# Anàlisi mitjançant teoria de cues

Enric López i Rocafiguera

PID_00160513

Universitat Oberta de Catalunya
www.uoc.edu

# Índex

# Introducció

Les xarxes de comunicacions estan formades per un conjunt de recursos que pretenen que la informació es transmeti a través seu de manera eficient. Aquests recursos són limitats i seran compartits per múltiples usuaris amb diferents necessitats. Aquestes necessitats dependran del tipus de dades que els clients vulguin transmetre i del moment en què les vulguin transmetre; per tant, el trànsit a les xarxes variarà de manera aleatòria i caldrà un estudi estadístic de la capacitat que han de tenir els diferents recursos. Hi haurà moments en què els recursos no seran suficients per a poder absorbir el trànsit demandat pels usuaris i caldrà disposar de sistemes d'espera.

La teoria de cues és una eina matemàtica molt útil per a poder gestionar correctament els sistemes d'espera i per a poder dimensionar correctament els recursos per a donar un determinat servei. A partir de la teoria de cues podrem modelitzar el sistema i obtenir la millor disciplina de servei per a cues amb diversos tipus de clients.

En aquest mòdul didàctic analitzarem diferents models de cues i les seves principals característiques. Començarem veient una introducció als processos de Poisson i als processos de Markov, que ens permetran caracteritzar l'aleatorietat de les arribades al sistema, i ens serviran de base per a l'estudi dels sistemes d'espera. Posteriorment, modelitzarem el tipus de trànsit i veurem els principals models de cues amb cua única. Finalitzarem el mòdul amb una introducció a les xarxes de cues.

# Objectius

Aquests materials didàctics han de permetre assolir els objectius següents per part dels estudiants:

1. Recordar diversos conceptes estadístics com són: la funció de distribució, la funció de densitat de probabilitat, la mitjana i la variància.

2. Entendre els processos de Poisson i les seves propietats.

3. Entendre el concepte de cadena de Markov, obtenir l'equació de futur i poder representar el diagrama d'estats.

4. Conèixer les diferents definicions associades al concepte de trànsit, com són els tipus de trànsit i les probabilitats associades.

5. Conèixer els principals models de cues, la notació i els principals paràmetres que els caracteritzen.

6. Poder diferenciar els diferents models de cues comparant-ne les característiques.

7. Poder analitzar una xarxa de cues a partir del teorema de Jackson.

# 1. Introducció

Les xarxes es dissenyen tenint en compte diferents variables. Dues de les variables que cal tenir en compte en el disseny d'una xarxa són el **servei** i el **cost**. Per tal de tenir controlats aquests dos paràmetres hem d'optimitzar el rendiment del sistema. Una manera d'optimitzar aquest rendiment és mitjançant models analítics basats en la teoria de cues, que ens proporcionen una gran ajuda per a poder dissenyar xarxes amb un rendiment elevat.

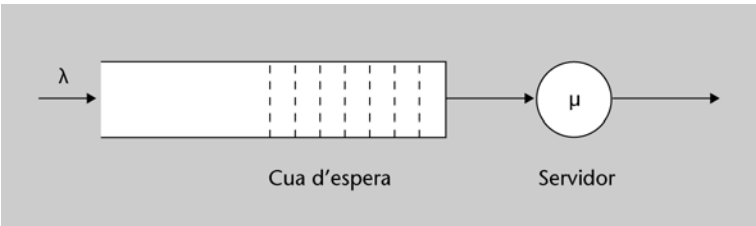
És molt important per a poder dimensionar la capacitat d'un sistema de transmissió utilitzar unes tècniques que facin estimacions del trànsit en funció de diferents paràmetres d'entrada, com poden ser:

- La càrrega de trànsit.
- El grau de servei.
- El tipus de trànsit.
- Els mètodes de mostratge.

Encara que la teoria de cues és matemàticament força complexa, aplicar-la a l'anàlisi del rendiment dels sistemes normalment és molt més senzill.

Els sistemes de transmissió sovint els podem modelitzar segons un esquema com el de la figura següent:

Figura 1. Model simplificat d'un sistema d'espera




Aquí es mostra una font generadora de dades i una cua d'espera en què s'acumularan les unitats de dades que esperen ser ateses per un servidor. Tant el procés d'arribada de les unitats al sistema com el procés de servei són dos processos estocàstics. Hi ha dos paràmetres que cal tenir en compte: la disciplina amb què es generen les dades i la disciplina amb què se serveixen. El terme *disciplina* fa referència a quins són els paràmetres estadístics d'aquests elements.

La **disciplina de generació**, o d'arribada, de les dades, és l'estadística dels temps d'arribada de les unitats de dades. La **disciplina de servei** és de l'estadística dels temps que es tarden a servir-les.

Es pot considerar que les unitats arribaran independentment de l'estat del sistema, per la qual cosa el seu comportament es podrà analitzar conjuntament com un procés estocàstic discret en temps continu. El temps de servei de les unitats serà impredictible i el modelitzarem també com un procés estocàstic discret en temps continu independent del procés d'arribada.

Un paràmetre que ens definirà el comportament de les arribades i del mecanisme de servei serà el corresponent a la mitjana d'aquestes estadístiques, que està caracteritzat per $\lambda$ i $\mu$, respectivament.

Ens podem trobar diferents possibilitats en funció dels valors que prenguin $\lambda$ i $\mu$:

**Velocitats mitjanes**

- $\lambda$ és la taxa mitjana, o velocitat mitjana, d'arribades al sistema.
- $\mu$ és la velocitat mitjana de servei.

- $\lambda < \mu$; el sistema és estable i la cua no s'omplirà.
- $\lambda > \mu$; el sistema se saturarà i s'omplirà la cua d'espera.
- $\lambda = \mu$; és el límit d'estabilitat, se serviran tantes dades com n'arribin.

Per tal que l'espera no sigui molt llarga, s'intenta que les cues no quedin molt ocupades; això vol dir que $\lambda \leq \mu$. Tot i que per a optimitzar el cost habitualment es dimensiona el sistema de manera que es considera la possibilitat d'una certa congestió, sempre que es garanteixi un mínim nivell de qualitat del servei.

Observeu que en qualsevol sistema que es vulgui analitzar hem de considerar els aspectes següents:

- El model d'arribada de les unitats de dades al sistema.

- El model de servei de les unitats en el sistema.

- La disciplina d'operació de les cues, des del punt de vista de l'ordre de lliurament als servidors de les unitats emmagatzemades perquè siguin ateses.

- El nombre de servidors que treballen en paral·lel (quantes unitats es poden servir simultàniament)

- El nombre de fonts que generen unitats cap al sistema.

**Principals disciplines de cues**

Les disciplines de cues més importants són les següents:

- RR: *round robin.*
- FIFO: *first in first out.*
- SIFO: *shortest in first out.*
- LIFO: *last in first out.*

# 2. Processos de Poisson

Una de les disciplines més utilitzades per la seva simplicitat, propietats i característiques generals són els **processos de Poisson**. Aquestes característiques només permeten anàlisis més aviat simples que s'ajusten a fonts de dades en general, però no vàlides per a casos en els quals tinguem fonts de dades més o menys complexes, com els multimèdia (àudio, vídeo, etc.).

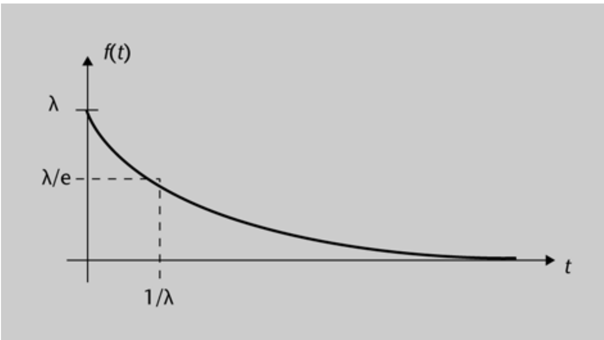
Abans de passar a definir els processos de Poisson veurem algun dels conceptes previs al seu desenvolupament.

## 2.1. Distribució exponencial. Sistema sense memòria

Un procés amb estadística exponencial és un procés aleatori que té una probabilitat distribuïda que segueix una funció de distribució de tipus exponencial.

Una **funció de distribució exponencial** és una funció contínua que té una funció de densitat de probabilitat de tipus exponencial. Això vol dir que: $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$ per a $t > 0$

Figura 2. Representació gràfica de la funció de distribució exponencial




La seva funció de distribució, obtinguda d'integrar la funció de densitat de probabilitat, és:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{per a } t > 0$$

A partir de la funció de densitat de probabilitat podem obtenir la mitjana, o esperança, d'aquesta variable aleatòria:

$$m = E[t] = \int_0^{\infty} t\lambda.e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$$

I la variància:

$$\sigma^2 = E[t^2] - E^2[t] = \int_0^\infty t^2 \lambda . e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Un sistema amb distribució de probabilitat exponencial el podem considerar un **sistema sense memòria**.

**Sistema sense memòria**

Es tracta d'un sistema definit amb una funció de distribució exponencial.

Anem a considerar un sistema en un temps d'observació continu $t$, i observem l'estat del sistema en dos instants de temps reals positius $x$ i $y$. La distribució de probabilitat de $t$ direm que és sense memòria si la probabilitat en qualsevol instant no depèn de la probabilitat en instants anteriors. Matemàticament ho podem expressar:

$$P(t > x + y \mid t > x) = \mathrm{P}(t > y)$$

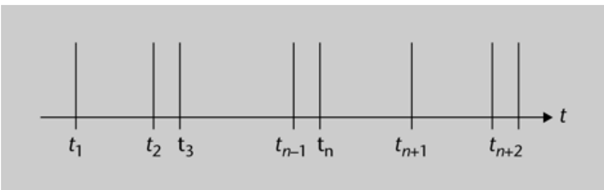
Podem comprovar que un sistema definit amb la funció de distribució exponencial és un sistema sense memòria, ja que compleix aquesta igualtat:

$$P\left(t > x + y \mid t > x\right) = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y} = P\left(t > y\right)$$

## 2.2. Definició d'un procés de Poisson

Considerem un procés d'arribades aleatòries de manera contínua en el temps, tal com es mostra a la figura següent:

Figura 3. Representació gràfica de la distribució de les arribades d'un procés




Per a definir un procés de Poisson, considerem les hipòtesis següents:

**a)** Un procés sense memòria, en el qual cada arribada sigui independent de quan s'ha produït l'anterior.

**b)** Població infinita, és a dir, que el nombre de fonts sigui tan gran que es pugui considerar que la taxa mitjana d'arribada d'unitats no depèn del temps, i per tant, és una constant de valor $\lambda$.

**c)** Estacionari. La probabilitat que es produeixi una arribada sigui proporcional al temps d'observació $\Delta t$, és a dir, que sigui $\lambda\Delta t$.

Tenint en compte aquestes hipòtesis, es pot obtenir que la probabilitat que es produeixin $n$ arribades en un temps $t$, es pot calcular com:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Es pot demostrar fàcilment que aquesta probabilitat està normalitzada. És a dir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$$

La probabilitat que no es produeixi cap arribada en un temps $t$ és, doncs:

$$P_0(t) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

Aquest resultat ens permet calcular la probabilitat de tenir alguna arribada en l'instant de temps $t$, que es pot obtenir com:

$$P_{n \neq 0}(t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

## 2.3. Mitjana i variància

Un cop definida la probabilitat d'arribada d'unitats en el sistema podem obtenir el nombre mitjà d'unitats en el sistema en un interval de temps $t$, que es pot avaluar segons l'expressió:

$$E[n(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n.P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n.\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!}$$
$$= e^{-\lambda t}.\lambda t.\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t}.\lambda t.e^{\lambda t} = \lambda t$$

Com que $E[n(t)] = \lambda t$, es pot deduir que $\lambda$ és la velocitat mitjana de les arribades per unitat de temps, ja que $\lambda = E[n(t)]/t$. El paràmetre $\lambda$ s'anomena **taxa d'arribades.**

**Mitjana i variància**

En un procés de Poisson la mitjana i la variància prenen el mateix valor: $\lambda t$.

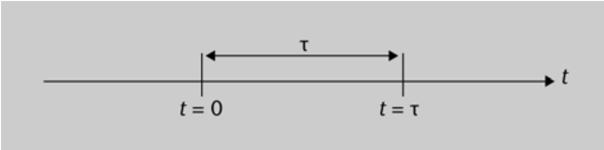
La variància de les arribades d'un procés de Poisson es pot calcular com:

$$\sigma^2 = E[n^2(t)] - E^2[n(t)] = E[n(t)(n(t) - 1)] + E[n(t)] - E^2[n(t)] =$$
$$= (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t$$

### 2.4. Distribució de les arribades en un procés de Poisson

La manera com es distribuiran en el temps les arribades és la funció de distribució del procés. Per a poder-la calcular suposarem un interval de temps amb un origen de temps arbitrari, al final del qual es produeix l'arribada de la unitat següent.

Figura 4




En aquest cas hi ha una arribada a $t = 0$ i la següent es produeix per a $t = \tau$. No es rep cap unitat en l'interval de temps comprès en $(0, \tau)$, i per tant, la probabilitat de no tenir cap arribada en l'interval $(0, t)$ és exactament la probabilitat que $\tau$ sigui més gran que $t$. És a dir,

$$P(\tau > t) = P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Per això la funció distribució és:

$$F(t) = F(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

I derivant obtenim la funció de densitat de probabilitat de tipus exponencial:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda . e^{-\lambda t}$$

A partir d'aquesta funció de densitat, tal com hem vist anteriorment, podem obtenir la mitjana de temps entre les arribades i la variància:

$$m = E[t] = \int_0^\infty t.\lambda.e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

S'ha tractat la funció de densitat de probabilitat al subapartat 2.1 d'aquest mòdul didàctic.

$$\sigma^2 = E[t^2] - E^2[t] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Observem que en un procés de Poisson la durada mitjana entre dues arribades consecutives coincideix amb la seva desviació típica $\sigma$.

### 2.5. Propietats

Les dues propietats que tractarem en aquest subapartat són les següents:

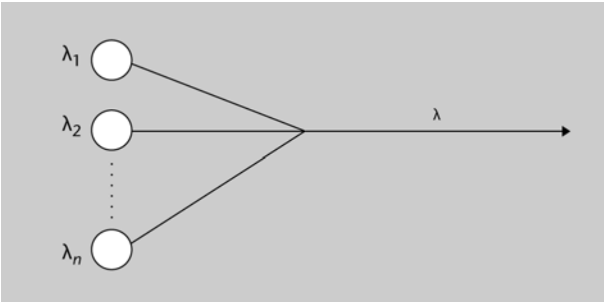
- Superposició.
- Descomposició.

**1) Superposició**

Suposem *n* fonts de Poisson independents amb taxes d'arribada $\lambda_i$. La font resultant de la suma dels processos de Poisson és un altre procés de Poisson amb una taxa d'arribades ($\lambda$) igual que la suma de les taxes dels processos.

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

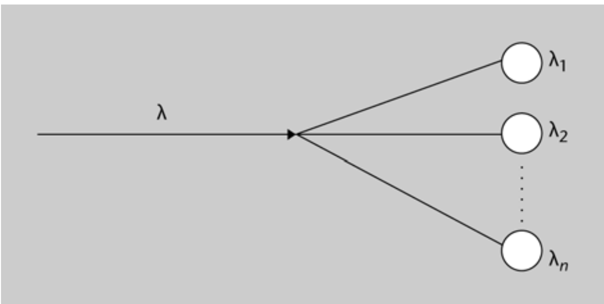
Figura 5. Superposició de processos de Poisson




**2) Descomposició**

Suposem una font generadora que segueix un procés de Poisson amb una taxa d'arribades $\lambda$. Si descomponem aleatòriament aquest flux en un conjunt de fluxos més petits amb una probabilitat $P_i$, els fluxos resultants tindran una taxa $\lambda_i = \lambda P_i$, que seran també de Poisson.

Figura 6. Descomposició d'un procés de Poisson



# 3. Cadenes de Markov

Les cadenes de Markov són una eina per a analitzar el comportament de determinats tipus de processos estocàstics, com per exemple el nombre de trucades que arriben a una central telefònica o el nombre de compradors que arriben a un taulell.

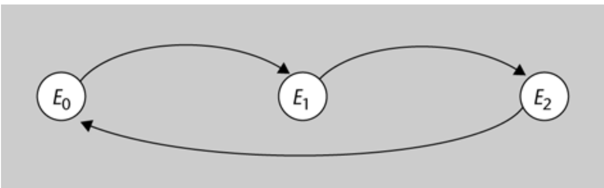
Un sistema pot canviar el seu estat des de l'estat actual a un altre. El sistema estarà en un estat o un altre en funció d'unes probabilitats. A partir d'aquestes probabilitats, es poden calcular un conjunt de paràmetres que permetran caracteritzar el sistema.

Considerem un sistema amb diversos estats. Anomenem $E_i$ l'estat $i$ en què, per exemple, $i$ usuaris estiguin en un instant donat fent una trucada telefònica. Si hi hagués $n$ circuits en total per a cursar les trucades, caldria definir des d'un estat $E_0$ fins a un estat $E_n$ ($E_0$, $E_1$, $E_2$, ..., $E_n$).

Com que el sistema és estocàstic, no es pot conèixer el seu estat amb exactitud, sinó que només coneixerem la probabilitat associada a cada estat. Aquesta probabilitat d'estar en cadascun dels estats en l'instant $t_i$ es pot escriure com $P_0(t_i)$, $P_1(t_i)$, $P_2(t_i)$, ..., $P_n(t_i)$.

Una cadena de Markov ens representa un sistema que varia el seu estat al llarg del temps. Cada canvi d'estat s'anomena *transició*. Una cadena de Markov està formada per un conjunt d'estats que es poden representar gràficament mitjançant nodes, enllaçats entre ells mitjançant arcs o fletxes de transició entre uns estats i altres de manera semblant al diagrama següent.

Figura 7. Representació gràfica d'una cadena de Markov




En general, l'evolució d'un sistema pot dependre de tots els estats passats.

> Els processos de Markov tenen la característica que el seu comportament futur no depèn del passat; només depèn de l'estat present: són processos sense memòria.

La probabilitat que $E_m(t_1) = j$ només depèn de l'estat anterior del sistema $E_n(t_2) =$ i , amb $t_2 < t_1$, i ho podem expressar en forma de probabilitat condicional com:

$$P[E_m(t_1) = j \mid E_n(t_2) = i] = P_{mn}(t_1, t_2) = p_{ij}$$

Els valors $p_{ij}$ s'anomenen *probabilitats de transició* de l'estat *i* a l'estat *j*. Si aquestes probabilitats són estacionàries, és a dir, no depenen de l'instant *t* que considerem, parlarem d'una **cadena de Markov homogènia**.

**Probabilitats de transició**

Les **probabilitats de transició** ens indiquen la probabilitat de passar d'un estat al següent, i les indicarem com $p_{ij}$.

### 3.1. Cadenes de Markov de temps continu

Els sistemes amb canvis d'estat en instants de temps indefinits s'anomenen **sistemes de temps continu**. Com que en els sistemes de comunicació les arribades i sortides es produeixen en instants de temps indeterminats i independents del temps, tractarem les cadenes homogènies de temps continu.

La probabilitat d'estar en cadascun dels *n* estats es pot escriure, doncs, com $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, ..., $P_n(t)$. Aquest conjunt de probabilitats dels estats d'un sistema s'anomena **vector d'estat**.

**Vector d'estat**

Vector format pel conjunt de probabilitats d'estar en cadascun dels estats d'un sistema.

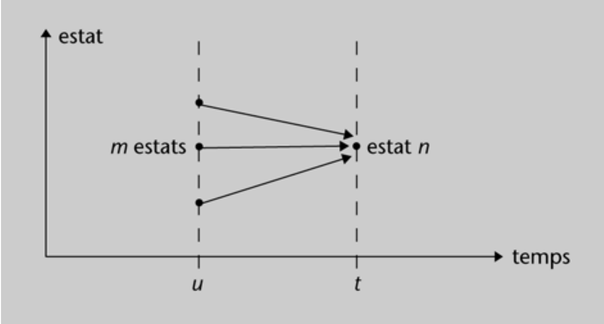
Aquestes probabilitats compliran les propietats:

$$0 \le P_m(t) \le 1$$
$$\sum_m P_m(t) = 1$$

La probabilitat d'estar en l'estat *n* en un instant *t* es pot descompondre segons el conjunt de tots els camins procedents de cada un dels estats anteriors fins a *n*, i podem escriure que:

$$P_n(t) = \sum_m P_m(u) P_{nm}(u,t)$$

Figura 8




El conjunt de probabilitats de transició entre estats $P_{nm}(u,t)$ l'anomenarem **matriu de transicions**.

