\cdot\mathbf{v}=\begin{pmatrix} a-3 & 1 & p \\ b & -1 & q \\ c & -1 & r-3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\text{ és a dir: }\begin{cases} a-3+1=0 \\ b-1=0 \\ c-1=0 \end{cases}$$

Amb la qual cosa arribem al següent:

$$a=2$$
$$b=1$$
$$c=1$$

Igualment, en l'enunciat també es diu que el vector **v** = (–1, 0, 2) és un vector propi associat al valor propi 0. Per tant, sabem que (**M**) · **v** = 0; és a dir:

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{v}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & p \\ 1 & 2 & q \\ 1 & -1 & r \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\text{ és a dir, }\begin{cases} -2+2p=0 \\ -1+2q=0 \\ -1+2r=0 \end{cases}$$

Amb la qual cosa arribem al següent:

$$p=1$$
$$q=1/2$$
$$r=1/2$$

b) Busquem els valors propis pels valors dels paràmetres trobats:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1/2 \\ 1 & -1 & 1/2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

Després de calcular el determinant, les solucions de l'equació característica són $\lambda = 3, 1.5, 0$. Com que els tres valors propis són reals i diferents, podem assegurar que la matriu diagonalitza.

La matriu diagonal és:

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}$$

11.

a) Per la informació de l'enunciat, sabem que els vectors que es donen són vectors propis de valor propi *x*, *y* i *z*, de manera que ens resulta el sistema de nou equacions següent:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -1 & 0 & 2 \\ c & d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a=x \\ -1=x \\ c+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -1 & 0 & 2 \\ c & d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = 2y \\ -2+2=0 \\ 2c+e=y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -1 & 0 & 2 \\ c & d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a = z \\ -1 = -z \\ c-d=0 \end{cases}$$

Podem resoldre aquest sistema d'equacions indeterminat i obtenim: $x = -1$, $a = -1$, $z = 1$, $d = 0$, $c = 0$; i s'ha de verificar que $b = 2y$ i $e = y$.

b) Per l'apartat anterior resulta clar que els valors propis son –1 i 1 i que la base en què diagonalitza és (1, 1, 0) (2, 0, 1) (1, –1, 0), i en aquesta base, la matriu és:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12.

a) Per saber si una matriu diagonalitza o no hem d'aplicar la segona proposició del subapartat 8.1. Atès que la matriu **A** no és simètrica hem de veure com són els valors propis:

- Si són tots reals i diferents → la matriu diagonalitzarà.
- Si hi ha algun valor propi no real (complex) → la matriu no diagonalitzarà.
- Si hi ha algun valor propi repetit, cal veure els vectors propis.

Per tant, per veure com són els valors propis, ens cal trobar el polinomi característic:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & b \\ 3 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda)(a-\lambda)$$

I els VAPs són: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = a$

Per la proposició anterior, ja podem assegurar que:

– Per a tot $a \in \mathbb{R}$, per a tot $b \in \mathbb{R}$, si $a \neq -1, 5$ → **A** diagonalitza, ja que, en aquest cas, tots els valors propis són reals i diferents.

Ara estudiem els altres dos casos possibles:

– Si $a = 5$, llavors la matriu queda així:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ i els valors propis són: $\lambda_1 = 5\ (doble), \lambda_2 = -1$

Perquè la matriu **A** sigui diagonalitzable, en aquest cas en què $a = 5$, cal que la multiplicitat del valor propi $\lambda = 5$ (que és 2) coincideixi amb la dimensió de l'espai de vectors generats pels vectors propis associats al valor propi $\lambda = 5$.

