Funcions racionals

Albert Gras i Martí
Teresa Sancho Vinuesa

PID_00183884

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Sobre aquests materials de treball

Integrar un quocient de polinomis, també anomenat *funció racional* o *fracció racional*, no sempre és fàcil. Una estratègia per a aconseguir-ho és descompondre'l en suma de fraccions que sí es poden integrar directament. Passa el mateix en el càlcul de la transformada de Laplace. En aquest mòdul explicarem amb detall els passos que cal seguir per a descompondre una funció racional en suma de fraccions simples.

1. Introducció

Una funció racional és un quocient de polinomis $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ irreductible. Aquesta funció està definida (domini) en tots els punts excepte en aquells que anul·len el denominador.

A1

Quin és el domini de la funció racional $\dfrac{x+1}{2x^2-x-1}$? Calculeu els punts de tall amb els eixos i els seus extrems relatius.

Si el grau del numerador és més gran que el del denominador podem expressar el quocient com la suma d'un polinomi i d'un quocient de polinomis amb el grau del numerador inferior al del denominador.

A2

Dividiu $3x^3 + 1$ entre $x^2 - 3x + 2$. Expresseu $3x^3 + 1$ com el quocient per $x^2 - 3x + 2$ més la resta obtinguda en fer la divisió.

En l'activitat 2 hem vist que podem expressar $3x^3 + 1 = (3x + 9)(x^2 - 3x + 2) + 21x - 17$. Per tant:

$$\frac{3x^3+1}{x^2-3x+2} = (3x+9) + \frac{21x-17}{x^2-3x+2}.$$

En aquest mòdul veurem com es descomponen funcions racionals amb el grau del numerador inferior al del denominador, també anomenades *fraccions pròpies*, en suma de fraccions del tipus $\dfrac{A}{(ax+b)^k}$ i $\dfrac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}$, anomenades fraccions simples.

Vegem en primer lloc per què és necessari descompondre una funció racional pròpia en suma de fraccions simples.

Com calcularíeu aquesta integral?

$$\int \frac{1}{x^2-5x+7}\mathrm{d}x \qquad (1)$$

Una opció seria intentar expressar el denominador en suma o diferència de quadrats. Observem que, efectivament,

$$x^2-5x+7 = (x-\frac{5}{2})^2 + \frac{3}{4} \qquad (2)$$

En general, si tenim un polinomi de 2n. grau

$$s^2 + bs + c$$

i el volem transformar en suma o diferència de quadrats, n'hi ha prou que sumem i restem

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

En efecte,

$$s^2 + bs + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

que podem escriure:

$$\left(s + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Alerta! Si en lloc del factor s^2 teniu as^2, primer podeu treure a factor comú,

$$as^2 + bs + c = a\left(s^2 + \frac{b}{a}s + \frac{c}{a}\right)$$

i continuar treballant amb l'expressió entre parèntesis anterior, com hem fet abans.

Tornem a l'exemple (1) amb el denominador escrit en la forma (2). Sabem que

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

i, per tant, la resolució de la integral original és pràcticament immediata:

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 7}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{5}{2}\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(2\frac{x - 5/2}{\sqrt{3}}\right) + C$$

En l'últim pas de la integració primer hem fet el canvi de variable $u = x - 5/2$, i després l'hem desfet.

2. Descomposició en fraccions simples

No sempre que tinguem un quocient de polinomis podrem fer una operació d'aquest tipus i arribar a una integral senzilla de resoldre. A continuació veurem un mètode de descomposició de funcions racionals (quocients de polinomis) en altres funcions racionals més simples que podrem integrar de manera gairebé immediata. Les funcions racionals més senzilles són del tipus $\dfrac{A}{(ax+b)^k}$ i $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$. Aquestes s'anomenen fraccions simples.

La primera regla per tal d'arribar a una descomposició en fraccions simples és factoritzar el denominador tant com sigui possible. En la taula 1 es mostra com serà la descomposició per a cada factor del denominador de la funció racional original.