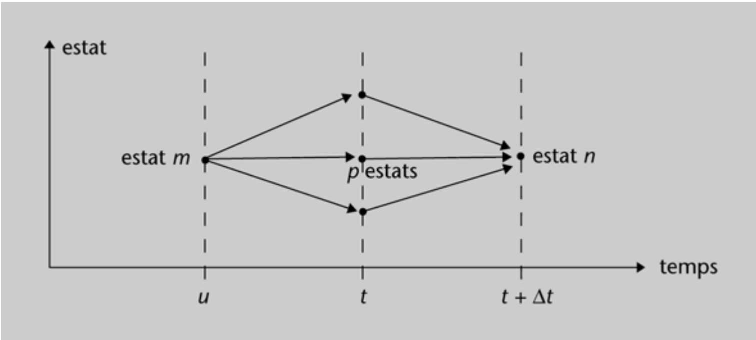
**Matriu de transicions**

És la matriu formada pel conjunt de probabilitats de passar d'un estat a un altre.

### 3.2. Equació de futur

La figura següent ens mostra l'evolució del sistema des d'un estat $m$ en l'instant $u$ fins a un estat $n$ en l'instant $t + \Delta t$, passant per $p$ estats en l'instant $t$.

Figura 9.




Definim **l'equació de futur** (equació de *Chapman-Kolmogorov*) com:

$$P_{mn}(u,t+\Delta t) = \sum_p P_{mp}(u,t) P_{pn}(t,t+\Delta t)$$

**Equació de futur**

És una relació entre les probabilitats de transició dels estats d'un procés.

Extraient el terme $p = n$ del sumatori i restant $P_{mn}$ $(u, t)$ a tota l'expressió,

$$P_{mn}(u,t+\Delta t) - P_{mn}(u,t) = \left[\sum_{p \neq n} P_{mp}(u,t) P_{pn}(t,t+\Delta t)\right] + P_{mn}(u,t) P_{nn}(t,t+\Delta t) - P_{mn}(u,t)$$

Dividint per $\Delta t$ i fent el límit quan $\Delta t \to 0$, aquesta expressió es converteix en l'expressió de la derivada o variació de la probabilitat en el temps, amb la qual cosa resulta l'equació de futur següent:

$$\frac{\partial P_{mn}(u,t)}{\partial t} = \left[\sum_{p \neq n} P_{mp}(u,t) q_{pn}(t)\right] + P_{mn}(u,t) q_{nn}(t)$$

En què $q_{pn}(t)$ es defineix com la **taxa de transició** entre dos estats, i la podem considerar com la velocitat a la qual el sistema pot passar d'un estat a l'altre, i $q_{nn}(t)$ és **la taxa de permanència** en un estat:

$$q_{pn}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{pn}(t,t+\Delta t)}{\Delta t}$$
$$q_{nn}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{nn}(t,t+\Delta t) - 1}{\Delta t}$$

Si considerem que en l'instant inicial, amb temps $u = 0$, el sistema està en l'estat 0, $P_{0n}(0,t) = P_n(t)$. Llavors l'equació de futur quedarà:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \left[\sum_{p \neq n} P_p(t) q_{pn}(t)\right] + P_n(t) q_{nn}(t) = \sum_p P_p(t) q_{pn}(t)$$

Si definim la matriu $Q(t)$ com la formada pel conjunt de velocitats $[q_{pn}(t)]$ i tenint en compte que $P(t)$ és el vector d'estat, es pot escriure l'equació vectorial següent:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t)Q(t)$$

### 3.3. Processos de naixement i mort

Els processos de naixement i mort són el model més adequat per a modelitzar canvis en la grandària de la població, però també per a analitzar les prestacions de les xarxes de comunicacions; per exemple, per a caracteritzar les trucades que s'estan cursant en una central de commutació, o bé els paquets que hi ha en un encaminador.

Fins ara hem estudiat les cadenes de Markov, en què des de qualsevol estat es pot anar a qualsevol altre en l'instant de temps següent.

Un cas particular dels processos de Markov podria ser fent la restricció que en el següent instant de temps únicament es pot passar a un estat immediatament veí, és a dir, des de l'estat $E_n$ es pot passar als estats $E_{n+1}$, $E_{n-1}$ o mantenir-se en l'estat $E_n$. Això ens permet definir els processos de naixement (quan es passa a un estat superior) i mort (a un estat inferior) que seran un cas particular dels processos de Markov.

**Processos de naixement i mort**

Aquests processos són un cas particular de processos de Markov, en què les transicions només es poden dur a terme entre estats adjacents.

En aquest cas, totes les probabilitats de transició seran nul·les excepte $P_{m,m+1}$, $P_{m,m}$ i $P_{m,m\text{-}1}$.

Així doncs, l'equació de futur en un procés de naixement i mort queda reduïda a l'expressió següent:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t)q_{n-1,n}(t) + P_{n+1}(t)q_{n+1,n}(t) + P_n(t)q_{nn}(t)$$

Es defineix la **taxa de naixement** com:

$$q_{n-1,n}(t) = \lambda_{n-1}(t)$$

I la **taxa de mort** com:

$$q_{n+1,n}(t) = \mu_{n+1}(t)$$

Es pot demostrar fàcilment que:

$$\sum_n q_{pn}(t) = 0$$

De l'equació anterior, si aïllem $q_{nn}(t)$,

$$q_{nn}(t) = -[q_{n+1,n}(t) + q_{n-1,n}(t)] = -[\lambda_n(t) + \mu_n(t)]$$

Aleshores, substituint, l'equació de futur ens quedarà com un sistema d'equacions diferencials:

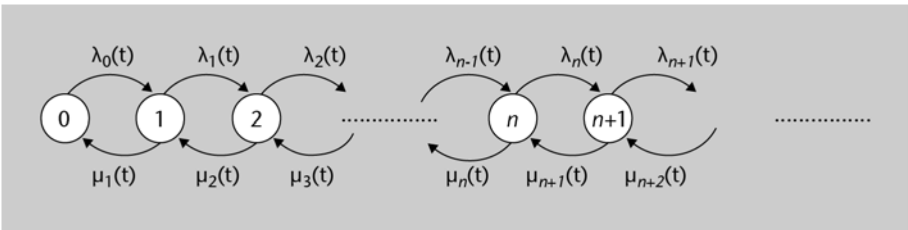
$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \mu_{n+1}(t)P_{n+1}(t) + \lambda_{n-1}(t)P_{n-1}(t) - \left[\lambda_n(t) + \mu_n(t)\right]P_n(t) \quad , \quad n > 0$$
$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1(t)P_1(t) - \lambda_0(t)P_0(t) \quad , \quad n = 0$$

Per a resoldre'l, tindrem en compte que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$$

Gràficament, una cadena de Markov de temps continu per a processos de naixement i mort es pot representar:

Figura 10




### 3.4. Processos de naixement i mort en règim permanent

Habitualment no ens interessarà el règim transitori d'un sistema, sinó que ens interessarà el seu règim permanent. Suposarem que els sistema ha evolucionat suficientment perquè les probabilitats d'estat ja no depenguin del temps, i per tant no depenguin de l'estat inicial. Les variacions de les probabilitats –per tant, les derivades respecte del temps– passen a ser nul·les.

En el cas dels processos de naixement i mort, en règim permanent, el sistema d'equacions queda reduït a:

**Règim permanent**

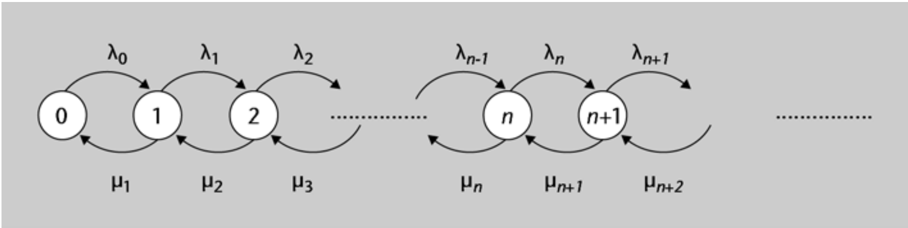
En un sistema en règim permanent les probabilitats d'estat es mantenen constants.

$$0 = \mu_{n+1}P_{n+1} + \lambda_{n-1}P_{n-1} - [\lambda_n + \mu_n]P_n \ , \ n > 0$$

$$0 = \mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0 \ , \ n > 0$$

Gràficament el procés de naixement i mort en règim permanent es pot representar:

Figura 11




### 3.5. Probabilitats d'estat dels processos de naixement i mort

Per a obtenir les probabilitats d'estat, podem resoldre les equacions, començant des de l'estat 0 fins a arribar a l'estat $n$, per a obtenir una expressió general:

**a)** Per a $n = 0$:

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

**b)** Per a $n = 1$:

$$\mu_2 P_2 = -\lambda_0 P_0 + [\lambda_1 + \mu_1] P_1 = -\lambda_0 P_0 + [\lambda_1 + \mu_1] \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0$$

seguint la iteració, per a qualsevol valor de $n$, fàcilment es pot deduir que:

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} P_0 = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

En què $P_0$, es pot obtenir substituint $P_n$ en l'expressió:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

I obtenim que:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}$$

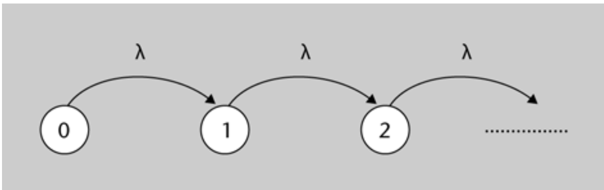
Tenint en compte que $P_0$ és la probabilitat que no hi hagi cap unitat en el sistema, observeu que el valor $(1 - P_0)$ és la probabilitat que hi hagi alguna unitat en el sistema.

Com que la probabilitat de servei dels sistemes de naixement i mort no depèn de la quantitat de servei rebut, tindrem que les probabilitats d'estat d'aquest tipus de sistemes no dependran de la disciplina de gestió de cua. Per això, utilitzarem en molts casos, com a exemple, la disciplina FIFO, ja que és la més senzilla.

**Exemple de procés de naixement pur**

Considerem un procés en què no es pot passar a un estat anterior; per tant, no hi ha morts ($\mu = 0$). Si suposem que la velocitat de naixement és constant (població infinita), en podem representar la cadena de Markov:

Figura 12




en què $\lambda$ és la velocitat de naixement.

Aleshores la seva equació de futur:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t) \quad , \quad n > 0$$
$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \quad , \quad n = 0$$

De la segona equació podem obtenir que:

$$P_0(t) = C \cdot e^{-\lambda t}$$

Sabent que en l'instant inicial el sistema està en l'estat 0, aleshores:

$$P_0(t) = 1 \;\Rightarrow P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

D'aquí, mitjançant l'equació de futur, podem obtenir $P_1(t)$:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) - \lambda P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda P_1(t)$$
$$P_1(t) = \lambda t . e^{-\lambda t}$$

Podem utilitzar recursivament l'equació de futur per a obtenir una expressió general de la probabilitat que el sistema estigui en un estat $n$.

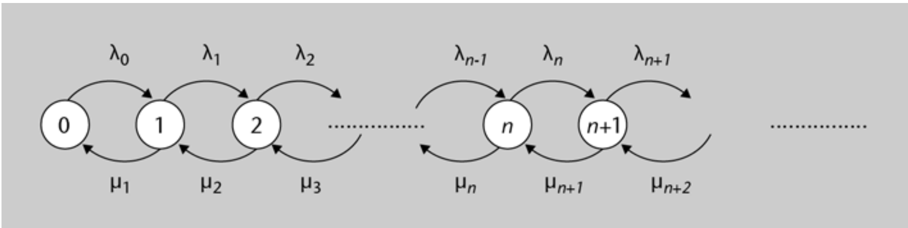
$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} . e^{-\lambda t}$$

# 4. Conceptes de trànsit

A partir d'un sistema de naixement i mort en règim permanent com el que hem vist en l'apartat anterior definirem diferents conceptes referents al trànsit.

Suposarem unes taxes o velocitats de naixement: $\lambda_0$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$, i unes taxes de mort: $\mu_0$, $\mu_1$, $\mu_2$, ..., $\mu_n$, tal com mostra la figura següent.

Figura 13




Hem obtingut que la probabilitat que el sistema estigui en un estat $n$ està determinada per l'expressió:

$$P_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}P_0 = P_0\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

## 4.1. Nombre d'unitats

Per aquest sistema podem calcular el nombre mitjà esperat d'unitats ofertes i servides, és a dir, el nombre d'unitats que han arribat al sistema i el nombre d'unitats que han finalitzat, en un cert interval de temps $T$.

El **nombre d'unitats ofertes** el calcularem a partir del producte dels naixements en cada estat per la probabilitat d'estar en aquest estat i per a l'interval $T$:

$$N_O = \left(\sum_n \lambda_n P_n\right)T$$

El **nombre d'unitats servides** (cursades) el calcularem a partir de les morts en cada estat multiplicades per la probabilitat d'estar en aquest estat i per l'interval $T$:

$$N_C = \left(\sum_n \mu_n P_n\right)T$$

Cal tenir en compte que el nombre d'unitats ofertes no coincidirà amb el nombre d'unitats cursades, ja que es perdran les unitats que trobin els servidors i la cua (si n'hi ha) plens, és a dir, les unitats perdudes.

## 4.2. Tipus de trànsit

La **intensitat de trànsit**, o simplement trànsit, és una unitat de mesura de la ocupació d'un determinat recurs per unitat de temps.

Es pot obtenir del quocient entre el temps d'ocupació respecte del temps d'observació. És una magnitud sense dimensions que habitualment s'expressa en **Erlangs**.

**Erlang**

Un Erlang (Er) es defineix com el temps que un recurs està ocupat durant l'hora carregada. El seu nom, Erlang, és degut a l'enginyer danès A. K. Erlang, creador de l'enginyeria de trànsit i la teoria de cues.

Per a calcular el **trànsit cursat** i, per tant, la quantitat d'unitats servides amb èxit, cal tenir en compte les unitats servides per unitat de temps i la durada mitjana de les unitats per servir ($1/\mu$):

**Paràmetres per a mesurar el trànsit**

L'hora carregada (HC) és el període d'una hora del dia en què el trànsit és més elevat. De la definició d'Erlang podem deduir que la intensitat de trànsit d'un recurs com a màxim pot arribar a valer la unitat (1 Er = 60 minuts de trànsit en un circuit en l'HC). El trànsit d'un erlang correspondria a un únic recurs utilitzat contínuament, o bé, a dos canals utilitzats un 50%.

$$A_C = \frac{\sum_n \mu_n P_n}{\mu}$$

El **trànsit ofert** i, per tant, el que arriba al sistema, es pot calcular de manera similar a partir de les unitats ofertes:

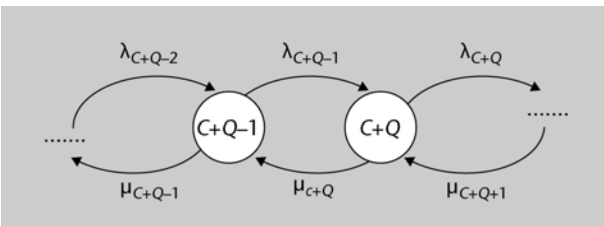
$$A_O = \frac{\sum_n \lambda_n P_n}{\mu}$$

El trànsit ofert seria el que s'hauria cursat si el sistema l'hagués pogut absorbir tot, cosa que no sol passar mai. Hi ha unes trucades que perden al primer intent per la limitació del sistema, i aquestes trucades formen el **trànsit perdut**:

$$A_p = \mathrm{A}_O - A_c$$

Si suposem que el sistema pot servir $C$ unitats simultàniament i té una cua d'espera de $Q$ unitats, es començaran a perdre unitats quan es trobin els $C$ servidors i la cua plens. El trànsit perdut correspondrà, doncs, a l'estat $C + Q$ del procés.

Figura 14



Es podrà calcular com:

$$A_P = \left(\lambda_{C+Q} P_{C+Q}\right)\frac{1}{\mu}$$

### 4.3. Grau de servei

El **grau de servei** (GoS) és un paràmetre que s'utilitza per a mesurar la qualitat del servei, i es calcula com el quocient entre el nombre d'unitats perdudes i el nombre d'unitats ofertes.

En aquest punt definirem els principals conceptes per a avaluar el grau de servei o la qualitat del servei. Aquest concepte està associat directament a la probabilitat de bloqueig.

La **probabilitat de bloqueig** d'un sistema és la probabilitat que una unitat no es pugui servir perquè tots els servidors es troben ocupats perquè la capacitat ($K$) del sistema és limitada.

$$PB = \sum_{k=C}^{C+Q} P_k$$

La **probabilitat de pèrdua** d'un sistema equival a la part d'unitats ofertes en el sistema que es perden per trobar el sistema ple.

$$PP = \frac{N_O - N_C}{N_O} = 1 - \frac{\sum_k \mu_k P_k}{\sum_k \lambda_k P_k}$$

La **probabilitat d'espera** o demora d'un sistema és la part d'unitats ofertes en el sistema que, sense perdre's, s'han d'esperar a ser servides perquè el sistema està ocupat.

$$PD = \frac{\sum_{k=C}^{C+Q-1} \lambda_k P_k}{\sum_k \lambda_k P_k}$$

La **probabilitat de servei immediat** és la probabilitat que la unitat se serveixi immediatament i, per tant, no es perdi ni s'hagi d'esperar.

$$PSI = 1 - (PP + PD)$$

# 5. Models de cues

Tal com hem comentat anteriorment, hi ha uns models matemàtics que ens interpreten diferents fenòmens que es poden produir, com són les arribades a una centraleta telefònica o a un encaminador, i que ens permeten obtenir expressions que ens relacionen un conjunt de probabilitats amb unes condicions d'arribades, nombre de servidors i tipus de cua, entre d'altres.

## 5.1. Paràmetres d'un model de cues

Els principals paràmetres que hem de fixar per a poder fer un model de cua com podria ser el d'un encaminador són els següents:

a) **Model d'arribades**: suposarem les unitats que apareixen aleatòriament en el temps; això es pot fer si el nombre de fonts és gran. Suposarem en tots els casos que és un procés de Poisson amb una taxa $\lambda$.

b) **Model de servei**: està determinat pel temps de servei o pel nombre d'unitats servides per unitat de temps. Habitualment suposarem un temps de servei aleatori, de distribució exponencial de mitjana $1/\mu$. En alguns casos suposarem el temps de servei constant.

c) **Disciplina de cua**: el mètode més senzill és el mètode FIFO: el primer que arriba serà el primer de ser servit.

d) **Capacitat del sistema**: és el nombre màxim de clients que hi pot haver en el sistema (finit o infinit). Quan arriba una unitat i es troba el sistema ple, es perd.

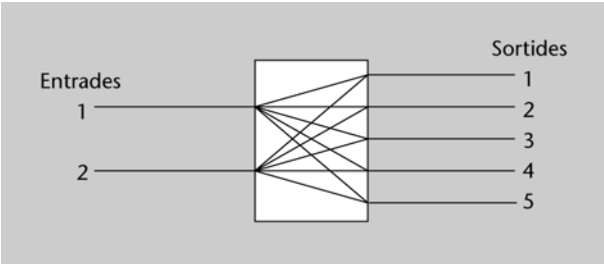
e) **Nombre de servidors**: és la quantitat de servidors que poden atendre trucades simultàniament. Poden tenir una cua cadascun, o bé compartir una sola cua.

f) **Població**: l'origen de les trucades que arriben és el què es coneix com a *població*, i normalment la podem suposar infinita. Això implica que la taxa d'arribades la podem suposar constant. Si considerem la població finita, el trànsit que arribarà s'anirà reduint a mesura que vagin arribant trucades al sistema, ja que el nombre de possibles trucades per arribar s'anirà reduint. Habitualment s'utilitza la suposició de població infinita.

g) **Tractament en cas d'ocupació**: podem tenir retenció de trucades, amb la qual cosa caldrà un altre intent en rebre senyal de congestió. Una altra possibilitat és l'alliberament de trucades, en què s'esperarà un temps per a tornar a enviar el que constituirà una altra trucada. Un tercer cas és un sistema d'espera, que representa que la trucada entrarà en una cua d'espera.

**h) Accessibilitat**: és el nombre de sortides que pot tenir una certa entrada. Pot ser completa, i per tant qualsevol entrada te accés a qualsevol sortida, o bé limitada, i per tant no totes les sortides lliures es poden connectar a les entrades.

Figura 15. Sistema amb accessibilitat completa




A partir d'aquí podrem obtenir la informació necessària referent a les unitats que hi ha al sistema, als temps i a les probabilitats.

## 5.2. Nombre de servidors

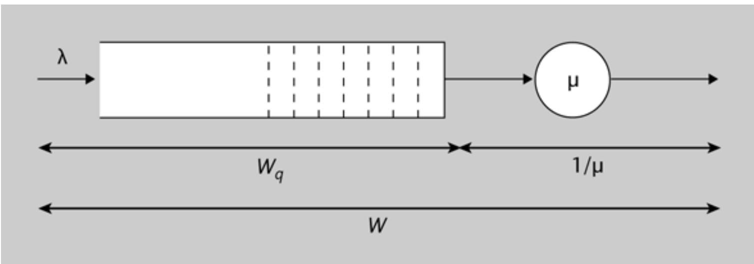
En aquest subapartat veurem els casos següents:

- Cues d'un sol servidor.
- Cues multiservidor.

### 1) Cues d'un sol servidor

El model de cues d'un sol servidor és el més senzill. Es tracta d'un servidor que ofereix servei a les unitats que li arriben. Les unitats d'una certa població arriben al sistema per a ser servides; si el servidor està buit passen a ser servides automàticament, i si no, passen a una cua d'espera.