El subespai $V_{\lambda-5}$, associat al valor propi $\lambda = 5$, està format per les solucions del següent sistema d'equacions lineals homogeni:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -6y + bz = 0 \end{cases}$$

Per tant, la solució del sistema és: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{b}{6} z \\ z = z \end{cases}$, independentment del valor de b i el subespai $V_{\lambda-5}$, associat al valor propi $\lambda = 5$, està generat per <(0, b, 6)>. Atès que la multiplicitat del valor propi $\lambda = 5$ (que és 2), no coincideix amb la dimensió de l'espai de vectors generats pel vectors propis associats al valor propi $\lambda = 5$ (que és 1), podem assegurar que la matriu **A**, amb $a = 5$, no diagonalitza.

– Si $a = -1$, llavors la matriu queda així:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ i els valors propis són: $\lambda_1 = -1\,(doble), \lambda_2 = 5$

Per tal que la matriu **A** sigui diagonalitzable, en aquest cas en què $a = -1$, cal que la multiplicitat del valor propi $\lambda = -1$ (que és 2), coincideixi amb la dimensió de l'espai de vectors generats pel vectors propis associats al valor propi $\lambda = -1$.

El subespai $V_{\lambda-1}$, associat al valor propi $\lambda = -1$, està format per les solucions del següent sistema d'equacions lineals homogeni:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ bz = 0 \end{cases}$$

En aquest cas, cal fer una disjunció:

- Si $b = 0$ → la solució del sistema és: $\begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = z \end{cases}$, i el subespai $V_{\lambda-5}$, associat al valor propi $\lambda = -1$, està generat per <(0, 1, 0), (0, 0, 1)>. Atès que la multiplicitat del valor propi $\lambda = -1$ (que és 2), coincideix amb la dimensió de l'espai de vectors generats pel vectors propis associats al valor propi $\lambda = -1$ (que és 2), podem assegurar que la matriu **A**, amb $a = -1$ i $b = 0$, diagonalitza.

- Si $b \neq 0$ → la solució del sistema és: $\begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$, i el subespai $V_{\lambda-5}$, associat al valor propi $\lambda = -1$, està generat per <(0, 1, 0)>. Atès que la multiplicitat del valor propi $\lambda = -1$ (que és 2), no coincideix amb la dimensió de l'espai de vectors generats pels vectors propis associats al valor propi $\lambda = -1$ (que és 1), podem assegurar que la matriu **A**, amb $a = -1$ i $b \neq 0$, no diagonalitza.

En resum:

- Per a tot $a \in \mathbb{R}$, per a tot $b \in \mathbb{R}$: $a \neq -1, 5$ → **A** diagonalitza.
- Si $a = 5$, per a tot $b \in \mathbb{R}$ → **A** no diagonalitza.
- Si $a = -1$ i $b = 0$ → **A** diagonalitza.
- Si $a = -1$ i $b \neq 0$ → **A** no diagonalitza.

b) Per al cas $a = 1$, $b = 10$, sí que diagonalitza. La matriu **A** queda així:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, i els valors propis són: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$. Atès que els tres valors propis són reals i diferents, la matriu **A** diagonalitza. Això vol dir que hi ha bases formades per vectors propis d'**A**. Aquestes bases estaran formades per un vector propi de valor propi 5, per un vector propi de valor propi –1 i per un vector propi de valor propi 1. Busquem-los:

- Els vectors propis associats al valor propi 5 són les solucions del sistema:

$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, això és: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 10 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -6y + 10z = 0 \\ 3x - 4z = 0 \end{cases}$

I les solucions d'aquest sistema són: $\begin{cases} x = x \\ y = \dfrac{5x}{4} \\ z = \dfrac{3x}{4} \end{cases}$. Per tant, un vector propi de valor propi 5 serà el (4, 5, 3).

- Els vectors propis associats al valor propi –1 són les solucions del sistema:

$(\mathbf{A} + \mathbf{I}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, això és: $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ 10z = 0 \\ 3x + 2z = 0 \end{cases}$.

I les solucions d'aquest sistema són: $\begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$. Per tant, un vector propi de valor propi 5 serà el (0, 1, 0).