Taula 1. Descomposició en fraccions simples

Factor en el denominador	Termes de la descomposició en fraccions simples
$ax+b$ (arrel real)	$\dfrac{A}{ax+b}$
$(ax+b)^k$ (arrel real múltiple)	$\dfrac{A_1}{ax+b}+\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\dfrac{A_k}{(ax+b)^k}$
ax^2+bx+c (arrels complexes)	$\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
$(ax^2+bx+c)^k$ (arrels complexes múltiples)	$\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\dfrac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+\cdots+\dfrac{A_kx+B_k}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}$

(Observeu que els casos primer i tercer de la taula anterior són casos especials dels casos segon i quart, respectivament. Tanmateix, els escrivim explícitament perquè apareixen amb certa freqüència.)

Vegem què significa la taula 1.

Exemple 1

Calculem la descomposició en fraccions simples de la funció següent:

$$G(s)=\frac{86s-78}{(s+3)(s-4)(5s-1)} \quad (3)$$

La taula 1 indica que per a cada factor del tipus $(ax+b)$ en el denominador hem d'escriure un sumand del tipus $A/(ax+b)$, en què A és un paràmetre que cal calcular.

Per tant, la descomposició en fraccions simples és la següent:

$$G(s)=\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s-4}+\frac{C}{5s-1}$$

A fi que la funció $G(s)$ anterior sigui la mateixa que la de l'equació (3), hem de determinar els coeficients A, B, C en:

$$\frac{86s-78}{(s+3)(s-4)(5s-1)}=G(s)=\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s-4}+\frac{C}{5s-1}$$

Si eliminem denominadors dels dos membres de la igualtat, és a dir, si multipliquem els dos membres de la igualtat per $(s + 3)$ $(s - 4)$ $(5s - 1)$, obtenim:

$$86s-78=A(s-4)\ (5s-1)+B(s+3)\ (5s-1)+C(s+3)\ (s-4)$$

I si triem valors adequats per a la variable s, podem trobar fàcilment les constants:

$$\begin{array}{lll} s=-3, & -336=A(-7)(-16) & \Rightarrow A=-3 \\ s=\frac{1}{5}, & -\frac{304}{5}=C\left(\frac{16}{5}\right)\left(-\frac{19}{5}\right) & \Rightarrow C=5 \\ s=4, & 266=B(7)(19) & \Rightarrow B=2 \end{array}$$

I resulta:

$$G(s)=-\frac{3}{s+3}+\frac{2}{s-4}+\frac{1}{s-\frac{1}{5}}$$

en què ja hem escrit l'últim terme, de manera que el denominador sigui del tipus $s + A$ i no $Bs + C$.

Veiem que la integral de l'expressió (3) és immediata:

$$G(s)=\frac{86s-78}{(s+3)(s-4)(5s-1)}$$

$$\int G(s)\ \mathrm{d}s=-3\ \ln|s+3|+2\ \ln|s-4|+\ln\left|1-\frac{1}{5}\right|+C=\ln\ \frac{(s-4)^2\left|s-\frac{1}{5}\right|}{|s+3|^3}+C$$

A3

Expresseu el polinomi $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 66$ en producte de polinomis de grau 1 o 2.

Exemple 2

$$F(s)=\frac{2-5s}{(s-6)\left(s^2+11\right)}$$

Segons la taula 1, el terme quadràtic en el denominador (que no té arrels reals) es descompon de la manera següent:

$$F(s)=\frac{2-5s}{(s-6)\left(s^2+11\right)}=\frac{A}{s-6}+\frac{Bs+C}{s^2+11}$$

Igualem els numeradors, és a dir, ho multipliquem tot per $(s - 6)\ (s^2 + 11)$:

$$2 - 5s = A(s^2 + 11) + (Bs + C)\ (s - 6)$$

Si fem $s = 6$, obtenim el valor de A, però no podem donar altres valors senzills per tal d'obtenir B i C, com hem fet per a resoldre situacions semblants fins ara.

