El polinomi de Taylor

Albert Gras i Martí
Teresa Sancho Vinuesa

PID_00183886

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Sobre aquests materials de treball

L'objectiu d'aquest mòdul és focalitzar sobre el polinomi de Taylor, introduït en el mòdul de "Càlcul diferencial i introducció a les derivades parcials". El polinomi de Taylor és una eina fonamental per a aproximar funcions per polinomis i permet comprendre molts processos de simplificació de problemes.

1. Introducció

En el mòdul de "Càlcul diferencial i introducció a les derivades parcials" ja hem introduït l'aproximació de funcions per polinomis. Aquí aprofundirem en aquesta idea i la formalitzarem.

Suposem que volem calcular l'arrel quadrada d'1.12, el sinus d'1 radian o el valor del nombre e:

$$\sqrt{1.12} = ?$$
$$\sin\ 1 = ?$$
$$e^1 = ?$$

Determinar el valor d'una funció qualsevol $f(x)$ en un punt x no sempre és fàcil. Sí que ho és, però, si aquesta funció és, per exemple, la suma d'un nombre i la variable x. Per exemple:

$$2 + x$$

o si és el producte d'un nombre per la variable x; per exemple:

$$3x$$

o, fins i tot, si es tracta d'una potència entera positiva de la variable x:

$$x^2$$

El càlcul també és senzill si es tracta d'una combinació d'aquestes operacions, com la següent:

$$6x^2 + 2x - 2$$

és a dir, si es tracta d'un **polinomi**. El càlcul del valor del polinomi en un punt només requereix operacions elementals que sabem fer amb llapis i paper: sumar, multiplicar i elevar a potències.

Així, si hem de calcular el valor de la funció:

$$3x^3 - 7x^2 + 5x - 1$$

(en què, com sabem, el símbol x^3 vol dir "x al cub" i x^2 és "x al quadrat") en el punt 0.7 haurem de calcular:

$$3x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 3 \cdot 0.7^3 - 7 \cdot 0.7^2 + 5 \cdot 0.7 - 1 = 3 \cdot 0.343 - 7 \cdot 0.49 + 3.5 - 1 = 0.099$$

El càlcul el podem fer fins i tot a mà. Això explica, en part, per què els polinomis són tan importants.

En cursos elementals de matemàtiques no tenim una manera senzilla d'avaluar la resta de funcions en un punt qualsevol. En canvi, sí que coneixem els valors de les funcions en punts concrets. Per exemple, sabem que $\sin 0 = 0$, $\sqrt{16} = 4$, etcètera.

A1

Sense fer cap càlcul, doneu uns quants valors de les funcions següents en diferents punts:

a) $f(x) = \sin x$
b) $f(x) = \mathrm{e}^x$
c) $f(x) = \sqrt{1+x}$

Coneixem determinats valors de les funcions amb les quals treballem habitualment. Tanmateix, no sabem calcular la funció per a la resta de valors si no disposem d'una calculadora o d'un ordinador.

Convertim el càlcul d'una funció qualsevol en un punt concret en el càlcul d'un polinomi en l'esmentat punt.

Suposem que volem calcular de manera aproximada el nombre e, és a dir, la funció e^x per a $x = 1$. Per tal d'explicar gràficament què volem fer, començarem per treballar la miniaplicació (*applet*) que trobareu aquí.[1] Utilitzarem aquesta miniaplicació per a representar gràficament la funció $f(x) = \mathrm{e}^x$. Fixem $n = 1$ i ens col·loquem en el punt $x = 0$.

Sabem que en el punt $x = 0$ la funció exponencial és la unitat $\mathrm{e}^0 = 1$. Podem pensar que, per a valors bastant propers a $x = 0$, el valor de l'exponencial serà semblant al valor 1.

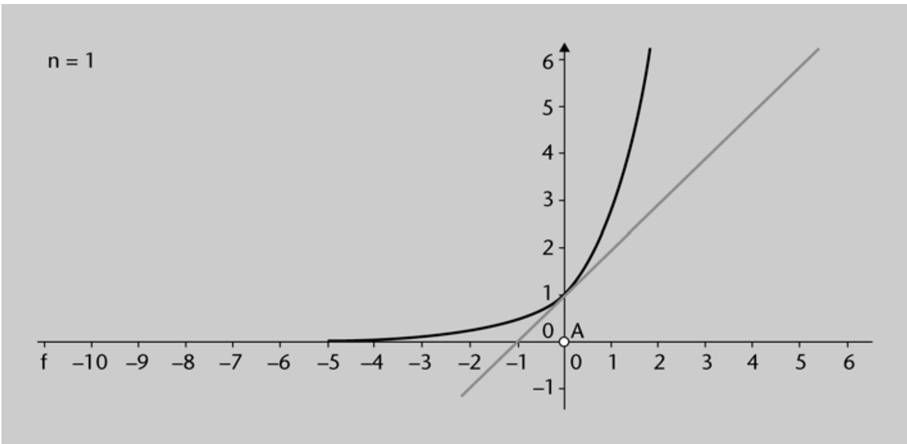


Figura 1: Miniaplicació polinomi de Taylor. Funció exponencial a $x = 0$ i per a $n = 1$.

De fet, podríem aproximar la funció exponencial a l'origen de coordenades per una recta horitzontal, la funció constant igual a 1:

$$\mathrm{e}^x \approx p_0(x) = 1, \text{ per a valors de } x \approx 0 \tag{1}$$

Però, segons veiem en la miniaplicació, per a $x = 0.2$, per exemple, el valor $\mathrm{e}^{0.2} \approx 1$ no és una bona aproximació. També hi observem que podem aproximar millor la funció exponencial al voltant del punt $x = 0$ per una recta que sigui tangent a aquesta funció en aquest punt. És a dir, que en lloc de treballar amb la funció e^x, treballem amb una recta:

$$a + bx$$

1. http://cimanet.uoc.edu/matematiquesi/videos/videos_catala/webs_Taylor/

Per tal de poder determinar de quina recta es tracta, hem de definir els valors dels dos paràmetres a i b. Necessitem, doncs, dues condicions.

Escrivim la recta que aproxima a la funció $f(x)$ com a:

$$p_1(x) = a + bx \tag{2}$$

I volem que en el punt $x = 0$ la recta tingui el mateix valor de la funció, $f(0)$, i que, en aquest mateix punt $x = 0$, la recta tingui el mateix pendent que la funció $f'(0)$. Aleshores hem d'imposar el següent:

$$\begin{aligned} p_1(0) &= f(0) \\ p_1'(0) &= f'(0) \end{aligned} \tag{2a}$$

Apliquem aquestes idees a la funció exponencial $f(x) = e^x$.

A2

Calculeu els valors de a i de b en la recta (2) tenint en compte les dues condicions (2a).