- Els vectors propis associats al valor propi 1 són les solucions del sistema:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{, això és: }\begin{pmatrix}4&0&0\\0&-2&10\\3&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\-2y+10z=0\end{cases}$$

I les solucions d'aquest sistema són: $\begin{cases}x=0\\y=5z\\z=z\end{cases}$. Per tant, un vector propi de valor propi 5 serà el (0, 5, 1).

Tenim, doncs, que:

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{P}^{-1}\text{, on:}$$

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

i **P** és la matriu formada pels vectors propis (**P** és la matriu de canvi de base de {valors propis} a la base canònica). Pel teorema del subapartat 8.2 sabem que $\sqrt[3]{\mathbf{A}}=\mathbf{P}\cdot\sqrt[3]{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{P}^{-1}$. Per tant:

$$\sqrt[3]{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}4&0&0\\5&1&5\\3&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt[3]{5}&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&0&0\\5&1&5\\3&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

Calculem la composició de les tres matrius, i queda:

$$\sqrt[3]{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}\sqrt[3]{5}&0&0\\\frac{5\cdot\sqrt[3]{5}}{4}-\frac{25}{4}-1&-1&10\\\frac{3\cdot\sqrt[3]{5}}{4}-\frac{3}{4}&0&1\end{pmatrix}$$

13.

a) La representació matricial del model matemàtic és la següent:

$$\begin{pmatrix}x(t+1)\\y(t+1)\\z(t+1)\\v(t+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.25&0.25&0.25&0.25\\0.25&0&0.5&0.25\\0.25&0.5&0.25&0\\0.25&0.25&0&0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\\v(t)\end{pmatrix}$$

Busquem els valors propis i vectors propis. Per això, calculem el polinomi característic

$$p(\lambda) = det\begin{pmatrix} 0.25-\lambda & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & -\lambda & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25-\lambda & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 & 0.5-\lambda \end{pmatrix}$$

Aquest polinomi és de grau 4, i té les arrels $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0.43$, $\lambda_4 = -0.43$. Són diferents, per tant la matriu diagonalitza.

Els vectors propis respectius són:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.33 \\ 0.33 \\ 0.33 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.27 \\ -0.73 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0.73 \\ 0.27 \end{pmatrix},$$

En particular, la matriu diagonal D i la matriu de canvi de base P seran

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.43 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.33 & -2.27 & -1 \\ 1 & 0.33 & -0.73 & 0.73 \\ 1 & 0.33 & 1 & 0.27 \end{pmatrix}$$

b) Per a saber la proporció d'ordinadors a llarg termini, cal trobar el límit quan $k \to \infty$ de la matriu diagonalitzada multiplicada per l'instant inicial.

A llarg termini, la proporció d'ordinadors serà de 25% en cada grup (ja que el resultat en fer el límit a l'infinit de la matriu diagonalitzada per l'instant inicial és (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)).

$$P \cdot D^k \cdot P^{-1}$$

Quan calculem D^k, tenim que:

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.43 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.43^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-0.43)^k \end{pmatrix}$$

I si considerem el límit quan $k \to +\infty$ tenim que:

$$\lim_{k\to+\infty} D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lim_{k\to+\infty} 0.43^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lim_{k\to+\infty}(-0.43)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operem, doncs:

$$P \cdot D^k \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

I, per acabar, apliquem el resultat per l'instant inicial:

$$\begin{pmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

Una altra opció per a resoldre aquest apartat és, tal com es mostra en l'estudi de cas del subapartat 8.3 d'aquest mòdul, realitzar un programa que predigui l'evolució de la distribució d'ordinadors, veure com evoluciona el model i comprovar com, a partir d'un cert moment, aquest s'estabilitza.

Efectivament, a partir de $i = 14$, el sistema s'estabilitza i això indica que, a llarg termini, **la proporció d'ordinadors serà de 25% en cada grup**.

14.

