Annexos

Thierry Lafouge
Yves-François Le Coadic
Christine Michel

PID_00189704

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Annex 1. Les proves en estadística

Podeu consultar informació sobre la recollida i el mostreig en el subapartat 3.3 del mòdul 1, "La mesuta de la informació".

La descripció d'una població de persones o d'objectes implica la descripció de tots els seus individus. En les ciències experimentals, aquests objectes poden ser descrits per un nombre limitat de magnituds mesurables que no es coneixen amb una precisió total i que estan esquitxades d'errors més o menys importants. Què cal dir, doncs, de les ciències de la informació, en les quals a aquests errors de mesura cal afegir sovint errors vinculats a la recollida i al mostreig? En efecte, per raons pràctiques i econòmiques, tal com ocorre en les ciències experimentals, no sempre es poden observar tots els individus de la població en qüestió. Les mesures es fan sobre una mostra i es generalitzen a tota la població. Aquesta aproximació és una segona font d'errors. Com més gran és el nombre de magnituds analitzades, millor és l'observació i, en conseqüència, millor serà la decisió que es prengui; però també els errors seran més nombrosos. Les proves estadístiques són un mitjà per a avaluar l'error comès en la interpretació de l'observació.

Les proves d'independència de dues variables

H_0 és la hipòtesi que s'ha de posar a prova (anomenada també *hipòtesi nul·la*). Descriu la situació d'independència de dues variables. El procés consisteix, d'entrada, a mesurar la distància mesurada entre la representació de la hipòtesi (*distribució teòrica*) i la de la població (*distribució observada*). Si aquesta distància és inferior a un llindar concret, podrem dir que les diferències de mesura estan relacionades amb el mostreig. La determinació del llindar es farà tenint en compte diversos paràmetres:

1) **La distància considerada**: segons la prova, la distància usada no serà la mateixa. A una distància concreta correspon una taula de referència. Per exemple, la distància habitual que permet mesurar la independència de dues variables nominals és la distància de χ^2, mentre que la que permet mesurar la independència de dues variables cardinals és el coeficient de correlació.

2) **L'agudesa de la representació** correspon al nombre de graus de llibertat, que remeten al nombre de modalitats de les variables.

Considerem una distribució de freqüència d'una variable amb n modalitats. N'hi ha prou de conèixer $n-1$ valors per a conèixer aquesta distribució per complet. En efecte, sabent que per definició la suma de tots els valors és igual a 1, podem deduir el valor n; es diu que tenim $n-1$ graus de llibertat.

3) La mida de la mostra: en general, adoptem la regla empírica de disposar d'uns efectius superiors a 5. Si no és el cas, per a cada variable, es procedeix a reagrupar modalitats i a constituir classes noves.

4) El risc d'error que s'accepta. Si considerem que l'alternativa a l'acceptació d'H_0 és el rebuig d'H_0, llavors l'error, conegut com a *risc de primera espècie* (designat per α), és el que s'assumeix diagnosticant erròniament el rebuig d'H_0. També hi ha un risc de segona espècie (designat per β) que quantifica el risc d'acceptar erròniament la hipòtesi H_0 sabent que s'ha complert una segona hipòtesi H_1 (H_1 no és en cap cas el rebuig d'H_0, sinó una altra hipòtesi totalment diferent).

> Com més alt sigui el llindar, més baix serà el risc de primera espècie. Per dir-ho d'una altra manera, si s'eleva el llindar es limita el risc de rebutjar erròniament la hipòtesi H_0.No obstant això, es demostra que elevant el llindar augmenta el risc de segona espècie. Així, doncs, l'elecció de la hipòtesi no és neutra.

Prova d'independència de dues variables nominals: prova de χ^2

Podeu consultar informació sobre els efectius teòrics i els efectius observats en el subapartat 3.1 del mòdul 2, "Estadística de la informació" i sobre les taules en l'annex 2, "Taules estadístiques".

Considerem la hipòtesi H_0: les dues variables nominals són independents. La distribució, coneguda com a *distribució teòrica*, representativa d'H_0, correspon a una equipartició dels individus segons les modalitats de cada variable. La distància calculada entre els efectius teòrics i els efectius observats és el coeficient de χ^2, conegut com $\chi^2_{\text{calculada}}$, i la taula de referència es coneixerà com a taula de χ^2.

Després d'haver-nos ocupat eventualment de constituir classes noves, tenint en compte el nombre de graus de llibertat i el risc d'error de primera espècie α (en general es fixa a l'1% o al 5%), llegim en la taula de χ^2 el llindar de determinació conegut com a χ^2_{lu}. Si, per a un risc d'error α, tenim que $\chi^2_{\text{calculada}} < \chi^2_{lu}$, llavors les diferències observades entre les dues distribucions no són significatives. Les dues distribucions, teòrica i observada, es consideren idèntiques. No podem rebutjar H_0 i dir que les variables són depenents.

