Introducció als processos estocàstics

Josep Maria Aroca

PID_00193849

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

Fins ara hem vist què són les variables aleatòries discretes i contínues. També hem generat variables aleatòries a partir d'una variable aleatòria original que hem transformat mitjançant una funció per a obtenir-ne una de nova, de manera que la nova variable es pot expressar com $Y = g(X)$. Finalment hem estudiat el concepte de vector aleatori, que ens permet tractar diverses variables aleatòries a la vegada. En tots aquest casos hem vist com podem assignar un o més nombres a una determinada experiència i com aquest nombre pot variar cada cop que fem l'experiència.

Moltes vegades necessitem tractar una variable aleatòria de manera més complexa. Imagineu, per exemple, que tenim una aplicació que fa una predicció meteorològica. Per a fer aquesta predicció necessitem disposar de mesures de pressió i de temperatura en diferents punts de l'espai. Si dibuixem aquestes mesures de pressió i temperatura obtenim una sèrie de gràfiques per a un dia determinat. Si repetim aquestes mesures per a un altre dia, obtindrem unes gràfiques diferents. I això és precisament el que ens descriu un procés estocàstic que, com veurem en aquest mòdul, consisteix a tenir un espai mostral format de funcions, i quan fem la nostra experiència aleatòria obtenim una funció determinada. Fins ara el resultat d'un experiment era un o més nombres. Ara el resultat de l'experiment serà una funció.

L'aplicació dels processos estocàstics és fonamental en les xarxes de comunicacions, en el processament de senyals, en sistemes de control i altres camps de l'enginyeria en què necessitem avaluar una mesura o senyal en l'espai o temps.

En veurem diversos exemples i calcularem alguna magnitud, preparant el camí per als paràmetres que es definiran en mòduls posteriors. Tot i això, l'èmfasi el farem en els aspectes conceptuals més que en qüestions de càlcul.

Aquest mòdul s'estructura com s'indica a continuació. En l'apartat 1 introduïm el concepte de procés estocàstic o aleatori. En els exemples que veurem, les funcions que formen l'espai mostral depenen del temps, és a dir, la variable independent és el temps, t. Tingueu present, però, que podem tenir altres variables independents, com l'espai, per exemple; en aquest cas les funcions de l'espai mostral dependrien de (x,y,z). En l'apartat 2 veurem que segons com sigui la variable independent de les funcions del nostre espai mostral, podem diferenciar processos a temps continu i a temps discret. Segons els valors que prenguin les funcions que formen el procés estocàstic veurem, en l'apartat 3, que aquests poden ser d'estat continu o d'estat discret. Finalment, en l'apartat 4 veurem exemples de processos estocàstics.

Objectius

Els objectius que ha d'assolir l'estudiant un cop treballats els materials didàctics d'aquest mòdul són:

1. Entendre què és un procés estocàstic, i què són les seves realitzacions.

2. Familiaritzar-se amb alguns exemples de processos estocàstics.

3. Estudiar les classificacions següents dels processos estocàstics:
- a temps continu
- a temps discret
- d'estat continu
- d'estat discret

4. Aplicar els processos estocàstics a problemes concrets en el camp de l'enginyeria.

1. Definició de procés estocàstic

Comencem aquest mòdul amb la definició de **procés aleatori** o **estocàstic** mitjançant un exemple.

Exemple 1.1

Un inversor fa una operació a la borsa que en un dia pot donar dos resultats possibles. Les accions poden pujar amb probabilitat p, i en aquest cas té un benefici α. Alternativament, les accions poden baixar amb probabilitat $1 - p$ i la pèrdua és β. L'inversor fa aquesta operació cada dia. Els seus guanys durant un dia determinat constitueixen una variable aleatòria, però a l'inversor el que li interessa és el conjunt de resultats al llarg del temps.

El primer que podem analitzar és l'evolució temporal de les pujades i baixades. Els dos possibles resultats en un dia qualsevol els representem com A (esdeveniment "pujada") i B (esdeveniment "baixada"). Anomenem R_1 el resultat del primer dia, R_2 el resultat del segon dia, etc. Així, l'evolució dinàmica de les accions és representada per la seqüència $\mathcal{R} = R_1R_2R_3\cdots$, en què cada R_i pot valer A o B.

Una altra magnitud d'interès és el guany acumulat fins al dia i, X_i. L'evolució econòmica de l'operació feta queda representada per la seqüència

$$\mathcal{X} = [X_1,X_2,X_3,\cdots].$$

Per fixar idees, prenem $\alpha = 3$ i $\beta = 2$. Si els 15 primers dies tenim

$$\mathcal{R} = AABABBBAABABABA,$$

llavors

$$\mathcal{X} = [3,6,4,7,5,3,1,4,7,5,8,6,9,7,10].$$

Aquesta evolució és una funció en què la variable independent és el temps i i la variable dependent és X, i X_i és el guany en l'instant i. La gràfica de la figura 1 mostra aquesta evolució.

Moltes qüestions que ens podem plantejar estan relacionades amb l'evolució d'aquestes variables aleatòries al llarg del temps. Per exemple:

- Els guanys, tendeixen a augmentar o a disminuir?
- Partint d'un capital donat, quin és el temps mitjà fins que aquest s'ha duplicat?
- Sabent que el dia i $X_i = C$, quina és la probabilitat que el dia $j > i$ X_j prengui un cert valor o estigui en un interval determinat de valors?

En aquest exemple l'experiència aleatòria consisteix a fer l'operació borsària cada dia i el que obtenim és l'evolució temporal dels guanys diaris. Si fem l'experiència en períodes diferents, obtenim gràfiques diferents, i això és un exemple del que entenem per procés estocàstic.

Figura 1. Evolució del guany de l'inversor

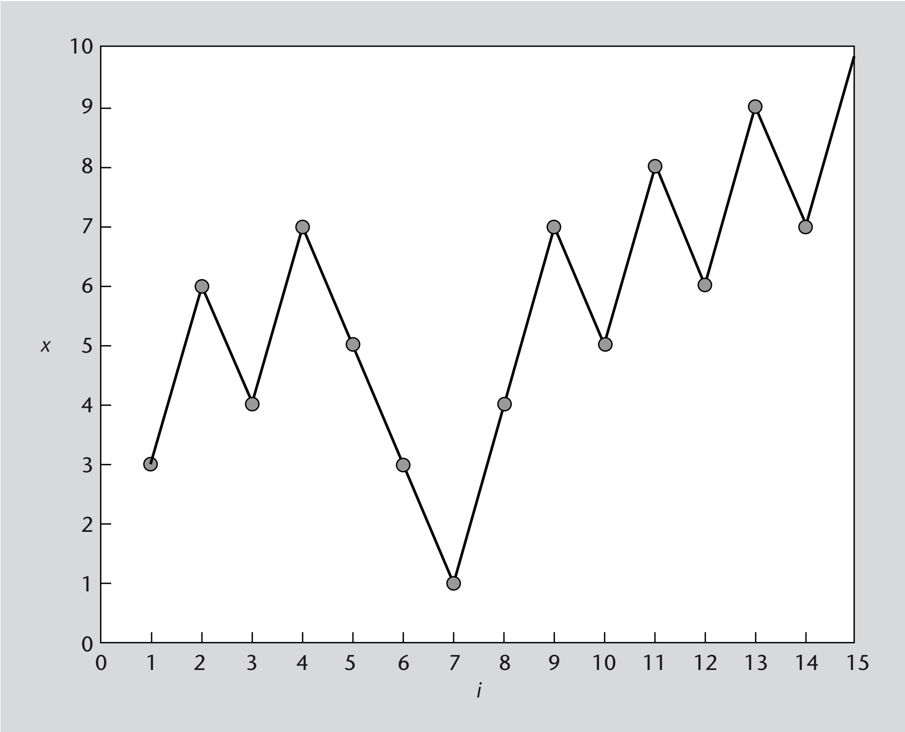


Figura 1

En la figura es representa una possible evolució dels guanys de l'inversor per a un període de 15 dies. Noteu que aquesta gràfica és una realització concreta del procés aleatori.

Definició 1.1. Un **procés estocàstic**, $X(t)$, és l'assignació d'una funció $x(t)$ a cada resultat d'un experiment aleatori. Per a cada realització de l'experiment obtindrem una funció $x(t)$ diferent.

Fixeu-vos que el **procés estocàstic** $X(t)$ és un conjunt de funcions possibles i la realització d'un experiment ens assigna, no un nombre concret, com havíem vist en mòduls anteriors, sinó una funció $x(t)$.

Altres denominacions de procés estocàstic

Un **procés estocàstic** també s'anomena **procés aleatori** o **funció aleatòria**.

De manera general, fixarem algunes característiques d'aquestes funcions. Considerarem que $X(t)$ pren valors reals i interpretem la variable independent t com a temps. Cal tenir en compte, però, que no sempre s'analitza l'evolució de X en el temps. La variable o variables independents del nostre procés estocàstic les definirem segons l'aplicació concreta. Vegem-ne alguns exemples:

- En l'estudi de la distribució de matèria en l'univers, seran necessàries funcions $X(x,y,z)$ que depenen de la posició en l'espai tridimensional.