Com a alternativa, utilitzarem un mètode equivalent al de donar valors concrets a la variable s, però que sempre funciona: multipliquem termes en el membre de la dreta i agrupem els termes resultants de la mateixa potència de s:

$$\begin{aligned} 2 - 5s &= A(s^2 + 11) + (Bs + C)\ (s - 6) \\ &= As^2 + 11A + Bs^2 - 6Bs + Cs - 6C \\ &= (A + B)s^2 + (-6B + C)s + 11A - 6C \end{aligned}$$

Com que els polinomis dels dos membres de la igualtat han de coincidir per a tot valor de s, els coeficients de les mateixes potències de s han de ser iguals:

$$\begin{aligned} S^2: &\quad A + B = 0 \\ S^1: &\quad -6B + C = -5 \\ S^0: &\quad 11A - 6C = 2 \end{aligned}$$

I obtenim:

$$A = -\frac{28}{47} \qquad B = \frac{28}{47} \qquad C = -\frac{67}{47}$$

(El mètode alternatiu que acabem d'utilitzar per a obtenir els valors de A, B i C es basa en el concepte d'*independència lineal d'una base de funcions*).

Portem els valors de A, B i C a l'expressió de $F(s)$ i, com que els denominadors no són nombres senzills, cal treure'n el factor comú:

$$F(s) = \frac{1}{47}\left(-\frac{28}{s-6} + \frac{28s - 67}{s^2 + 11}\right) = \frac{1}{47}\left(-\frac{28}{s-6} + \frac{28s}{s^2+11} - \frac{67\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}}{s^2+11}\right)$$

Llavors:

$$\int F(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{47}\left(-28\ \ln\ |s-6| + 14\ \ln\ (s^2+11) - 67\frac{1}{\sqrt{11}}\ \arctan\ \frac{s}{\sqrt{11}}\right) + C$$

Exemple 3

$$G(s) = \frac{25}{s^3\left(s^2 + 4s + 5\right)}$$

En aquest exemple podem interpretar el terme s^3 com:

$$s^3 = (s - 0)^3$$

Per tant, segons la taula 1, hem d'escriure el següent:

$$G(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds + E}{s^2 + 4s + 5}$$

Si eliminem denominadors en els dos membres de la igualtat i multipliquem, resulta el següent:

$$\begin{aligned} 25 &= As^2(s^2 + 4s + 5) + Bs(s^2 + 4s + 5) + C(s^2 + 4s + 5) + (Ds + E)s^3 = \\ &= (A + D)s^4 + (4A + B + E)s^3 + (5A + 4B + C)s^2 + (5B + 4C)s + 5C \end{aligned}$$

Identifiquem els coeficients de les potències de s del mateix grau:

$$\begin{array}{ll} S^4: & A + D = 0 \\ S^3: & 4A + B + E = 0 \\ S^2: & 5A + 4B + C = 0 \\ S^1: & 5B + 4C = 0 \\ S^0: & 5C = 25 \end{array}$$

I resolem el sistema d'equacions:

$$A = \frac{11}{5} \qquad B = -4 \qquad C = 5 \qquad D = -\frac{11}{5} \qquad E = -\frac{24}{5}$$

(El sistema és més senzill de resoldre del que sembla si comencem per la cinquena equació, després la quarta i la tercera, etcètera.)