El subespai vectorial associat al valor propi $\lambda = 2$ és el subespai vectorial de les solucions del SEL homogeni:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolent, deduïm que és el subespai generat per (1, –1, 0) i (0, 0, 1).

El subespai vectorial associat al valor propi $\lambda = 3$ és el subespai vectorial de les solucions del SEL homogeni:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolent, veiem que és el subespai generat per (1, –2, –2).

Així, doncs, f diagonalitza perquè el polinomi característic descompon completament en factors reals de grau 1 i perquè per a cada VAP, la seva multiplicitat coincideix amb la dimensió del subespai de VEPS associat (2 per al valor propi $\lambda = 2$ i 1 per al valor propi $\lambda = 3$).

15.

a) El nucli de f és el subespai vectorial de les solucions del SEL homogeni:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolent, veiem que una base del nucli és (1, –1, 1, 0). Com que el nucli és no nul, aleshores f no és injectiva.

b) La imatge de f és el subespai vectorial generat per les columnes de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eliminant la segona columna que és combinació lineal de la primera i la tercera, veiem que una base de la imatge és: (0, 1, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (1,2,0,0). O sigui, la dimensió de la imatge és 3, menor que la dimensió de l'espai d'arribada que és 4. Per tant, f no és exhaustiva.

c) Per a trobar l'antiimatge del vector (a, 1, b, 0), cal resoldre el SEL:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

El rang de la matriu del sistema és 3. És definit pel menor format per les columnes 1,3 i 4 i les files 1, 2 i 4:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I el rang de l'ampliada serà definit, doncs, pel menor que conté aquest menor 3×3 i la columna de termes independents:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per al càlcul del determinant, desenvolupem primer per la quarta fila i després per la tercera. Ens queda que el determinant és igual a b. Així, doncs, el rang de l'ampliada és 3 si i només si $b = 0$. Per tant, el vector (a, 1, b, 0) pertany a la imatge de f si i només si $b = 0$ i a és qualsevol.

16.

a) Multiplicant **A** per cada un dels vectors de **B** obtenim:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O sigui, (0, 1, –1) és VEP de **A** de VAP –1, (1, –2, 1) és VEP de **A** de VAP 1 i (1, –1, 1) és VEP de **A** de VAP 2.

b) Per a trobar la matriu diagonal de **A** només cal fer el producte:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Per a calcular $\mathbf{A}^{16}$ només cal fer:

$$\mathbf{A}^{16} = (\mathbf{SDS}^{-1})^{16} = \mathbf{SD}^{16}\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 65.536 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65.536 & 65.535 & 65.535 \\ -65.535 & -65.534 & -65.535 \\ 65.535 & 65.535 & 65.536 \end{pmatrix}$$

17.

a) La matriu de f en la base canònica és:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculem el polinomi característic:

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

Resolem l'equació $p(\lambda) = 0$ per a obtenir dos valors propis: $\lambda = 1$ (multiplicitat 1) i $\lambda = -2$ (multiplicitat 2).

- Vectors propis corresponents al valor propi 1:

$$(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y+z \\ -x-2y-z \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z = -y, x = -y$$

  Per tant, un vector propi associat al valor propi 1 serà el (1, –1, 1), i el subespai generat serà el <(1, –1, 1)>

- Vectors propis corresponents al valor propi –2:

$$(\mathbf{A} - (-2) \cdot \mathbf{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x-y-z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow z = -x - y$$

  Per tant, (1, 0, –1) i (0, 1, –1) són vectors propis (linealment independents) associats al valor propi –2. El corresponent subespai generat per aquests vectors és el <(1, 0, –1), (0, 1, –1)>.

b) Els tres vectors anteriors són linealment independents. Per tant, la matriu diagonalitza:

a. $B = \{(1, -1, 1), (1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ és una base en què la matriu associada a l'endomorfisme és diagonal.

b. La matriu diagonal associada és: $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

c) Sabem que $\mathbf{A}^6 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^6 \cdot \mathbf{P}^{-1}$, en què $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ és la matriu de vectors propis (les columnes de vectors propis han de seguir el mateix ordre que en la matriu de valors propis).