- Un sistema de processament d'imatge requereix una descripció estadística de les possibles imatges; per tant, un procés $X(x,y)$ en què (x,y) són coordenades rectangulars sobre la imatge.

- Un sistema d'anàlisi meteorològica pot utilitzar $X(t,z)$ la pressió a altura z en l'instant t, etc.

Com acabem de veure en la definició 1.1, donat un procés estocàstic, cada vegada que es fa l'experiment aleatori s'obté una funció $x(t)$ diferent. Algunes vegades ens voldrem referir a les propietats d'algunes d'aquestes funcions.

Fixeu-vos en la figura 2. L'inversor de l'exemple que hem vist abans pren mostres de l'evolució de la borsa durant 8 dies i repeteix aquest experiment de prendre 8 mostres 4 cops. D'aquesta manera obté 4 gràfiques o funcions com a resultat.

Figura 2. Quatre possibles resultats en l'evolució del guany (sobre un interval de 8 dies)

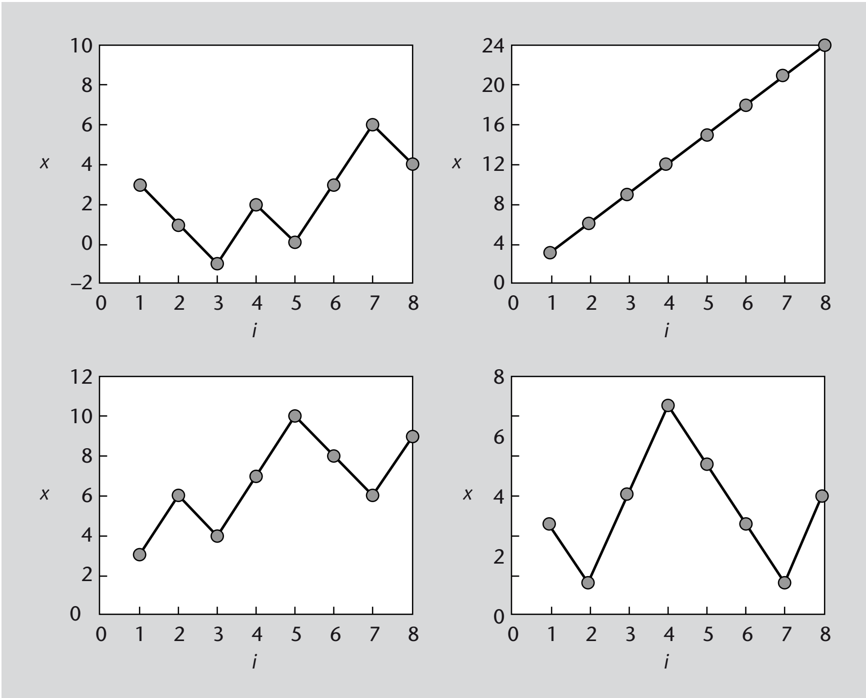


Figura 2

En aquest exemple partim d'un mateix procés estocàstic $X(t)$, que consisteix a avaluar l'evolució de la borsa. Fixeu-vos, però, que quatre realitzacions diferents del procés ens donen quatre funcions $x(t)$ diferents.

Cada una d'aquestes funcions és una **realització** del procés. Aquestes són funcions $x(t)$ que tenim en la pràctica.

Exemple 1.2

Vegem un altre exemple de procés estocàstic. Suposeu que llancem una moneda a l'aire. Si obtenim cara el procés estocàstic assigna la funció $x_{\text{cara}} = \sin(\omega_0 t)$. Si surt creu, el procés estocàstic assigna la funció $x_{\text{creu}} = \sin(2\omega_0 t)$, en què ω_0 és una freqüència fixada. En aquest cas el nostre procés estocàstic es compon de dues possibles funcions, tal com podeu veure en la figura 3.

Imagineu que ara en comptes de llençar una moneda a l'aire tenim una seqüència de 5 bits aleatoris. En rebre un 0 assignem la funció $x_0 = \sin(\omega_0 t)$ i en rebre un 1 assignem la funció $x_1 = \sin(2\omega_0 t)$. Si, per exemple, rebem la seqüència de bits 10101, la funció resultant és la que podeu veure en la figura 4. Fixeu-vos com els 0 tenen freqüència ω_0 i els 1 tenen freqüència $2\omega_0$ (els senyal varia més ràpidament). Aquesta funció que hem obtingut és una de les possibles funcions del procés estocàstic, és a dir, és una **realització** del procés. Si ara repetim l'experiment amb una altra seqüència de bits aleatòria, obtindrem una altra gràfica diferent.

Així és com funciona la modulació FSK (*frequency shift keying*). Aquest tipus de modulació pren cada bit (o conjunt de bits) i els assigna una freqüència determinada.

Figura 3. Assignació d'una funció $x(t)$ segons l'experiment de llençar una moneda a l'aire.

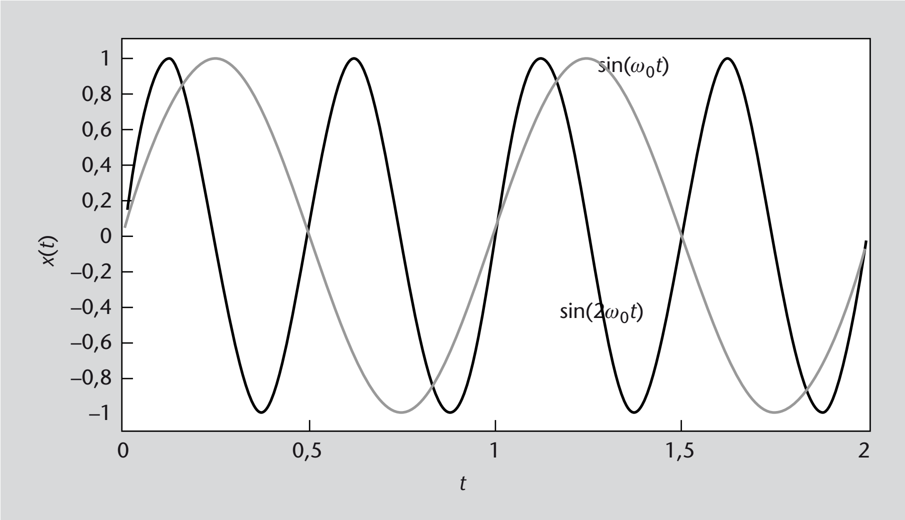


Figura 3

En aquest exemple les dues funcions que formen el procés estocàstic són $x_{\text{cara}} = \sin(\omega_0 t)$ i $x_{\text{creu}} = \sin(2\omega_0 t)$. Cada cop que llencem la moneda obtenim una o l'altra.

Figura 4. Exemple de procés estocàstic aplicat a la modulació FSK

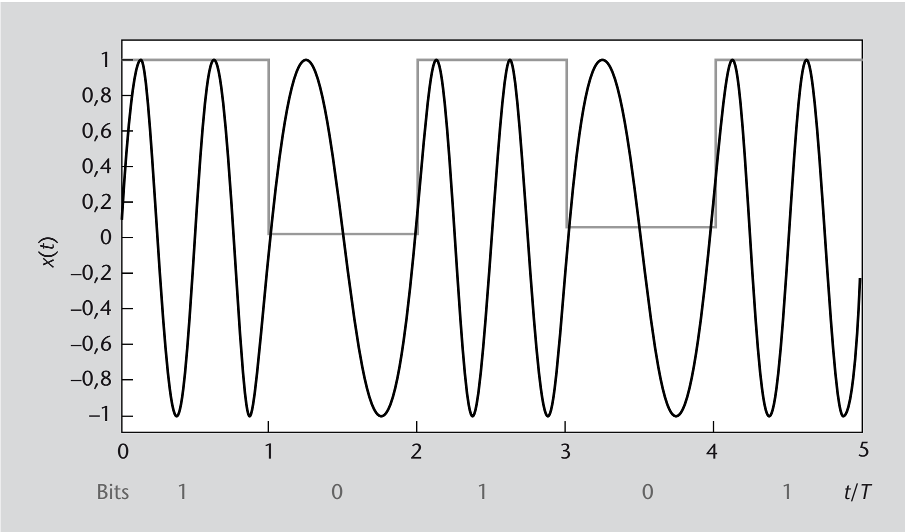


Figura 4

En aquest exemple assignem la freqüència ω_0 al bit 0 i la freqüència $2\omega_0$ al bit 1. El senyal transmès en aquest cas és la seqüència 10101. El paràmetre T del gràfic és la duració de cada bit. Si la seqüència de bits és diferent, el senyal transmès també ho és.

Definirem, a continuació, què entenem per **realització** d'un procés estocàstic.

Definició 1.2. Les funcions que s'obtenen en fer l'experiment aleatori s'anomenen **realitzacions** del procés estocàstic.

Així, el terme **realització** fa referència a cadascuna de les funcions que s'obtenen com a resultat d'un experiment aleatori, mentre que el terme **procés estocàstic** fa referència al conjunt total de possibles funcions resultants. La figura 5 mostra diverses realitzacions d'un mateix procés.