Figura 16. Model de cues amb un sol servidor




Les unitats arriben al sistema amb una taxa d'arribada $\lambda$ (unitats mitjanes/segon). En qualsevol moment hi haurà un cert nombre d'unitats esperant a la cua per a ser servides. El temps mitjà d'espera d'una unitat a la cua l'anomenem $W_q$. El servidor atendrà les unitats amb un temps mitjà de servei de valor

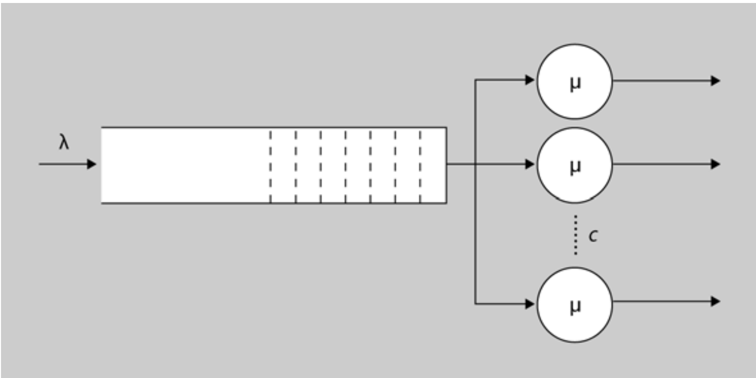
$1/\mu$; per tant, el temps mitjà que estarà una unitat al sistema serà $W$, que s'obtindrà de sumar el temps d'espera a la cua i el temps de servei.

Si la cua és infinita mai no es perdrà cap unitat, però si la cua només permet un nombre finit d'unitats, quan estigui plena les unitats que vagin arribant es perdran.

2) **Cues multiservidor**

El model d'un servidor es pot generalitzar fàcilment per al cas que tinguem múltiples servidors compartint una cua comuna. Si suposem els servidors idèntics, quan una unitat arriba al sistema se serveix per qualsevol dels servidors que estigui lliure. Quan tots els servidors estan plens les unitats que arriben es comencen a emmagatzemar a la cua a l'espera fins que un servidor estigui lliure i puguin ser servides amb una determinada disciplina de servei.

Figura 17. Model de cues multiservidor




Les característiques habituals d'una cua multiservidor són les mateixes que per a una única cua: població infinita, cua infinita i servei de tipus FIFO.

### 5.3. Tractament en cas de congestió

Segons com actuï el sistema davant l'arribada d'unitats quan el sistema està congestionat, podem parlar dels casos següents:

a) **Sistemes amb pèrdues**:

- **LCC**: quan el sistema està congestionat (tots els servidors es troben ocupats) senyalitza a l'entrada indicant que està ocupat i l'obliga a reintentar la comunicació al cap d'una estona. Qualsevol usuari pot reintentar la comunicació. És el sistema que utilitzen les centrals de commutació a Europa.

*LCC* és la sigla de *lost calls cleared*.

- **LCH**: quan una trucada és bloquejada, senyalitza a l'usuari que reintenta la trucada sense espera. És el sistema que utilitzen les centrals de commutació a Amèrica del Nord.

*LCH* és la sigla de *lost calls held*.

**b) Sistema d'espera (LCD)**: en aquest cas, quan el sistema està congestionat, no s'avisa a la font que el sistema està ocupat de manera immediata, sinó que espera en un sistema de cues un temps fins que algun servidor estigui disponible. En aquest cas, un paràmetre important és el temps d'espera en funció de la càrrega de trànsit.

***LCD* és la sigla de *lost calls delayed*.**

**c) Sistema amb reintent (LCR)**: quan una entrada queda bloquejada, el sistema va fent reintents fins que la trucada se serveix. És un model derivat del model LCC.

***LCR* és la sigla de *lost calls retried*.**

En general tots els encaminadors utilitzen un sistema de pèrdues. De totes maneres en encaminadors moderns en determinades parts s'utilitza el concepte de sistema d'espera.

### 5.4. Models de trànsit

En aquesta taula hem comparat alguns dels models de trànsit. Els més utilitzats són els d'Erlang B, Erlang B estès i Erlang C.

Taula comparativa d'alguns models de trànsit

| Model de trànsit | Població | Model d'arribades | Tractament en cas de bloqueig | Model de servei |
|---|---|---|---|---|
| Poisson | Infinita | Aleatori | Pèrdues LCH | Exponencial |
| Erlang B | Infinita | Aleatori | Pèrdues LCC | Exponencial |
| Erlang B estès | Infinita | Aleatori | Reintent | Exponencial |
| Erlang C | Infinita | Aleatori | Retard | Exponencial |
| Engset | Finita | Variacions suaus | Pèrdues LCC | Exponencial |
| Pollaczek-Cronmellin | Infinita | Aleatori | Retard | Constant |
| Binomial | Finita | Aleatori | Pèrdues LCH | Exponencial |
| Retard | Finita | Aleatori | Retard | Exponencial |

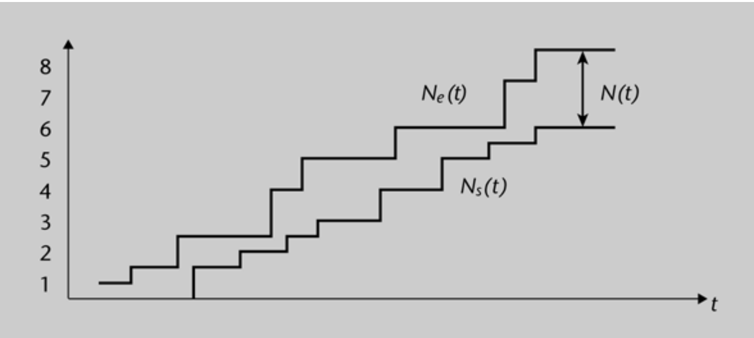
# 6. Relacions entre cues. Fórmula de Little

La fórmula de Little és una expressió que s'utilitza en els sistemes d'espera que ens relaciona els temps mitjans de permanència en la cua d'espera amb el nombre mitjà d'unitats que hi ha en el sistema.

Siguin:

- $N_e(t)$: nombre d'unitats que han arribat al sistema en l'instant $t$.
- $N_s(t)$: nombre d'unitats que s'han servit en l'instant $t$.
- $N(t) = N_e(t) - N_s(t)$: nombre d'unitats en el sistema en cada instant $t$.

Figura 18. Relació entre processos estocàstics




El valor mitjà d'entrades al sistema (taxa d'arribada):

$$\lambda(t) = \frac{N_e(t)}{t}$$

El nombre mitjà d'unitats en el sistema:

$$\overline{L(t)} = \frac{1}{t}\int_0^t N(\tau)\,d\tau$$

El temps mitjà de permanència en el sistema:

$$\overline{W(t)} = \frac{\int_0^t N(\tau)\,d\tau}{N_e(t)}$$

Aleshores obtenim la relació entre aquests paràmetres:

$$\overline{L(t)} = \lambda(t)\overline{W(t)}$$

I d'aquí resulta, suposant ergodicitat i que estem en règim permanent, la **fórmula de Little**, que ens diu que el nombre mitjà d'unitats presents en el sistema és igual al valor mitjà d'unitats acceptades, multiplicada pel temps mitjà de permanència:

**La fórmula de Little**

Relaciona el temps mitjà de permanència en el sistema i la velocitat d'arribada $\lambda$ amb el nombre mitjà d'unitats en el sistema.

$$L = \lambda W$$

- $L$: nombre mitjà d'unitats en el sistema.
- $W$: temps mitjà d'espera en el sistema.

Aquesta expressió és molt general i aplicable a tots els models de cues. L'expressió, tenint en compte només la cua i deixant de banda els servidors, és:

$$L_q = \lambda W_q$$

- $L_q$: nombre mitjà d'unitats en la cua.
- $W_q$: temps mitjà d'espera en la cua.

# 7. Notació de Kendall i models de cues

La **notació de Kendall** és una notació abreujada que s'ha desenvolupat per a resumir les principals suposicions que es fan a l'hora de desenvolupar un model de cues.

**La notació de Kendall**

Aquesta notació s'ha desenvolupat específicament per a descriure els sistemes d'espera. S'anomena *notació de Kendall*, en honor a David Kendall.

Aquesta notació segueix el format: *A / B / c / K / N / Z*.

Aquestes variables caracteritzen els elements següents de les cues d'espera:

**a)** *A*: distribució de temps entre les arribades de les unitats. Fa referència al paràmetre $\lambda$. En general pot ser:

- M: exponencial (Markov), amb estadística de Poisson.
- D: determinista, temps entre arribades constant.
- U: uniforme.
- G: generalista, sense especificar.
- $H_k$: hiperexponencial de *k* nivells.
- E: Erlang.

**b)** *B*: distribució de temps de servei de les unitats. Depèn de l'estadística del servei ofert i la notació és la mateixa que en el paràmetre anterior.

**c)** *c*: nombre de servidors que atenen en la mateixa cua. Els suposem tots amb la mateixa capacitat.

**d)** *K*: nombre màxim d'unitats que hi pot haver alhora en el sistema, que està directament relacionat amb la mida de la cua. Per defecte aquest paràmetre indica un valor infinit.

**e)** *N*: nombre d'unitats que poden arribar, també anomenat *població*. Per defecte aquest paràmetre és infinit i independent de l'estat del sistema.

**f)** *Z*: la disciplina de cua utilitzada: FIFO, LIFO, SIRO o altres. Per defecte la disciplina de cua és FIFO.

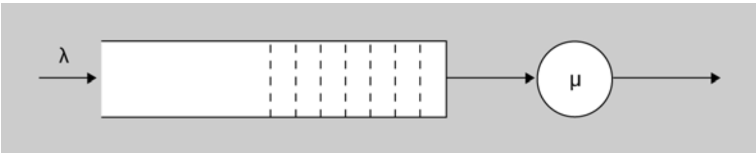
Quan algun dels paràmetres no s'especifica se'n suposa el valor per defecte. Per exemple, una cua M/M/1/$\infty$ modelitza un sistema de cues amb estadística de Poisson (Markov), amb temps entre arribades exponencial, i temps de servei també de tipus exponencial, amb un únic servidor i capacitat $\infty$. És equivalent a escriure M/M/1.

Un altre exemple és el model de cua M/D/1. En aquest sistema, les arribades segueixen una estadística de Poisson, i el servei és determinista, amb un únic servidor. Igual que en l'exemple anterior, la cua és de longitud $\infty$. Els serveis deterministes es caracteritzen pel temps de servei constant. Un tipus de xarxes que operen d'aquesta manera són les basades en tecnologia ATM.

### 7.1. Model M/M/1

És la forma abreujada del model M/M/1/$\infty$/$\infty$/FIFO. Considerem el model amb una taxa d'arribades $\lambda$ i una taxa de servei $\mu$. Cada estat representa el nombre d'unitats en la cua d'espera.

Figura 19. Model M/M/1

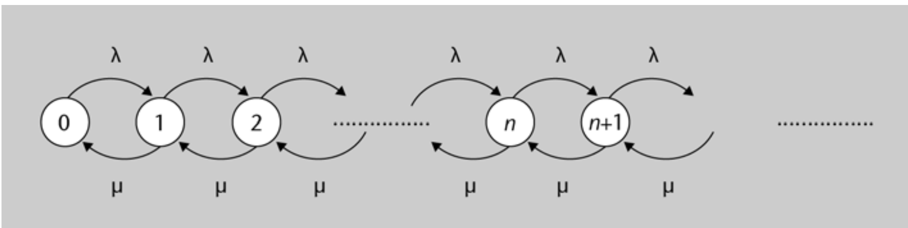



El primer pas en l'estudi d'un sistema és la representació de la cadena de Markov associada. A partir d'aquesta, i mitjançant un estudi per mitjà de fluxos o fent servir directament les expressions que ja hem obtingut per a les probabilitats d'estat, en farem l'estudi estadístic.

Com que les arribades es produeixen amb una taxa $\lambda$, aquesta serà la taxa de naixements independentment del nombre d'unitats que hi hagi en el sistema. Pel que fa a les taxes de mort, el servidor sempre serveix a una taxa $\mu$, independentment de l'estat de la cua.

La representació de la cadena queda:

Figura 20




**1) Probabilitats d'estat**

Tenint en compte les expressions obtingudes al subapartat 3.5 i considerant que les taxes són constants, $\lambda_i = \lambda$ per a $\forall i$, i $\mu_i = \mu$ per a $\forall i$.

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Suposant que $\lambda < \mu$, tenim que

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}} = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{1+\frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}} = 1-\lambda/\mu$$

Per tant,

$$P_n = \left(1-\lambda/\mu\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Com que el factor d'utilització del servidor és $\rho = \lambda/\mu$, podem escriure la probabilitat d'estat:

$$P_n = (1-\rho)\rho^n$$

**Factor d'utilització**

El factor d'utilització, $\rho$, és la probabilitat que el servidor estigui ocupat.

**2) Nombre mitjà d'unitats en el sistema**

Aquest valor es pot obtenir mitjançant un simple càlcul estadístic, tenint en compte que cada estat indica el nombre d'unitats en el sistema. Per tant, en l'estat 0 hi ha zero unitats, en l'estat 1 hi ha una unitat, etc.

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n.P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

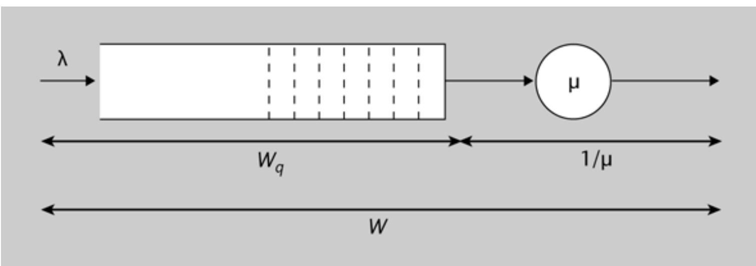
**3) Temps mitjà de permanència en el sistema**

Per al càlcul del temps mitjà de permanència, és a dir, el temps d'espera a la cua més el temps de servei, només cal utilitzar la fórmula de Little:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}}{\lambda} = \frac{1/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Noteu que aquest resultat conté tant el temps d'espera en cua com el temps de servei:

Figura 21



Per tant, el temps mitjà d'espera en la cua serà el temps de permanència en el sistema menys el temps de servei:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{1/\mu}{1 - \lambda/\mu} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda/\mu}{\mu\left(1 - \lambda/\mu\right)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

I aplicant una altra vegada la fórmula de Little, obtenim el nombre mitjà d'unitats en la cua:

$$L_q = W_q . \lambda = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^2}{1 - \lambda/\mu} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

**Exemple numèric**

Suposem un sistema modelitzat mitjançant M/M/1 en el qual la unitat mínima d'arribada són paquets d'informació de mida fixa de 100 bytes. La taxa d'arribada és de $\lambda$ = 8 paquets/s, i la taxa de servei de $\mu$ = 10 paquets/s.

La probabilitat que el sistema estigui desocupat:

$$P_0 = 1 - \lambda/\mu = 1 - 8/10 = 0,2$$

La probabilitat de tenir *n* paquets en el sistema:

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n = (1 - 0,8)(0,8)^n = 0,2 \cdot 0,8^n$$

El nombre mitjà de paquets en el sistema:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0,8}{1-0,8} = 4 \text{ paquets}$$

El temps mitjà de permanència en el sistema d'un paquet:

$$W = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{10(1-0,8)} = 0,5 \text{ segons}$$

El temps que un paquet haurà passat de mitjana en la cua:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{0,8}{10(1-0,8)} = 0,4 \text{ segons}$$

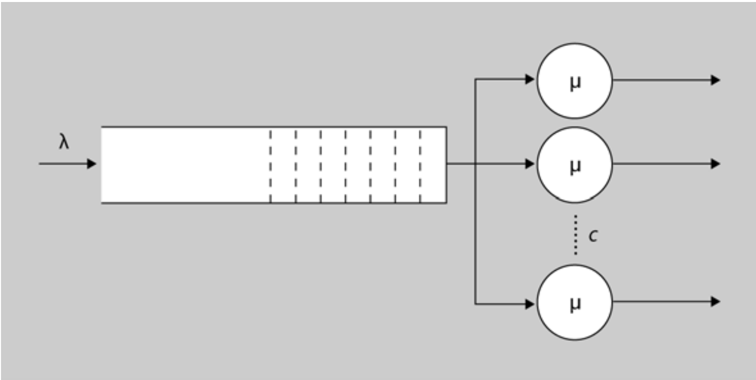
El nombre mitjà de paquets a la cua:

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(0,8)^2}{1-0,8} = 3,2 \text{ paquets}$$

### 7.2. Model M/M/c. Erlang C

Aquest és un sistema amb un nombre finit de servidors, *c*, amb una cua infinita. Igual que per al sistema anterior, considerem una població infinita amb una taxa d'arribades $\lambda$ i una taxa de servei $\mu$ en cada servidor. Les trucades arriben segons un model aleatori exponencial. Les trucades que no es puguin servir passaran a la cua d'espera. Cada estat representa el nombre d'unitats en el sistema.

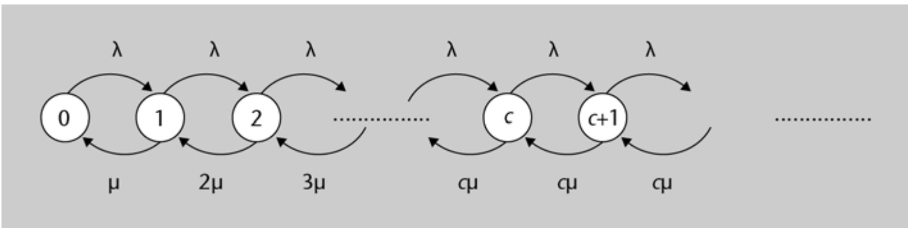
Figura 22. Model M/M/c




En conseqüència, hi pot haver fins a $c$ unitats ateses simultàniament i un nombre il·limitat d'unitats esperant en la cua. Les $c$ primeres unitats seran ateses pels $c$ servidors. La primera unitat que anirà a la cua serà la unitat $c + 1$.

Així doncs, quan l'estat del sistema sigui superior a $c$, tots els $c$ servidors estaran actius, i per tant, la taxa de servei per als estats superiors a $c$ serà constant, de valor $c\mu$. Per altra part, les arribades es produeixen amb una taxa $\lambda$ independentment del nombre d'unitats en el sistema.

Figura 23




**1) Probabilitats d'estat**

Utilitzant les expressions corresponents i considerant en aquest cas que les taxes són: $\lambda_i = \lambda$ per a $\forall i$, $\mu_i = i \cdot \mu$ per a $i \leq c$, i $\mu_i = c{\cdot}\mu$ per a $i > c$. En aquest cas caldrà que $\lambda < c \cdot \mu$ per tal que el sistema sigui estable.

En aquest cas, definirem la intensitat de trànsit, $A$, i el factor d'utilització, $\rho$, com:

$$A = \frac{\lambda}{\mu} \quad , \qquad \rho = \frac{\lambda}{c.\mu}$$

Aleshores obtindrem:

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & 0 \le n \le c-1 \\ \dfrac{c^c}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^n P_0 & n \ge c \end{cases}$$

D'on podríem obtenir $P_0$:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^c}{c!(1-\rho)}}$$

Aquesta expressió de $P_0$ és vàlida sempre que es compleixi que $A < c$, o de forma equivalent es pot expressar com $\rho < 1$. Es tracta de la condició d'estabilitat que garanteix que el trànsit ofert és menor que el nombre de recursos disponibles.

**2) Probabilitat de bloqueig**

La probabilitat que una arribada quedi bloquejada i hagi d'esperar en la cua correspondrà a la possibilitat que els $c$ servidors estiguin ocupats i, per tant, a la probabilitat que el sistema estigui en un estat $c$ o superior. Es pot expressar mitjançant l'expressió d'Erlang C:

$$P_B = C(c,A) = \sum_{n=c}^{\infty} P_n = 1 - \sum_{n=0}^{c-1} P_n = 1 - P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{A^n}{n!} = 1 - \frac{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{A^n}{n!}}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^c}{c!(1-\rho)}}$$

Aleshores,

$$C(c,A) = \frac{\frac{A^c}{c!}}{(1-\rho)\sum_{n=0}^{c-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^c}{c!}} = \frac{\frac{A^c}{c!}}{(1-\rho)} P_0$$

Aquesta probabilitat es pot calcular fàcilment amb les calculadores en línia, o bé, en les taules que teniu a l'annex.

http://www.erlang.com/calculator/

**3) Nombre mitjà d'unitats en la cua**

El nombre mitjà de clients en la cua el podem calcular com:

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c) P_n = \sum_{n=0}^{\infty} n P_{n+c} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{c^c}{c!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{n+c} .P_0 = \frac{A^c}{c!} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$
$$= \frac{A^c}{c!} P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho . C(c,A)}{1-\rho}$$

### 4) Temps mitjà de permanència en la cua

Per al càlcul del temps mitjà de permanència en la cua, només cal utilitzar la fórmula de Little:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\dfrac{\rho . C(c,A)}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{C(c,A)}{c\mu(1-\rho)}$$

**Exemple numèric**

Suposem un sistema d'atenció en línia. Cada operador disposa d'un terminal i pot servir al client típic en 5 minuts amb una durada aleatòria distribuïda exponencialment. Les trucades arriben aleatòriament i el sistema permet acumular les trucades que no poden ser ateses immediatament. Quan l'activitat és màxima es poden arribar a atendre 36 trucades per hora. La probabilitat que una trucada trobi tots els operadors ocupats no pot superar el 0,1.