Per tant, la recta que aproxima la funció exponencial per a valors de la variable x propers a l'origen de coordenades és la següent:

$$e^x \approx p_1(x) = 1 + x \quad \text{per a valors de } x \approx 0 \tag{3}$$

Aquesta és la recta que mostra la miniaplicació, figura 1, per a $n = 1$. Vegem si és una bona aproximació.

A3

a) Calculeu un parell de valors de la funció exponencial mitjançant una calculadora de mà i compareu-los amb els valors que dóna l'aproximació (3). Per exemple, calculeu $e^{1.2}$, $e^{0.2}$.

b) L'aproximació (3) també val per a valors negatius de la variable, com $x = -0.1$?

c) Calculeu l'error que es comet en cada cas amb l'aproximació.

En l'exercici anterior hem comprovat que l'aproximació també és vàlida per a $x < 0$. D'aquesta manera, veiem que per a $x = 0.2$ o $x = -0.1$, l'aproximació de la funció exponencial per una recta és bastant bona (l'error és menor per als valors menors de $|x|$), però per a $x = 1.2$ l'error és gran: del 50%.

La validesa aproximada dels càlculs anteriors també es pot analitzar gràficament. La gràfica de la miniaplicació per a $n = 1$ mostra que la recta tangent continua essent propera a la funció també per a $x < 0$ i permet veure que per a $|x| \approx 0$, la recta i la funció no difereixen gaire. Una consideració addicional és que la recta sempre queda per sota de la funció. Per això hem vist en l'activitat A3 que sempre és $p_1(x) < e^x$.

1.1. Aproximem millor la funció: augmentem el grau del polinomi

Tornem a la miniaplicació. Fixem $n = 1$ de nou i observem què passa en els diferents punts A sobre l'eix de les x. L'aproximació de la funció exponencial per una recta tangent a $x = 0$ deixa de ser vàlida per a valors x allunyats de l'origen.

Què passa si augmentem el valor de n?

A4

Fixeu $n = 2$ en la miniaplicació i mireu què passa en els diferents punts A sobre l'eix de les x.

Ara fixeu el punt A = 0 i varieu els valors de n. La figura 2 en mostra alguns resultats. Què hi observeu?

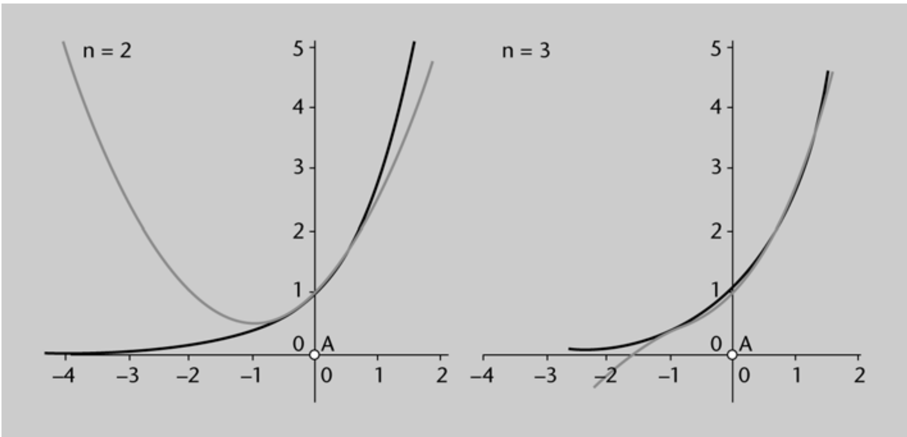


Figura 2: Miniaplicació per a $n = 2$ i 3 i $x = 0$.

Per tant, si volem fer un càlcul més precís ens podem "apropar" més a la funció i aproximar-la localment mitjançant una funció senzilla que també tingui la mateixa concavitat. Per exemple, mitjançant un polinomi de grau 2:

$$p_2(x) = a + bx + cx^2$$

Determinem les tres constants, de manera que el polinomi i la funció coincideixin en el punt $x = 0$ en tres valors: valor de la funció, pendent i concavitat. És a dir:

$$\begin{aligned} p_2(0) &= f(0) \\ p_2'(0) &= f'(0) \\ p_2''(0) &= f''(0) \end{aligned} \tag{4}$$

Calculem aquest polinomi.

A5

Apliqueu les condicions (4) i calculeu els coeficients del polinomi de grau 2 que aproxima la funció exponencial, de manera que el valor de la funció i de les dues primeres derivades coincideixin en el punt $x = 0$.

Així, hem trobat un polinomi d'un ordre superior al de l'aproximació lineal que, en el punt $x = 0$, passa pel mateix punt que la funció, té el mateix pendent i la mateixa concavitat:

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \tag{5}$$

A6

Repetiu els càlculs aproximats de la funció e^x per als punts de l'activitat A3, però ara utilitzeu el polinomi $p_2(x)$.

Calculeu l'error relatiu comès en aquesta aproximació nova i compareu aquest error amb el de l'activitat A3.

Veiem que els valors del polinomi de segon grau s'aproximen millor a la funció e^x que no pas els del polinomi de primer grau.

Podem trobar polinomis de grau cada vegada més alt que cada vegada s'assemblin més a la funció exponencial entorn del punt $x = 0$. Com que un polinomi de grau n té $n + 1$ coeficients, necessitem $n + 1$ condicions per a determinar aquests coeficients. Una manera de fer-ho seria exigir que els valors del polinomi $p_n(x)$, de grau n, i les seves n primeres derivades coincidissin amb els valors corresponents de $f(x) = e^x$ a $x = 0$.

A7

Apliqueu aquesta "recepta" a la funció exponencial i escriviu l'expressió general del polinomi d'ordre n que n'obteniu. És a dir, imposeu les condicions següents per tal de calcular els coeficients del polinomi:

$$\begin{aligned} p_n(0) &= f(0) \\ p_n'(0) &= f'(0) \\ &\dots \\ p_n^{(n)}(0) &= f^{(n)}(0) \end{aligned} \tag{6}$$

Per què hem dit en el paràgraf anterior a l'activitat A7 que "una manera de fer-ho seria exigir [...]"? De quina altra manera podríeu determinar els coeficients del polinomi?

A8

Comenteu en el fòrum de l'assignatura la qüestió anterior: de quina altra manera podríeu determinar els coeficients del polinomi?

2. Fórmula de Taylor

Ara podem generalitzar la idea anterior: com convertir gairebé qualsevol funció en un polinomi, almenys de manera aproximada. La fórmula general es denomina *fórmula de Taylor*.

La fórmula de Taylor serveix per a resoldre el problema següent: tenim una funció no polinòmica, per exemple, la funció sinus, sin x, i en volem calcular el valor en un punt, per exemple, a $x = 0.2$. Comencem per escollir un punt proper a 0.2 en què sapiguem avaluar la funció (de fet, haurem d'avaluar la funció i totes les seves derivades en aquest punt).