Figura 5. Quatre realitzacions d'un procés $X(t)$

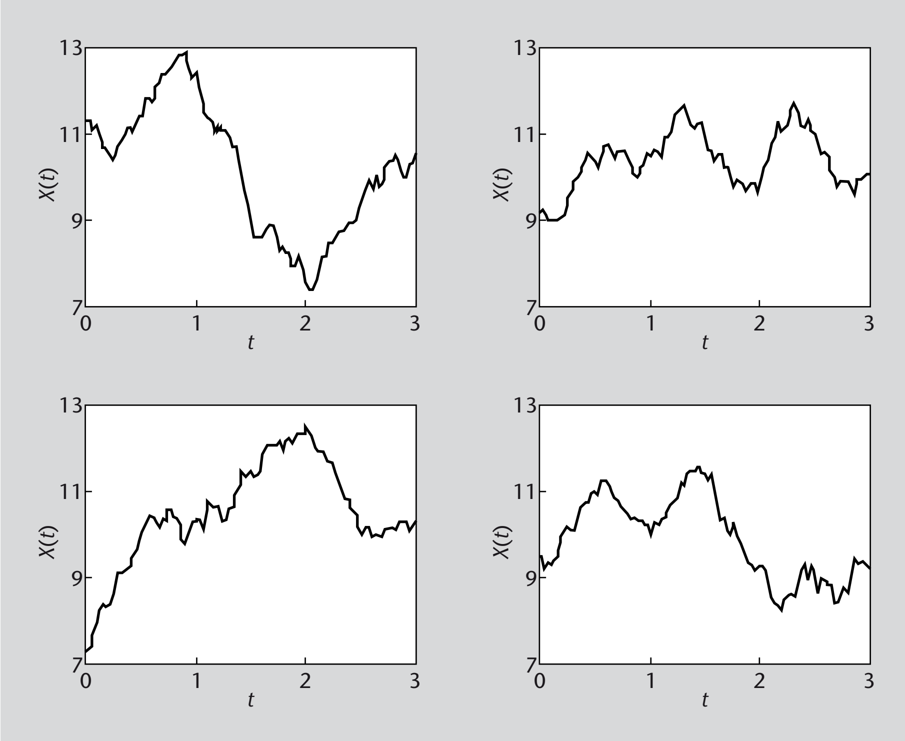


Figura 5

Un procés estocàstic és el conjunt de totes les funcions possibles que podem obtenir en fer un experiment. Una realització del procés estocàstic és la funció que obtenim quan fem l'experiment concret.

Des del punt de vista matemàtic, el tractament dels processos estocàstics presenta algunes dificultats. En el cas de variables aleatòries, com hem vist en els mòduls anteriors, podem fer mitjanes estadístiques perquè disposem dels instruments matemàtics de la suma (per a variables aleatòries discretes) o la integració (per a variables aleatòries contínues). Però ara, prosseguir amb aquesta analogia ens obligaria a fer algun tipus d'integració sobre el conjunt de totes les funcions possibles. Això implicaria haver de descriure aquest conjunt de funcions possibles i requeriria construir una integració sobre aquest conjunt, cosa que el càlcul ordinari no ens permet.

Tot i que aquestes dificultats es poden superar en alguns casos, el procediment habitual és no abandonar el cas dels vectors aleatoris i utilitzar el fet essencial següent.

Si fixem un valor de t, $X(t)$ és una variable aleatòria unidimensional.

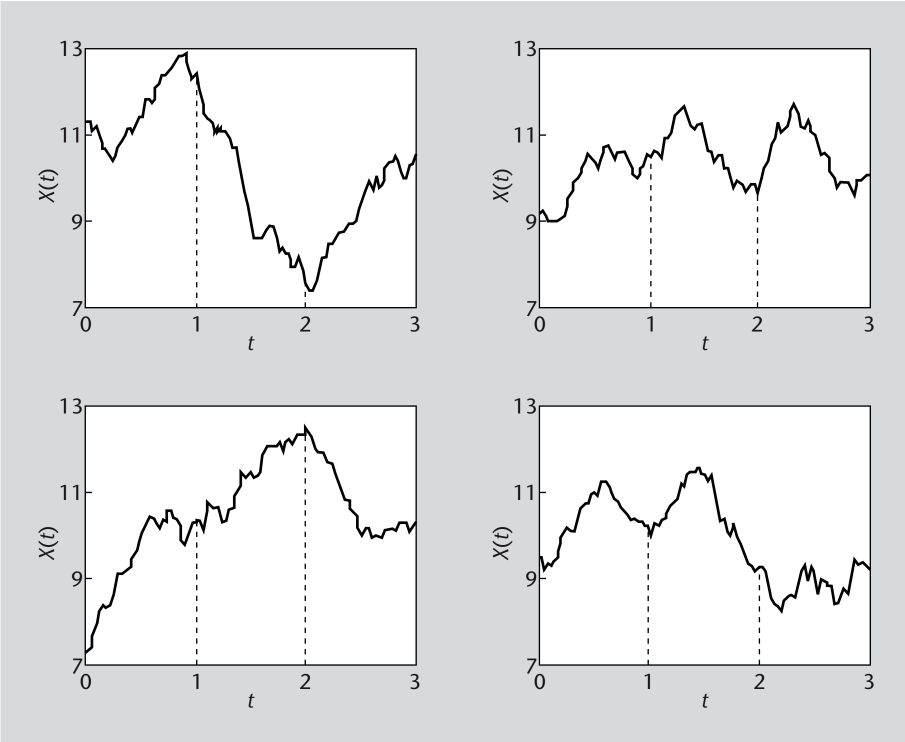
Per exemple, en el procés representat en la figura 5 podem fixar l'atenció en el valor $t = 1$. Cada vegada que fem l'experiència aleatòria s'obté una funció, però ara ens fixem en el que val aquesta funció en $t = 1$. Es tracta del valor de $X(1)$, que per a cada realització és un nombre. Aquest valor és l'altura de la funció sobre $t = 1$. Com es veu en la figura 6, cada realització ens dóna un valor diferent per a aquesta altura. $X(1)$ és, doncs, una variable aleatòria ordinària. Naturalment, podem fer aquesta anàlisi per a un instant de temps qualsevol. A la figura es mostren també les altures sobre $t = 2$. Ara $X(2)$ és una altra variable aleatòria.

Així, pensarem en el procés estocàstic $X(t)$ com en una variable aleatòria que depèn d'un índex t.

Observació

Per a poder tractar els processos estocàstics d'una manera relativament senzilla, fixarem certs valors de la variable independent t del procés i els tractarem com a variables aleatòries unidimensionals.

Figura 6. Les altures corresponents a $t = 1$ i $t = 2$



Observació

Quan fixem un valor de la variable independent, com per exemple $t = 1$, les diferents realitzacions del procés ens donen com a resultat una variable aleatòria $X(1)$. Podem tractar $X(1)$ com una variable aleatòria unidimensional. El mateix succeeix per a qualsevol altre valor de t.

Figura 6

Aquesta figura mostra quatre realitzacions d'un procés estocàstic. Aquí prenem com a variables aleatòries unidimensionals $X(1)$ i $X(2)$.

Figura 7. Quatre realitzacions i els valors que van prenent $X(1)$ i $X(2)$

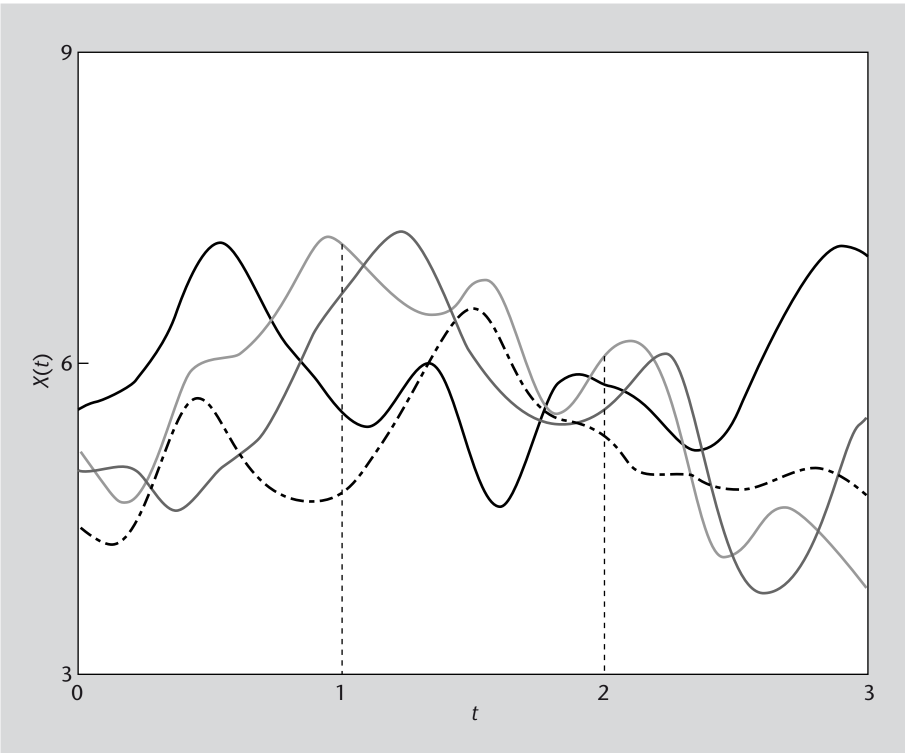


Figura 7

Com en la figura 6, però ara sobre un mateix gràfic, podem veure quatre realitzacions d'un procés estocàstic i els valors que van prenent les variables aleatòries unidimensionals $X(1)$ i $X(2)$.