Exemple

Podeu consultar informació sobre les taules en l'annex 2, "Taules estadístiques".

1) Tornem a l'exemple del subapartat 3.1 del mòdul 2 "Estadística de la informació". Amb quin risc d'error podem considerar que les variables *edat* i *nombre de llibres agafats en préstec* són independents? La $\chi^2_{\text{calculada}}$ és 7,85. El nombre de graus de llibertat és n = nombre de files – 1× nombre de columnes – 1, és a dir, 9 graus de llibertat. Comparem aquest valor amb els valors llegits en la taula, fila 9, columnes 4, 3 i 2.

Si risc	$\alpha = 0{,}001$,	és a dir,	0,1%	llavors	$\chi^2_{lu} = 27{,}88$
Si risc	$\alpha = 0{,}01$,	és a dir,	1%	llavors	$\chi^2_{lu} = 21{,}67$
Si risc	$\alpha = 0{,}05$,	és a dir,	5%	llavors	$\chi^2_{lu} = 16{,}92$

Considerant un risc d'error igual al 5%, obtenim que $\chi^2_{\text{calculada}} < \chi^2_{lu}$. Així, doncs, no podem rebutjar la hipòtesi H_0 que diu que les dues variables *edat* i *nombre de llibres agafats en préstec* són independents.

2) Tornem a l'exemple del subapartat 4.2 del mòdul 2, "Estadística de la informació". Creuem les variables *tipus de producció científica* i *disciplina dels investigadors* i el càlcul ens dóna $\chi^2_{\text{calculada}}$ = 24,8. Hi ha 6 graus de llibertat i els valors llegits en la taula, fila 6, columnes 4, 3 i 2, són:

α = 0,001	0,1%	→	χ^2_{lu} = 22,46
α = 0,01	1%	→	χ^2_{lu} = 16,81
α = 0,05	5%	→	χ^2_{lu} = 12,59

Considerant un risc d'error igual a 0,1%, la $\chi^2_{\text{calculada}}$ = 24,92 és superior a la χ^2_{lu} = 22,46. Això ens permet rebutjar la hipòtesi que diu que les dues variables *tipus de producció* i *disciplina* són independents. En altres paraules, en dir que les dues variables són dependents assumim un risc del 0,1% (és a dir, tenim una possibilitat sobre mil d'equivocar-nos si diem que les dues variables són dependents).

En resum, com més gran és la $\chi^2_{\text{calculada}}$, més independents amb les variables estudiades. Destacarem que la χ^2_{lu} de la taula augmenta en cada línia i en cada columna, la qual cosa en facilita la lectura. Així, com més gran és el nombre de graus de llibertat, més gran ha de ser χ^2 per a poder arribar a conclusions.

Prova d'independència de dues variables cardinals: prova de r

Aquesta prova s'usa tant per a variables cardinals com per a variables ordinals.

- En el cas d'una prova de correlació lineal, la hipòtesi H_0 és la següent: les dues variables cardinals no estan correlacionades linealment. Els efectius teòrics representatius d'H_0 no s'han calculat directament com en el cas anterior; només es tindrà en compte la distància entre els efectius observats i els efectius teòrics corresponents al valor absolut del coeficient de correlació de Pearson, conegut com a r_{calculat}.

- En el cas d'una prova de correlació de rang, la hipòtesi H_0 és la següent: les dues variables ordinals no tenen cap correlació de rang. Els efectius teòrics representatius d'H_0 no s'han calculat directament; només es tindrà en compte la distància entre els efectius observats i els efectius teòrics corresponents al valor absolut del coeficient de correlació de Spearman, conegut com a r_{calculat}.

Tenint en compte, d'una banda, el nombre de graus de llibertat, designat n és igual a $n = N - 2$, en què N és el nombre de punts del núvol, i, d'altra, banda el risc d'error α (en general fixat en 0,1%, 1% o 5%), en la taula de r llegim el valor llindar, conegut com r_{lu}. Igual com abans, si, per a un risc d'error α, tenim que $r_{\text{calculat}} < r_{lu}$, llavors les diferències observades entre totes dues distribucions no són significatives. Així, doncs, no podem rebutjar H_0 i dir que les variables estan correlacionades.

Podeu consultar informació sobre les taules en l'annex 2, "Taules estadístiques".