Calculem quants operadors calen per a complir les condicions.

La taxa d'arribades (màxima) és:

$\lambda$ = 36 trucades/hora = 0,6 trucades/ minut

La taxa de servei d'un operador:

$\mu$ = 1/5 = 0,2 trucades/minut

La intensitat de trànsit és:

A = $\lambda/\mu$ = 3 Erlangs

Perquè el sistema sigui estable el factor d'utilització ha de complir

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} < 1$$

Aïllant $c$ obtenim que $c > 3$; per tant, calen com a mínim 4 servidors.

La primera condició de disseny ens diu que

$$\sum_{n=c}^{\infty} P_n = C(c,3) \leq 0{,}1$$

Observant la taula de l'annex observem que per a tenir un trànsit de 3 Erlangs, amb una probabilitat del 10%, ens calen com a mínim 6 servidors; per tant, $c \geq 6$.

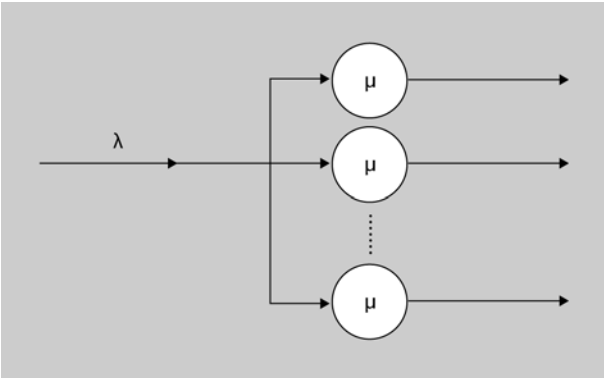
Per tant, calen 6 operadors per a donar aquest servei.

## 7.3. Model M/M/∞

Aquest model és un cas particular del model anterior, M/M/c, en què no hi ha temps d'espera ni rebuig d'unitats, ja que el sistema sempre disposa de recursos lliures.

Considerarem doncs, igual que el cas anterior, una taxa d'arribades $\lambda$ i una taxa de servei $\mu$ per a cada servidor. A partir de la notació de Kendall, podem observar que aquest sistema és multiservidor amb infinits servidors; per tant, mai no hi haurà cap unitat en la cua d'espera, ja que sempre hi haurà un servidor lliure per a atendre la unitat que arribi. Aquest sistema no necessita cap cua, ja que es tracta simplement d'un conjunt de servidors que atenen totes les unitats rebudes.

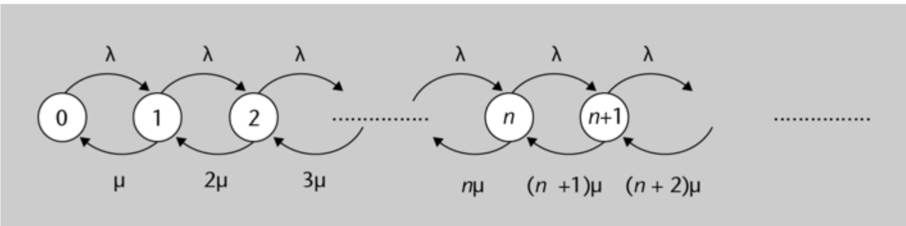
Figura 24. Model M/M/∞




Representació de la cadena de Markov associada: les arribades es produeixen amb taxa $\lambda$, independentment del nombre d'unitats en el sistema, la taxa de naixements. Pel que fa a les taxes de mort, el fet que sempre hi hagi un servidor esperant una unitat que acabi d'arribar fa que la taxa de servei sigui igual al nombre d'unitats ateses simultàniament pel valor d'un únic servidor, que és $\mu$. És a dir, si hi ha una unitat en el sistema, se serveix a una taxa $\mu$. Si n'hi hagués dues, la taxa seria $2\mu$. Si n'hi hagués $n$, la taxa seria $n\mu$.

La cadena de Markov serà:

Figura 25




**1) Probabilitats d'estat**

Utilitzant les expressions corresponents, tal com hem fet al subapartat anterior, i considerant en aquest cas que les taxes són $\lambda_i = \lambda$ per a $\forall i$, i $\mu_i = i.\mu$ per a $\forall i$,

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}$$

D'on podríem obtenir $P_0$, tenint en compte que $\lambda < \mu$, ja que sempre tindrem servidors lliures,

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}} = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}} = e^{-\lambda/\mu}$$

Per tant,

$$P_n = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^n}{n!} e^{-\lambda/\mu} \quad , \quad n \geq 0$$

Podem observar que $n$ segueix una distribució de Poisson amb paràmetre $\lambda/\mu$.

**2) Nombre mitjà de servidors ocupats**

Dels resultats obtinguts pels processos de Poisson podem deduir que:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{\lambda}{\mu}$$

**3) Temps mitjà de permanència**

En aquest cas, com que no hi ha cua, $W_q = 0$ i $L_q = 0$. Per tant, el temps mitjà de permanència en el sistema és igual al temps mitjà de servei, és a dir, que

$$W = \frac{1}{\mu}$$

I la distribució en el temps és igual que la distribució del temps de servei; per tant, és exponencial amb mitjana $1/\mu$.

**Exemple numèric**

Suposem que a una central telefònica arriben trucades de manera aleatòria amb una taxa d'arribades de 140 trucades/h. Les trucades tenen una durada mitjana de 3 minuts. Suposant que hi ha moltes línies per a atendre les trucades, quin serà el nombre mitjà de línies en ús?

Suposarem el model M/M/$\infty$, amb la taxa d'arribades següent:

$\lambda$ = 140 trucades/hora = 2,33 trucades/minut

La taxa de servei:

$\mu$ = 1/3 trucades/minut

Aleshores el nombre de línies utilitzat de mitjana és:

$L = \lambda/\mu = 2{,}33 \cdot 3 = 7$ línies

Per tant, el nombre de línies segueix una distribució de Poisson de paràmetre 7.

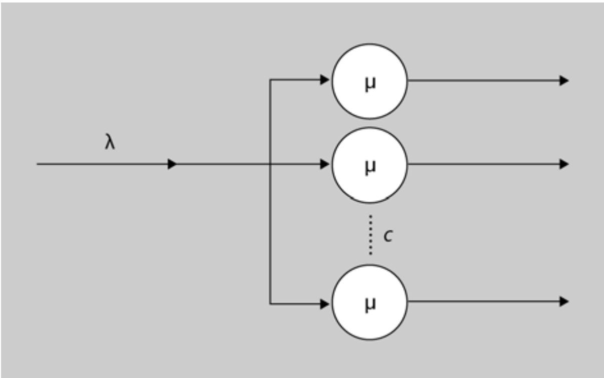
### 7.4. Model M/M/c/c. Erlang B

Aquest és un model de cues exponencial amb un nombre limitat de servidors i amb pèrdues. Considerem una altra vegada que el nombre de fonts és infinit, i per tant, tenim una taxa d'arribades constant $\lambda$ i una taxa de servei $\mu$ en cada servidor. Les arribades arriben aleatòriament. Cada estat representa el nombre d'unitats en la cua d'espera. En aquest cas, el sistema només te *c* servidors amb un nombre màxim d'unitats en el sistema de *c* elements. Per tant, no hi ha cua d'espera i les unitats que es trobin els servidors ocupats es perdran sense tenir la possibilitat de ser emmagatzemades.

**El model M/M/c/c**

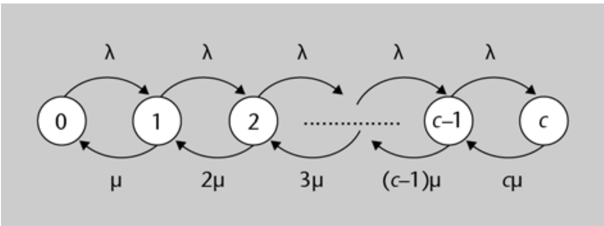
Aquest model s'anomena *model amb pèrdues LCC*, i és el que utilitzen les centrals telefòniques

Figura 26. Model M/M/c/c




En aquest cas només hi ha *c* estats possibles.

Figura 27




**1) Probabilitats d'estat**

Considerem en aquest cas que les taxes són $\lambda_i = \lambda$ per a $i \in [0, c-1]$, $\mu_i = i \cdot \mu$ per a $i \in [1, c]$. Tenint en compte que la **intensitat de trànsit** està definida com:

$$A = \frac{\lambda}{\mu}$$

Aleshores obtindrem:

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \dfrac{1}{n!} A^n P_0 & n \leq c \\ 0 & n > c \end{cases}$$

D'on $P_0$:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c} A^n \frac{1}{n!}}$$

Aquesta distribució també s'anomena *distribució de Poisson truncada*.

**2) Probabilitat de bloqueig**

Correspon a la probabilitat que els $c$ servidors estiguin ocupats. En aquest cas, el sistema no té cua d'espera i quan els servidors estiguin ocupats l'entrada no es podrà servir i es perdrà. Correspon a la probabilitat que el sistema estigui en un estat $c$ i es pot expressar mitjançant l'expressió d'Erlang B:

**http://www.erlang.com/calculator/**

$$P_B = B(c, A) = P_c = \frac{\frac{1}{c!} A^c}{\sum_{n=0}^{c} A^n \frac{1}{n!}}$$

**3) Nombre mitjà de servidors ocupats**

Dels resultats obtinguts pels processos de Poisson podem deduir que:

$$L = \sum_{n=1}^{c} nP_n = P_0 \sum_{n=1}^{c} n \frac{A^n}{n!} = P_0 \sum_{n=1}^{c} \frac{A^n}{(n-1)!} = P_0 A \sum_{n=0}^{c-1} \frac{A^n}{n!} = A\left(1 - B(c, A)\right)$$

**4) Taxa d'entrada al sistema**

S'obté de les arribades al sistema que es poden servir i no es perden:

$$\lambda_a = \lambda(1 - B(c,A))$$

**5) Temps mitjà de permanència**

Com que no hi ha cua d'espera, $W_q = L_q = 0$. Aplicant la fórmula de Little podem calcular el temps mitjà de permanència en el sistema:

$$W = \frac{L}{\lambda_a} = \frac{A\left(1 - B(c, A)\right)}{\lambda\left(1 - B(c, A)\right)} = \frac{\lambda/\mu}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Amb una distribució del temps de servei,

$$W(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

Aquest model és el que s'adequa als circuits d'una central telefònica, ja que si les trucades no es poden servir perquè la central està ocupada, la trucada es perd i s'ha de tornar a generar una trucada nova. És el model que s'utilitza per a dimensionar sistemes de commutació de circuits.

**Exemple numèric**

Una empresa instal·la un sistema de comunicació intern entre les seves dues seus. Les trucades reben un senyal d'ocupat quan totes les línies estan ocupades. Sabem que el sistema genera trucades aleatòriament segons un procés de Poisson amb una taxa de 105 trucades/hora i que les trucades tarden 4 minuts de mitjana a ser servides.

Pretenem instal·lar les línies necessàries per a assegurar que la probabilitat de rebre senyal d'ocupat sigui inferior al 0,005.

**a)** Quantes línies calen?

Podem obtenir les taxes d'arribada i de servei:

$\lambda$ = 105 trucades/hora = 1,75 trucades/ minut
$\mu$ = 1/4 trucades/minut

Aleshores la intensitat de trànsit és:

$A = \lambda/\mu = 1{,}75 \cdot 4 = 7$ erlangs

Per tant, a partir de les taules d'Erlang B de l'annex (amb $B$ = 0,5%), hem d'obtenir el valor mínim de $c$ que compleixi la desigualtat

$B(c,7) \leq 0{,}005$

El resultat serà que $c \geq 15$ línies.

**b)** Quantes línies calen si la probabilitat de rebre el senyal de congestió és de 0,01?

$B(c,7) \leq 0{,}01$

El resultat serà que $c \geq 14$ línies, només una menys que en el cas anterior.

**c)** Quina serà la probabilitat de rebre el senyal de congestió amb només 10 línies?

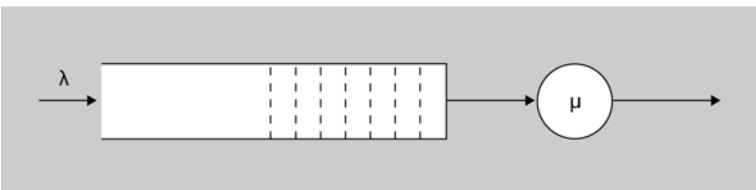
Amb el calculador d'Erlang obtenim que:

$B(10,7) \leq 0{,}079$

## 7.5. Model M/G/1

Considerem una població infinita amb arribades de Poisson amb una taxa $\lambda$ i sense cap disciplina de servei concreta (genèrica), amb un únic servidor i una cua infinita.

Figura 28



Per a poder fer l'estudi d'aquest model genèric ens cal conèixer la mitjana i la variància de la distribució de probabilitat dels temps de servei, $m = 1/\mu$ i $\sigma^2$, respectivament.

**1) Nombre mitjà d'unitats**

La fórmula de Pollaczek-Khinchine ens indica el nombre mitjà d'unitats en la cua:

$$L_q = \frac{\lambda^2.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} \text{ amb } \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

**Pollaczek-Khinchine http://en.wikipedia.org/wiki/Pollaczek%E2%80%93Khinchine_formula**

El nombre mitjà d'unitats en el sistema serà:

$$L = \rho + \frac{\lambda^2.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

**2) Temps mitjà de permanència**

Aplicant la fórmula de Little podem obtenir la mitjana de temps que una unitat ha d'esperar en la cua per a ser servida:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda.\sigma^2 + \rho/\mu}{2(1-\rho)}$$

De manera anàloga, el temps de permanència en el sistema serà el temps d'espera més el temps de servei:

$$W = \frac{1}{\mu} + W_q = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

Aquest model general es pot particularitzar per a diferents disciplines de servei:

**a)** Disciplina de servei exponencial (M/M/1):

En cas que la disciplina de servei sigui exponencial amb temps mitjà de servei $1/\mu$, correspondria al cas M/M/1 que hem vist anteriorment. Com que:

$$m = \frac{1}{\mu} \quad , \qquad \sigma^2 = \frac{1}{\mu^2}$$

Aleshores el nombre mitjà d'unitats és:

$$L_q = \frac{\lambda^2.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$L = \rho + \frac{\lambda^2.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

I els temps mitjans de permanència seran:

$$W_q = \frac{\lambda.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

**b)** Disciplina de servei determinista (M/D/1):

Si la disciplina de servei és determinista, el temps de servei sempre és el mateix per a totes les arribades i de valor $1/\mu$ amb una variància nul·la. Com que en aquest cas,

$$m = \frac{1}{\mu} \quad , \qquad \sigma^2 = 0$$

Aleshores, les fórmules de Pollaczek-Khinchine ens permetran calcular el nombre mitjà d'unitats:

$$L_q = \frac{\lambda^2.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$L = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho(2-\rho)}{2(1-\rho)}$$

I els temps mitjans de permanència:

$$W_q = \frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)} = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}$$

$$W = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)} = \frac{2-\rho}{2\mu(1-\rho)}$$

**c)** Disciplina de servei d'Erlang ($M/E_k/1$):

En aquest cas la disciplina de servei és d'Erlang de paràmetre *k*. La distribució d'Erlang té la funció de densitat de probabilitat següent:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

Els valors de la mitjana i la variància estan determinats per les expressions:

$$m = \frac{1}{k\mu}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{k\mu^2}$$

Podem aplicar les fórmules de Pollaczek-Khinchine amb $\sigma^2 = 1/k\mu^2$ i calcular les unitats que hi ha en la cua i els temps de permanència:

$$L_q = \frac{\lambda^2.\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)\frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1+k}{2k}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1+k}{2k}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Podem observar que el nombre d'unitats en les cues en els tres mètodes compleix que:

$$L_q(\mathrm{M/D/1}) < L_q(\mathrm{M/E_k/1}) < L_q(\mathrm{M/M/1})$$

# 8. Xarxes de cues

Una **xarxa de cues** és un conjunt de nodes interconnectats per mitjà de camins. Cadascun d'aquests nodes està format d'un sistema de cues amb un o més servidors. Aquestes cues estan connectades per mitjà de línies que operen de manera asíncrona i concurrent, és a dir, no hi ha sincronisme entre entrades i sortides, i actuen simultàniament.

Les cues poden estar connectades entre elles en sèrie o tàndem, en què el trànsit que surt d'una cua és el trànsit que entra en la següent, però també ens podem trobar bifurcacions i fusions de trànsit en què es divideix el flux de trànsit o s'uneixen diversos fluxos de trànsit. Exemples de xarxes de cues són les xarxes d'ordinadors, les línies de producció en una fàbrica, el trànsit de vehicles en una ciutat...

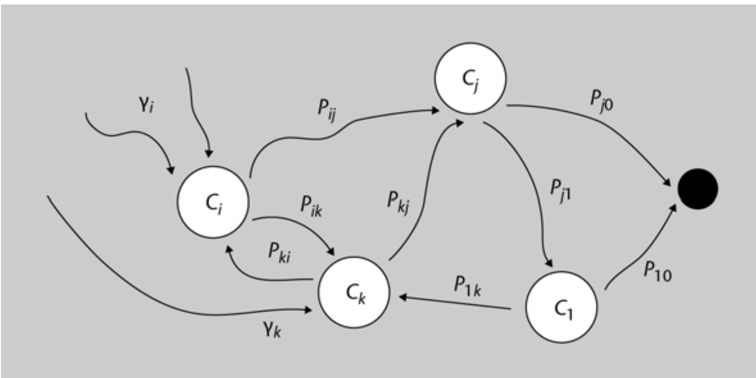
Podem diferenciar dos tipus de xarxes de cues:

**a) Tancades**: els fluxos ni entren ni surten del sistema, i per tant continuen circulant per l'interior del sistema indefinidament. El nombre d'unitats es manté constant, ja que no es pot identificar un inici i un final.

**b) Obertes**: cada flux entra al sistema per un punt en un moment donat, i després de passar per una o més cues, surt del sistema. No podem considerar el nombre d'unitats constant. Poden ser:

- Acícliques: un flux mai no pot tornar a la mateixa cua.
- Cícliques: hi ha bucles en la xarxa.

Figura 29. Xarxa de cues




Paràmetres d'una xarxa de cues:

- Les cues es representen mitjançant $N$ nodes connectats mitjançant camins.
- El node $i$ dóna servei amb distribució exponencial amb una taxa de servei $\mu_i$.

- Les unitats que arriben al sistema des de l'exterior a un node *i*, arriben amb una distribució de Poisson amb una taxa $\gamma_i$.
- Un cop s'ha servit una unitat en un node passa al node següent amb una probabilitat fixa o surt del sistema. La probabilitat d'anar del node *i* al node *j* ($j \neq i$) serà $P_{ij} > 0$.
- La probabilitat de sortir del sistema és:

$$q_i = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} P_{ij}$$

- La probabilitat que una unitat abandoni el sistema des d'un node *i* és $P_{i0}$.

### 8.1. Xarxes en sèrie

L'estructura de xarxa més simple és la de les xarxes en sèrie, que són les que compleixen el següent:

$$\gamma_i = \begin{cases} \lambda, & i = 1 \\ 0, & i \geq 2 \end{cases}$$

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i + 1, \quad 1 \leq i \leq N - 1 \\ 1, & i = N, \quad j = 0 \\ 0, & resta \end{cases}$$

Les unitats entren pel node 1 i surten pel node *N* després de passar per cadascun dels nodes.

**Teorema de Burke**

La sortida d'una cua del tipus M/M/1, M/M/c o M/M/∞, amb una taxa d'arribades, és un procés de Poisson amb taxa. En qualsevol instant de temps *t*, el nombre d'unitats que hi ha en el sistema és independent de les sortides que hi ha hagut abans d'aquest instant. Podríem dir que el sistema és reversible.

Segons el teorema de Burke, per a un sistema de cues M/M/c/∞, si la capacitat de les cues és infinita, podem estudiar cadascuna de les cues per separat, i per tant la sèrie estarà formada per *N* cues independents. La probabilitat que en un instant hi hagi $n_1$ unitats a la cua 1, $n_2$ unitats a la cua 2, ..., i $n_N$ unitats a la cua *N* és:

$$P(n) = \prod_{i=1}^{N} P_i(n_i)$$

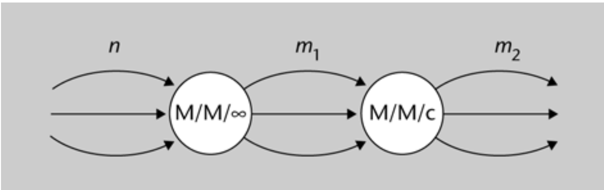
**Exemple numèric**

Volem estudiar un supermercat en hora punta. Suposem que els clients arriben de manera aleatòria amb una taxa d'arribades $\lambda$ = 40 clients/hora. El temps que passen al supermercat segueix una distribució de tipus exponencial de mitjana 45 minuts. Les caixes atenen exponencialment amb una taxa de 4 clients/minut de mitjana.

a) Quantes caixes calen?