Un cop revisada la definició de procés estocàstic, a continuació veurem que podem classificar els processos estocàstics en quatre tipus bàsics.

2. Processos a temps continu i a temps discret

En l'apartat anterior hem vist la definició de procés estocàstic. Ara veurem com podem classificar els processos estocàstics depenent de si la variable independent t és un paràmetre continu o discret.

En l'exemple de l'inversor, el procés el constitueix la successió de resultats en dies consecutius. Així, en aquest cas, el temps es mesura en dies i es representa amb un paràmetre discret i. Les gràfiques d'aquests processos consisteixen en una successió de punts encara que, normalment, s'uneixen amb línies rectes tal com hem fet en la figura 1. Fixeu-vos que en aquest exemple la variable independent només pren valors enters (dia 1, dia 2, etc.).

Variables independents dels processos estocàstics

En tots els exemples que estem veient estem considerant processos estocàstics que depenen d'una única variable independent, el temps. Recordeu, però, que podem tenir processos estocàstics que depenguin de diverses variables independents, com ara l'espai (x,y,z).

Definició 2.1. Un **procés estocàstic a temps discret** és aquell en què la variable t pren un conjunt finit o infinit numerable de valors reals. Per exemple, $t \in \mathbb{Z}$.

En molts altres casos, però, la variable independent pot variar de manera contínua sobre els reals.

Definició 2.2. Un **procés estocàstic a temps continu** és aquell en què la variable t varia sobre tot un interval real. Per exemple, $t \in \mathbb{R}$, $t \in [0,\infty)$ o $t \in [a,b]$.

Vegem-ne un exemple per clarificar conceptes.

Exemple 2.1

Una central elèctrica subministra energia a una població. La demanda d'electricitat està sotmesa a fluctuacions, ja que és la suma de les demandes de molts consumidors petits. També hi ha factors com l'hora (hi ha més consum a la tarda, quan enfosqueix) i les variacions del temps atmosfèric (si ve un cop de fred es pot disparar el consum per l'ús de la calefacció). Si representem el temps al llarg d'un dia per la variable t ($0 \leq t < 24$, en hores), la demanda constitueix un procés estocàstic $D(t)$.

En aquest cas és necessari considerar t com una variable contínua, és a dir, que pren qualsevol valor real, ja que la central ha de poder respondre de manera ràpida a les variacions que es van produint en la demanda.

Figura 8. Evolució de la demanda energètica al llarg d'un dia

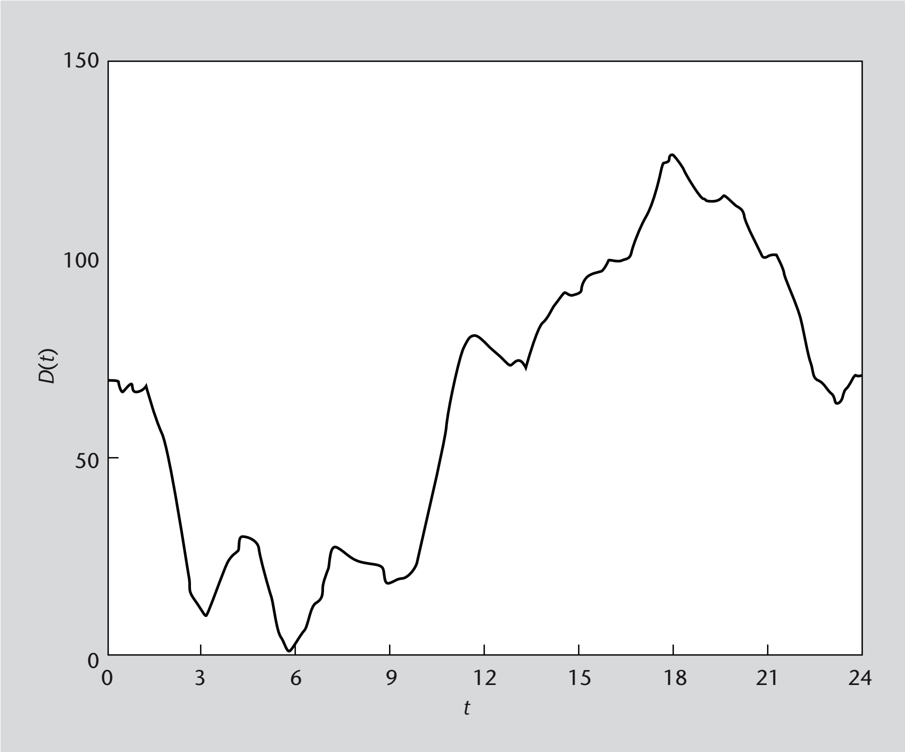


Figura 8

Exemple d'una realització d'un procés estocàstic a **temps continu**, ja que la variable t pot prendre qualsevol valor real.

El cas de temps discret és més senzill de tractar, ja que ens remet més directament als vectors aleatoris. En efecte, si t pren només els valors $t_1, t_2, \cdots$, la funció resultant queda especificada per $X(t_1), X(t_2), \cdots$ i això constitueix un conjunt de variables aleatòries. On és la diferència amb els vectors aleatoris?

- Per una banda, ara tenim una seqüència d'infinites variables aleatòries, de manera que no les podem tractar totes conjuntament sinó en subconjunts finits.

- Per altra banda, en un vector aleatori l'índex que numera les variables és purament una etiqueta sense un significat especial, mentre que en el procés estocàstic aquest índex té el significat de posició temporal i hi té un paper més dinàmic. Per exemple, podem esperar una correlació més forta entre $X(t_1)$ i $X(t_2)$ que entre $X(t_1)$ i $X(t_{50})$.

Processos estocàstics a temps discret i vectors aleatoris

Podem pensar en un procés aleatori en temps discret com en un vector aleatori. Compte, però, amb algunes diferències conceptuals importants.

Els processos a temps continu constitueixen la classe més general i la nostra descripció general s'encaminarà a aquest tipus. Podem connectar els dos tipus si pensem en processos a temps discret que aproximin processos a temps continu (per mitjà d'un mostreig, potser) o en processos a temps continu com a pas al límit de processos a temps discret.

Vegeu també

En l'apartat 3 d'aquest mòdul veurem que els processos estocàstics també es poden diferenciar en funció de si els valors que prenem són discrets o continus.

3. Processos d'estat continu i d'estat discret

En aquest apartat del mòdul veurem una altra manera de classificar els processos estocàstics. Aquesta classificació correspon als valors que pot prendre $X(t)$. Com que amb t fixat $X(t)$ és una variable aleatòria, el procés s'haurà de tractar de manera diferent segons aquesta variable sigui discreta o contínua. Parlarem de processos d'estat discret o d'estat continu per a referir-nos a aquests casos.

Definició 3.1. Un **procés estocàstic d'estat discret** és aquell en què la variable aleatòria $X(t)$ a temps fixat és una variable discreta.

Exemple 3.1

Un servidor d'Internet va rebent visites que podem considerar que es produeixen en instants aleatoris. Considerem $0 \leq t \leq 24$ (expressat en hores) i definim el procés estocàstic $X(t)$ com un comptador de visites ($X(0) = 0$ i s'incrementa una unitat cada vegada que hi ha una visita). Clarament, per a t arbitrari fixat, $X(t)$ només pot valer $0,1,2,3,\ldots$ Així tenim un procés d'estat discret (i a temps continu, ja que el comptador està definit en qualsevol instant).

Definició 3.3. Un **procés estocàstic d'estat continu** és aquell en què la variable aleatòria $X(t)$ a temps fixat és una variable contínua.

Exemple 3.2

Mesurem de manera precisa el nivell de soroll $X(t)$ en un circuit electrònic en funció del temps t. El procés és d'estat continu, ja que aquesta intensitat és un nombre real arbitrari (dins d'un cert interval). Tal com el plantegem, el procés també és a temps continu, però el podríem fer a temps discrets si féssim les mesures separades per un cert interval de temps; per exemple, cada 0,01 segons.

Així doncs, com a resum d'aquest apartat podem dir que podem trobar dos tipus de processos estocàstics en funció dels valors que pot prendre el procés: **procés estocàstic d'estat continu** i **procés estocàstic d'estat discret.**

4. Exemples de processos estocàstics

En principi, en un procés aleatori no hi ha d'haver necessàriament relacions de dependència entre les variables $X(t)$ a temps diferents. Això dóna lloc a funcions d'aparença irregular i comportament complicat (des de la perspectiva de l'anàlisi matemàtica). D'altra banda, podem construir processos, de manera un tant artificial, prenent funcions ordinàries i introduint-hi paràmetres aleatoris. Aquests últims exemples, a banda de la seva utilitat pedagògica perquè són fàcilment manipulables, també es poden presentar en la realitat.