Com que coneixem el valor del sinus per l'angle 0, i també a $\pi/2$, a π, a $3\pi/2$, etcètera, és clar que el punt més convenient en aquest exemple és el 0, perquè és més prop del punt 0.2 en què volem conèixer la funció.

Així doncs, podem construir un polinomi (el polinomi de Taylor) de manera que els coeficients del polinomi es calculin a partir dels valors de la funció i les seves derivades en el punt conegut, en aquest cas, el punt $x = 0$.

2.1. Un polinomi que és una aproximació a la funció

Aquest polinomi és una aproximació a la funció sinus (no és la funció sinus), entorn del punt $x = 0$. Si aquest polinomi és d'un grau bastant alt (és a dir, si el polinomi té molts termes), la diferència entre el valor exacte de la funció sinus en el punt en què la calculem i el valor aproximat que obtinguem a partir del polinomi cada vegada serà més petita.

De fet, una calculadora de butxaca (o un ordinador) tampoc sap calcular el sinus, sinó que té programat un polinomi de Taylor que en dóna una aproximació bastant bona. Una calculadora (com ens passa a nosaltres) només sap calcular sumes, productes, etcètera.

2.2. Definició del polinomi de Taylor

Si una funció f és derivable n vegades en el punt a, el polinomi:

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (7)$$

es denomina polinomi de Taylor d'ordre n de $f(x)$ en el punt a. (Convé memoritzar l'expressió anterior!)

Quan el punt a coincideix amb l'origen, $a = 0$, el polinomi de Taylor té una expressió més senzilla:

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (7')$$

A9

a) Trobeu els polinomis de Taylor d'ordre 1, 2, 3 i 4 de la funció $f(x) = \ln(1 + x)$, entorn del punt $x = 0$.

b) Utilitzeu aquests polinomis per a trobar quatre valors aproximats de ln (1.1).

Podríem anar calculant polinomis de Taylor d'ordre cada vegada més alt en funció de la precisió amb la qual volguéssim treballar. Dit d'una altra manera, el polinomi de Taylor és en realitat un polinomi "infinit" (denominat *sèrie*, un concepte fonamental en matemàtiques), del qual cada vegada agafem un nombre més gran de termes. Segons l'ordre del polinomi de Taylor amb el qual ens quedem, la "cua", denominada la *resta* o *residu* del polinomi, serà una o una altra.

2.3. Resta o residu d'un polinomi de Taylor

La diferencia entre la funció $f(x)$ que volem calcular en un punt a i el polinomi de Taylor d'ordre n que representa una aproximació a aquesta funció en el punt a ve donada per la resta o residu que, en valor absolut, dóna l'error de l'aproximació:

$$\text{Error} = |R_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \tag{8}$$

L'error, calculat amb l'expressió anterior, seria un valor exacte. Però com que no coneixem el valor de la funció $f(x)$, sinó una aproximació, $p_n(x)$, no podem saber quin error estem cometent en l'aproximació.

Afortunadament, podem donar una expressió per a aquest error amb la qual en podrem estimar una cota superior. Això ens permetrà saber en cada càlcul quin grau de precisió tindrà el resultat que obtenim en aproximar una funció per un polinomi de Taylor.

Enunciarem en forma de teorema aquests dos resultats, la fórmula de Taylor i l'expressió de la resta o residu, que ens dóna la precisió d'aquesta fórmula.

2.4. Teorema de Taylor

Si coneixem les $n + 1$ derivades de la funció $f(x)$ en a, podem dir que per a qualsevol punt entorn de a:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \tag{9}$$

en què el residu és:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{10}$$

i z és un valor entre x i a. La notació que habitualment s'utilitza per a indicar aquest fet és: $z \in \langle x, a \rangle$.

Fixeu-vos que el preu que paguem per tallar la sèrie infinita en el terme n és que la resta o residu es calcula en un punt desconegut, però comprès entre x i a. Com veurem a continuació, habitualment podrem fitar l'error que cometem amb el truncament de la sèrie.

3. Apliquem la fórmula de Taylor a funcions trigonomètriques

Les funcions trigonomètriques són bàsiques en l'anàlisi de senyals periòdics no solament perquè apareixen amb molta freqüència en diverses aplicacions tecnològiques, sinó perquè serveixen per a construir altres funcions.

De fet, en altres assignatures veureu que també es poden escriure desenvolupaments semblants al de l'expressió (9), per exemple, però en què els termes són funcions trigonomètriques i no potències de x.

Les funcions trigonomètriques són periòdiques. Recordem la definició de funció periòdica.

3.1. Definició de funció periòdica

Una funció $y(t)$ és periòdica sempre que la funció no variï en un desplaçament T de la variable independent t. És a dir, una funció $y(t)$ és periòdica si hi ha un valor positiu T pel qual:

$$y(t + T) = y(t)$$

per a tots els valors de t. La funció es repeteix en intervals de longitud "T".

Les funcions cos x i sin x són funcions periòdiques de període 2π:

$$\cos (x + 2\pi) = \cos x$$
$$\sin (x + 2\pi) = \sin x$$

i també es repeteixen per al valor $2 \times 2\pi$, $3 \times 2\pi$, $4 \times 2\pi$, etcètera.

3.2. Fórmula de Taylor per a la funció cosinus

Podem aproximar la funció cosinus per polinomis de grau cada vegada més alt entorn del punt $a = 0$.

A10

Calculeu el valor de la funció cosinus i les seves tres primeres derivades en el punt $x = 0$.

Fixeu-vos que, a partir de la tercera derivada, els valors de les derivades en 0 continuarien resultant en el mateix cicle de valors: 1, 0, –1, 0. Així, els coeficients dels termes de grau imparell sempre són nuls. Per tant, tots els polinomis de Taylor de la funció cosinus en el punt $x = 0$ són de grau parell. Aquest resultat era previsible, perquè la funció cosinus té la propietat de ser una **funció parella**:

$$\cos (-x) = \cos (x)$$

A11

Escriviu els quatre primers polinomis de Taylor que apareixen en el desenvolupament de la funció cosinus $p_0(x)$, $p_2(x)$, $p_4(x)$, $p_6(x)$ i expliqueu per què compleixen la propietat que són funcions parelles.

Podem utilitzar l'últim d'aquests polinomis per a calcular un valor aproximat del cos 0.1, en què l'angle es mesura en radians.

A12

En relació amb l'activitat anterior:

a) Avalueu $p_6(x)$ en el punt 0.1.

b) Utilitzeu la Wiris per a representar en uns mateixos eixos de coordenades $f(x) = \cos x$ i $p_6(x)$.

c) Escriviu l'expressió del residu del polinomi de Taylor $p_6(x)$.