Atès que $\mathbf{D}^6 = \begin{bmatrix} 1^6 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^6 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^6 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, es tindrà que: $\mathbf{A}^6 = \begin{bmatrix} 1 & -63 & -63 \\ 63 & 127 & 63 \\ -63 & -63 & 1 \end{bmatrix}$

Glossari

aplicació *f* Relació f de correspondència entre un conjunt A i un altre B de manera que a cada element de A se li assigna un element de B.

aplicació lineal *f* Aplicació f d'un espai vectorial U en un altre V, en la qual per a qualsevol $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vectors de U i per a tot k pertanyent a $\mathbb{R}$ es compleix:

1) $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$
2) $f(k \cdot \mathbf{u}) = k \cdot f(\mathbf{u})$

base canònica de $\mathbb{R}^n$ *f* Base de la forma $B = \{(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1)\}$.

endomorfisme *m* Aplicació lineal d'un espai vectorial en si mateix.

endomorfisme diagonalitzable *m* Un endomorfisme és diagonalitzable si hi ha alguna base de manera que la matriu associada a l'endomorfisme en aquesta base sigui diagonal.

epimorfisme *m* Aplicació lineal suprajectiva.

homomorfisme *m* Vegeu **aplicació lineal.**

imatge d'una aplicació lineal *f* Conjunt de tots els vectors de l'espai destinació que són imatge d'algun vector de l'espai origen.

isomorfisme *m* Aplicació lineal bijectiva.

monomorfisme *m* Aplicació lineal injectiva.

nucli o *kernel* d'una aplicació lineal *m* Conjunt format per tots els vectors de l'espai origen la imatge dels quals és el vector nul de l'espai destinació.
en kernel

valor propi d'un endomorfisme *f* o d'una matriu A *m* Escalar k tal que existeix algun vector $\mathbf{u}$ no nul, de manera que $f(\mathbf{u}) = k \cdot \mathbf{u}$ o bé $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = k \cdot \mathbf{u}$.

vector propi d'un endomorfisme *f* o d'una matriu A *m* Vector $\mathbf{u}$ no nul que verifica la següent condició: existeix algun escalar k, tal que $f(\mathbf{u}) = k \cdot \mathbf{u}$ o bé $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = k \cdot \mathbf{u}$.

Bibliografia

Bibliografia bàsica

Anton, H. (2002). *Introducción al Álgebra Lineal*. Mèxic, DF: Limusa Wiley.
Llibre complet que tracta amb profunditat els conceptes desenvolupats en aquest mòdul. Inclou bastants demostracions, exemples i activitats resoltes.

Lay, M. (1999). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones.* Prentice-Hall.
Llibre complet, especialment orientat a les aplicacions de l'àlgebra lineal en diversos camps.

Vizmanos, J.; Anzola, M. (1995). *Matemáticas I.* Madrid: SM.
Explica clarament els conceptes i inclou abundants exemples.

Bibliografia complementària

Bermúdez, L. i altres (1995). *Álgebra Lineal.* Barcelona: Media.

Fraleigh, J.; Beauregard, R. (1989). *Álgebra Lineal.* Argentina: Addison-Wesley.

Hernández, E. (1994). *Álgebra y geometría.* Addison-Wesley.

Lipschutz, S. (1992). *Álgebra Lineal*. Madrid: McGraw-Hill.

Meyer, C. (2004). *Matrix Analysis and Applied Algebra*. <http://matrixanalysis.com>

Porter, G.; Hill, D. (1996). *Interactive Linear Algebra*. Nova York: Springer-Verlag.

Sydsaeter, K.; Hammond, P. (1996). *Matemáticas para el Análisis Económico.* Prentice-Hall.