En aquest apartat, i ja per finalitzar aquest mòdul d'introducció als processos estocàstics, veurem des de processos en què definim algunes variables aleatòries i per als quals les realitzacions tenen una forma similar, fins a processos totalment imprevisibles i sense cap correlació entre instants diferents.

4.1. Processos representables explícitament en termes de variables aleatòries

En aquest subapartat veiem dos exemples de processos estocàstics que es poden definir per una funció determinista en què algun dels seus paràmetres és una variable aleatòria. Vegem-los a continuació.

Funcions deterministes i no deterministes

En una funció determinista coneixem tots els valors que pren la funció. Si, per exemple, tenim la funció $y(t) = A\sin(\omega t)$, podem saber quins valors té la funció per a qualsevol valor de t si coneixem els paràmetres A i ω. Si algun d'aquests paràmetres és una variable aleatòria, la funció és no determinista.

Exemple 4.1

Disparem un projectil verticalment amb velocitat inicial v_0. Sabem, per mecànica newtoniana, que la seva posició (altura) en funció del temps és determinada per $h(t) = v_0 t - \frac{g}{2}t^2$, en què $g = 10ms^{-2}$ és l'acceleració de la gravetat. Suposem que el sistema que impulsa el projectil està sotmès a fluctuacions, de manera que v_0 no pren un valor constant i el podem considerar una variable aleatòria. Llavors, cada vegada que disparem el projectil el moviment $h(t)$ és diferent, ja que v_0 varia. Per tant, hem de considerar $h(t)$ com un procés estocàstic. En la figura 9 es mostren tres realitzacions d'aquest procés.

En aquest exemple tot el caràcter aleatori de la funció $h(t)$ es deu a un únic paràmetre v_0, fet que simplifica l'estudi d'aquest procés.

A continuació donem una formulació general d'aquest tipus de processos.

Per simplicitat, utilitzarem un màxim de dos paràmetres aleatoris, tot i que l'extensió a una variable n-dimensional és immediata. Són processos que es poden representar en la forma següent:

$$X(t) = \Phi(t,A,B), \qquad (1)$$

Vegeu també

Els **vectors aleatoris** s'estudien en el mòdul "Vectors aleatoris".

en què Φ és una funció fixada de tres variables i (A,B) és un vector aleatori bidimensional. En fer l'experiment aleatori, A i B queden determinades i passen a ser paràmetres numèrics que fixen la forma de $X(t)$.

Figura 9. Evolució de l'altura en tres llançaments del projectil

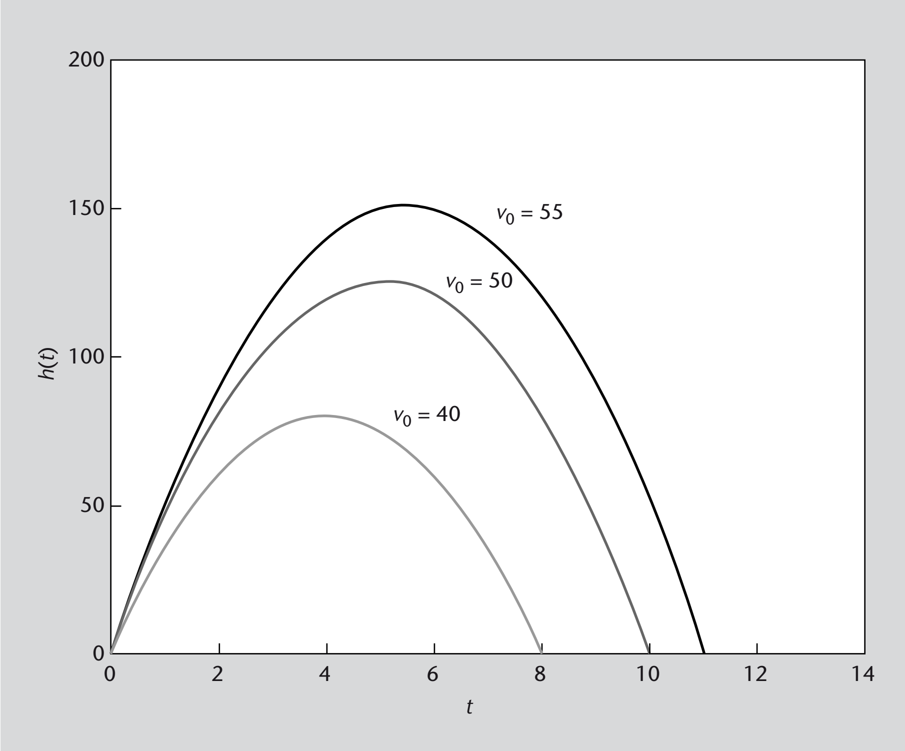


Figura 9

Aquest procés estocàstic consisteix en una funció determinista en què el paràmetre v_0 és una variable aleatòria. Fixeu-vos que les tres realitzacions del procés tenen una forma similar.

Vegem un altre exemple sobre oscil·lacions aleatòries de tot el que hem vist en aquest subapartat.

Exemple 4.2

Imagineu que el voltatge que apliquem a un circuit és un procés de la forma $X(t) = V\cos(t - \varphi)$, en què V i φ constitueixen un vector aleatori bidimensional. Per tant, estem considerant que l'amplitud i la fase d'aquest voltatge estan sotmesos a fluctuacions estadístiques. Això reflecteix que aquest circuit rep voltatges d'una col·lectivitat d'usuaris, o està produït per un aparell amb toleràncies àmplies de fabricació, o hi ha un efecte extern (soroll, per exemple) que l'afecta, etc.

Per fixar més la situació, suposem que V és una variable exponencial de valor mitjà 1, que φ és una variable uniforme en $[0,2\pi]$ i que són independents.

Si fixem un instant donat $t = t_0$, tal com hem vist en l'apartat 1 d'aquest mòdul, resulta que $X(t_0)$ és una variable unidimensional que és funció de dues variables aleatòries. Aquesta és una situació que sabem tractar. Per exemple, per a $t = 0$ tenim la variable $X(0)$. Vegem que en podem calcular l'esperança:

$$E(X(0)) = E(V\cos\varphi) = E(V)E(\cos\varphi),$$

ja que V i $\cos\varphi$ són variables independents. El primer factor val, tal com diu l'enunciat, $E(V) = 1$. El segon el calculem amb el teorema de l'esperança:

$$E(\cos\varphi) = \int_0^{2\pi}\cos\varphi\frac{1}{2\pi}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi}[\sin\varphi]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}[\sin(2\pi) - \sin(0)] = 0.$$

Així, arribem a la conclusió: $E(X(0)) = 0$.

Aquest resultat es pot entendre si tenim en compte que el procés $X(t)$ consisteix en una oscil·lació amb una fase que és aleatòria i pren valors sobre tot un període amb densitat uniforme. Per tant, hi contribueixen valors positius i negatius amb el mateix pes, i el valor mitjà és nul.

Observació

En l'exemple 4.2, el procés estocàstic depèn del temps i del vector aleatori bidimensional (V,φ). És a dir, $X(t) = \Phi(t,V,\varphi)$.

Variable exponencial

Recordem que una variable aleatòria exponencial de paràmetre λ es representa $Exp(\lambda)$ i té valor mitjà $m = \frac{1}{\lambda}$. A vegades ens referim a aquesta variable com a exponencial de valor mitjà m.

Teorema de l'esperança

El teorema de l'esperança diu que, donada una variable aleatòria X, el valor mitjà d'una funció d'aquesta variable $g(X)$ val $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$.

Per completar l'exemple, veiem que podem expressar aquest procés a partir d'altres variables aleatòries, fent un canvi adequat. Utilitzant la fórmula

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{2}$$

resulta

$$X(t) = A\cos t + B\sin t, \tag{3}$$

en què $A = V\cos\varphi$ i $B = V\sin\varphi$. Llavors (A,B) és un vector aleatori que s'obté del vector (V,φ) amb un canvi de variables. Alguns aspectes d'aquest procés s'estudien millor amb aquesta representació.

4.2. Processos amb infinits graus de llibertat aleatoris

Molts processos no es poden expressar a partir d'un nombre finit de paràmetres aleatoris, com seria el cas dels processos que hem vist en el subapartat anterior. Això pot representar que no tinguem una expressió explícita de la funció $X(t)$. Tot i això, en moltes aplicacions el que importa són mitjanes estadístiques que en els processos més habituals són fàcils de calcular. A vegades podem expressar el procés en termes d'un conjunt numerable de variables aleatòries, cosa que ens dóna un cert caràcter explícit i la possibilitat de fer càlculs de manera anàloga a l'exemple 4.2 del subapartat anterior.

Exemple 4.3

Definim un procés en què les variables $X(t)$ en instants diferents són independents. A més, per a tot t, la variable $X(t)$ és normal amb $m = 0$ i $\sigma = 1$. El resultat és un procés en què les realitzacions són totalment irregulars.