Exemple

1) *Prova de correlació lineal*: tornem a l'exemple del subapartat 3.2.1 del mòdul 2, en el qual el coeficient de correlació és $r_{calculat} = 0{,}75$. El valor de r llegit en la taula, fila 8 (8 graus de llibertat), columnes 3, 2 i 1, ens dóna:

$\alpha = 0{,}001$	0,1%	$\rightarrow$	$r_{lu} = 0{,}872$
$\alpha = 0{,}01$	1%	$\rightarrow$	$r_{lu} = 0{,}765$
$\alpha = 0{,}05$	5%	$\rightarrow$	$r_{lu} = 0{,}632$

Destaquem que a partir de 5%, $r_{calculat} > r_{lu}$. També podem rebutjar la hipòtesi nul·la amb un risc d'error del 5% i dir que les variables *nombre de demandes de fotocòpies* i *nombre de cites* estan correlacionades amb menys de cinc probabilitats d'equivocarnos sobre cent.

El que es compara amb el valor llegit en la taula és el valor absolut de l'índex de correlació.

2) *Prova de correlació de rang*: tornem a l'exemple del subapartat 3.3 del mòdul 2; l'índex de Spearman és $r_{calculat} = -0{,}143$. El valor de r llegit en la taula, fila 5 (5 graus de llibertat), ens dóna:

$\alpha = 0{,}05$ $\rightarrow$ $r_{lu} = 0{,}755$

Al contrari que en el cas anterior, amb els mateixos paràmetres, tenim $r_{calculat} < r_{lu}$. Així, doncs, no podem rebutjar la hipòtesi nul·la i dir que les variables *temps transcorregut* davant les cadenes A i B estan correlacionades.

Les proves d'ajust

Les proves d'ajust tenen com a objectiu verificar que una mostra segueix una llei coneguda. Considerem la hipòtesi H_0: la distribució observada segueix una llei concreta. Els efectius teòrics representatius d'H_0 es calculen usant una llei de probabilitat. Hi ha diferents proves per a confirmar els ajustos. En el cas de la prova de χ^2, que és la més freqüent, la $\chi^2_{calculada}$ sempre quantifica la diferència entre els efectius teòrics i els observats. Si, per a un risc d'error α, tenim $\chi^2_{calculada} < \chi^2_{lu}$, llavors les diferències observades entre les dues distribucions no són significatives. En aquest cas podem acceptar H_0 i arribar a la conclusió que la distribució observada s'ajusta correctament a la distribució teòrica.

Podeu consultar informació sobre les lleis de probabilitat en l'apartat 5 del mòdul 2 "Estadística de la informació".

Exemple

En el subapartat 5.1.2 del mòdul 2, "Estadística de la informació", hem plantejat la hipòtesi que la distribució dels préstecs és del tipus binomial negatiu. Obtenim $\chi^2_{calculada} = 1,$ 70. Les classes s'han reagrupat per a tenir un efectiu superior a 5. Si *n* designa el nombre de graus de llibertat, es calcula amb la fórmula: $n = m - 1 - k$, en què *m* és el nombre de classes (aquí 5) i *k* nombre de paràmetres usats per a calcular els paràmetres de la llei (aquí 2 per a la mitjana i la variància).

Considerant un risc d'error del 10% i 2 graus de llibertat, el valor llegit en la taula, fila 2, columna 1, és:

$\alpha = 0{,}1$ 10% $\rightarrow$ $\chi^2_{lu} = 4{,}61$

La $\chi^2_{calculada} = 1{,}70$ és inferior a χ^2_{lu} en la taula, per la qual cosa, amb un risc d'error del 10%, podem dir que les diferències entre els efectius observats i els efectius teòrics no són significatives. Així, doncs, podem acceptar la hipòtesi H_0, és a dir, que la distribució dels préstecs és de tipus binomial negatiu.

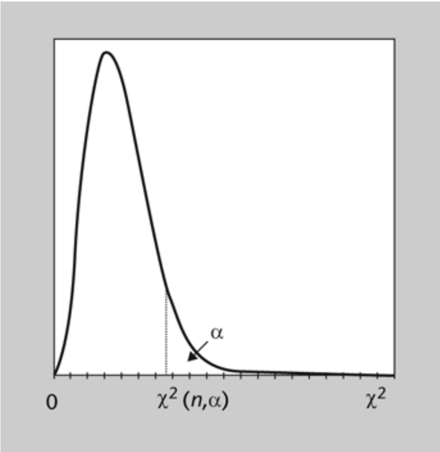
Les conclusions d'aquesta prova d'independència i d'ajust només són vàlides si tenim una mostra. A més, si els efectius teòrics són poc nombrosos (efectius inferiors a 5), procedim a agrupaments de modalitats, és a dir, constituïm classes noves. En el cas de la prova d'independència de dues variables, aquests agrupaments en classes no sempre són encertats. En efecte, aquesta pèrdua d'informació (agrupament en classes) no sempre es veu compensada per un guany de significat (interpretació de caràcters dependents).

Empíricament, sempre és possible comparar dues χ^2 calculades que tinguin el mateix nombre de graus de llibertat per a dir que un ajust és millor que un altre o que una variable és més independent d'una variable que d'una altra.