Podem modelitzar el sistema com a dues cues en sèrie. Segons el teorema de Burke la segona cua és del tipus M/M/c, amb una taxa d'entrades $\lambda$ = 40 clients/hora i una taxa de sortides amb $\mu$ = 4 clients/minut

Figura 30




S'ha de complir que:

$$\frac{\lambda}{c_m \mu} < 1 \,, \qquad c_m > \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{60/4} = 2{,}67 \approx 3 \text{ caixes}$$

b) Si finalment es posa una caixa més que el nombre mínim. Quin és el temps que es tarda a fer la compra?

En el primer sistema M/M/∞ (supermercat) tindrem, segons el subapartat 7.3, que:

$$L_1 = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{4/3} = 30 \text{ clients de mitjana comprant}$$

$$W_1 = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{4/3} = 45 \text{ minuts de mitjana}$$

Segons el subapartat 7.2, a la segona cua, la que modelitza les caixes:

$$A = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{15} = 2{,}67 \quad , \quad \rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{40}{4.15} = 0{,}67$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^c}{c!(1-\rho)}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3} \frac{(2{,}67)^n}{n!} + \frac{(2{,}67)^4}{4!(1-0{,}67)}} = 0{,}057$$

Els temps mitjans d'espera a la cua són:

$$L_q = \frac{A^c}{c!} P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{(2{,}67)^4}{4!} 0{,}057 \frac{0{,}67}{(1-0{,}67)^2} = 0{,}74 \text{ clients}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0{,}74}{40} = 0{,}018h = 1{,}1\,\text{min}.$$

Aleshores, podem calcular els valors mitjans en el segon sistema:

$$W_2 = \frac{1}{\mu} + W_q = 0{,}086 = 5{,}14 \text{ minuts de mitjana}$$

$L_2 = \lambda W_2$ = 3,44 clients de mitjana

Sumant obtenim els valors mitjans de clients al supermercat i el temps mitjà de durada de la compra:

$W = W_1 + W_2$ = 50,14 minuts de mitjana

$L = L_1 + L_2$ = 33,44 clients de mitjana

### 8.2. Xarxes de Jackson obertes

Per a fer l'anàlisi d'una xarxa oberta ens podem basar en el teorema de Jackson per a xarxes obertes.

El teorema es basa en els supòsits següents:

- Els $N$ nodes tenen servei exponencial amb taxa de servei $\mu_i$.
- Les unitats que arriben de l'exterior a un node i tenen distribució de Poisson amb una taxa $\gamma_i$.
- La probabilitat d'anar del node $i$ al node $j$ ($j \neq i$) és $P_{ij} > 0$ i la d'abandonar el sistema és $P_{i0}$.

El teorema de Jackson ens diu que en una xarxa de cues amb les condicions anteriors cada node és un sistema independent amb entrada de Poisson, cada node es pot analitzar per separat de la resta utilitzant un model M/M/1 o M/M/c i els resultats es poden combinar estadísticament.

Per tant, com que el flux total d'entrada a un node $j$ ha de ser igual que el que surt, tindrem les **equacions de trànsit**:

$$\lambda_j = \gamma_j + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_{ij}$$

Perquè el sistema no se saturi caldrà que es complexi la condició següent a cada node $i$ ($c_i$, nombre de servidors en el node $i$):

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{c_i \mu_i} < 1 \qquad , \qquad \lambda_i < c_i \mu_i$$

La resolució d'aquest sistema de $N$ equacions lineals ens permetrà obtenir les taxes d'arribada a cadascun dels $N$ nodes, $\lambda_i$.

Aleshores el teorema de Jackson ens diu que en estat estacionari la distribució del nombre d'unitats a cada node és:

$$P(n) = \prod_{i=1}^{N} P_i(n_i)$$

En què $P_i(n_i)$ és la probabilitat que hi hagi $n_i$ clients en el node $i$, calculada segons els models M/M/c.

En el cas de només un servidor ($c = 1$), els resultats són:

$$P(n) = \prod_{i=1}^{N} (1-\rho_i)\rho_i^{ni} = (1-\rho_1)\rho_1^{n1}(1-\rho_2)\rho_2^{n2} \ldots (1-\rho_N)\rho_N^{nN}$$

És a dir, en estat estacionari, en un instant de temps qualsevol l'estat del node *i* ($n_i$) és independent de la resta dels nodes. El comportament de les cues no és de Poisson però en valor mitjà es pot considerar cada cua com a M/M/c independent.

A més podem obtenir els paràmetres següents de l'anàlisi de la xarxa:

**a)** La taxa d'entrada a la xarxa és la suma de les taxes d'arribada des de l'exterior a cadascun dels nodes:

$$\lambda_{xarxa} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i$$

**b)** El nombre mitjà d'unitats en la xarxa serà la suma dels nombres mitjans d'unitats en cadascun dels *N* nodes:

$$L_{xarxa} = \sum_{i=1}^{N} \mu_i$$

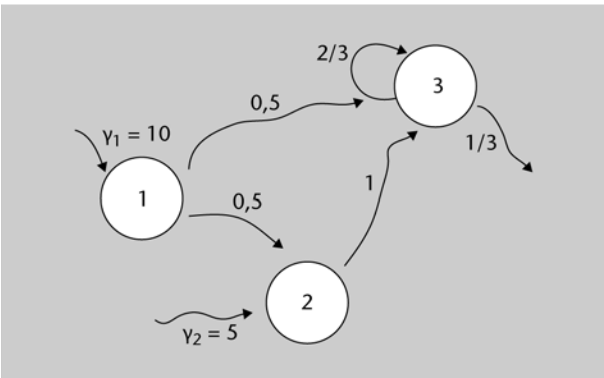
El temps mitjà de permanència en el sistema és el temps mitjà que passa des que una unitat entra a la xarxa fins que en surt:

$$W_{xarxa} = \frac{L_{xarxa}}{\lambda_{xarxa}}$$

**Exemple de xarxa oberta**

Analitzarem el cas d'una xarxa formada per 3 sistemes de cues tal com es mostra a la figura. Els servidors tenen una taxa de servei $\mu = 12$.

Figura 31




**a)** Indiqueu el nombre de servidors en cada cua.

Calcularem la taxa d'arribades a cada node:

$$\lambda_1 = \gamma_1 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_{ij} = \gamma_1 = 10$$
$$\lambda_2 = \gamma_2 + \lambda_1 P_{12} = 5 + 0{,}5\lambda_1$$
$$\lambda_3 = \lambda_1 P_{13} + \lambda_2 P_{23} + \lambda_3 P_{33} = 0{,}5\lambda_1 + \lambda_2 + 0{,}67\lambda_3$$

Aleshores,

$$\lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 10, \quad \lambda_3 = 45$$

Segons la condició d'estabilitat

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{c_1\mu} < 1 \quad , \quad \rho_1 = \frac{10}{c_1 12} < 1 \quad , \quad c_1 = 1$$
$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{c_2\mu} < 1 \quad , \quad \rho_2 = \frac{10}{c_2 12} < 1 \quad , \quad c_2 = 1$$
$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{c_3\mu} < 1 \quad , \quad \rho_3 = \frac{45}{c_3 12} < 1 \quad , \quad c_3 = 4$$

Cal un servidor en el sistema 1 i en el sistema 2, i fins a 4 servidors en el sistema 3.

**b)** Calculeu el temps d'espera en cada node.

En els nodes 1 i 2 les cues són del tipus M/M/1, i el nombre mitjà d'unitats i el temps mitjà de permanència són:

$$L_1 = L_2 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = 5 \quad , \quad W_1 = W_2 = \frac{L_1}{\lambda_1} = 0{,}5$$

En el node 3 la cua és del tipus M/M/4. En aquest cas,

$$A = \frac{\lambda_3}{\mu} = \frac{45}{12} = 3{,}75 \ , \ \rho = \frac{\lambda_3}{c_3\mu} = 0{,}94$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{A^n}{n!} + \frac{A^c}{c!(1-\rho)}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{3}\frac{(3{,}75)^n}{n!} + \frac{(3{,}75)^4}{4!(1-0{,}94)}} = 0{,}0063$$

Aleshores el nombre mitjà d'unitats i el temps mitjà de permanència són:

$$L_q = \frac{A^c}{c!}P_0\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{(3{,}75)^4}{4!}0{,}0063\frac{0{,}94}{(1-0{,}94)^2} = 13{,}55$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{13{,}55}{45} = 0{,}3$$

### 8.3. Xarxes de Jackson tancades

El teorema de Jackson per al cas de les xarxes tancades es basa en els supòsits següents:

- La xarxa de cues consta de $N$ nodes, tots i cadascun amb servei exponencial independent amb taxa de servei $\mu_i$.
- El nombre d'unitats que hi ha en el sistema és constant, de valor $M$.
- No hi ha entrades ni sortides; per tant, $\gamma_i = 0$ i $P_{i0} = 0$.
- Un cop s'ha servit una unitat en un node passa al node següent amb una probabilitat fixa. La probabilitat d'anar del node $i$ al node $j$ ($j \neq i$) serà $P_{ij}$.
- Cada node es comporta com una cua amb un model M/M/c.

Com que el flux total d'entrada a un node ha de ser igual que el flux total de sortida del node, tindrem que les equacions de trànsit en aquest cas són:

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i P_{ij}$$

Aquestes $N$ equacions formen un sistema lineal indeterminat amb un grau de llibertat, que resoldrem per a trobar les taxes d'arribada relatives a cada node, $\lambda_i$. Per a resoldre'l suposarem, per exemple, que $\lambda_1 = 1$.

Mitjançant l'anàlisi del valor mitjà (MVA) podem resoldre el sistema d'equacions i calcular els paràmetres següents del sistema amb $M$ unitats:

**Anàlisi del valor mitjà**

Aquesta anàlisi és una manera simplificada d'analitzar les xarxes tancades.

- $L_i(M)$: nombre mitjà d'unitats en el node $i$.
- $W_i(M)$: temps mitjà de permanència en el node $i$.
- $\lambda_i(M)$: taxa real d'arribades/sortides en el node $i$.

És un algorisme iteratiu que va calculant $L_i(m)$, $W_i(m)$ per als diferents valors creixents de $m$, a partir de $m = 0$. Obtindrem:

$$W_j(m) = \frac{1}{\mu_j} + \frac{L_j(m-1)}{c_j\mu_j}, \qquad 1 \le j \le N, 1 \le m \le M$$

$$L_j(m) = m\frac{\lambda_j W_j(m)}{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i W_i(m)}, \qquad 1 \le j \le N, 1 \le m \le M$$

Aplicant la fórmula de Little obtindrem:

$$\lambda_j(m) = \frac{L_j(m)}{W_j(m)}, \qquad 1 \le j \le N, 1 \le m \le M$$

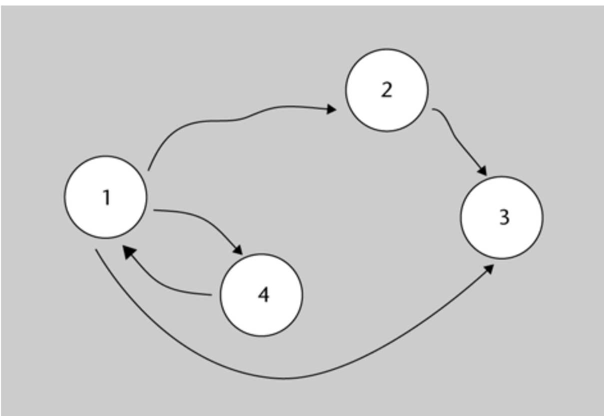
Tenint en compte que inicialment:

$$L_j(0) = 0 \qquad 1 \le j \le N$$

**Exemple de xarxa tancada**

Analitzarem el cas d'una xarxa formada per 4 sistemes de cues, tal com mostra la figura. Hi ha un servidor per node, amb una taxa de servei $\mu = 5$. Les probabilitats de transició entre nodes són: $P_{12} = 0,3$; $P_{14} = 0,7$; $P_{23} = 1$; $P_{31} = 1$; $P_{41} = 1$.

Figura 32



Calcularem la taxa d'arribades a cada node a partir de les equacions de trànsit:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_{ij} = \lambda_3 P_{31} + \lambda_4 P_{41} \\
\lambda_2 &= \lambda_1 P_{12} \\
\lambda_3 &= \lambda_2 P_{23} \\
\lambda_4 &= \lambda_1 P_{14}
\end{aligned}$$

Suposant $\lambda_1 = 1$ obtenim:

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 0{,}3; \quad \lambda_3 = 0{,}3; \quad \lambda_4 = 0{,}7$$

Si considerem que inicialment no hi ha unitats en el node *j*:

$$L_j(0) = 0 \qquad 1 \le j \le N$$

Aleshores, mitjançant les expressions següents podem calcular les unitats i el temps de permanència iterativament per als diferents valors de *m*:

$$W_j(m) = \frac{1 + L_j(m-1)}{5}, \qquad 1 \le j \le 4, 1 \le m \le M$$

$$L_1(m) = m \frac{W_1(m)}{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i W_i(m)}, \qquad 1 \le m \le M$$

$$L_2(m) = m \frac{0{,}3.W_2(m)}{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i W_i(m)}, \qquad 1 \le m \le M$$

$$L_3(m) = m \frac{0{,}3.W_3(m)}{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i W_i(m)}, \qquad 1 \le m \le M$$

$$L_4(m) = m \frac{0{,}7.W_4(m)}{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i W_i(m)}, \qquad 1 \le m \le M$$

Els valors de $L_i(m)$ s'han d'anar estabilitzant a mesura que augmenta el valor de *m*. Si el valor $L_i(m)$ continua creixent per a un cert valor *i*, direm que en el node *i* hi ha un coll d'ampolla.

# Resum

En aquest mòdul hem analitzat els diferents models de cues i les seves característiques principals.

Hem començat definint els principals conceptes utilitzats en l'anàlisi de cues i hem definit les diferents disciplines de servei. Una de les principals disciplines, per a anàlisis simples, són els processos de Poisson.

Seguidament hem estudiat els processos de Poisson com a processos amb estadística exponencial i sense memòria, que ens han permès modelitzar el procés d'arribades a un sistema d'espera considerant una població infinita.

També hem estudiat les cadenes de Markov i el seu ús per a l'anàlisi de sistemes a partir dels diferents estats en què es poden trobar i de les probabilitats d'estar en cadascun d'aquests estats. Un cas particular són els processos de naixement i mort com a model per a caracteritzar les xarxes de comunicacions.

A partir d'aquí hem definit diferents models matemàtics que ens permeten caracteritzar els models de cues i obtenir-ne els paràmetres principals. Concretament, hem estudiat els models de cua única:

- M/M/1, amb un sol servidor.
- M/M/c, model amb un nombre finit de servidors.
- M/M/$\infty$, amb servidors infinits; per tant, sense espera.
- M/M/c/c, amb un nombre limitat de servidors i sense espera.
- M/G/1, model amb disciplina de servei genèrica amb un únic servidor.

Finalment, com que molts sistemes estan formats per la interconnexió de diferents sistemes de cues, hem definit i analitzat les xarxes de cues, i hem vist que segons el teorema de Jackson cada node es pot analitzar com un sistema independent per separat utilitzant els models de cues anteriors.

# Activitats

**1.** Els usuaris arriben a la biblioteca d'acord amb un procés de Poisson amb una mitjana d'arribades de 200 persones per hora. Cada usuari és a la biblioteca durant 24 minuts de mitjana. Suposant que el temps que un usuari és a la biblioteca està distribuït exponencialment i és independent dels altres usuaris. Quants usuaris hi ha a la biblioteca de mitjana?

**2.** Considerem una cua del tipus M/M/1 finita de $N$ estats. Digueu quins són els valors necessaris de $N$ per als casos:

**a)** $\rho = 0{,}5$ amb $P_B = 10^{-3}$ i $PB = 10^{-6}$.

**b)** $\rho = 0{,}8$ amb $P_B = 10^{-3}$ i $PB = 10^{-6}$.

**3.** Suposem que a un centre de procés arriben unitats segons un procés de Poisson amb una taxa d'una unitat cada 12 minuts. Els temps de servei els suposarem exponencials amb taxa de servei cada 8 minuts. Calculeu $L$ i $W$.

**4.** El caixer d'una benzinera treballa en un únic taulell. Les arribades segueixen una distribució de Poisson amb una mitjana de 10 per hora. Cada usuari és atès d'un en un, i el temps de servei segueix una distribució exponencial de mitjana 4 minuts.

**a)** Quina és la probabilitat que es formi una cua?
**b)** Quina és la longitud mitjana de la cua?
**c)** Quin és el temps mitjà que un client necessita per a ser atès?
**d)** Quin és el temps mitjà que un client passa a la cua esperant que l'atenguin?

**5.** Una empresa de distribució de productes alimentaris té una centraleta telefònica amb 3 línies. L'empresa té un pic de trucades durant 3 hores en les quals alguns clients no es poden posar en contacte amb l'empresa a causa del trànsit que arriba (sabem que si el client troba les línies ocupades no el podem retenir). L'empresa estima que el 60% de les trucades que no ha atès fan la comanda en una altra empresa. Durant les hores punta, les trucades segueixen una distribució de Poisson amb una mitjana de 20 trucades per hora i cada telefonista atén durant 6 minuts cada trucada (distribució exponencial). El benefici mitjà d'una venda és de 210 euros.

**a)** Quants diners perd l'empresa diàriament per les trucades no respostes?
**b)** Si cada treballador costa a l'empresa 24 euros/hora i un treballador ha de treballar 8 hores al dia. Quin és el nombre òptim de treballadors? Les hores punta sempre són a la mateixa hora. La centraleta està oberta durant 16 hores i la pot atendre només un treballador quan no són hores punta. S'assumeix que el cost d'afegir una línia és negligible.

# Exercicis d'autoavaluació

**1.** Una impressora rep treballs per a imprimir d'una font de Poisson amb una taxa de 6 treballs/segon. Suposem que el 10% del trànsit total generat per la font aleatòriament va a la impressora. Responeu:

**a)** Quin és el temps mitjà entre les arribades de dos treballs consecutius?
**b)** Quina és la probabilitat que el proper treball tardi més de mig minut a arribar?
**c)** Quina és la probabilitat que arribi més d'un treball a la impressora en 1 minut?

**2.** El servei telefònic de resolució d'incidències d'una empresa elèctrica té 7 operadors. Cadascun d'ells tarda una mitjana de 12 minuts a resoldre cada incidència. Entre una incidència i la següent, passen 2 minuts de mitjana. A més, tots els operadors poden resoldre qualsevol tipus d'incidència. El temps mitjà des que un client truca per indicar la incidència fins que la incidència es resol és de 30 minuts.

**a)** Indica raonadament si el sistema és estable.
**b)** Quin és el nombre mitjà d'operadors ocupats?
**c)** Quin és el temps mitjà que un client espera fins que és atès?
**d)** Quin és el nombre mitjà de clients en el sistema?
**e)** Quin és el nombre mitjà de clients que esperen?
**f)** Assumint que els temps entre arribades de clients i els temps de servei són variables aleatòries exponencials, representeu el diagrama de transició entre estats.

**3.** A un centre de càlcul arriben clients segons un procés de Poisson amb taxa de 5 clients/hora. Sabem que consumeixen un temps de processador aleatori amb distribució exponencial de mitjana 10 minuts i que la disciplina d'atenció és FIFO. Es demana:

**a)** Quin és el nombre mitjà de clients en el sistema i el nombre mitjà de clients que s'estan servint?
**b)** Si a la sala d'espera hi ha 4 cadires, quina és la probabilitat que un usuari que arriba s'hagi d'esperar dret?
**c)** Calculeu el temps mitjà total d'estada al centre d'un usuari.

# Solucionari

**1.** Els treballs arriben a la impressora amb la taxa d'arribades següent:

$\lambda = 0{,}1 \cdot 6 = 0{,}6$ treballs/segon

**a)** L'instant de temps en què es produeixen les arribades, t, té una distribució:

$$F(t) = P(\tau \le t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0{,}6t}$$

La mitjana:

$$m = E[t] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}6} = 1{,}67 \quad \text{segons}$$

**b)** La probabilitat que el temps entre trucades sigui superior a 30 segons:

$$P(t > 30) = 1 - P(t \le 30) = F(30) = 1 - e^{-30\lambda} = 0{,}99$$

**c)** Considerant que $N$ és el nombre de treballs que arriben en un minut:

$$P(N \ge 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - e^{-60 \cdot 0{,}6} \approx 1$$

**2.**

- La taxa de servei: $\mu = 1/12$ clients/minut.
- La taxa d'arribades: $\lambda = 1/2$ clients/minut.

**a)** El factor d'utilització és:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{6}{7} < 1$$

Per tant, el sistema és estable.