Figura 10. Realització del procés $X(t)$

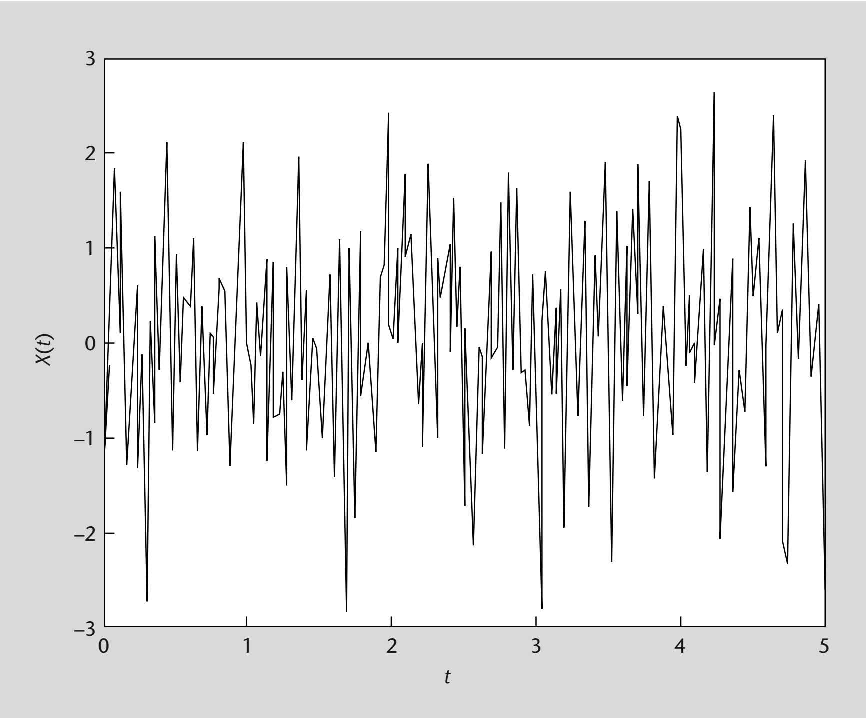


Figura 10

El soroll blanc és un exemple de procés en què no podem preveure els valors del procés en un instant a partir dels valors en instants diferents. El que sí que podem fer, però, és caracteritzar aquest procés amb el paràmetres mitjana, m, i desviació estàndard, σ.

Exemple 4.4

El moviment brownià té una importància històrica per les seves aplicacions. El 1827, el botànic Robert Brown va observar al microscopi que les partícules de pol·len en suspensió en aigua en repòs manifestaven un moviment molt irregular que semblava inexplicable. Aquestes trajectòries constitueixen un procés estocàstic (en aquest cas en $\mathbb{R}^3$, ja que la trajectòria és $(X(t),Y(t),Z(t))$).

L'exemple és particularment rellevant, ja que l'explicació d'aquest moviment són les fluctuacions en els xocs que les molècules d'aigua en agitació tèrmica fan contra la partícula. Així, la descripció del fenomen permet verificar de manera indirecta els models moleculars i de mecànica estadística per a descriure la matèria. A la vegada, la descripció matemàtica d'aquest procés és útil com a model d'altres fenòmens i és aplicable en camps com l'enginyeria.

Figura 11. Simulació del moviment brownià bidimensional

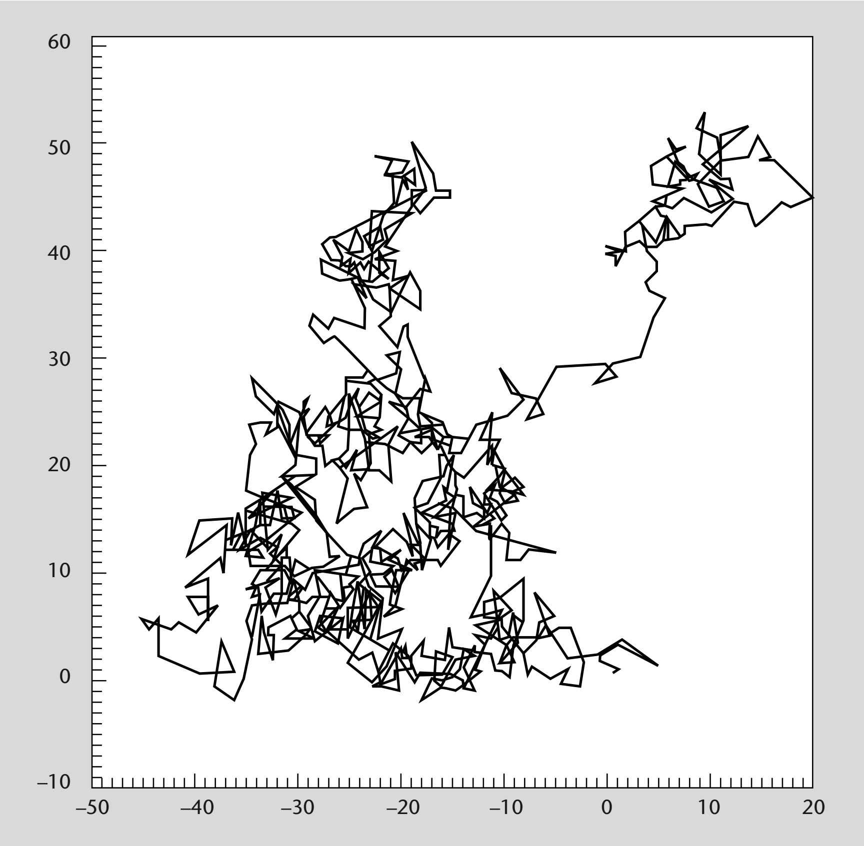


Figura 11

El moviment brownià és un moviment força irregular i imprevisible, però és continu i hi ha correlacions. La descripció matemàtica d'aquest fenomen va ser elaborada per Albert Einstein l'any 1905.

A continuació veiem un altre exemple sobre el passeig aleatori basat en el moviment brownià que acabem de veure.

Exemple 4.5

Desenvolupem amb un cert detall un exemple similar al moviment brownià. Una partícula es mou en una dimensió. $X(t)$ representa la seva posició en l'instant t ($t \geq 0$). Partim de $X(0) = x_0$. La partícula es mou amb una velocitat constant que canvia de manera brusca en els instants $t = 1,2,3,\ldots$ Això ho representem dient que el desplaçament de $X(n-1)$ a $X(n)$ és determinat per la variable aleatòria Z_n. Les variables $Z_1,Z_2,\ldots$ són independents i són totes del mateix tipus, com per exemple, $N(m,\sigma)$.

El procés consisteix en una línia poligonal (trams de recta enganxats amb continuïtat en els valors enters de t). Per a $n \in \mathbb{N}$, $X(n) = X(n-1) + Z_n$. Així, per a t enter tenim

$$X(n) = x_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i. \tag{4}$$

Figura 12. Tres realitzacions del procés $X(t)$ amb $x_0 = 0$, $m = 1$, $\sigma = 1{,}5$

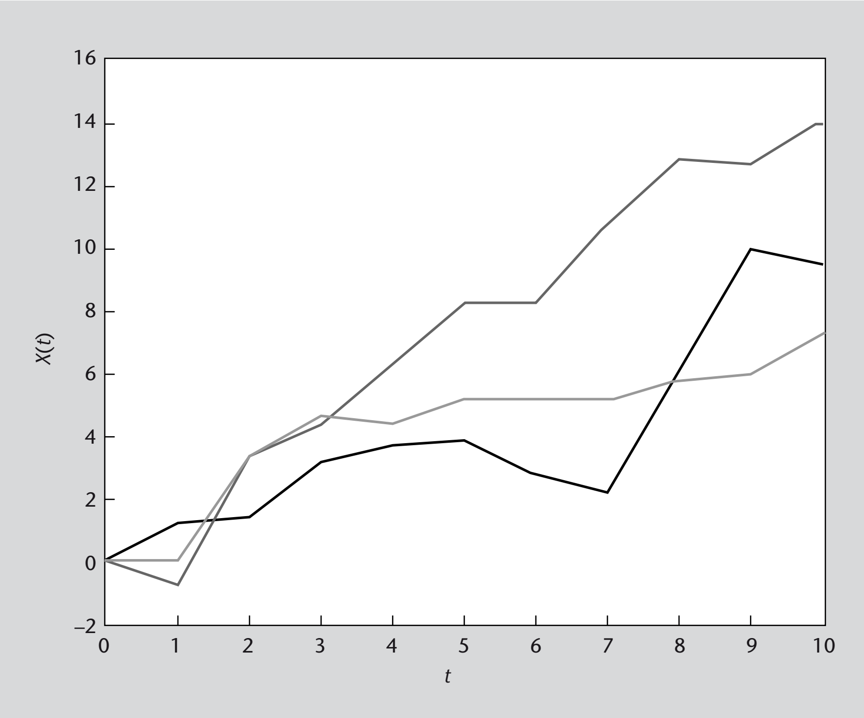


Figura 12

Exemple de tres realitzacions diferents del procés passeig aleatori.

Per a expressar el procés per a t arbitrari, posem $t = [t] + d(t)$, en què $[t]$ és la part entera de t i $d(t) = t - [t]$ la seva part decimal. Llavors podem escriure $X(t)$ explícitament, per a qualsevol $t \geq 0$, com

$$X(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{[t]} Z_i + d(t)Z_{[t]+1}. \tag{5}$$

(Per exemple, per a expressar $X(2{,}3)$ tenim que $X(2{,}3) = X(2) + 0{,}3Z_3$, i $X(2) = X(1) + Z_2 = (X(0) + Z_1) + Z_2 = x_0 + Z_1 + Z_2$.)