Annex 2. Taules estadístiques

Taula de χ^2

Valors de χ^2 que té la probabilitat α = 10%, 5%, 1% i 0,1% de ser superats (n = nombre de graus de llibertat):



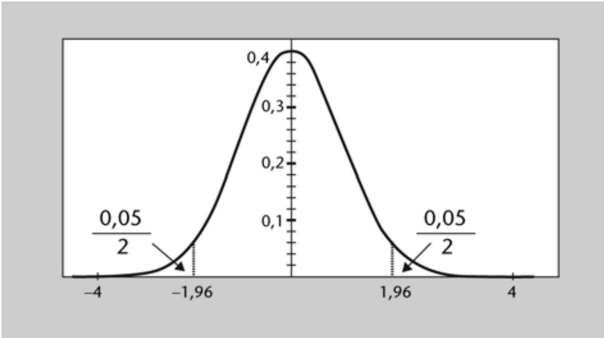
n \ α	0,1%	0,05%	0,01%	0,001%
1	2,71	3,84	6,63	10,83
2	4,61	5,99	9,21	13,82
3	6,25	7,81	11,34	16,27
4	7,78	9,49	13,28	18,47
5	9,24	11,07	15,09	20,52
6	10,64	12,59	16,81	22,46
7	12,02	14,07	18,48	24,32
8	13,36	15,51	20,09	26,12
9	14,68	16,92	21,67	27,88
10	15,99	18,31	2.1,21	29,59
11	17,28	19,68	24,72	31,26
12	18,55	21,03	26,22	32,91
13	19,81	22,36	27,69	34,53
14	21,06	23,68	29,14	36,12
15	22,31	25,00	30,58	37,70
16	23,54	26,30	32,00	39,25
17	24,77	27,59	33,41	40,79
18	25,99	28,87	34,81	42,31
19	27,20	30,14	36,19	43,82
20	28,41	31,41	37,57	45,32
21	29,62	32,67	38,93	46,80
22	30,81	33,92	40,29	48,27
23	32,01	35,17	41,64	49,73
24	33,20	36,42	42,98	51,18
25	34,38	37,65	44,31	52,62
26	35,56	38,88	45,64	54,05
27	36,74	40,11	46.96	55,48
28	37,92	41,34	48,28	56,89
29	39,09	42,56	49,59	58,30
30	40,26	43,77	50,89	59,70

Lectura de la taula (prova d'independència de dues variables): per 1 grau de llibertat de 9, si la χ^2 calculada és superior a 14,68, podem afirmar, amb el 90% de probabilitat de no equivocar-nos, que les variables no són independents.

Valors del coeficient de correlació significativa de 5%, 1% i 0,1% ($n = N - 2$, que indica el nombre de graus de llibertat):

N	5%	1%	0,1%
1	0,997	1,000	1,000
2	0,950	0,990	0,999
3	0,878	0,959	0,991
4	0,811	0,917	0,974
5	0,755	0,875	0,951
6	0,707	0,834	0.925
7	0,666	0,798	0,898
8	0,632	0,765	0,872
9	0,521	0,735	0,847
10	0,576	0,708	0,823
11	0,553	0,634	0,801
12	0,532	0,661	0,780
13	0,514	0,641	0,760
14	0,497	0,623	0,742
15	0,482	0,606	0,725
16	0,468	0,590	0,708
17	0,456	0,575	0,693
18	0,444	0,561	0,679
19	0,433	0,549	0,665
20	0,432	0,537	0,652
25	0,381	0,487	0,597
30	0,349	0,449	0,554
35	0,325	0,418	0,519
40	0,304	0,393	0,490
45	0,288	0,372	0,465
50	0,273	0,354	0,443
60	0,250	0,325	0,408
70	0,232	0,302	0,380
80	0,217	0,283	0,357
90	0,205	0,267	0,338
100	0,195	0,254	0,321

Taula de la llei normal centrada reduïda N (0, 1)



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0		2,576	2,326	2,170	2,064	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,282	1,254	1,277	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,3	1,036	1,015	0,974	0,740	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,5	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,6	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,7	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,8	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,9	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

Lectura de la taula:

$$\alpha = 0{,}05 = 0{,}0 \text{ (fila 1)} + 0{,}05 \text{ (columna 6)} \rightarrow 1{,}96$$

Per a $\alpha = 0{,}05$ tenim:

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-1{,}96}^{1{,}96} \cdot e^{-x^2/2} \cdot dx = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$$

Això significa que si la característica mesurada (escala cardinal) segueix una llei normal centrada reduïda (mitjana 0 i desviació estàndard 1), el 95% dels individus se situen dins d'un interval comprès entre –1,96 i 1,96.