3.3. Fórmula de Taylor per la funció sin *x*

El comportament de la funció sinus, $f(x) = \sin x$, és molt similar al de $f(x) = \cos x$. Una funció coincideix amb l'altra si sumem $\pi/2$ a l'argument: $\sin(x + \pi/2) = \cos x$. Això significarà que els polinomis de Taylor entorn del 0 d'ambdues funcions tindran una forma similar? En l'activitat següent podreu veure que tots els polinomis de Taylor d'aquesta funció en el punt $a = 0$ són de grau imparell.

A13

a) Calculeu el polinomi de Taylor d'ordre 5, $p_5(x)$, de la funció $f(x) = \sin x$, en el punt $a = 0$.

b) Utilitzeu aquest polinomi per a donar el valor aproximat del sinus d'un radian, sin 1.

c) Expliqueu per què només apareixen potències imparelles en el desenvolupament de la funció sinus en polinomis de Taylor.

3.4. Desenvolupament de les funcions trigonomètriques fora de l'origen

Passa el mateix amb els polinomis de Taylor centrats en punts diferents de 0? Vegem què passa en el cas del polinomi de Taylor d'ordre 3 de $f(x) = \sin x$ en un punt que no sigui l'origen de coordenades.

A14

Feu el que s'ha proposat: calculeu el polinomi de Taylor d'ordre 3 de $f(x) = \sin x$, per exemple, en el punt $a = \frac{\pi}{3}$.

Com veiem, l'aspecte del polinomi de Taylor:

$$\sin x \approx p_3(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 \tag{11a}$$

és bastant més complicat que quan el calculem entorn de $x = 0$:

$$\sin x \approx p_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} \tag{11b}$$

Per tant, abans de fer servir una expressió del polinomi de Taylor, s'ha de tenir en compte per a quin valor de x s'ha obtingut. L'expressió (11b) dóna $p_3(0) = 0$, perquè $\sin 0 = 0$, mentre que la (11a) no dóna $p_3(0) = 0$, perquè no és una expressió adequada per a punts propers a $x = 0$. Anàlogament, la (11a) sí que reprodueix el valor exacte del $\sin(\pi/3)$, $p_3(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, mentre que la (11b) dóna un valor molt diferent per a $\pi/3$, i no és una bona aproximació per a calcular $\sin x$ en punts allunyats de $x = 0$.

S'ha d'utilitzar l'expressió (11a) per a calcular de manera aproximada el valor de la funció $\sin x$ per a angles propers a $x = \pi/3$.

Calculem els errors comesos.

A15

a) Escriviu l'expressió de la resta del polinomi de grau 3 que heu trobat en l'activitat A14.

b) Segons el resultat, podeu dir quin és l'error comès en aproximar sin 1 per $p_3(1)$?

c) I quin és l'error comès en calcular el valor de sin 70°?

Ara vegem com podem donar una cota de l'error sense haver de comparar-lo amb el valor exacte de la funció.

4. Estimació d'errors. La funció exponencial, per exemple

Suposem que volem saber el valor del nombre *e* de manera aproximada. En l'activitat A5 hem vist que el polinomi de grau 2 que aproxima l'exponencial és el següent:

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Si substituïm la variable x pel valor 1 obtenim el següent:

$$p_2(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

És bona aquesta aproximació? El teorema de Taylor ens ajuda a donar resposta a aquesta qüestió.

Tenint en compte que qualsevol derivada de l'exponencial e^x és la mateixa exponencial, obtenim el següent:

$$R_2(x) = \frac{e^z}{3!} x^3$$

en què z és un valor entre 0 i x.

Ens interessa veure què passa en $x = 1$ per tal de saber quin error hem comès en calcular $p_2(1)$:

$$R_2(1) = \frac{e^z}{3!} \tag{12}$$

amb z entre 0 i 1. Aquesta expressió, però, no ens dóna l'error exacte que hem comès en aproximar l'exponencial per un polinomi de grau 2 a $x = 1$, perquè no sabem quin valor concret té z. Tanmateix, podem fer un estudi de com es comporta la funció residu entre $z = 0$ i 1.

A16

Estudieu com varia la funció exponencial en l'interval que va de 0 a 1 i trobeu una cota superior a l'error que dóna l'expressió (12).

Hem obtingut, doncs, que l'error comès és menor que e/6. Això significa que ja sabem quin error hem comès en l'aproximació?

Alerta! El que volem és determinar de manera aproximada el nombre e (suposem que no sabem quant val exactament). Donar una cota de l'error és donar una desigualtat que ens permeti dir "l'error és més petit o igual que...". En aquest cas, podem dir que:

$$e \approx p(1) \approx 2.5$$

amb un error < e/6 = 2.5/6 ≈ 0.4. Per tant, amb aquesta aproximació només podem dir el següent:

$$2.5 - 0.4 < e < 2.5 + 0.4$$

És a dir:

$$2.1 < e < 2.9$$

No és un resultat gaire satisfactori! Fem un càlcul més precís que l'anterior.

A17

Utilitzeu el polinomi de Taylor d'ordre 4 de la funció exponencial en el punt 0 per a calcular de manera aproximada el nombre *e*.

Calculeu una cota de l'error comès.

Per tant, sempre podem fitar l'error que cometem en truncar el polinomi de Taylor per un terme determinat.

4.1. Problema invers: la precisió ve prefixada

De fet, el problema que se'ns planteja sovint és el de calcular un determinat valor amb una precisió determinada. Per exemple, què hem de fer si ens demanen que donem el valor del ln 1.1 amb un error inferior o igual a 10^{-2}?

Això és el mateix que preguntar de quin grau hem d'agafar el polinomi de Taylor $p_n(x)$ de la funció **logaritme neperià** per tal d'obtenir una aproximació del valor de ln 1.1 amb un error menor o igual a 10^{-2}.

Podem pensar a desenvolupar la funció ln $(1 + x)$, perquè volem calcular ln 1.1, és a dir, per a un punt proper a $x = 1$, i després fer $x = 0.1$. Així, podem prendre el punt $a = 1$ com el punt entorn del qual farem el desenvolupament, perquè sabem calcular ln 1.

A18

Recupereu l'activitat A8 i observeu quina forma tenen les successives derivades de $f(x) = \ln(1 + x)$. Escriviu la forma general que tindrà la derivada n-èsima.

Aleshores escriviu el polinomi de Taylor i la resta corresponent.

El nostre objectiu és determinar el grau del polinomi perquè l'error en el punt 0.1, $|R_n(0.1)|$, sigui menor que 10^{-2}.

A19

Apliqueu la condició anterior, $|R_n(0.1)| < 10^{-2}$, al residu que heu obtingut i intenteu fer una estimació del valor que tindrà aquest residu per a un valor qualsevol de n.

Ara fem proves per a valors diferents de n.

A20

Mireu què passa amb diferents valors de n i trobeu quin és el valor més petit de n que satisfà la desigualtat $|R_n(0.1)| < 10^{-2}$.

Fem un exercici una mica més complicat: vegem com utilitzar la fórmula de Taylor per a donar el valor de:

$$\frac{\sin\ 0.2}{\mathrm{e}^{0.2}}$$

amb un error inferior o igual a 10^{-4}.