Hem arribat a una expressió explícita del procés, en termes de les variables aleatòries Z_n. Ara ens podem plantejar l'estudi d'alguna propietat d'aquest procés. Atès que les funcions expressades en l'equació (5) són aleatòries, apareixen dos tipus de qüestions que és natural plantejar-se. Una és quina és la probabilitat que a la funció $X(t)$ li passi alguna cosa. Una altra és com es comporta $X(t)$ de mitjana. Aquest segon tipus sol tenir més interès. A manera d'exemple, com que la posició en un instant qualsevol és aleatòria, en podem calcular el valor mitjà. Com que això ho podem fer per a tot instant t, el que obtindrem serà una mena de trajectòria mitjana.

Calculem, doncs, el valor mitjà de la variable $X(t)$ per a qualsevol t fixat:

$$E(X(t)) = E\left(x_0 + \sum_{i=1}^{[t]} Z_i + d(t)Z_{[t]+1}\right) = x_0 + \sum_{i=1}^{[t]} E(Z_i) + d(t)E(Z_{[t]+1}) =$$

$$x_0 + \sum_{i=1}^{[t]} m + d(t)m = x_0 + [t]m + d(t)m = x_0 + mt.$$

Així, hem demostrat:

$$E(X(t)) = x_0 + mt. \tag{6}$$

Podem interpretar aquest resultat dient que de mitjana es desplaça a velocitat constant m.

La gràfica de la figura 13 representa tres realitzacions i la recta mitjana $x_0 + mt$.

Figura 13. La recta $x_0 + mt$ (línia puntejada) juntament amb tres realitzacions

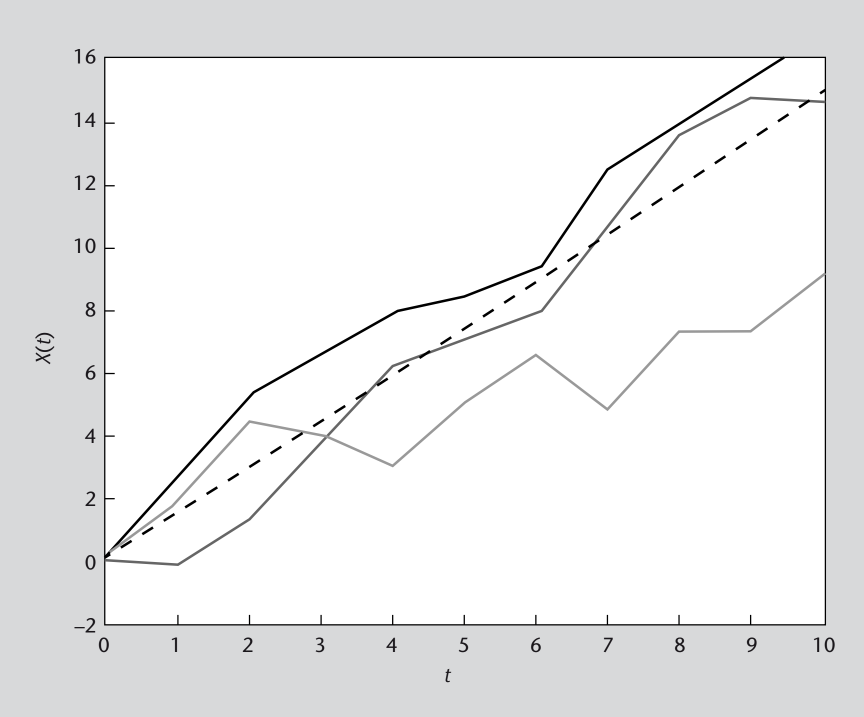


Figura 13

Observeu les tres realitzacions del procés passeig aleatori i la seva relació amb la recta mitjana $x_0 + mt$.

Resum

Un **procés estocàstic**, $X(t)$, és l'assignació d'una funció $x(t)$ a cada resultat d'un experiment aleatori. Cadascuna d'aquestes funcions depèn d'una variable independent, que és el temps, t. En mòduls anteriors, quan teníem una variable aleatòria, el resultat d'un experiment era un nombre. Ara, quan ens referim als processos estocàstics, cada cop que fem un experiment determinat obtenim una funció determinada, $x(t)$, que anomenem **realització** del procés.

Una manera de simplificar els càlculs a l'hora d'obtenir algunes propietats dels processos estocàstics consisteix a fixar certs valors de la variable independent t i tractar aquests valors com a variables aleatòries. Ens podem fixar, per exemple, en com es comporta $X(1)$, $X(2)$, etc.

Podem classificar els processos estocàstics en funció de la naturalesa de la seva variable independent (t en aquest cas). D'aquesta manera, hem vist que els processos estocàstics poden ser:

- **Processos estocàstics a temps discret**: si t pren valors discrets
- **Processos estocàstics a temps continu**: si t pren valors continus.

Segons els valors que pren $X(t)$ podem diferenciar dos tipus de processos:

- **Processos estocàstics d'estat discret**: quan, en un instant t fixat, la variable aleatòria $X(t)$ és discreta.
- **Processos estocàstics d'estat continu**: quan, en un instant t fixat, la variable aleatòria $X(t)$ és contínua.

Així doncs, podem classificar els processos estocàstics en quatre tipus:

- Processos estocàstics a temps discret i d'estat discret
- Processos estocàstics a temps discret i d'estat continu
- Processos estocàstics a temps continu i d'estat discret
- Processos estocàstics a temps continu i d'estat continu

En aquest mòdul hem vist diferents exemples de processos estocàstics. En alguns casos les realitzacions de processos estocàstics són una funció determinista, en què algun dels seus paràmetres és una variable aleatòria. El model de trajectòria d'un projectil o el voltatge d'entrada a un circuit en són dos exemples. En aquests casos coneixem a grans trets quina és la forma de la funció que obtindrem i determinant un nombre de paràmetres finit podem dibuixar la funció resultant.

Hi ha altres processos estocàstics, però, que tenen infinits graus de llibertat, és a dir, que no es poden determinar a partir d'uns pocs paràmetres, i per tant no podem expressar el procés $X(t)$ en forma explícita. És el cas del soroll blanc o del moviment brownià. Aquests processos modelitzen molts fenòmens naturals. Tot i que la descripció estadística pot ser molt complicada podem calcular alguns paràmetres, com ara el valor mitjà.

Activitats

1. Donat el procés estocàstic $X(t) = 1 + A\cos t + B\sin t$, en què A i B són variables aleatòries gaussianes independents, demostreu que la funció $\cos(t-1)+1$ és una realització del procés $X(t)$.

2. Donat el procés estocàstic $X(t) = At + B(1-t)$, en què A i B són variables aleatòries independents uniformes en l'interval [0,2], demostreu que la funció $1+t$ és una realització del procés $X(t)$.

3. Donat el procés estocàstic $X(t) = A+B\cos t+C\sin t$, en què A, B i C són variables gaussianes independents, demostreu que $\varphi(t) = 2\cos(t-1)$ és una realització del procés.

4. Donada A, variable aleatòria exponencial d'esperança 1, es defineix el procés:

$$X(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq A \\ 0, & t > A \end{cases}$$

Quins valors pot prendre la variable aleatòria $X(3)$? Mostreu que el procés és d'estat discret.

5. Donats els processos següents:

$$X(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq B \\ 2-t, & t > B \end{cases} \qquad Y(t) = \begin{cases} A-t, & 0 \leq t \leq A \\ t-A, & t > A \end{cases}$$

en què B és una variable aleatòria uniforme en [0,2] i A és una variable aleatòria exponencial d'esperança 1.

Quins valors poden prendre les variables aleatòries $X(1)$ i $Y(1)$? Raoneu si els processos $X(t)$ i $Y(t)$ són d'estat discret o continu.

6. Considereu una variable aleatòria V exponencial i els processos:

$$Y(t) = \begin{cases} t^2+t, & 0 \leq t \leq V, \\ 0, & t > V. \end{cases} \qquad Z(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq V, \\ V+1, & t > V. \end{cases}$$

Quins valors poden prendre les variables aleatòries $Y(2)$ i $Z(2)$? Raoneu si algun dels processos $Y(t)$ o $Z(t)$ és d'estat discret.

7. Considereu el procés estocàstic $X(t) = (t-A)(t-2A)$ en què A és una variable aleatòria uniforme en l'interval [0,6].

Donades les funcions $x_1(t) = t^2-3t+3$ i $x_2(t) = t^2-6t+8$: alguna d'aquestes és una realització del procés $X(t)$?

8. Considereu variables aleatòries A de Bernoulli amb $p = \frac{1}{2}$ i B exponencial amb $\lambda = 2$. Dieu, justificant la resposta, si els processos següents són d'estat discret o continu:

$$Y_1(t) = At. \qquad Y_2(t) = At + B. \qquad Y_3(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq B, \\ 0, & t > B. \end{cases}$$

9. En activar un circuit apareix un corrent $X(t)$ per a $t \geq 0$ que podem representar com un procés estocàstic:

$$X(t) = (1 + A\cos(10\pi t))e^{-t},$$

en què A és una variable aleatòria uniforme en l'interval [–3,3].