Això és equivalent a dir que: "hi ha 5 probabilitats sobre 100 que un individu tingui una mesura superior a 1,96 o inferior a –1,96".

Annex 3. Càlcul de moments

Esperança d'una llei de probabilitat discreta

- Definició

P és una distribució de probabilitat discreta definida per una successió, finita o infinita, de nombres positius p_i compresos entre 0 i 1:

$0 \le p_i \le 1 : \sum_{i=a}^{n} p_i = 1$, en què n és un nombre enter positiu finit o infinit i en què a val 0 o 1.

L'esperança de P, representada per $E(P)$, defineix per la igualtat (si és que aquesta expressió té algun sentit, la qual cosa no sempre és així si n és infinit):

Podeu consultar informació sobre l'infinit en l'apartat 1 del mòdul 3, "Matemàtica de la informació".

$$E(P) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot p_i$$

- Esperança i mitjana d'una distribució estadística

Si x designa una variable que adopta valors discrets (x = 0, 1, 2, 3...) i si N_i designa nombre d'individus que adopten el valor i, llavors la mitjana x, designada $\overline{x}$, s'escriu:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} i \cdot N_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{N_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} i \cdot n_i$$

en què n_i és la proporció d'individus per als quals el valor de la variable és i.

Sabent que la proporció i la probabilitat estan relacionades, no hi ha cap equivalència entre la mitjana d'una distribució estadística i l'esperança d'una distribució de probabilitat.

Variància d'una llei de probabilitat discreta

- Definició

P és una distribució de probabilitat d'esperança $E(P)$. Anomenem *variància de P*, que representem per $V(P)$ o σ_P^2, l' expressió (si n'hi ha):

$$V(P) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(i - E(P)\right)^2$$

La desviació estàndard de P, designada σ_P, és l'arrel quadrada de la variància.

- Variància i desviació estàndard d'una distribució estadística

Usant la mateixa correspondència entre proporció i probabilitat que abans, és molt fàcil demostrar que la variància d'una distribució estadística (o bé la seva desviació estàndard al quadrat) és igual a la variància de la distribució de probabilitat associada.

Esperança i variància de les lleis de probabilitat usuals

Llei geomètrica $G(u)$:

$$E\left(G(u)\right)=\frac{u}{1-u} \text{ i } V\left(G(u)\right)=\frac{u}{(1-u)^2}$$

Llei binomial $B(n, u)$:

$$E\left(B(n,u)\right)=nu \text{ i } V\left(B(n,u)\right)=n\cdot u\cdot(1-u)$$

Llei binomial negativa $Bn(r, u)$:

$$E\left(Bn(r,u)\right)=\frac{r\cdot u}{(1-u)} \text{ i } V\left(Bn(r,u)\right)=\frac{r\cdot u}{(1-u)^2}$$

Llei de Poisson $P(m)$:

$$E\left(P(m)\right)=m \text{ i } V\left(P(m)\right)=m$$

Generalització

Coneixem com a moments d'ordre k ($k \geq 1$) d'una llei P les expressions (si n'hi ha):

$$E\left(P^k\right)=\sum_{i=a}^{n} i^k \cdot p_i$$

en què n és un nombre enter positiu finit o infinit i a val 0 o 1.

L'esperança és, doncs, el moment d'ordre 1.

Coneixem com a moment centrat d'ordre k ($k \geq 2$) d'una llei P les expressions (si n'hi ha):

$$V\left(P^k\right)=\sum_{i=a}^{n}\left(i-E(P)\right)^k p_i$$

La variància és el moment centrat d'ordre 2.

Mètode d'ajust amb l'ajuda del mètode dels moments d'una distribució estadística per una llei

El mètode dels moments consisteix a dir que una distribució observada s'ajusta per una llei de probabilitat si els seus moments respectius d'ordre 1, 2... són iguals.

Per a ajustar de la millor manera possible una distribució observada, una de les maneres de procedir és la següent:

- escollim una llei de probabilitat,
- calculem el moment d'ordre 1 (mitjana) i, si escau, el moment centrat d'ordre 2 (variància) de la distribució observada,
- calculem els paràmetres de la llei,
- calculem els efectius teòrics,
- fem una prova (en general, la prova de χ^2) per validar l'opció, i
- segons el resultat obtingut, escollim una altra llei.

Aquest mètode no sempre és aplicable. En efecte, quan una llei de probabilitat no té cap moment, com per exemple les lleis de naturalesa hiperbòlica (vegeu també la llei dels avantatges acumulats), ens veiem obligats a usar altres mètodes que aquí no descriurem.