Hem d'avaluar la funció $\sin x$ i la funció e^x en el punt 0.2, proper a 0. Com que sabem avaluar de manera exacta ambdues funcions a $a = 0$, només hem de trobar el polinomi de Taylor de:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x} \tag{13}$$

d'un grau adequat, en el punt $a = 0$.

Feu el càlcul a mà. En l'activitat següent podeu comprovar el resultat que obtindrem mitjançant la calculadora simbòlica Wiris per tal de practicar-ne l'ús.

A21

a) Obteniu les cinc primeres derivades de la funció (13). Feu el càlcul a mà i utilitzeu la calculadora Wiris si voleu comprovar els resultats.

b) Calculeu el valor de la funció en el punt $x = 0.2$; deixeu a la vista el valor de cada terme del polinomi.

Fixeu-vos que els termes d'aquesta suma de valors de signe alternants són, en valor absolut, cada vegada més petits:

$$0.2,\ 0.04,\ 0.002667,\ 0.000010667$$

Això vol dir que, a partir d'un cert moment, el valor de la suma és pràcticament el mateix. Recordem que l'objectiu era determinar el valor de:

$$\frac{\sin\ 0.2}{\mathrm{e}^{0.2}}$$

amb un error inferior o igual a 10^{-4}. Què passa si ens quedem en l'aproximació del polinomi de grau 3?

A22

Calculeu el residu corresponent al fet de quedar-nos amb l'aproximació $p_3(x)$ de la funció de l'activitat A21 i comproveu si l'error comès seria inferior a 10^{-4}.

Com vèiem en l'activitat A22, l'aproximació no és suficient si ens quedem amb el polinomi $p_3(x)$. Podem agafar, doncs, el polinomi de grau 5 (no hi ha polinomi de Taylor d'ordre 4) i veure què passa amb el residu.

A23

Calculeu el residu corresponent quan ens quedem amb l'aproximació $p_5(x)$.

Amb l'activitat A21 veiem que si avaluem el polinomi a 0.2, tenim garantida de sobres la precisió que se'ns demana.

A24

Calculeu, doncs, el valor de $p_5(0.2)$.

Acabem aquestes activitats amb un exercici de repàs.

A25

Calculeu un valor aproximat de $\sqrt{1.2}$, de manera que l'error comès sigui més petit o igual que 10^{-4}. Per tal de fer-ho, seguiu els passos següents:

1) Definiu una funció que, avaluada en un punt concret, us permeti calcular $\sqrt{1.2}$.

2) Trobeu l'expressió del polinomi de Taylor d'ordre n d'aquesta funció, entorn d'un punt a en què us sigui fàcil avaluar la funció.

3) Determineu el residu del polinomi.

4) Mireu quin ha de ser el grau del polinomi, n, de manera que el residu en valor absolut (error) sigui més petit o igual que 10^{-4}.

Recapitulació final: què hem après en aquest mòdul?

A banda de l'interès de facilitar el càlcul de valors de funcions en punts concrets, l'aproximació de funcions per polinomis és molt útil en determinats desenvolupaments teòrics que es fan en algunes aplicacions de les ciències o de l'enginyeria.

Per exemple, tal vegada recordareu que quan s'estudien les oscil·lacions d'un pèndol, apareix la funció $\sin x$ i que per a valors petits de l'angle d'oscil·lació x (en radians!) s'utilitza l'aproximació:

$$\sin x \approx x$$

que és una conseqüència senzilla del polinomi de Taylor corresponent, equació (11b).

En resum, l'aproximació de qualsevol funció per un polinomi és una eina útil tant per a càlculs concrets com per a desenvolupaments teòrics.

A26

Recapitulació:

- Què és el polinomi de Taylor d'una funció?
- Per a què serveix?
- Trieu una funció senzilla, prou derivable, i trobeu el polinomi de Taylor d'ordre 2 d'aquesta funció al voltant d'un punt.

Resolució d'activitats

A1

Per exemple:

a) $f(x) = \sin x$

$$\sin 0 = 0,\ \sin(\pi/2) = 1,\ \sin \pi = 0$$

b) $f(x) = e^x$

$$e^0 = 1,\ e^1 = 2.71...$$

c) $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$\sqrt{(1+3)} = 2, \sqrt{(1+24)} = 5, \sqrt{(1-1)} = 0$$

A2

$$p_1(0) = a + b \cdot 0 = a$$

$$f(0) = e^0 = 1$$

Per tant, $a = 1$.

$$p'_1(x) = b \Rightarrow p'_1(0) = b$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$$

per tant, $b = 1$, i el polinomi buscat és:

$$p_1(x) = 1 + 1 \cdot x = 1 + x$$

A3

a)

$$p(1.2) = 1 + 1.2 = 2.2$$

mentre que la calculadora dóna $e^{1.2} = 3.32116923$.

$$p(0.2) = 1 + 0.2 = 1.2$$

mentre que la calculadora dóna $e^{0.2} = 1.221402758$.

b) L'aproximació també serveix per a valors negatius:

$$p_1(-0.1) = 1 - 0.1 = 0.9$$

mentre que la calculadora dóna $e^{-0.1} = 0.90483742$.

c) Com que coneixem el valor exacte de la funció, podem calcular exactament l'error comès. L'error absolut comès el podem calcular així:

$$\left|p(x) - e^x\right|$$

i l'error relatiu així:

$$\frac{\left|p(x) - e^x\right|}{e^x}$$

Aquest últim error se sol expressar en percentatge (%).

x	Error absolut	Error relatiu	Error relatiu (%)
1.1	1.12	0.337	33.7%
–0.1	4.4×10^{-3}	0.53×10^{-3}	0.53%

A4

A mesura que ens allunyem de $x = 0$, la diferència entre la funció i el polinomi és cada vegada més gran.

Per a un punt x qualsevol, a mesura que la n va augmentant, la gràfica del polinomi és cada vegada més propera a la gràfica de la funció.

A més, a mesura que ens allunyem del punt $x = 0$, el grau del polinomi que hem de fer servir és cada vegada més gran si volem que l'error no sigui gran.