**b)** El nombre mitjà de servidors ocupats correspon al valor de la intensitat de trànsit:

$$A = \frac{\lambda}{\mu} = 6$$

**c)** Sabem que $W$ = 30 minuts; aleshores, el temps mitjà d'espera a la cua és:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$
$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 30 - 12 = 18 \text{ minuts}$$

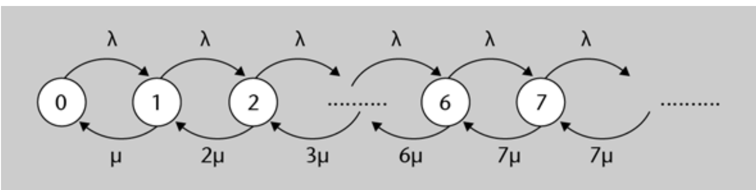
**d)** Aplicant la fórmula de Little,

$$L = \lambda W = 1/2 \cdot 30 = 15 \text{ clients}$$

**e)** Anàlogament:

$$L_q = \lambda W_q = 1/2 \cdot 18 = 9 \text{ clients}$$

**f)** El diagrama de transició entre estats és:




**3.** Podem utilitzar el model d'aquest procés com un model M/M/1 amb una taxa d'arribades $\lambda$ = 5 clients/hora i una taxa de servei $\mu$ = 6 clients/hora.

El factor d'utilització és:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} < 1$$

Per tant, el sistema és estable.

**a)** El nombre mitjà de clients en el sistema és:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{5}{6-5} = 5 \text{ clients}$$

El nombre mitjà de clients que utilitzen el computador és:

$$L - L_q = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} \text{ clients}$$

**b)** Perquè un client s'hagi d'esperar dret, cal que a la sala hi hagi més de 4 clients esperant; aleshores:

$$\begin{aligned} P\left(L_q > 4\right) &= 1 - P\left(L_q \le 4\right) = 1 - \sum_{n=0}^{4} (1-\rho)\rho^n \\ &= 1 - (1-\rho)\frac{\left(1-\rho^5\right)}{(1-\rho)} = \rho^5 \cong 0,4 \end{aligned}$$

**c)** Aplicant la fórmula de Little:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{5}{5} = 1 \text{ hora}$$

# Glossari

**bloqueig** *m* Estat d'un sistema en què tots els servidors estan ocupats.

**cadena de Markov** *f* És una seqüència de variables aleatòries en què el comportament futur no depèn del passat, sinó només de l'estat present.

**canal de servei** *m* És el sistema que serveix les unitats o clients.

**client** *m* Unitat que arriba al sistema per fer algun servei.

**congestió** *f* Vegeu *bloqueig*.

**cua** *f* Nombre de clients que esperen per a ser atesos.

**disciplina de generació** *f* Estadística dels temps d'arribada de les unitats de dades.

**disciplina de servei** *f* Estadística dels temps que es triga a servir les unitats en un sistema de cues.

**equació de Chapman-Kolmogorov** *f* És una relació entre les probabilitats de transició dels estats d'un procés.

**equació de futur** *f* Veure *equació de Chapman-Kolmogorov*.

**erlang** *m* El temps que un recurs està ocupat durant l'hora carregada.

**Erlang B** *m* És un model de cues exponencial amb un nombre limitat de servidors i amb pèrdues.

**Erlang C** *m* És un sistema amb un nombre finit de servidors i amb una cua infinita.

**factor d'utilització** *m* És la probabilitat que el servidor estigui ocupat.

**fórmula de Little** *f* Expressió que ens relaciona els temps mitjans de permanència en la cua amb el nombre mitjà d'unitats que hi ha en el sistema.

**fórmula de Pollaczek-Khinchine** *f* Expressió que ens permet calcular el nombre d'unitats en una cua.

**funció de densitat de probabilitat** *f* Funció que indica com està distribuïda la probabilitat d'una variable aleatòria.

**funció de distribució** *f* Funció de probabilitat acumulada d'una variable aleatòria.

**grau de servei** *m* Quocient entre les unitats perdudes i les unitats ofertes. Mesura la qualitat de servei.

**hora carregada** *f* Període d'una hora del dia en què el trànsit és més elevat.

**intensitat de trànsit** *f* És la mesura de l'ocupació d'un recurs per unitat de temps.

**mort** *f* Desaparició d'una unitat del sistema de naixement i mort pèrquè s'ha servit.

**naixement** *m* Aparició d'una unitat en el sistema de naixement i mort.

**notació de Kendall** *f* Notació abreujada dels diferents models de cues.

**població** *f* Nombre d'unitats que poden arribar a un sistema.

**prioritat** *f* Regla per a decidir qui serà el proper client a ser servit.

**procés estocàstic** *m* Senyal aleatori.

**servidors** *m* Element que modelitza el servei que es fa en un determinat node de la xarxa.

**sistema sense memòria** *m* Sistema en què l'estat futur no depèn dels estats anteriors.

**taxa d'arribades** *f* Velocitat mitjana d'arribades al sistema.

**taxa de servei** *f* Velocitat mitjana de servei de les unitats en el sistema.

**taxa de transició** *f* Velocitat o probabilitat de transició d'un estat a un altre.

**trànsit cursat** *m* Quantitat d'unitats servides amb èxit.

**trànsit ofert** *m* Quantitat d'unitats que arriben al sistema per a ser servides.

**trànsit perdut** *m* Quantitat d'unitats que no s'han pogut servir a causa de la congestió.

**vector d'estat** *m* Vector format pel conjunt de probabilitats d'estar en cadascun dels estats d'un sistema.

**xarxa de cues** *f* Sistema format per un conjunt de cues interconnectades.

**xarxa oberta** *f* Xarxa de cues amb entrada i sortida d'unitats al sistema.

**xarxa tancada** *f* Xarxa de cues sense entrada ni sortida d'unitats. El nombre d'unitats es manté constant.

# Annex

## Erlang B Traffic Table

Maximum Offered Load Versus B and N
B is in %

| N/B | 0.01 | 0.05 | 0.1 | 0.5 | 1.0 | 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .0001 | .0005 | .0010 | .0050 | .0101 | .0204 | .0526 | .1111 | .1765 | .2500 | .4286 |
| 2 | .0142 | .0321 | .0458 | .1054 | .1526 | .2235 | .3813 | .5954 | .7962 | 1.000 | 1.449 |
| 3 | .0868 | .1517 | .1938 | .3490 | .4555 | .6022 | .8994 | 1.271 | 1.603 | 1.930 | 2.633 |
| 4 | .2347 | .3624 | .4393 | .7012 | .8694 | 1.092 | 1.525 | 2.045 | 2.501 | 2.945 | 3.891 |
| 5 | .4520 | .6486 | .7621 | 1.132 | 1.361 | 1.657 | 2.219 | 2.881 | 3.454 | 4.010 | 5.189 |
| 6 | .7282 | .9957 | 1.146 | 1.622 | 1.909 | 2.276 | 2.960 | 3.758 | 4.445 | 5.109 | 6.514 |
| 7 | 1.054 | 1.392 | 1.579 | 2.158 | 2.501 | 2.935 | 3.738 | 4.666 | 5.461 | 6.230 | 7.856 |
| 8 | 1.422 | 1.830 | 2.051 | 2.730 | 3.128 | 3.627 | 4.543 | 5.597 | 6.498 | 7.369 | 9.213 |
| 9 | 1.826 | 2.302 | 2.558 | 3.333 | 3.783 | 4.345 | 5.370 | 6.546 | 7.551 | 8.522 | 10.58 |
| 10 | 2.260 | 2.803 | 3.092 | 3.961 | 4.461 | 5.084 | 6.216 | 7.511 | 8.616 | 9.685 | 11.95 |
| 11 | 2.722 | 3.329 | 3.651 | 4.610 | 5.160 | 5.842 | 7.076 | 8.487 | 9.691 | 10.86 | 13.33 |
| 12 | 3.207 | 3.878 | 4.231 | 5.279 | 5.876 | 6.615 | 7.950 | 9.474 | 10.78 | 12.04 | 14.72 |
| 13 | 3.713 | 4.447 | 4.831 | 5.964 | 6.607 | 7.402 | 8.835 | 10.47 | 11.87 | 13.22 | 16.11 |
| 14 | 4.239 | 5.032 | 5.446 | 6.663 | 7.352 | 8.200 | 9.730 | 11.47 | 12.97 | 14.41 | 17.50 |
| 15 | 4.781 | 5.634 | 6.077 | 7.376 | 8.108 | 9.010 | 10.63 | 12.48 | 14.07 | 15.61 | 18.90 |
| 16 | 5.339 | 6.250 | 6.722 | 8.100 | 8.875 | 9.828 | 11.54 | 13.50 | 15.18 | 16.81 | 20.30 |
| 17 | 5.911 | 6.878 | 7.378 | 8.834 | 9.652 | 10.66 | 12.46 | 14.52 | 16.29 | 18.01 | 21.70 |
| 18 | 6.496 | 7.519 | 8.046 | 9.578 | 10.44 | 11.49 | 13.39 | 15.55 | 17.41 | 19.22 | 23.10 |
| 19 | 7.093 | 8.170 | 8.724 | 10.33 | 11.23 | 12.33 | 14.32 | 16.58 | 18.53 | 20.42 | 24.51 |
| 20 | 7.701 | 8.831 | 9.412 | 11.09 | 12.03 | 13.18 | 15.25 | 17.61 | 19.65 | 21.64 | 25.92 |
| 21 | 8.319 | 9.501 | 10.11 | 11.86 | 12.84 | 14.04 | 16.19 | 18.65 | 20.77 | 22.85 | 27.33 |
| 22 | 8.946 | 10.18 | 10.81 | 12.64 | 13.65 | 14.90 | 17.13 | 19.69 | 21.90 | 24.06 | 28.74 |
| 23 | 9.583 | 10.87 | 11.52 | 13.42 | 14.47 | 15.76 | 18.08 | 20.74 | 23.03 | 25.28 | 30.15 |
| 24 | 10.23 | 11.56 | 12.24 | 14.20 | 15.30 | 16.63 | 19.03 | 21.78 | 24.16 | 26.50 | 31.56 |
| 25 | 10.88 | 12.26 | 12.97 | 15.00 | 16.13 | 17.51 | 19.99 | 22.83 | 25.30 | 27.72 | 32.97 |
| 26 | 11.54 | 12.97 | 13.70 | 15.80 | 16.96 | 18.38 | 20.94 | 23.89 | 26.43 | 28.94 | 34.39 |
| 27 | 12.21 | 13.69 | 14.44 | 16.60 | 17.80 | 19.27 | 21.90 | 24.94 | 27.57 | 30.16 | 35.80 |
| 28 | 12.88 | 14.41 | 15.18 | 17.41 | 18.64 | 20.15 | 22.87 | 26.00 | 28.71 | 31.39 | 37.21 |
| 29 | 13.56 | 15.13 | 15.93 | 18.22 | 19.49 | 21.04 | 23.83 | 27.05 | 29.85 | 32.61 | 38.63 |
| 30 | 14.25 | 15.86 | 16.68 | 19.03 | 20.34 | 21.93 | 24.80 | 28.11 | 31.00 | 33.84 | 40.05 |
| 31 | 14.94 | 16.60 | 17.44 | 19.85 | 21.19 | 22.83 | 25.77 | 29.17 | 32.14 | 35.07 | 41.46 |
| 32 | 15.63 | 17.34 | 18.21 | 20.68 | 22.05 | 23.73 | 26.75 | 30.24 | 33.28 | 36.30 | 42.88 |
| 33 | 16.34 | 18.09 | 18.97 | 21.51 | 22.91 | 24.63 | 27.72 | 31.30 | 34.43 | 37.52 | 44.30 |
| 34 | 17.04 | 18.84 | 19.74 | 22.34 | 23.77 | 25.53 | 28.70 | 32.37 | 35.58 | 38.75 | 45.72 |
| 35 | 17.75 | 19.59 | 20.52 | 23.17 | 24.64 | 26.44 | 29.68 | 33.43 | 36.72 | 39.99 | 47.14 |
| 36 | 18.47 | 20.35 | 21.30 | 24.01 | 25.51 | 27.34 | 30.66 | 34.50 | 37.87 | 41.22 | 48.56 |
| 37 | 19.19 | 21.11 | 22.08 | 24.85 | 26.38 | 28.25 | 31.64 | 35.57 | 39.02 | 42.45 | 49.98 |
| 38 | 19.91 | 21.87 | 22.86 | 25.69 | 27.25 | 29.17 | 32.62 | 36.64 | 40.17 | 43.68 | 51.40 |
| 39 | 20.64 | 22.64 | 23.65 | 26.53 | 28.13 | 30.08 | 33.61 | 37.72 | 41.32 | 44.91 | 52.82 |
| 40 | 21.37 | 23.41 | 24.44 | 27.38 | 29.01 | 31.00 | 34.60 | 38.79 | 42.48 | 46.15 | 54.24 |
| 41 | 22.11 | 24.19 | 25.24 | 28.23 | 29.89 | 31.92 | 35.58 | 39.86 | 43.63 | 47.38 | 55.66 |
| 42 | 22.85 | 24.97 | 26.04 | 29.09 | 30.77 | 32.84 | 36.57 | 40.94 | 44.78 | 48.62 | 57.08 |
| 43 | 23.59 | 25.75 | 26.84 | 29.94 | 31.66 | 33.76 | 37.57 | 42.01 | 45.94 | 49.85 | 58.50 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 44 | 24.33 | 26.53 | 27.64 | 30.80 | 32.54 | 34.68 | 38.56 | 43.09 | 47.09 | 51.09 | 59.92 | 71.01 |
| 45 | 25.08 | 27.32 | 28.45 | 31.66 | 33.43 | 35.61 | 39.55 | 44.17 | 48.25 | 52.32 | 61.35 | 72.67 |
| 46 | 25.83 | 28.11 | 29.26 | 32.52 | 34.32 | 36.53 | 40.55 | 45.24 | 49.40 | 53.56 | 62.77 | 74.33 |
| 47 | 26.59 | 28.90 | 30.07 | 33.38 | 35.22 | 37.46 | 41.54 | 46.32 | 50.56 | 54.80 | 64.19 | 76.00 |
| 48 | 27.34 | 29.70 | 30.88 | 34.25 | 36.11 | 38.39 | 42.54 | 47.40 | 51.71 | 56.03 | 65.61 | 77.66 |
| 49 | 28.10 | 30.49 | 31.69 | 35.11 | 37.00 | 39.32 | 43.53 | 48.48 | 52.87 | 57.27 | 67.04 | 79.32 |
| 50 | 28.87 | 31.29 | 32.51 | 35.98 | 37.90 | 40.26 | 44.53 | 49.56 | 54.03 | 58.51 | 68.46 | 80.99 |
| 51 | 29.63 | 32.09 | 33.33 | 36.85 | 38.80 | 41.19 | 45.53 | 50.64 | 55.19 | 59.75 | 69.88 | 82.65 |
| 52 | 30.40 | 32.90 | 34.15 | 37.72 | 39.70 | 42.12 | 46.53 | 51.73 | 56.35 | 60.99 | 71.31 | 84.32 |
| 53 | 31.17 | 33.70 | 34.98 | 38.60 | 40.60 | 43.06 | 47.53 | 52.81 | 57.50 | 62.22 | 72.73 | 85.98 |
| 54 | 31.94 | 34.51 | 35.80 | 39.47 | 41.51 | 44.00 | 48.54 | 53.89 | 58.66 | 63.46 | 74.15 | 87.65 |
| 55 | 32.72 | 35.32 | 36.63 | 40.35 | 42.41 | 44.94 | 49.54 | 54.98 | 59.82 | 64.70 | 75.58 | 89.31 |
| 56 | 33.49 | 36.13 | 37.46 | 41.23 | 43.32 | 45.88 | 50.54 | 56.06 | 60.98 | 65.94 | 77.00 | 90.97 |
| 57 | 34.27 | 36.95 | 38.29 | 42.11 | 44.22 | 46.82 | 51.55 | 57.14 | 62.14 | 67.18 | 78.43 | 92.64 |
| 58 | 35.05 | 37.76 | 39.12 | 42.99 | 45.13 | 47.76 | 52.55 | 58.23 | 63.31 | 68.42 | 79.85 | 94.30 |
| 59 | 35.84 | 38.58 | 39.96 | 43.87 | 46.04 | 48.70 | 53.56 | 59.32 | 64.47 | 69.66 | 81.27 | 95.97 |
| 60 | 36.62 | 39.40 | 40.80 | 44.76 | 46.95 | 49.64 | 54.57 | 60.40 | 65.63 | 70.90 | 82.70 | 97.63 |
| 61 | 37.41 | 40.22 | 41.63 | 45.64 | 47.86 | 50.59 | 55.57 | 61.49 | 66.79 | 72.14 | 84.12 | 99.30 |
| 62 | 38.20 | 41.05 | 42.47 | 46.53 | 48.77 | 51.53 | 56.58 | 62.58 | 67.95 | 73.38 | 85.55 | 101.0 |
| 63 | 38.99 | 41.87 | 43.31 | 47.42 | 49.69 | 52.48 | 57.59 | 63.66 | 69.11 | 74.63 | 86.97 | 102.6 |
| 64 | 39.78 | 42.70 | 44.16 | 48.31 | 50.60 | 53.43 | 58.60 | 64.75 | 70.28 | 75.87 | 88.40 | 104.3 |
| 65 | 40.58 | 43.52 | 45.00 | 49.20 | 51.52 | 54.38 | 59.61 | 65.84 | 71.44 | 77.11 | 89.82 | 106.0 |
| 66 | 41.38 | 44.35 | 45.85 | 50.09 | 52.44 | 55.33 | 60.62 | 66.93 | 72.60 | 78.35 | 91.25 | 107.6 |
| 67 | 42.17 | 45.18 | 46.69 | 50.98 | 53.35 | 56.28 | 61.63 | 68.02 | 73.77 | 79.59 | 92.67 | 109.3 |
| 68 | 42.97 | 46.02 | 47.54 | 51.87 | 54.27 | 57.23 | 62.64 | 69.11 | 74.93 | 80.83 | 94.10 | 111.0 |
| 69 | 43.77 | 46.85 | 48.39 | 52.77 | 55.19 | 58.18 | 63.65 | 70.20 | 76.09 | 82.08 | 95.52 | 112.6 |
| 70 | 44.58 | 47.68 | 49.24 | 53.66 | 56.11 | 59.13 | 64.67 | 71.29 | 77.26 | 83.32 | 96.95 | 114.3 |
| 71 | 45.38 | 48.52 | 50.09 | 54.56 | 57.03 | 60.08 | 65.68 | 72.38 | 78.42 | 84.56 | 98.37 | 116.0 |
| 72 | 46.19 | 49.36 | 50.94 | 55.46 | 57.96 | 61.04 | 66.69 | 73.47 | 79.59 | 85.80 | 99.80 | 117.6 |
| 73 | 47.00 | 50.20 | 51.80 | 56.35 | 58.88 | 61.99 | 67.71 | 74.56 | 80.75 | 87.05 | 101.2 | 119.3 |
| 74 | 47.81 | 51.04 | 52.65 | 57.25 | 59.80 | 62.95 | 68.72 | 75.65 | 81.92 | 88.29 | 102.7 | 120.9 |
| 75 | 48.62 | 51.88 | 53.51 | 58.15 | 60.73 | 63.90 | 69.74 | 76.74 | 83.08 | 89.53 | 104.1 | 122.6 |
| 76 | 49.43 | 52.72 | 54.37 | 59.05 | 61.65 | 64.86 | 70.75 | 77.83 | 84.25 | 90.78 | 105.5 | 124.3 |
| 77 | 50.24 | 53.56 | 55.23 | 59.96 | 62.58 | 65.81 | 71.77 | 78.93 | 85.41 | 92.02 | 106.9 | 125.9 |
| 78 | 51.05 | 54.41 | 56.09 | 60.86 | 63.51 | 66.77 | 72.79 | 80.02 | 86.58 | 93.26 | 108.4 | 127.6 |
| 79 | 51.87 | 55.25 | 56.95 | 61.76 | 64.43 | 67.73 | 73.80 | 81.11 | 87.74 | 94.51 | 109.8 | 129.3 |
| 80 | 52.69 | 56.10 | 57.81 | 62.67 | 65.36 | 68.69 | 74.82 | 82.20 | 88.91 | 95.75 | 111.2 | 130.9 |
| 81 | 53.51 | 56.95 | 58.67 | 63.57 | 66.29 | 69.65 | 75.84 | 83.30 | 90.08 | 96.99 | 112.6 | 132.6 |
| 82 | 54.33 | 57.80 | 59.54 | 64.48 | 67.22 | 70.61 | 76.86 | 84.39 | 91.24 | 98.24 | 114.1 | 134.3 |
| 83 | 55.15 | 58.65 | 60.40 | 65.39 | 68.15 | 71.57 | 77.87 | 85.48 | 92.41 | 99.48 | 115.5 | 135.9 |
| 84 | 55.97 | 59.50 | 61.27 | 66.29 | 69.08 | 72.53 | 78.89 | 86.58 | 93.58 | 100.7 | 116.9 | 137.6 |
| 85 | 56.79 | 60.35 | 62.14 | 67.20 | 70.02 | 73.49 | 79.91 | 87.67 | 94.74 | 102.0 | 118.3 | 139.3 |
| 86 | 57.62 | 61.21 | 63.00 | 68.11 | 70.95 | 74.45 | 80.93 | 88.77 | 95.91 | 103.2 | 119.8 | 140.9 |
| 87 | 58.44 | 62.06 | 63.87 | 69.02 | 71.88 | 75.42 | 81.95 | 89.86 | 97.08 | 104.5 | 121.2 | 142.6 |
| 88 | 59.27 | 62.92 | 64.74 | 69.93 | 72.82 | 76.38 | 82.97 | 90.96 | 98.25 | 105.7 | 122.6 | 144.3 |
| 89 | 60.10 | 63.77 | 65.61 | 70.84 | 73.75 | 77.34 | 83.99 | 92.05 | 99.41 | 107.0 | 124.0 | 145.9 |
| 90 | 60.92 | 64.63 | 66.48 | 71.76 | 74.68 | 78.31 | 85.01 | 93.15 | 100.6 | 108.2 | 125.5 | 147.6 |
| 91 | 61.75 | 65.49 | 67.36 | 72.67 | 75.62 | 79.27 | 86.04 | 94.24 | 101.8 | 109.4 | 126.9 | 149.3 |
| 92 | 62.58 | 66.35 | 68.23 | 73.58 | 76.56 | 80.24 | 87.06 | 95.34 | 102.9 | 110.7 | 128.3 | 150.9 |
| 93 | 63.42 | 67.21 | 69.10 | 74.50 | 77.49 | 81.20 | 88.08 | 96.43 | 104.1 | 111.9 | 129.8 | 152.6 |
| 94 | 64.25 | 68.07 | 69.98 | 75.41 | 78.43 | 82.17 | 89.10 | 97.53 | 105.3 | 113.2 | 131.2 | 154.3 |
| 95 | 65.08 | 68.93 | 70.85 | 76.33 | 79.37 | 83.13 | 90.12 | 98.63 | 106.4 | 114.4 | 132.6 | 155.9 |
| 96 | 65.92 | 69.79 | 71.73 | 77.24 | 80.31 | 84.10 | 91.15 | 99.72 | 107.6 | 115.7 | 134.0 | 157.6 |
| 97 | 66.75 | 70.65 | 72.61 | 78.16 | 81.25 | 85.07 | 92.17 | 100.8 | 108.8 | 116.9 | 135.5 | 159.3 |
| 98 | 67.59 | 71.52 | 73.48 | 79.07 | 82.18 | 86.04 | 93.19 | 101.9 | 109.9 | 118.2 | 136.9 | 160.9 |
| 99 | 68.43 | 72.38 | 74.36 | 79.99 | 83.12 | 87.00 | 94.22 | 103.0 | 111.1 | 119.4 | 138.3 | 162.6 |
| 100 | 69.27 | 7~.25 | 75.24 | 80.91 | 84.06 | 87.97 | 95.24 | 104.1 | 112.3 | 120.6 | 139.7 | 164.3 |