Annex 4. Derivada i integral, exemple de resolució d'equacions diferencials

Derivades

Si tenim una funció f definida en l'inteval $[a, b]$, diem que la funció f és derivable en x_0, $x_0 \in [a, b]$ únicament si $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet un límit finit quan h tendeix a 0; aquest límit es coneixerà com a derivada de $f(x)$ en x_0 i es representarà:

$$f'(x_0) \text{ o } \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

Així, escriurem:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Considerem $y = f(x)$ i la seva derivada $y' = f'(x)$ en qualsevol punt x.

La diferencial dy d'aquesta funció és el producte de $f(x)$ per un increment h de la variable, amb la qual cosa $dy = f'(x) \cdot h$.

Com que la diferencial de la funció identitat $X(x) = x$ és $\mathrm{d}x = 1 \cdot h$, tenim $h = \mathrm{d}x$ i escrivim:

$$\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

Interpretació geomètrica

La recta d'equació $y(x) = f(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ és la recta tangent a la gràfica representativa de f en el punt d'abscissa x_0. Així, la derivada permetrà conèixer el sentit de variació de la funció.

f és creixent en $]a, b[$ únicament si per a qualsevol x de

$$]a, b[,\ f'(x) \geq 0$$

f és decreixent en $]a, b[$ únicament si per a qualsevol x de

$$]a, b[,\ f'(x) \leq 0$$

f és constant en $]a, b[$ únicament si per a qualsevol x de

$$]a, b[,\ f'(x) = 0$$

Integrals

Coneixem com a primitiva de f en l'interval [a, b] la funció F que té com a derivada $f(x)$ en aquest interval; per a definir-la usem el formalisme de les integrals:

$$F(x) = \int_a^x f(t) \cdot \mathrm{d}t \text{ en què } x \in [a,b]$$

$F(x)$ és la primitiva o la integral de la funció $f(x)$, que s'anul·la per a $x = a$.

Equació diferencial

Resoldre una equació diferencial de primer grau en un interval I és trobar una funció $y(x)$ definida en I que demostri, per a qualsevol x element de I:

$$F\left(x, y(x), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

en què F és una funció de diverses variables. Aquí només ens interessem per les equacions diferencials que adopten la forma:

$$P(x) \cdot \mathrm{d}x = Q(y) \cdot \mathrm{d}y$$

Aquestes equacions es coneixen com a *separables*.

El teorema sobre la primitiva ens permet escriure:

$$\int_a^x P(t) \cdot \mathrm{d}t = \int_{y(a)}^{y(x)} Q(t) \cdot \mathrm{d}t$$

El càlcul integral ens permet conèixer el conjunt de les solucions d'aquesta equació. El coneixement de y en un punt de I, que es coneix com a *condició inicial*, ens permet calcular la solució buscada.

Derivades i integrals usuals simples

Les funcions següents són funcions de x, C és una constant, a és un nombre positiu i b és un nombre qualsevol.

Funcions	Derivades	Integrals
x^m	mx^{m-1}	$m \neq -1 \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert + C$

Funcions	Derivades	Integrals
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \cdot \ln(x) - x + C$
b	0	$bx + C$

Exemple de resolució d'equacions diferencials

L'equació diferencial que hem de resoldre és:

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha \cdot (G - g(t)) + \beta \cdot g(t) \cdot (G - g(t))$$

El primer membre correspon a la comunicació mediatitzada i el segon a la comunicació interpersonal.

Resoldrem aquesta equació en dos temps; en primer lloc només tindrem en compte la comunicació mediatitzada (és a dir, $\beta = 0$) i tot seguit només la comunicació interpersonal ($\alpha = 0$).

1) Model de la comunicació mediatitzada

Si suposem que $\beta = 0$, l'equació diferencial que hem de resoldre és $\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha \cdot (G - g(t))$. És una equació diferencial lineal de primer ordre depenent d'una variable $t \in [0 + \infty]$.

Podem escriure $\frac{\mathrm{d}g(t)}{g(t) - G} = -\alpha \cdot \mathrm{d}t$. Per a resoldre aquest tipus d'equació, integrem els dos membres, és a dir:

$$\int \frac{\mathrm{d}g(t)}{g(t) - G} = \int -\alpha \cdot \mathrm{d}t$$

La integral de $\frac{1}{g(t) - G}$ és $\mathrm{Ln}(g(t) - G) + K$, en què K és una constant.