A5

El càlcul de a i b és com en l'activitat A2. Per a la tercera condició,

$$\begin{array}{l} p''_2(x) = 2c \quad \Rightarrow \quad p''_2(0) = 2c \\ f''(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 1 \\ \therefore \quad 2c = 1, \quad c = \tfrac{1}{2} \end{array}$$

resulta:

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

A6

$$p_2(1.2) = 2.92 \text{ , } p_2(0.2) = 1.22 \text{ , } p_2(-0.1) = 0.905$$

L'error relatiu comès ara és...

x	$\mathbf{e^x}$	**Aproximació** $p_1(x)$	**Aproximació** $p_2(x)$	**Error relatiu** $100 \dfrac{\lvert p_2(x) - e^x \rvert}{e^x}$ **(%)**
1.2	3.3211	2.2	2.92	12%
0.2	1.2214	1.2	1.22	0.1%
–0.1	0.904837	0.90	0.905	0.01%

A7

Fixeu-vos que les derivades de la funció exponencial són senzilles:

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x \quad n = 0,1,2...$$

Per tant,

$$f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1 \quad n = 0,1,2...$$

Convé que feu el cas $p_3(x)$ i després el cas $p_4(x)$, i us convenceu que l'expressió general del polinomi d'ordre n serà:

$$p_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

A8

Per exemple, es podria posar la condició que $p_1(x)$ tingui el mateix valor que la funció en dos punts, 0 i 0.1:

$$\begin{array}{l} p_1(0) = f(0) \\ p_1(0.1) = f(0.1) \end{array}$$

o que $p_1(x)$ coincideixi amb $f(x)$ en qualsevol altre parell de punts, com ara

$x = -0.05$ i $x = +0.05$, o en $x = +3$ i $x = +23$

Si feu un esquema de què signifiquen aquestes condicions, veureu que esteu construint una recta que és secant a la funció exponencial, i no pas tangent, com hem fet en l'A2.

A9

a) Els càlculs són senzills. Si teniu dificultats, plantegeu-les en el fòrum de l'assignatura.

$$p_0(x)=0;\quad p_1(x)=x;\quad p_2(x)=x-\frac{x^2}{2};\quad p_3(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3};\quad p_4(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$$

b)

$$p_0(0.1)=0;\quad p_1(0.1)=0.1;\quad p_2(0.1)=0.1-\frac{0.1^2}{2}=0.095;$$
$$p_3(0.1)=0.1-\frac{0.1^2}{2}+\frac{0.1^3}{3}=0.095333$$
$$p_4(0.1)=0.1-\frac{0.1^2}{2}+\frac{0.1^3}{3}-\frac{0.1^4}{4}=0.095308$$

El valor que dóna la calculadora és 0.095310179.

A10

$f(x)=\cos x$ $\qquad f(0)=\cos 0=1$

$f'(x)=-\sin x$ $\qquad f'(0)=-\sin 0=0$

$f''(x)=-\cos x$ $\qquad f''(0)=-\cos 0=-1$

$f'''(x)=\sin x$ $\qquad f'''(0)=\sin 0=0$

A11

$$p_0(x)=1$$

$$p_2(x)=1-\frac{1}{2!}x^2$$

$$p_4(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4$$

$$p_6(x)=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6$$

Com que qualsevol potència parella de $(-x)$ coincideix amb la mateixa potència de (x), els polinomis anteriors són tots funcions parelles:

$$p_n(-x)=p_n(x)$$

igual que la funció cosinus.

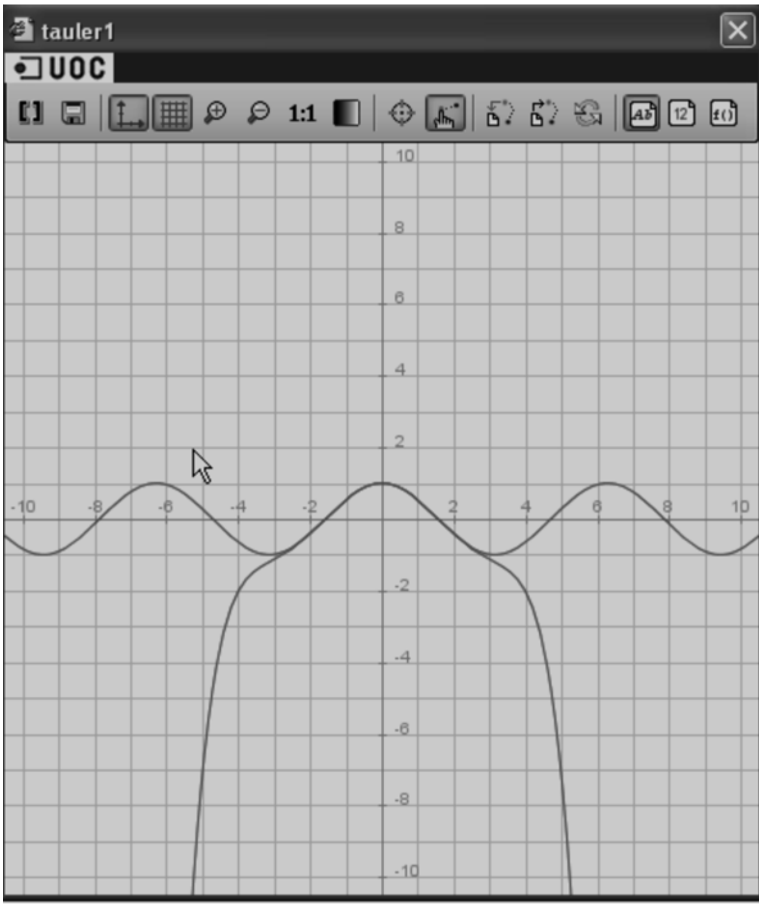
A12

a)

$$p_6(0.1)=1-\frac{1}{2!}0.1^2+\frac{1}{4!}0.1^4-\frac{1}{6!}0.1^6=0.995$$

La calculadora dóna cos 0.1 = 0.9950011165.

b)



Com veiem, l'aproximació $p_6(x)$ és bona per a un ampli rang de valors de x entorn de l'origen (de tota manera, no podem fer una afirmació absoluta: la precisió d'una aproximació depèn de l'error que puguem "tolerar").

c)

$$R_6(x) = \sin z \frac{x^7}{7!}, \quad \text{amb} \quad z \in \langle 0, x \rangle$$

A13

a) El càlcul és molt senzill. Plantegeu els vostres dubtes en el fòrum de l'assignatura.

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

b)

$$p_5(1) = 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} = 0.84167$$

La calculadora dóna 0.841470984. L'aproximació és bastant bona, tot i que el punt $x = 1$ està allunyat de l'origen, que és el punt al voltant del qual es va fer el desenvolupament del sinus.

c) La funció sinus és senar respecte de l'origen,

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

i per això el polinomi de Taylor només té potències senars de x.

A14

$$f(x)=\sin x \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x)=\cos x \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-\sin x \qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x)=-\cos x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$p_3(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}(x-\frac{\pi}{3})^2-\frac{1}{2\cdot 3!}(x-\frac{\pi}{3})^3$$

A15

a) $R_3(x)=\sin z\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{3})^4,\quad \text{con} \quad z\in\left\langle x,\frac{\pi}{3}\right\rangle$

b) En vista del residu $R_3(x)$, no podem donar l'error exacte que hem comès en aproximar sin 1 per $p_3(1)$ perquè no coneixem el valor concret de z. Ara veurem com delimitem els errors.