N is the number of servers. The numerical column headings indicate blocking probability B in %. Table generated by Dan Dexter

# Erlang C Traffic Table

Maximum Offered Load Versus B and N

B is in %

| N/B | 0.01 | 0.05 | 0.1 | 0.5 | 1.0 | 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .0001 | .0005 | .0010 | .0050 | .0100 | .0200 | .0500 | .1000 | .1500 | .2000 | .3000 | .4000 |
| 2 | .0142 | .0319 | .0452 | .1025 | .1465 | .2103 | .3422 | .5000 | .6278 | .7403 | .9390 | 1.117 |
| 3 | .0860 | .1490 | .1894 | .3339 | .4291 | .5545 | .7876 | 1.040 | 1.231 | 1.393 | 1.667 | 1.903 |
| 4 | .2310 | .3533 | .4257 | .6641 | .8100 | .9939 | 1.319 | 1.653 | 1.899 | 2.102 | 2.440 | 2.725 |
| 5 | .4428 | .6289 | .7342 | 1.065 | 1.259 | 1.497 | 1.905 | 2.313 | 2.607 | 2.847 | 3.241 | 3.569 |
| 6 | .7110 | .9616 | 1.099 | 1.519 | 1.758 | 2.047 | 2.532 | 3.007 | 3.344 | 3.617 | 4.062 | 4.428 |
| 7 | 1.026 | 1.341 | 1.510 | 2.014 | 2.297 | 2.633 | 3.188 | 3.725 | 4.103 | 4.406 | 4.897 | 5.298 |
| 8 | 1.382 | 1.758 | 1.958 | 2.543 | 2.866 | 3.246 | 3.869 | 4.463 | 4.878 | 5.210 | 5.744 | 6.178 |
| 9 | 1.771 | 2.208 | 2.436 | 3.100 | 3.460 | 3.883 | 4.569 | 5.218 | 5.668 | 6.027 | 6.600 | 7.065 |
| 10 | 2.189 | 2.685 | 2.942 | 3.679 | 4.077 | 4.540 | 5.285 | 5.986 | 6.469 | 6.853 | 7.465 | 7.959 |
| 11 | 2.634 | 3.186 | 3.470 | 4.279 | 4.712 | 5.213 | 6.015 | 6.765 | 7.280 | 7.688 | 8.336 | 8.857 |
| 12 | 3.100 | 3.708 | 4.018 | 4.896 | 5.363 | 5.901 | 6.758 | 7.554 | 8.099 | 8.530 | 9.212 | 9.761 |
| 13 | 3.587 | 4.248 | 4.584 | 5.529 | 6.028 | 6.602 | 7.511 | 8.352 | 8.926 | 9.379 | 10.09 | 10.67 |
| 14 | 4.092 | 4.805 | 5.166 | 6.175 | 6.705 | 7.313 | 8.273 | 9.158 | 9.760 | 10.23 | 10.98 | 11.58 |
| 15 | 4.614 | 5.377 | 5.762 | 6.833 | 7.394 | 8.035 | 9.044 | 9.970 | 10.60 | 11.09 | 11.87 | 12.49 |
| 16 | 5.150 | 5.962 | 6.371 | 7.502 | 8.093 | 8.766 | 9.822 | 10.79 | 11.44 | 11.96 | 12.77 | 13.41 |
| 17 | 5.699 | 6.560 | 6.991 | 8.182 | 8.801 | 9.505 | 10.61 | 11.61 | 12.29 | 12.83 | 13.66 | 14.33 |
| 18 | 6.261 | 7.169 | 7.622 | 8.871 | 9.518 | 10.25 | 11.40 | 12.44 | 13.15 | 13.70 | 14.56 | 15.25 |
| 19 | 6.835 | 7.788 | 8.263 | 9.568 | 10.24 | 11.01 | 12.20 | 13.28 | 14.01 | 14.58 | 15.47 | 16.18 |
| 20 | 7.419 | 8.417 | 8.914 | 10.27 | 10.97 | 11.77 | 13.00 | 14.12 | 14.87 | 15.45 | 16.37 | 17.10 |
| 21 | 8.013 | 9.055 | 9.572 | 10.99 | 11.71 | 12.53 | 13.81 | 14.96 | 15.73 | 16.34 | 17.28 | 18.03 |
| 22 | 8.616 | 9.702 | 10.24 | 11.70 | 12.46 | 13.30 | 14.62 | 15.81 | 16.60 | 17.22 | 18.19 | 18.96 |
| 23 | 9.228 | 10.36 | 10.91 | 12.43 | 13.21 | 14.08 | 15.43 | 16.65 | 17.47 | 18.11 | 19.10 | 19.89 |
| 24 | 9.848 | 11.02 | 11.59 | 13.16 | 13.96 | 14.86 | 16.25 | 17.51 | 18.35 | 19.00 | 20.02 | 20.82 |
| 25 | 10.48 | 11.69 | 12.28 | 13.90 | 14.72 | 15.65 | 17.08 | 18.36 | 19.22 | 19.89 | 20.93 | 21.76 |
| 26 | 11.11 | 12.36 | 12.97 | 14.64 | 15.49 | 16.44 | 17.91 | 19.22 | 20.10 | 20.79 | 21.85 | 22.69 |
| 27 | 11.75 | 13.04 | 13.67 | 15.38 | 16.26 | 17.23 | 18.74 | 20.08 | 20.98 | 21.68 | 22.77 | 23.63 |
| 28 | 12.40 | 13.73 | 14.38 | 16.14 | 17.03 | 18.03 | 19.57 | 20.95 | 21.87 | 22.58 | 23.69 | 24.57 |
| 29 | 13.05 | 14.42 | 15.09 | 16.89 | 17.81 | 18.83 | 20.41 | 21.82 | 22.75 | 23.48 | 24.61 | 25.50 |
| 30 | 13.71 | 15.12 | 15.80 | 17.65 | 18.59 | 19.64 | 21.25 | 22.68 | 23.64 | 24.38 | 25.54 | 26.44 |
| 31 | 14.38 | 15.82 | 16.52 | 18.42 | 19.37 | 20.45 | 22.09 | 23.56 | 24.53 | 25.29 | 26.46 | 27.38 |
| 32 | 15.05 | 16.53 | 17.25 | 19.18 | 20.16 | 21.26 | 22.93 | 24.43 | 25.42 | 26.19 | 27.39 | 28.33 |
| 33 | 15.72 | 17.24 | 17.97 | 19.95 | 20.95 | 22.07 | 23.78 | 25.30 | 26.32 | 27.10 | 28.31 | 29.27 |
| 34 | 16.40 | 17.95 | 18.71 | 20.73 | 21.75 | 22.89 | 24.63 | 26.18 | 27.21 | 28.01 | 29.24 | 30.21 |
| 35 | 17.09 | 18.67 | 19.44 | 21.51 | 22.55 | 23.71 | 25.48 | 27.06 | 28.11 | 28.92 | 30.17 | 31.16 |
| 36 | 17.78 | 19.39 | 20.18 | 22.29 | 23.35 | 24.53 | 26.34 | 27.94 | 29.00 | 29.83 | 31.10 | 32.10 |
| 37 | 18.47 | 20.12 | 20.92 | 23.07 | 24.15 | 25.36 | 27.19 | 28.82 | 29.90 | 30.74 | 32.03 | 33.05 |
| 38 | 19.17 | 20.85 | 21.67 | 23.86 | 24.96 | 26.18 | 28.05 | 29.71 | 30.80 | 31.65 | 32.97 | 34.00 |
| 39 | 19.87 | 21.59 | 22.42 | 24.65 | 25.77 | 27.01 | 28.91 | 30.59 | 31.71 | 32.57 | 33.90 | 34.94 |
| 40 | 20.58 | 22.33 | 23.17 | 25.44 | 26.58 | 27.84 | 29.77 | 31.48 | 32.61 | 33.48 | 34.83 | 35.89 |
| 41 | 21.28 | 23.07 | 23.93 | 26.23 | 27.39 | 28.68 | 30.63 | 32.37 | 33.51 | 34.40 | 35.77 | 36.84 |
| 42 | 22.00 | 23.81 | 24.69 | 27.03 | 28.21 | 29.51 | 31.50 | 33.26 | 34.42 | 35.32 | 36.70 | 37.79 |
| 43 | 22.71 | 24.56 | 25.45 | 27.83 | 29.02 | 30.35 | 32.36 | 34.15 | 35.33 | 36.23 | 37.64 | 38.74 |
| 44 | 23.43 | 25.31 | 26.22 | 28.63 | 29.84 | 31.19 | 33.23 | 35.04 | 36.23 | 37.15 | 38.58 | 39.69 |
| 45 | 24.15 | 26.06 | 26.98 | 29.44 | 30.67 | 32.03 | 34.10 | 35.93 | 37.14 | 38.07 | 39.51 | 40.64 |
| 46 | 24.88 | 26.82 | 27.75 | 30.24 | 31.49 | 32.87 | 34.97 | 36.83 | 38.05 | 39.00 | 40.45 | 41.59 |
| 47 | 25.60 | 27.57 | 28.52 | 31.05 | 32.32 | 33.72 | 35.84 | 37.72 | 38.96 | 39.92 | 41.39 | 42.54 |
| 48 | 26.34 | 28.33 | 29.30 | 31.86 | 33.14 | 34.56 | 36.72 | 38.62 | 39.87 | 40.84 | 42.33 | 43.50 |
| 49 | 27.07 | 29.10 | 30.08 | 32.68 | 33.97 | 35.41 | 37.59 | 39.52 | 40.79 | 41.76 | 43.27 | 44.45 |
| 50 | 27.80 | 29.86 | 30.86 | 33.49 | 34.80 | 36.26 | 38.47 | 40.42 | 41.70 | 4?,69 | 44.21 | 45.40 |
| 51 | 28.54 | 30.63 | 31.64 | 34.31 | 35.64 | 37.11 | 39.35 | 41.32 | 42.61 | 43.61 | 45.15 | 46.36 |
| 52 | 29.28 | 31.40 | 32.42 | 35.12 | 36.47 | 37.97 | 40.23 | 42.22 | 43.53 | 44.54 | 46.10 | 47.31 |
| 53 | 30.03 | 32.17 | 33.21 | 35.94 | 37.31 | 38.82 | 41.10 | 43.12 | 44.44 | 45.47 | 47.04 | 48.27 |
| 54 | 30.77 | 32.95 | 33.99 | 36.76 | 38.15 | 39.67 | 41.99 | 44.02 | 45.36 | 46.39 | 47.98 | 49.22 |
| 55 | 31.52 | 33.72 | 34.78 | 37.59 | 38.99 | 40.53 | 42.87 | 44.93 | 46.28 | 47.32 | 48.93 | 50.18 |
| 56 | 32.27 | 34.50 | 35.57 | 38.41 | 39.83 | 41.39 | 43.75 | 45.83 | 47.20 | 48.25 | 49.87 | 51.13 |
| 57 | 33.03 | 35.28 | 36.37 | 39.24 | 40.67 | 42.25 | 44.64 | 46.74 | 48.12 | 49.18 | 50.82 | 52.09 |
| 58 | 33.78 | 36.06 | 37.16 | 40.07 | 41.51 | 43.11 | 45.52 | 47.64 | 49.04 | 50.11 | 51.76 | 53.05 |
| 59 | 34.54 | 36.85 | 37.96 | 40.90 | 42.36 | 43.97 | 46.41 | 48.55 | 49.96 | 51.04 | 52.71 | 54.01 |
| 60 | 35.30 | 37.63 | 38.76 | 41.73 | 43.20 | 44.83 | 47.29 | 49.46 | 50.88 | 51.97 | 53.65 | 54.96 |
| 61 | 36.06 | 38.42 | 39.56 | 42.56 | 44.05 | 45.70 | 48.18 | 50.37 | 51.80 | 52.90 | 54.60 | 55.92 |
| 62 | 36.82 | 39.21 | 40.36 | 43.39 | 44.90 | 46.56 | 49.07 | 51.27 | 52.72 | 53.83 | 55.55 | 56.88 |
| 63 | 37.59 | 40.00 | 41.16 | 44.23 | 45.75 | 47.43 | 49.96 | 52.18 | 53.64 | 54.77 | 56.49 | 57.84 |
| 64 | 38.35 | 40.80 | 41.97 | 45.06 | 46.60 | 48.30 | 50.85 | 53.10 | 54.57 | 55.70 | 57.44 | 58.80 |
| 65 | 39.12 | 41.59 | 42.78 | 45.90 | 47.45 | 49.16 | 51.74 | 54.01 | 55.49 | 56.63 | 58.39 | 59.76 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 66 | 39.89 | 42.39 | 43.58 | 46.74 | 48.30 | 50.03 | 52.64 | 54.92 | 56.42 | 57.57 | 59.34 | 60.72 |
| 67 | 40.66 | 43.18 | 44.39 | 47.58 | 49.16 | 50.90 | 53.53 | 55.83 | 57.34 | 58.50 | 60.29 | 61.68 |
| 68 | 41.44 | 43.98 | 45.20 | 48.42 | 50.01 | 51.77 | 54.42 | 56.75 | 58.27 | 59.44 | 61.24 | 62.64 |
| 69 | 42.21 | 44.78 | 46.02 | 49.26 | 50.87 | 52.65 | 55.32 | 57.66 | 59.20 | 60.37 | 62.19 | 63.60 |
| 70 | 42.99 | 45.58 | 46.83 | 50.10 | 51.73 | 53.52 | 56.21 | 58.57 | 60.12 | 61.31 | 63.14 | 64.56 |
| 71 | 43.77 | 46.39 | 47.64 | 50.95 | 52.59 | 54.39 | 57.11 | 59.49 | 61.05 | 62.25 | 64.09 | 65.52 |
| 72 | 44.55 | 47.19 | 48.46 | 51.79 | 53.45 | 55.27 | 58.01 | 60.41 | 61.98 | 63.18 | 65.04 | 66.48 |
| 73 | 45.33 | 48.00 | 49.28 | 52.64 | 54.31 | 56.14 | 58.90 | 61.32 | 62.91 | 64.12 | 65.99 | 67.44 |
| 74 | 46.11 | 48.81 | 50.10 | 53.49 | 55.17 | 57.02 | 59.80 | 62.24 | 63.84 | 65.06 | 66.94 | 68.40 |
| 75 | 46.90 | 49.61 | 50.92 | 54.34 | 56.03 | 57.90 | 60.70 | 63.16 | 64.76 | 66.00 | 67.89 | 69.37 |
| 76 | 47.68 | 50.42 | 51.74 | 55.19 | 56.89 | 58.78 | 61.60 | 64.07 | 65.69 | 66.94 | 68.85 | 70.33 |
| 77 | 48.47 | 51.23 | 52.56 | 56.04 | 57.76 | 59.65 | 62.50 | 64.99 | 66.63 | 67.88 | 69.80 | 71.29 |
| 78 | 49.26 | 52.05 | 53.38 | 56.89 | 58.62 | 60.53 | 63.40 | 65.91 | 67.56 | 68.82 | 70.75 | 72.25 |
| 79 | 50.05 | 52.86 | 54.21 | 57.74 | 59.49 | 61.41 | 64.30 | 66.83 | 68.49 | 69.76 | 71.70 | 73.22 |
| 80 | 50.84 | 53.68 | 55.03 | 58.60 | 60.36 | 62.30 | 65.21 | 67.75 | 69.42 | 70.70 | 72.66 | 74.18 |
| 81 | 51.63 | 54.49 | 55.86 | 59.45 | 61.22 | 63.18 | 66.11 | 68.67 | 70.35 | 71.64 | 73.61 | 75.14 |
| 82 | 52.43 | 55.31 | 56.69 | 60.30 | 62.09 | 64.06 | 67.01 | 69.59 | 71.28 | 72.58 | 74.57 | 76.11 |
| 83 | 53.22 | 56.13 | 57.52 | 61.16 | 62.96 | 64.94 | 67.92 | 70.52 | 72.22 | 73.52 | 75.52 | 77.07 |
| 84 | 54.02 | 56.95 | 58.35 | 62.02 | 63.83 | 65.83 | 68.82 | 71.44 | 73.15 | 74.46 | 76.47 | 78.04 |
| 85 | 54.81 | 57.77 | 59.18 | 62.88 | 64.70 | 66.71 | 69.73 | 72.36 | 74.08 | 75.40 | 77.43 | 79.00 |
| 86 | 55.61 | 58.59 | 60.01 | 63.73 | 65.57 | 67.60 | 70.63 | 73.28 | 75.02 | 76.35 | 78.38 | 79.97 |
| 87 | 56.41 | 59.41 | 60.84 | 64.59 | 66.45 | 68.48 | 71.54 | 74.21 | 75.95 | 77.29 | 79.34 | 80.93 |
| 88 | 57.21 | 60.23 | 61.67 | 65.45 | 67.32 | 69.37 | 72.45 | 75.13 | 76.89 | 78.23 | 80.30 | 81.90 |
| 89 | 58.02 | 61.06 | 62.51 | 66.32 | 68.19 | 70.26 | 73.35 | 76.06 | 77.82 | 79.18 | 81.25 | 82.86 |
| 90 | 58.82 | 61.88 | 63.34 | 67.18 | 69.07 | 71.15 | 74.26 | 76.98 | 78.76 | 80.12 | 82.21 | 83.83 |
| 91 | 59.62 | 62.71 | 64.18 | 68.04 | 69.94 | 72.04 | 75.17 | 77.91 | 79.69 | 81.06 | 83.16 | 84.79 |
| 92 | 60.43 | 63.54 | 65.02 | 68.90 | 70.82 | 72.92 | 76.08 | 78.83 | 80.63 | 82.01 | 84.12 | 85.76 |
| 93 | 61.23 | 64.36 | 65.86 | 69.77 | 71.70 | 73.81 | 76.99 | 79.76 | 81.57 | 82.95 | 85.08 | 86.73 |
| 94 | 62.04 | 65.19 | 66.70 | 70.63 | 72.57 | 74.71 | 77.90 | 80.69 | 82.50 | 83.90 | 86.03 | 87.69 |
| 95 | 62.85 | 66.02 | 67.54 | 71.50 | 73.45 | 75.60 | 78.81 | 81.61 | 83.44 | 84.84 | 86.99 | 88.66 |
| 96 | 63.66 | 66.85 | 68.38 | 72.36 | 74.33 | 76.49 | 79.72 | 82.54 | 84.38 | 85.79 | 87.95 | 89.62 |
| 97 | 64.47 | 67.69 | 69.22 | 73.23 | 75.21 | 77.38 | 80.63 | 83.47 | 85.32 | 86.74 | 88.91 | 90.59 |
| 98 | 65.28 | 68.52 | 70.06 | 74.10 | 76.09 | 78.27 | 81.54 | 84.39 | 86.26 | 87.68 | 89.87 | 91.56 |
| 99 | 66.09 | 69.35 | 70.90 | 74.97 | 76.97 | 79.17 | 82.46 | 85.32 | 87.20 | 88.63 | 90.82 | 92.53 |
| 100 | 66.91 | 70.19 | 71.75 | 75.84 | 77.85 | 80.06 | 83.37 | 86.25 | 88.13 | 89.58 | 91.78 | 93.49 |