Després de la integració:

$$\ln(g(t) - G) + K = -\alpha t$$

És a dir:

$$\ln(g(t) - G) = -\alpha t - K$$

Així, doncs,

$$g(t) - G = \mathrm{e}^{-\alpha t} \cdot e^{-K}$$

Si plantegem $C = e^{-K}$, en què C és una constant, podem escriure:

$$g(t) = C \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} + G$$

En el moment inicial, ningú de la població no coneix la informació, així, doncs, $g(0) = 0$, amb la qual cosa:

$$g(0) = C \cdot e^{-\alpha 0} + G = C + G = 0$$

Així, doncs:

$$C = -G$$

La solució de l'equació diferencial:

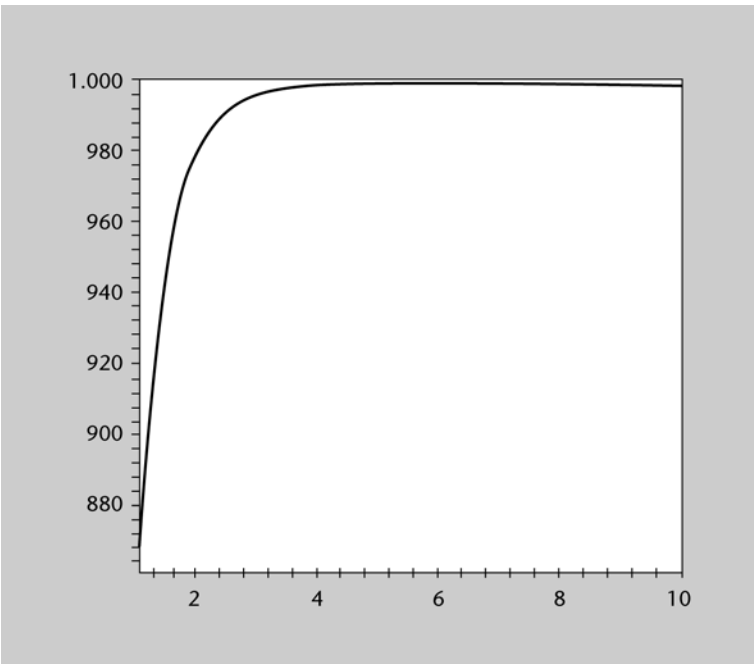
$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha \cdot \left(G - g(t)\right)$$

és, doncs:

$$g(t) = -G \cdot e^{-\alpha t} + G$$

En la gràfica següent es representa g per a $\alpha = 2$ i $G = 1.000$.

Gràfica 1. Gràfica de la solució amb els paràmetres: $\alpha = 2$; $G = 1.000$



2) Model de comunicació interpersonal

Si suposem que $\alpha = 0$, l'equació diferencial que hem de resoldre és:

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = \beta \cdot g(t) \cdot (G - g(t))$$

Podem escriure:

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{g(t) \cdot (g(t) - G)} = \frac{1}{G}\left(\frac{\mathrm{d}g(t)}{g(t) - G} - \frac{\mathrm{d}g(t)}{g(t)}\right) = -\beta \cdot \mathrm{d}t$$

Integrant els dos membres, tenim:

$$\int \frac{1}{G}\left(\frac{1}{g(t) - G} - \frac{1}{g(t)}\right)\mathrm{d}g(t) = \int -\beta \cdot \mathrm{d}t$$

La integral de $\frac{1}{g(t) - G} - \frac{1}{g(t)}$ és $\mathrm{Ln}(g(t) - G) - \mathrm{Ln}(g(t)) + K$, en què K es una constant.

Així, doncs:

$$\frac{1}{G}\left(\ln(g(t) - G) - \ln(g(t)) + K\right) = -\beta \cdot t$$

Per tant:

$$ln\left(\frac{g(t) - G}{g(t)}\right) = -\beta \cdot G \cdot t - K$$

$$\frac{g(t) - G}{g(t)} = e^{-\beta \cdot G \cdot t - K} = C \cdot e^{-\beta \cdot G \cdot t}$$

Si plantegem

$$C = e^{-K}$$

llavors

$$g(t) - G = g(t) \cdot C \cdot e^{-\beta \cdot G \cdot t}$$

Així, doncs:

$$g(t)\ (1 - C \cdot e^{-\beta \cdot G \cdot t}) = G$$

Per tant:

$$g(t) = \frac{G}{1 - C \cdot e^{-\beta \cdot G \cdot t}}$$

El coneixement de les condicions inicials permet calcular C.

En el moment inicial $t = 0$, com a mínim una persona coneix la informació, amb la qual cosa $g(0) = 1$.