D'altra banda,

$$p_3(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}(1-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}(1-\frac{\pi}{3})^2-\frac{1}{2\cdot 3!}(1-\frac{\pi}{3})^3=0.84194$$

i, si fem servir la calculadora, sin 1 = 0.841470984, i veiem que, en aquest cas, l'aproximació $\sin x \approx p_3(x)$ és bona perquè l'error és en la quarta xifra decimal.

c) Per a calcular el valor aproximat de la funció sinus per a un angle de 70° hem de convertir l'angle a radians:

$$70^{\text{a}}=70°\frac{2\pi\,\text{radians/cercle}}{360°/\text{cercle}}=1.2217\ \text{radians}$$

Llavors

$$p_3(1.2217)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}(1.2217-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}(1.2217-\frac{\pi}{3})^2-\frac{1}{2\cdot 3!}(1.2217-\frac{\pi}{3})^3$$

i resulta:

$$p_3(1.2217)=0.93965$$

mentre que la calculadora dóna:

$$\sin 1.2217 = 0.93968$$

Com veiem, pel fet d'haver utilitzat el desenvolupament de la funció sinus entorn del punt $x = 1$, podem obtenir una bona aproximació per a la funció per a punts com 1.2217, que és pròxim a $x = 1$. L'error relatiu comès quan comparem el valor obtingut per Taylor amb l'exacte és de 3×10^{-3}, molt petit.

A16

Com que la funció exponencial és creixent per a arguments creixents, en l'interval [0, 1] pren el valor màxim en el punt 1. Per tant:

$$e^z \le e$$

Això vol dir que:

$$|R_2(1)|=\frac{e^z}{3!}\le\frac{e}{6}$$

Per comptes d'aquesta fita, jo posaria $|R_2(1)|=\frac{e^z}{3!}\le\frac{e}{6}<\frac{3}{6}=0.5$.

A17

De l'activitat A7 tenim el polinomi de Taylor de grau n de $f(x) = e^x$ entorn del punt 0:

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$$

Prenguem el polinomi de grau 4 per a trobar una aproximació del nombre *e*. Només cal calcular el valor del polinomi en el punt $x = 1$, perquè $e = e^1 = f(1)$:

$$p_4(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!}1^2 + \frac{1}{3!}1^3 + \frac{1}{4!}1^4 = 2.7083$$

El residu és ara:

$$|R_4(x)| = \frac{e^z}{5!}|x^5|$$

que per a $x = 1$ és:

$$|R_4(1)| = \frac{e^z}{5!} < \frac{e}{5!}$$

L'error, per tant, és inferior a:

$$|R_4(1)| < \frac{2.7083}{5!} = 0.02$$

Per comptes d'aquesta fita, jo posaria $|R_4(1)| < \frac{e}{5!} < \frac{3}{120} = 0.025$.

És a dir, hem calculat el valor del nombre *e* amb una xifra decimal correcta, perquè segurament la segona xifra ja té error. Així doncs, podem dir que $e \cong 2.71$ amb un error inferior a 0.02; com que la segona xifra decimal segurament ja té error, no té sentit manejar tots els decimals en 2.7083, i hem arrodonit el resultat.

En definitiva, podem dir que

$$2.69 < e < 2.73$$

Si usem la calculadora, trobem que e = 2.718281828 i comprovem que tot el que hem determinat teòricament és cert. Però recordeu: quan s'utilitza la fórmula de Taylor és perquè no coneixem el valor de la funció, o no tenim cap altra forma de calcular-lo. Hem recorregut a la Wiris o a la calculadora de butxaca només per a concretar idees.

A18

En derivar la funció ln $(1 + x)$ arribem a la conclusió que:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{(1+x)^n} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

per a n més gran que 1.

Així, el coeficient del terme de grau n del polinomi serà:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!(1+0)^n} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

i el polinomi:

$$p_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_n(x)$$

amb:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^n\dfrac{n!}{(1+z)^{n+1}}}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+z)^{n+1}}x^{n+1}$$

A19

Volem que el residu sigui $|R_n(0.1)| \leq 10^{-2}$, per tant:

$$|R_n(0.1)| = \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+z)^{n+1}} 0.1^{n+1} \right| \leq 10^{-2}$$

Com que z és un valor entre 0 i 0.1 (positiu), $(1+z)^{n+1}$ és més gran que 1 i, en conseqüència,

$$\frac{1}{(1+z)^{n+1}} \leq 1$$

Així, si volem que l'error sigui inferior a un valor determinat, només cal imposar que una quantitat una mica més gran que el valor desconegut del residu també ho sigui:

$$|R_n(0.1)| = \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+z)^{n+1}} 0.1^{n+1} \right| = \frac{1}{(n+1)(1+z)^{n+1}} 0.1^{n+1} \leq \frac{1}{n+1} 0.1^{n+1}$$

Ens fixem que 0.1 = 1/10, i que

$$0.1^{n+1} = \frac{1}{10^{n+1}}$$

per tant, podem escriure una estimació (de fet una fita superior) del residu per a qualsevol valor de n com

$$|R_n(0.1)| \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{10^{n+1}}$$

Si imposem la condició que volem per a aquest residu, obtenim que

$$\frac{1}{n+1} \frac{1}{10^{n+1}} < 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

que és equivalent a:

$$100 \leq (n+1)10^{n+1}$$

Aquesta seria la condició que s'hauria de complir per tal d'aconseguir un error com el que es demana. D'aquí s'hauria de trobar quin és el primer valor de n que ho compleix, cosa que es farà a l'activitat següent.

A20

La inequació que ha de complir n i que s'ha obtingut a l'activitat anterior no es pot resoldre analíticament; és a dir, no podem aïllar-ne la variable n, per tant, haurem de resoldre-la per tempteig, provant diferents valors de n fins a trobar el que ens interessi.

Si $n = 1$

$$100 \leq 2 \cdot 10^2 = 200$$

Per tant, amb $n = 1$ la condició sobre l'error es compleix i ja tenim una bona aproximació a la funció:

$$p_1(0.1) = 0.1$$

i direm que

$$\ln\,(1 + x) \cong 0.1$$

amb un error < 0.01. Per tant, el resultat es troba entre

$$-\,0.01 = 0.09$$

i

$$0.1 + 0.01 = 0.11$$

Efectivament, si calculem el valor amb la calculadora, ln 1.1 = 0.095310179.

Òbviament, la desigualtat $100 \leq (n+1)10^{n+1}$ també es complirà per a $n = 2$, o 3... però no guanyem res usant polinomis de grau 2 o 3, perquè l'expressió matemàtica que ens ha conduït al residu només garanteix un error inferior a 0.02, que amb $n = 1$ ja es compleix. Si no hagués estat així, caldria anar provant valors de n fins trobar el primer que ho complís.