N is the number of servers. The numerical column headings indicate blocking probability B in %. Table generated by Dan Dexter

# Poisson Traffic Table

Maximum Offered Load Versus B and N
B is in %

| N/B | 0.01 | 0.05 | 0.1 | 0.5 | 1.0 | 2 | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .0001 | .0005 | .0010 | .0050 | .0101 | .0202 | .0513 | .1054 | .1625 | .2231 | .3567 | .5108 |
| 2 | .0142 | .0320 | .0454 | .1035 | .1486 | .2147 | .3554 | .5318 | .6832 | .8244 | 1.097 | 1.376 |
| 3 | .0862 | .1497 | .1905 | .3379 | .4360 | .5672 | .8177 | 1.102 | 1.331 | 1.535 | 1.914 | 2.285 |
| 4 | .2318 | .3552 | .4286 | .6722 | .8232 | 1.016 | 1.366 | 1.745 | 2.039 | 2.297 | 2.764 | 3.211 |
| 5 | 1.078 | 1.279 | 1.530 | 1.970 | 2.433 | 2.785 | 3.090 | 3.634 | 4.148 | | | |
| 6 | .7137 | .9672 | 1.107 | 1.537 | 1.785 | 2.089 | 2.613 | 3.152 | 3.557 | 3.904 | 4.517 | 5.091 |
| 7 | 1.030 | 1.348 | 1.520 | 2.037 | 2.330 | 2.684 | 3.285 | 3.895 | 4.348 | 4.734 | 5.411 | 6.039 |
| 8 | 1.387 | 1.768 | 1.971 | 2.571 | 2.906 | 3.307 | 3.981 | 4.656 | 5.155 | 5.576 | 6.312 | 6.991 |
| 9 | 1.778 | 2.220 | 2.452 | 3.132 | 3.508 | 3.953 | 4.695 | 5.433 | 5.973 | 6.429 | 7.220 | 7.947 |
| 10 | 2.198 | 2.699 | 2.961 | 3.717 | 4.130 | 4.618 | 5.425 | 6.221 | 6.802 | 7.289 | 8.133 | 8.904 |
| 11 | 2.643 | 3.202 | 3.492 | 4.321 | 4.771 | 5.300 | 6.169 | 7.021 | 7.639 | 8.157 | 9.050 | 9.864 |
| 12 | 3.112 | 3.726 | 4.042 | 4.943 | 5.428 | 5.996 | 6.924 | 7.829 | 8.484 | 9.031 | 9.972 | 10.83 |
| 13 | 3.600 | 4.269 | 4.611 | 5.580 | 6.099 | 6.704 | 7.690 | 8.646 | 9.336 | 9.910 | 10.90 | 11.79 |
| 14 | 4.106 | 4.828 | 5.195 | 6.231 | 6.782 | 7.424 | 8.464 | 9.470 | 10.19 | 10.79 | 11.82 | 12.76 |
| 15 | 4.629 | 5.402 | 5.794 | 6.893 | 7.477 | 8.153 | 9.246 | 10.30 | 11.06 | 11.68 | 12.75 | 13.72 |
| 16 | 5.167 | 5.990 | 6.405 | 7.567 | 8.181 | 8.891 | 10.04 | 11.14 | 11.92 | 12.57 | 13.69 | 14.69 |
| 17 | 5.718 | 6.590 | 7.028 | 8.251 | 8.895 | 9.638 | 10.83 | 11.98 | 12.79 | 13.47 | 14.62 | 15.66 |
| 18 | 6.281 | 7.201 | 7.662 | 8.943 | 9.616 | 10.39 | 11.63 | 12.82 | 13.67 | 14.37 | 15.56 | 16.63 |
| 19 | 6.856 | 7.822 | 8.306 | 9.645 | 10.35 | 11.15 | 12.44 | 13.67 | 14.55 | 15.27 | 16.50 | 17.60 |
| 20 | 7.442 | 8.453 | 8.958 | 10.35 | 11.08 | 11.92 | 13.26 | 14.53 | 15.43 | 16.17 | 17.44 | 18.57 |
| 21 | 8.037 | 9.093 | 9.619 | 11.07 | 11.83 | 12.69 | 14.07 | 15.38 | 16.31 | 17.08 | 18.38 | 19.54 |
| 22 | 8.642 | 9.741 | 10.29 | 11.79 | 12.57 | 13.47 | 14.89 | 16.24 | 17.20 | 17.99 | 19.32 | 20.51 |
| 23 | 9.255 | 10.40 | 10.96 | 12.52 | 13.33 | 14.25 | 15.72 | 17.11 | 18.09 | 18.90 | 20.27 | 21.48 |
| 24 | 9.876 | 11.06 | 11.65 | 13.26 | 14.09 | 15.04 | 16.55 | 17.98 | 18.98 | 19.81 | 21.21 | 22.46 |
| 25 | 10.50 | 11.73 | 12.34 | 14.00 | 14.85 | 15.83 | 17.38 | 18.84 | 19.88 | 20.73 | 22.16 | 23.43 |
| 26 | 11.14 | 12.41 | 13.03 | 14.74 | 15.62 | 16.63 | 18.22 | 19.72 | 20.77 | 21.64 | 23.10 | 24.41 |
| 27 | 11.78 | 13.09 | 13.73 | 15.49 | 16.40 | 17.43 | 19.06 | 20.59 | 21.67 | 22.56 | 24.05 | 25.38 |
| 28 | 12.43 | 13.78 | 14.44 | 16.25 | 17.18 | 18.23 | 19.90 | 21.47 | 22.57 | 23.48 | 25.00 | 26.36 |
| 29 | 13.09 | 14.47 | 15.15 | 17.00 | 17.96 | 19.04 | 20.75 | 22.35 | 23.48 | 24.40 | 25.95 | 27.33 |
| 30 | 13.75 | 15.17 | 15.87 | 17.77 | 18.74 | 19.85 | 21.59 | 23.23 | 24.38 | 25.32 | 26.91 | 28.31 |
| 31 | 14.42 | 15.87 | 16.59 | 18.53 | 19.53 | 20.66 | 22.45 | 24.11 | 25.29 | 26.24 | 27.86 | 29.29 |
| 32 | 15.09 | 16.58 | 17.32 | 19.31 | 20.32 | 21.48 | 23.30 | 25.00 | 26.19 | 27.17 | 28.81 | 30.26 |
| 33 | 15.76 | 17.30 | 18.05 | 20.08 | 21.12 | 22.30 | 24.15 | 25.89 | 27.10 | 28.09 | 29.76 | 31.24 |
| 34 | 16.44 | 18.01 | 18.78 | 20.86 | 21.92 | 23.12 | 25.01 | 26.77 | 28.01 | 29.02 | 30.72 | 32.22 |
| 35 | 17.13 | 18.73 | 19.52 | 21.64 | 22.72 | 23.95 | 25.87 | 27.66 | 28.92 | 29.95 | 31.67 | 33.20 |
| 36 | 17.82 | 19.46 | 20.26 | 22.42 | 23.53 | 24.77 | 26.73 | 28.56 | 29.84 | 30.88 | 32.63 | 34.18 |
| 37 | 18.52 | 20.19 | 21.01 | 23.21 | 24.33 | 25.60 | 27.60 | 29.45 | 30.75 | 31.81 | 33.59 | 35.16 |
| 38 | 19.21 | 20.92 | 21.75 | 24.00 | 25.14 | 26.44 | 28.46 | 30.35 | 31.66 | 32.74 | 34.54 | 36.14 |
| 39 | 19.92 | 21.66 | 22.51 | 24.79 | 25.96 | 27.27 | 29.33 | 31.24 | 32.58 | 33.67 | 35.50 | 37.11 |
| 40 | 20.62 | 22.40 | 23.26 | 25.59 | 26.77 | 28.11 | 30.20 | 32.14 | 33.50 | 34.60 | 36.46 | 38.09 |
| 41 | 21.33 | 23.14 | 24.02 | 26.38 | 27.59 | 28.95 | 31.07 | 33.04 | 34.42 | 35.54 | 37.42 | 39.07 |
| 42 | 22.05 | 23.88 | 24.78 | 27.18 | 28.41 | 29.79 | 31.94 | 33.94 | 35.33 | 36.47 | 38.38 | 40.05 |
| 43 | 22.76 | 24.63 | 25.54 | 27.99 | 29.23 | 30.63 | 32.81 | 34.84 | 36.26 | 37.41 | 39.34 | 41.04 |
| 44 | 23.48 | 25.38 | 26.31 | 28.79 | 30.05 | 31.47 | 33.69 | 35.74 | 37.18 | 38.34 | 40.30 | 42.02 |
| 45 | 24.20 | 26.14 | 27.08 | 29.60 | 30.88 | 32.32 | 34.56 | 36.65 | 38.10 | 39.28 | 41.26 | 43.00 |
| 46 | 24.93 | 26.90 | 27.85 | 30.41 | 31.71 | 33.17 | 35.44 | 37.55 | 39.02 | 40.22 | 42.22 | 43.98 |
| 47 | 25.66 | 27.65 | 28.62 | 31.22 | 32.53 | 34.01 | 36.32 | 38.46 | 39.94 | 41.16 | 43.18 | 44.96 |
| 48 | 26.39 | 28.42 | 29.40 | 32.03 | 33.37 | 34.87 | 37.20 | 39.36 | 40.87 | 42.09 | 44.14 | 45.94 |
| 49 | 27.13 | 29.18 | 30.18 | 32.85 | 34.20 | 35.72 | 38.08 | 40.27 | 41.79 | 43.03 | 45.10 | 46.92 |
| 50 | 27.86 | 29.95 | 30.96 | 33.66 | 35.03 | 36.57 | 38.97 | 41.18 | 42.72 | 43.97 | 46.06 | 47.90 |
| 51 | 28.60 | 30.72 | 31.74 | 34.48 | 35.87 | 37.43 | 39.85 | 42.09 | 43.65 | 44.91 | 47.03 | 48.89 |
| 52 | 29.34 | 31.49 | 32.53 | 35.30 | 36.71 | 38.28 | 40.73 | 43.00 | 44.58 | 45.85 | 47.99 | 49.87 |
| 53 | 30.09 | 32.26 | 33.31 | 36.13 | 37.55 | 39.14 | 41.62 | 43.91 | 45.50 | 46.80 | 48.95 | 50.85 |
| 54 | 30.84 | 33.04 | 34.10 | 36.95 | 38.39 | 40.00 | 42.51 | 44.82 | 46.43 | 47.74 | 49.92 | 51.83 |
| 55 | 31.59 | 33.82 | 34.90 | 37.78 | 39.23 | 40.86 | 43.40 | 45.74 | 47.36 | 48.68 | 50.88 | 52.82 |
| 56 | 32.34 | 34.60 | 35.69 | 38.60 | 40.07 | 41.72 | 44.29 | 46.65 | 48.29 | 49.63 | 51.85 | 53.80 |
| 57 | 33.09 | 35.38 | 36.48 | 39.43 | 40.92 | 42.59 | 45.18 | 47.56 | 49.22 | 50.57 | 52.81 | 54.78 |
| 58 | 33.85 | 36.16 | 37.28 | 40.26 | 41.77 | 43.45 | 46.07 | 48.48 | 50.15 | 51.51 | 53.78 | 55.77 |
| 59 | 34.60 | 36.95 | 38.08 | 41.09 | 42.61 | 44.32 | 46.96 | 49.40 | 51.09 | 52.46 | 54.74 | 56.75 |
| 60 | 35.36 | 37.73 | 38.88 | 41.93 | 43.46 | 45.18 | 47.85 | 50.31 | 52.02 | 53.40 | 55.71 | 57.73 |
| 61 | 36.13 | 38.52 | 39.68 | 42.76 | 44.31 | 46.05 | 48.75 | 51.23 | 52.95 | 54.35 | 56.68 | 58.72 |
| 62 | 36.89 | 39.31 | 40.48 | 43.60 | 45.16 | 46.92 | 49.64 | 52.15 | 53.89 | 55.30 | 57.64 | 59.70 |
| 63 | 37.66 | 40.11 | 41.29 | 44.43 | 46.02 | 47.79 | 50.54 | 53.07 | 54.82 | 56.24 | 58.61 | 60.68 |
| 64 | 38.42 | 40.90 | 42.09 | 45.27 | 46.87 | 48.66 | 51.43 | 53.99 | 55.76 | 57.19 | 59.58 | 61.67 |
| 65 | 39.19 | 41.70 | 42.90 | 46.11 | 47.73 | 49.53 | 52.33 | 54.91 | 56.69 | 58.14 | 60.54 | 62.65 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 66 | 39.96 | 42.49 | 43.71 | 46.95 | 48.58 | 50.41 | 53.23 | 55.83 | 57.63 | 59.08 | 61.51 | 63.64 |
| 67 | 40.74 | 43.29 | 44.52 | 47.79 | 49.44 | 51.28 | 54.13 | 56.75 | 58.56 | 60.03 | 62.48 | 64.62 |
| 68 | 41.51 | 44.09 | 45.33 | 48.64 | 50.30 | 52.16 | 55.03 | 57.67 | 59.50 | 60.98 | 63.45 | 65.61 |
| 69 | 42.29 | 44.89 | 46.15 | 49.48 | 51.16 | 53.03 | 55.93 | 58.59 | 60.44 | 61.93 | 64.41 | 66.59 |
| 70 | 43.07 | 45.70 | 46.96 | 50.33 | 52.02 | 53.91 | 56.83 | 59.52 | 61.37 | 62.88 | 65.38 | 67.58 |
| 71 | 43.84 | 46.50 | 47.78 | 51.17 | 52.88 | 54.79 | 57.73 | 60.44 | 62.31 | 63.83 | 66.35 | 68.56 |
| 72 | 44.63 | 47.31 | 48.60 | 52.02 | 53.74 | 55.66 | 58.63 | 61.36 | 63.25 | 64.78 | 67.32 | 69.54 |
| 73 | 45.41 | 48.11 | 49.42 | 52.87 | 54.60 | 56.54 | 59.54 | 62.29 | 64.19 | 65.73 | 68.29 | 70.53 |
| 74 | 46.19 | 48.92 | 50.24 | 53.72 | 55.47 | 57.42 | 60.44 | 63.21 | 65.13 | 66.68 | 69.26 | 71.52 |
| 75 | 46.98 | 49.73 | 51.06 | 54.57 | 56.33 | 58.30 | 61.35 | 64.14 | 66.07 | 67.63 | 70.23 | 72.50 |
| 76 | 47.76 | 50.54 | 51.88 | 55.42 | 57.20 | 59.19 | 62.25 | 65.06 | 67.01 | 68.58 | 71.20 | 73.49 |
| 77 | 48.55 | 51.36 | 52.70 | 56.28 | 58.07 | 60.07 | 63.16 | 65.99 | 67.95 | 69.54 | 72.17 | 74.47 |
| 78 | 49.34 | 52.17 | 53.53 | 57.13 | 58.94 | 60.95 | 64.06 | 66.92 | 68.89 | 70.49 | 73.14 | 75.46 |
| 79 | 50.13 | 52.98 | 54.35 | 57.98 | 59.80 | 61.84 | 64.97 | 67.85 | 69.83 | 71.44 | 74.11 | 76.44 |
| 80 | 50.92 | 53.80 | 55.18 | 58.84 | 60.67 | 62.72 | 65.88 | 68.77 | 70.77 | 72.39 | 75.08 | 77.43 |
| 81 | 51.72 | 54.62 | 56.01 | 59.70 | 61.54 | 63.61 | 66.79 | 69.70 | 71.72 | 73.35 | 76.05 | 78.41 |
| 82 | 52.51 | 55.43 | 56.84 | 60.55 | 62.41 | 64.49 | 67.70 | 70.63 | 72.66 | 74.30 | 77.02 | 79.40 |
| 83 | 53.31 | 56.25 | 57.67 | 61.41 | 63.29 | 65.38 | 68.60 | 71.56 | 73.60 | 75.25 | 77.99 | 80.39 |
| 84 | 54.10 | 57.07 | 58.50 | 62.27 | 64.16 | 66.27 | 69.51 | 72.49 | 74.54 | 76.21 | 78.96 | 81.37 |
| 85 | 54.90 | 57.89 | 59.33 | 63.13 | 65.03 | 67.15 | 70.43 | 73.42 | 75.49 | 77.16 | 79.93 | 82.36 |
| 86 | 55.70 | 58.72 | 60.16 | 63.99 | 65.91 | 68.04 | 71.34 | 74.35 | 76.43 | 78.11 | 80.91 | 83.34 |
| 87 | 56.50 | 59.54 | 61.00 | 64.85 | 66.78 | 68.93 | 72.25 | 75.28 | 77.38 | 79.07 | 81.88 | 84.33 |
| 88 | 57.31 | 60.37 | 61.83 | 65.72 | 67.66 | 69.82 | 73.16 | 76.21 | 78.32 | 80.02 | 82.85 | 85.32 |
| 89 | 58.11 | 61.19 | 62.67 | 66.58 | 68.53 | 70.71 | 74.07 | 77.14 | 79.27 | 80.98 | 83.82 | 86.30 |
| 90 | 58.91 | 62.02 | 63.51 | 67.44 | 69.41 | 71.61 | 74.98 | 78.08 | 80.21 | 81.93 | 84.79 | 87.29 |
| 91 | 59.72 | 62.84 | 64.34 | 68.31 | 70.29 | 72.50 | 75.90 | 79.01 | 81.16 | 82.89 | 85.77 | 88.28 |
| 92 | 60.52 | 63.67 | 65.18 | 69.17 | 71.17 | 73.39 | 76.81 | 79.94 | 82.10 | 83.85 | 86.74 | 89.26 |
| 93 | 61.33 | 64.50 | 66.02 | 70.04 | 72.05 | 74.28 | 77.73 | 80.88 | 83.05 | 84.80 | 87.71 | 90.25 |
| 94 | 62.14 | 65.33 | 66.86 | 70.91 | 72.93 | 75.18 | 78.64 | 81.81 | 83.99 | 85.76 | 88.68 | 91.24 |
| 95 | 62.95 | 66.16 | 67.70 | 71.77 | 73.81 | 76.07 | 79.56 | 82.74 | 84.94 | 86.72 | 89.66 | 92.22 |
| 96 | 63.76 | 66.99 | 68.55 | 72.64 | 74.69 | 76.97 | 80.47 | 83.68 | 85.89 | 87.67 | 90.63 | 93.21 |
| 97 | 64.57 | 67.83 | 69.39 | 73.51 | 75.57 | 77.86 | 81.39 | 84.61 | 86.83 | 88.63 | 91.60 | 94.20 |
| 98 | 65.38 | 68.66 | 70.23 | 74.38 | 76.45 | 78.76 | 82.31 | 85.55 | 87.78 | 89.59 | 92.58 | 95.19 |
| 99 | 66.19 | 69.50 | 71.08 | 75.25 | 77.33 | 79.65 | 83.22 | 86.48 | 88.73 | 90.54 | 93.55 | 96.17 |
| 100 | 67.01 | 70.33 | 71.92 | 76.12 | 78.22 | 80.55 | 84.14 | 87.42 | 89.68 | 91.50 | 94.52 | 97.16 |

N is the number of servers. The numerical column headings indicate blocking probability B in %. Table generated by Dan Dexter

# Bibliografia

**Allen, A. O.** (1990). *Probability, Statistics, and Queueing Theory with Computer Science Applications*. (2a. ed.). Boston: Academic Press.

**Gross, D.; Shortle, J. F.; Thompson, J. M.; Harris, C. M.** (2008). *Fundamentals of Queueing theory* (4a. ed.). Nova York: John Wiley and Sons.

**Hock, C.** (1996). *Queueing Modelling Fundamentals*. Nova York: John Wiley and Sons.

**León-García, A.** (2008). *Probability and Random Processes for Electrical Engineering* (3a. ed.). Upper Saddle River: Prentice Hall.

**Pazos, J. J.; Suárez, A.; Díaz, R.** (2003). *Teoría de colas y simulación de eventos discretos*. Madrid: Pearson Educación.

**Stallings, W.** (2004). *Redes e Internet de alta velocidad. Rendimiento i calidad de servicio* (2a. ed.). Madrid: Pearson / Prentice Hall.