Tal com hem fet abans, traiem el factor comú 5 de tots els denominadors:

$$G(s) = \frac{1}{5}\left(\frac{11}{s} - \frac{20}{s^2} + \frac{25}{s^3} - \frac{11s + 24}{s^2 + 4s + 5}\right)$$

Encara hem de completar el quadrat de l'últim terme i escriure adequadament un parell de numeradors:

$$G(s) = \frac{1}{5}\left(\frac{11}{s} - \frac{20}{s^2} + \frac{25}{s^3} - \frac{11(s + 2 - 2) + 24}{(s + 2)^2 + 1}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{11}{s} - \frac{20}{s^2} + \frac{25}{s^3} - \frac{11(s + 2)}{(s + 2)^2 + 1} - \frac{2}{(s + 2)^2 + 1}\right)$$

Obtenim:

$$\int G(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{5}\left(11\ \ln|s| + \frac{20}{s} - \frac{25}{2s^2} - \frac{11}{2}\ \ln\ \left((s+2)^2+1\right) - 2\ \arctan\ (s+2)\right) + C$$

Nota important

Com hem dit en la introducció, la descomposició en fraccions simples exigeix que, en primer lloc, hàgim factoritzat al màxim el denominador de la funció racional.

A4

Calculeu les integrals racionals següents:

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x}$

b) $\int \frac{x^2+6}{x^4-1}\mathrm{d}x$

Resolució d'activitats

A1

Domini:

Les arrels del denominador són

$$2x^2 - x - 1 = 0, \quad x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

La funció no està definida en els dos punts anteriors, $x = 1$, i $x = -1/2$.

Punts de tall:

Si $x = 0$, la funció val $y = -1$.

La funció s'anul·la, $y = 0$, per a $x = -1$.

Extrems:

Derivem la funció

$$y' = \frac{1 \cdot (2x^2 - x - 1) - (x+1) \cdot (4x-1)}{(2x^2 - x - 1)^2} = \frac{2x^2 - x - 1 - (4x^2 + 3x - 1)}{(2x^2 - x - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 4x}{(2x^2 - x - 1)^2} = \frac{-2x(x+2)}{(2x^2 - x - 1)^2}$$

que s'anul·la per a $x = 0$ i per a $x = -2$.

Cal determinar la derivada segona per a confirmar que són extrems, i no punts d'inflexió:

$$y'' = \frac{(2x^2 - x - 1)^2(-4x - 4) - 2(2x^2 - x - 1)(4x - 1)(-2x^2 - 4x)}{(2x^2 - x - 1)^4} =$$

$$= \frac{(2x^2 - x - 1)(-4x - 4) - 2(4x - 1)(-2x^2 - 4x)}{(2x^2 - x - 1)^3} = 4\frac{2x^3 + 6x^2 + 1}{(2x^2 - x - 1)^3}$$

Aquesta segona derivada resulta positiva per a $x = -2$ (per tant, hi tenim un mínim) i negativa per a $x = 0$ (per tant, hi tenim un màxim).

A2

Fem la divisió de polinomis:

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & & & +1 & x^2-3x+2 \\ \hline -3x^3 & +9x^2 & -6x & 0 & 3x \\ & 9x^2 & -6x & 1 & 9 \\ & -9x^2 & 27x & -18 & \\ & & 21x & -17 & \end{array}$$

Per tant,

$$3x^3 + 1 = (3x + 9)(x^2 - 3x + 2) + 21x - 17$$

A3

Recordem primer que les arrels d'un polinomi són divisors del terme independent.

Volem escriure el polinomi com a producte de factors tipus $(x-a)$ o (Cx^2+Dx+E).

Convé recordar que, si el coeficient del terme de grau més alt és 1 i el polinomi té arrels enteres, el valor de a dels possibles factors de grau 1 ha de ser un divisor del terme independent del polinomi.

Els divisors del terme independent de $p(x)$ són 1, –1, 2, –2, 3, –3, 6, –6, 11, –11, 66 i –66. Comprovem, per exemple, si x = 2 és una arrel:

$$2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 66 = 8 - 24 + 22 - 66 \neq 0$$

No ho és. Si comprovem si els altres candidats ho són, veiem que tampoc ho són, excepte $x = 6$ que sí és solució. Ho podem comprovar bé fent-hi la substitució i veient que $p(6) = 0$, o bé mitjançant la regla de Ruffini.