A21

a) S'obté:

$$f(x) = \sin(x) / \exp(x) \;\Rightarrow\; x \mapsto \frac{\sin(x)}{e^x}$$

$$f(x)' \;\Rightarrow\; \frac{\cos(x)}{e^x} + \frac{-\sin(x)}{e^x}$$

$$f(x)'' \;\Rightarrow\; \frac{-2\cdot\cos(x)}{e^x}$$

$$f(x)''' \;\Rightarrow\; \frac{2\cdot\cos(x)}{e^x} + \frac{2\cdot\sin(x)}{e^x}$$

$$f(x)'''' \;\Rightarrow\; \frac{-4\cdot\sin(x)}{e^x}$$

$$f(x)''''' \;\Rightarrow\; \frac{-4\cdot\cos(x)}{e^x} + \frac{4\cdot\sin(x)}{e^x}$$

b) Només cal avaluar la funció i les seves derivades en el punt $a = 0$ per a obtenir els termes d'un polinomi de Taylor:

$$p_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 + \frac{f'''''(0)}{5!}x^5 + \ldots =$$
$$= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{-2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{-4}{5!}x^5 + \ldots$$

i aleshores

$$f(0.2) = 0 + 1\cdot 0.2 + \frac{-2}{2!}0.2^2 + \frac{2}{3!}0.2^3 + \frac{-4}{5!}0.2^5 + R_5(0.2)$$
$$= 0.2 - 0.04 + 0.0026667 - 1.0667\cdot 10^{-5} + R_5(0.2)$$

A22

Si tenim en compte el desenvolupament obtingut en l'activitat A21 entorn del punt $a = 0$, obtenim:

$$p_3(x) = x + \frac{-2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3$$

i com que

$$R_3(x) = \frac{\frac{-4\sin z}{e^z}}{4!}x^4$$

amb z entre 0 i x:

$$|R_3(0.2)| = \left|\frac{\frac{-4\sin z}{e^z}}{4!}0.2^4\right| = \frac{|\sin z|}{6e^z}0.2^4$$

Com que $\sin z \le 1$ i $\frac{1}{e^z} \le 1$, aleshores

$$|R_3(0.2)| \le \frac{1}{6}0.2^4 = 0.0002667$$

que és superior a 10^{-4} i, en conseqüència, no podem assegurar que l'error sigui $< 10^{-4}$.

La realitat és que $f(0{,}2) = 0.16265669$ i $p_3(0.2) = 0.162667$; per tant sí que seria una aproximació amb error inferior al demanat, però nosaltres, teòricament no podíem assegurar-ho. Amb això volem fer veure que les fites de l'error que calculem són conservadores i, en general, pessimistes.

A23

Com que

$$f(x)''''' \rightarrow \frac{-4\cdot\cos(x)}{e^x} + \frac{4\cdot\sin(x)}{e^x}$$

$$f(x)'''''' \rightarrow \frac{8\cdot\cos(x)}{e^x}$$

tenim que

$$|R_5(x)| = \left|\frac{f^{(6)}(z)}{6!}(x-x_0)^6\right| = \left|\frac{\dfrac{8\cos z}{e^z}}{6!}x^6\right|$$

amb z entre 0 i x. El cosinus sempre és inferior o igual a 1 i $\frac{1}{e^z} \leq 1$. Per tant:

$$|R_5(0.2)| \leq \frac{8}{6!}0.2^6 = 0.0000007111 < 10^{-6}$$

A24

$$p_5(0.2) = 0 + 1\cdot 0.2 + \frac{-2}{2!}0.2^2 + \frac{2}{3!}0.2^3 + \frac{-4}{5!}0.2^5 = 0.2 - 0.04 + 0.0026667 - 1.0667\cdot 10^{-5} = 0.16266$$

A25

a) Si $f(x) = \sqrt{x+1}$,

$$\sqrt{1.2} = \sqrt{1+0.2} = f(0.2)$$

Considerarem el polinomi de Taylor d'ordre n al voltant de $a = 0$

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n$$

$$\left\{\begin{array}{l}
f(x) = (1+x)^{1/2} \\
f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1} \\
f''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-2} \\
f'''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-3} \\
------------------- \\
f^{n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n}
\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}
f(0) = 1 \\
f'(0) = \frac{1}{2} \\
f''(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) \\
f'''(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) \\
------------------- \\
f^{n)}(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)
\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n = \\
&= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}x^n
\end{aligned}$$

Comentari: després de fer els càlculs indicats, l'expressió de la derivada enèsima pot donar-se de forma més o menys compacta a partir de la segona derivada amb la fórmula

$$f^{n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n(1+x)^{\frac{2n-1}{2}}}$$

c) Per a l'expressió del residu d'ordre *n* necessitem la derivada d'ordre $n+1$ de la funció

$$f^{n+1)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-(n+1)}$$

En aquest cas,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n\right)(1+c_n)^{\frac{1}{2}-(n+1)}}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!(1+c_n)^{n+1/2}}(x-0)^{n+1}$$

on $0 < c_n < x$. En particular, per a $x = 0.2$,

$$|R_n(0.2)| = \left|\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n\right)}{(n+1)!(1+c_n)^{n+1/2}}0.2^{n+1}\right| \quad \text{on} \quad 0 < c_n < 0.2$$

I, si en volem una fita superior, com que $1+c_n > 1$, la seva inversa és menor que 1 i aleshores

$$|R_n(0.2)| \le \frac{\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n\right)\right|}{(n+1)!}0.2^{n+1}$$

Comentari: Si fem servir l'expressió general de la derivada que hem trobat, el residu podem escriure'l com

$$|R_n(0.2)| = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n|1+c_n|^{\frac{2n-1}{2}}}0.2^{n+1} = 0.2\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{|1+c_n|^{\frac{2n-1}{2}}}10^{-n} \le 0.2\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)10^{-n}$$

d) Ho anirem provant fins obtenir un n pel qual $|R_n(0.2)| < 10^{-4}$. Comencem amb $n = 2$:

$$|R_2(0.2)| \le \frac{\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\right|}{3!}0.2^{2+1} = \frac{3}{6{\cdot}2^3}2^3 10^{-3} = 0.0005 > 10^{-4}$$

Per a $n = 3$:

$$|R_3(0.2)| \le \frac{\frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\right|}{4!}0.2^{3+1} = \frac{15}{24{\cdot}2^4}2^4{\cdot}10^{-4} = 0.625{\cdot}10^{-4} < 10^{-4}$$

i podem assegurar que el polinomi de Taylor

$$P_3(0.2) = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}0.2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}0.2^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}0.2^3 =$$
$$= 1 + 0.1 - 0.005 + 0.0005 = 1.0955$$

ens dóna una aproximació del valor de $\sqrt{1.2}$ amb un error més petit que 10^{-4} . En efecte, si mirem el valor que ens dóna la calculadora, $\sqrt{1.2} = 1.095445$, observem que

$$|1.095445 - 1.0955| = 0.000055 < 10^{-4}$$