Així, doncs:

$$\frac{G}{1 - C \cdot e^{-\beta \cdot G \cdot 0}} = \frac{G}{1 - C} = 1$$

Pedr tant:

$$C = 1 - G$$

La solució de l'equació diferencial

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = \beta \cdot g(t) \cdot \left(G - g(t)\right)$$

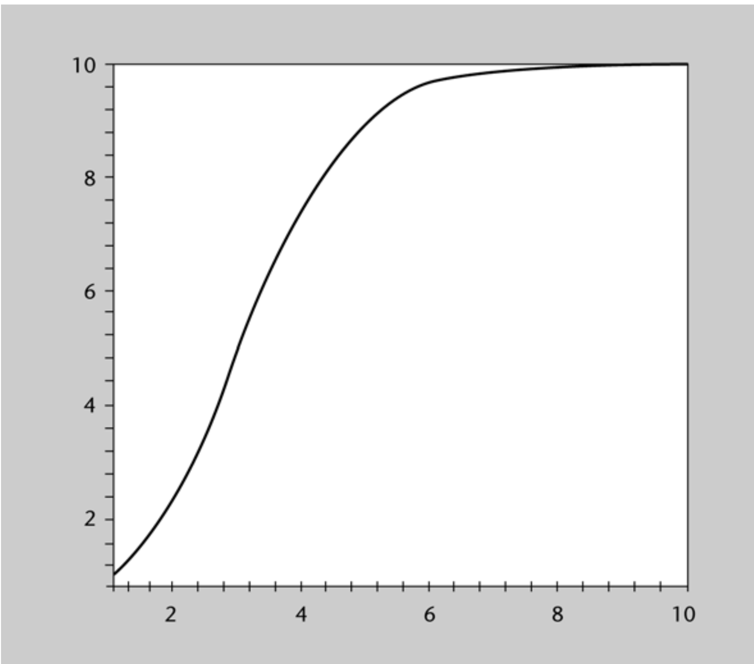
és, doncs:

$$g(t) = \frac{G}{1 - (1 - G) \cdot e^{-\beta \cdot G \cdot t}}$$

En la gràfica següent es representa g per a

$$\beta = \frac{1}{10} \text{ i } G = 10 \text{ i } G = 1.000$$

Gràfica 2. Gràfica de la solució amb els paràmetres: $\beta = \frac{1}{10}$; $G = 10$



Glossari

Notacions

∞: Infinit

x_i: Valor de la variable x per a l'individu i.

$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$: Derivada de la funció f.

$x_i \xrightarrow[i \to \infty]{} X$ o $\lim_{i \to \infty}(x_i) = X$: Límit de x_i quan i tendeix a ∞.

$\sum_{i=1}^{N} x_i$: Suma dels valors x_i per als N individus.

$x!$: Factorial x (x enter), $x! = 1 \cdot 2 \cdot 3\ldots \ldots(x-1) \cdot x$.

$\bar{x}$: Mitjana dels valors adoptats per la variable x.

σ_x: Desviació estàndard de la variable x.

σ_x^2: Variància de la variable x.

r_p: Coeficient de correlació de Pearson.

r_s: Coeficient de correlació de Spearman.

H_0: Hipòtesi nul·la (vegeu les proves d'estadística).

χ^2: Khi quadrada (vegeu les proves d'estadística).

E_{ij}: Coeficient d'associació dels elements i i j.

$P(A)$: Probabilitat d'ocórrer l'esdeveniment A.

$P(B/A)$: Probabilitat condicional, és a dir, probabilitat que ocorri l'esdeveniment B sabent que l'esdeveniment A s'ha produït.

C_n^i: Nombre de combinacions (també es parla de permutació sense repetició) de i elements dins d'un conjunt de n elements.

$\vec{A} = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_t]$: Vector A en un espai de t dimensions.

$\vec{A} \cdot \vec{B}$: Producte escalar dels vectors $\vec{A}$ i $\vec{B}$.

$\|\vec{A}\|$: Norma euclidiana del vector A.

$a \in A$: a és un element del conjunt A.

$a \notin A$: a no és un element del conjunt A.

Ø: Conjunt buit.

$E \subset F$ o $F \supset E$: Inclusió; E és un subconjunt de F.

$E \cap F$: Intersecció; conjunt dels elements comuns a E i F.

$E \cup F$: Unió; conjunt dels elements que pertanyen a E, a F o a la seva intersecció.

$C_E A$ o $\bar{A}$: Complementari de A en E; conjunt dels elements de E que no pertanyen a A.

$|A|$: Cardinal del conjunt A; nombre d'elements del conjunt A.

$\mathcal{P}(\mathrm{E})$: Conjunt de tots els subconjunts de E, és a dir, conjunt de les parts de E.

Funcions

$y = \log_a(x)$: Logaritme en base a de x.

$y = \log(x)$: Logaritme en base 10, també conegut com a *logaritme decimal*.

$y = \ln(x)$: Logaritme en base e (en què e és la constant d'Euler), també conegut com a *logaritme neperià*.

$y = a^x$: Exponencial de base a; a és un nombre estrictament positiu.

$y = e^x$: Exponencial de base e, també conegut simplement com a *funció exponencial*.

$y = x^a$: Potència si x és un nombre estrictament positiu i a és un nombre qualsevol.

$y = x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{m\ veces}$: Polinomial; l'exponent m és positiu.

$y = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$: Hiperbòlica; l'exponent m és positiu.