Per tant, $p(x)$ és divisible per x–6.

Si fem la divisió, com en l'activitat A2, obtenim que

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 66 = (x-6)(x^2+11)$$

on el polinomi x^2+11 no té arrels reals.

A4

a) $\int \frac{dx}{x^2+2x} = \int \frac{dx}{x(x+2)}$

Per tal de fer la descomposició de l'integrand, es pot seguir el procediment indicat en el text:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \\
&1 = A(x+2) + Bx \\
&x = 0 \Rightarrow 1 = A \cdot 2 + 0, A = 1/2 \\
&x = -2 \Rightarrow 1 = A \cdot 0 - 2B, B = -1/2
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\int \frac{dx}{x^2+2x} = \int \frac{dx}{x(x+2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C$$

Podeu comprovar immediatament per derivació que el resultat és correcte.

Nota: A l'hora de fer integrals indefinides, a més de repassar els càlculs o fer servir la Wiris, convé comprovar que els resultats són correctes per mitjà de la derivació.

b) En aquest cas convé adonar-se que el denominador és una diferència de quadrats; per tant, és igual a una suma per una diferència:

$$\int \frac{x^2+6}{x^4-1}dx = \int \frac{x^2+6}{(x^2+1)(x^2-1)}dx = \int \frac{x^2+6}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}dx$$

on, en el segon pas, hem convertit de nou la diferència de quadrats en una suma per una diferència.

El polinomi x^2+1 = 0 no té arrels reals; per tant, ja podem fer la descomposició:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2+6}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1} \\
&x^2 + 6 = (Ax+B)(x+1)(x-1) + C(x^2+1)(x-1) + D(x^2+1)(x+1)
\end{aligned}$$

Per a trobar els valors de les quatre constants, donem com a valors de x aquells que anul·lin alguns factors, $x = 1$ i $x = -1$, i dos valors més qualsevol, com ara $x = 0$ i $x = 2$:

$$\begin{aligned}
&x^2 + 6 = (Ax+B)(x+1)(x-1) + C(x^2+1)(x-1) + D(x^2+1)(x+1) \\
&x = 0 \Rightarrow 6 = -B - C + D \\
&x = 1 \Rightarrow 1 + 6 = 0 + 0 + D(2 \cdot 2) \Rightarrow D = 7/4 \\
&x = -1 \Rightarrow 1 + 6 = 0 - C(2 \cdot 2) + 0 \Rightarrow C = -7/4 \\
&x = 2 \Rightarrow 4 + 6 = (2A+B) \cdot 3 \cdot 1 + C(5 \cdot 1) + D \cdot 5 \cdot 3
\end{aligned}$$

Com que ja tenim C i D, la constant B surt de la primera equació:

$$6 = -B - (-7/4) + 7/4 \rightarrow B = -5/2$$

De la quarta equació,

$$10 = 6A + 3 \cdot (-5/2) + 5 \cdot (-7/4) + 15 \cdot 7/4$$

resulta $A = 0$.

Abans de continuar convé repassar que, efectivament, els resultats per als coeficients són correctes, és a dir, que

$$\frac{x^2+6}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} = \frac{-5/2}{x^2+1} + \frac{-7/4}{x+1} + \frac{7/4}{x-1}$$

Convé fer-ho perquè, en general, les integrals que resultin poden tenir alguna complicació, i si no tenim els coeficients correctes, l'esforç serà en va.

La integral que hem de fer és, per tant,

$$\int \frac{x^2+6}{x^4-1}dx = \int \frac{B}{x^2+1}dx + \int \frac{C}{x+1}dx + \int \frac{D}{x-1}dx = B\arctan x + C\ln|x+1| + D\ln|x-1| + C$$

$$\int \frac{x^2+6}{x^4-1}dx = -\frac{5}{2}\arctan x + \frac{7}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

De nou, convé derivar l'expressió obtinguda i veure que reproduïm l'integrand, per a garantir que tot va bé.