Alguna de les funcions $x_1(t) = (2+\cos(10\pi t))e^{-t}$, $x_2(t) = (1+5\cos(10\pi t))e^{-t}$, $x_3(t) = (1-2\cos(10\pi t))e^{-t}$ és una realització del procés $X(t)$?

10. Digueu, justificant la resposta, si els processos següents són d'estat discret o continu:

a) $X_1(t) = A\cos t$, en què A és una variable binomial amb $n = 4$, $p = \frac{1}{3}$.

b) $X_2(t) = A\cos t + B\sin t$, en què A és de Bernoulli amb $p = \frac{1}{2}$ i B és exponencial amb $\lambda = 1$.

c) $X_3(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq B, \\ 0, & t > B \end{cases}$ en què B és exponencial amb $\lambda = 1$.

11. La demanda que té un centre de subministrament d'energia al llarg d'un dia està determinada pel procés estocàstic:

$$X(t) = 100 + Bt(24 - t),$$

en què $0 \leq t < 24$ és el temps en hores i B és una variable aleatòria uniforme en l'interval [1,3].

Algun valor de α, β o γ fa que les funcions següents siguin realitzacions del procés $X(t)$: $x_1(t) = 100 + 48t - \alpha t^2$, $x_2(t) = 100 + 12t - \beta t^2$, $x_3(t) = 100 + \gamma t - 1{,}3t^2$?

Utilitzeu programari matemàtic per a representar gràficament algunes realitzacions del procés $X(t)$.

12. Digueu, justificant la resposta, si els processos següents són d'estat discret o continu:

a) $X_1(t) = \cos(t + W)$, en què W és una variable uniforme en l'interval $[0,2\pi]$.

b) $X_2(t) = e^{-Bt}$, en què B és geomètrica amb $p = \frac{1}{3}$.

c) $X_3(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq A, \\ 0, & t > A. \end{cases}$ en què A és exponencial amb $\lambda = 1$.

13. L'ús d'amplada de banda en una xarxa en funció del temps està determinada pel procés estocàstic:

$$X(t) = Ae^{-t} + \frac{1}{A},$$

en què $t \geq 0$ és el temps en hores i A és una variable aleatòria amb funció de densitat: $f_A(a) = \dfrac{a}{2}$ si $0 < a < 2$, i $f_A(a) = 0$ en cas contrari.

Algun valor de κ fa que la funció següent sigui una realització del procés $X(t)$: $\varphi(t) = \kappa + (1 + 2\kappa)e^{-t}$?

Utilitzeu programari matemàtic per a representar gràficament algunes realitzacions del procés $X(t)$.

14. A partir de les variables U exponencial de paràmetre $\lambda = 2$ i V binomial amb $n = 4$, $p = \frac{1}{2}$ es defineixen els processos:

$$X(t) = \cos(t + U), \qquad Y(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}Vt\right), \qquad Z(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq U, \\ 0, & t > U. \end{cases}$$

a) Quins valors poden prendre les variables donades pels processos anteriors en $t = 2$, $X(2)$, $Y(2)$, $Z(2)$.

b) Dieu, justificant la resposta, si aquests processos són d'estat discret o continu.

c) És possible construir un procés d'estat continu a partir d'una variable aleatòria discreta? Doneu-ne un exemple o demostreu que no és possible.

15. Un tipus de partícula produeix radiació d'intensitat descrita pel procés estocàstic:

$$X(t) = J\cos t + (1 - J)\sin t,$$

en què t és el temps i J és una variable aleatòria de Bernoulli amb paràmetre $p = \frac{1}{2}$.

Dieu, justificadament, si es tracta d'un procés a temps discret o continu, i si és d'estat discret o continu.

16. El nivell de càrrega en un acumulador d'energia, per a $t \geq 0$ es descriu amb el procés:

$$X(t) = A^2 - B^2 t + t^2,$$

en què A i B són variables uniformes en [1,2], independents.

Quines de les funcions següents són realitzacions del procés: $\varphi_1(t) = (1-t)^2, \varphi_2(t) = 2 - 3t + t^2, \varphi_3(t) = 4 - 5t + t^2$?

Solucionari

1. $\cos(t-1)+1 = 1+\cos t\cos 1+\sin t\sin 1$. És la funció que resulta quan $A = \cos 1$ i $B = \sin 1$.

2. $1+t = At+B(1-t)$ es verifica si $A = 2, B = 1$, de manera que $1+t$ és una realització del procés.

3. $\varphi(t) = 2\cos 1\cos t+2\sin 1\sin t$. Es dóna quan $A = 0$, $B = 2\cos 1 = 1{,}0806$ i $C = 2\sin 1 = 1{,}6829$. Com són variables gaussianes, els valors són possibles.

4. La variable aleatòria $X(3)$ només pot valer 0 i 3, ja que $X(3) = \begin{cases} 3, & 3 \leq A \\ 0, & 3 > A \end{cases}$

En general $X(t)$ només pot prendre dos valors: 0 i t. Per tant, fixat t, $X(t)$ és una variable discreta. Així el procés és d'estat discret.

5. La variable aleatòria $X(1)$ només pot valer 0 i 1, ja que $X(1) = \begin{cases} 0, & 1 \leq B \\ 1, & 1 > B \end{cases}$

En general, $X(t)$ només pot prendre dos valors: 0 i $2-t$. Per tant, fixat t, $X(t)$ és una variable discreta. Així el procés $X(t)$ és d'estat discret.

La variable aleatòria $Y(1)$ és $Y(1) = \begin{cases} A-1, & 1 \leq A \\ 1-A, & 1 > A \end{cases}$

i pot prendre qualsevol valor positiu, ja que A varia de 0 a ∞. Així el procés $Y(t)$ és d'estat continu.

6. Tenim que $Y(2) = \begin{cases} 6, & 2 \leq V, \\ 0, & 2 > V. \end{cases}$ i $Z(2) = \begin{cases} 0, & 2 \leq V, \\ V+1, & 2 > V. \end{cases}$

$Y(2)$ només pot valer 0 i 6. En general, $Y(t)$ només pot prendre dos valors: 0 i t^2+t. Per tant, fixat t, $Y(t)$ és una variable discreta. Així, el procés $Y(t)$ és d'estat discret.

La variable aleatòria $Z(2)$ només pot valer 0 o qualsevol valor entre 1 i 3. Per tant, $Z(t)$ no és un procés d'estat discret.

7. Notem que $X(t) = t^2-3At+2A^2$. $x_1(t)$ no és una realització del procés, ja que cap valor de A ens dóna aquesta funció (caldria $A = 1$ per al terme de primer grau, però llavors el terme constant valdria 2). $x_2(t)$ és una realització del procés, ja que $A = 2$ ens dóna $X(t) = t^2-6t+8$.

8. A només pot valer 0 i 1, mentre que B pren qualsevol valor entre 0 i ∞.

a) Fixat t la variable $Y_1(t)$ només pot prendre dos valors, 0 i t. Així, per a tot t, $Y_1(t)$ és una variable discreta i el procés és d'estat discret.

b) Fixat t la variable $At+B$ pot prendre qualsevol valor positiu. Així, per a tot t, $Y_2(t)$ és una variable contínua i el procés és d'estat continu.

c) $Y_3(t)$ és d'estat discret, ja que fixat t només pot prendre dos valors, 0 i t (segons sigui $B < t$ o $B > t$).

9. Les realitzacions són les funcions que s'obtenen donant valors concrets a la variable A. De les tres funcions només $x_3(t)$ és una realització, corresponent a $A = -2$, que pertany al conjunt de valors possibles de A.

10. a) Atès que A pren només 5 valors possibles (0,1,2,3,4), fixat t, la variable $X_1(t)$ pren també només 5 valors possibles. Així, per a tot t, $X_1(t)$ és una variable discreta i el procés és d'estat discret.

b) Atès que B pren un conjunt continu de valors (de 0 a ∞), el mateix passarà amb la variable $A\cos t + B\sin t$ amb t fixat. Així, $X_2(t)$ és una variable contínua i el procés és d'estat continu.

c) $X_3(t)$ és d'estat discret, ja que fixat t només pot prendre dos valors, 0 i 1 (segons sigui $B < t$ o $B > t$).

11. Les realitzacions són les funcions que s'obtenen donant valors concrets a la variable B. Expressant $X(t) = 100 + 24Bt - Bt^2$ veiem que $x_1(t)$ correspon a $B = 2$ si fem $\alpha = 2$; $x_2(t)$ no és realització de $X(t)$, ja que caldria $B = \frac{1}{2}$, que no pertany als possibles valors de B; i $x_3(t)$ correspon a $B = 1{,}3$ i, per tant, $\gamma = 31{,}2$.

Les realitzacions de $X(t)$ són paràboles amb el màxim en $t = 12$.

Figura 14. Realitzacions amb $B = 1{,}5$ i $B = 2{,}9$.

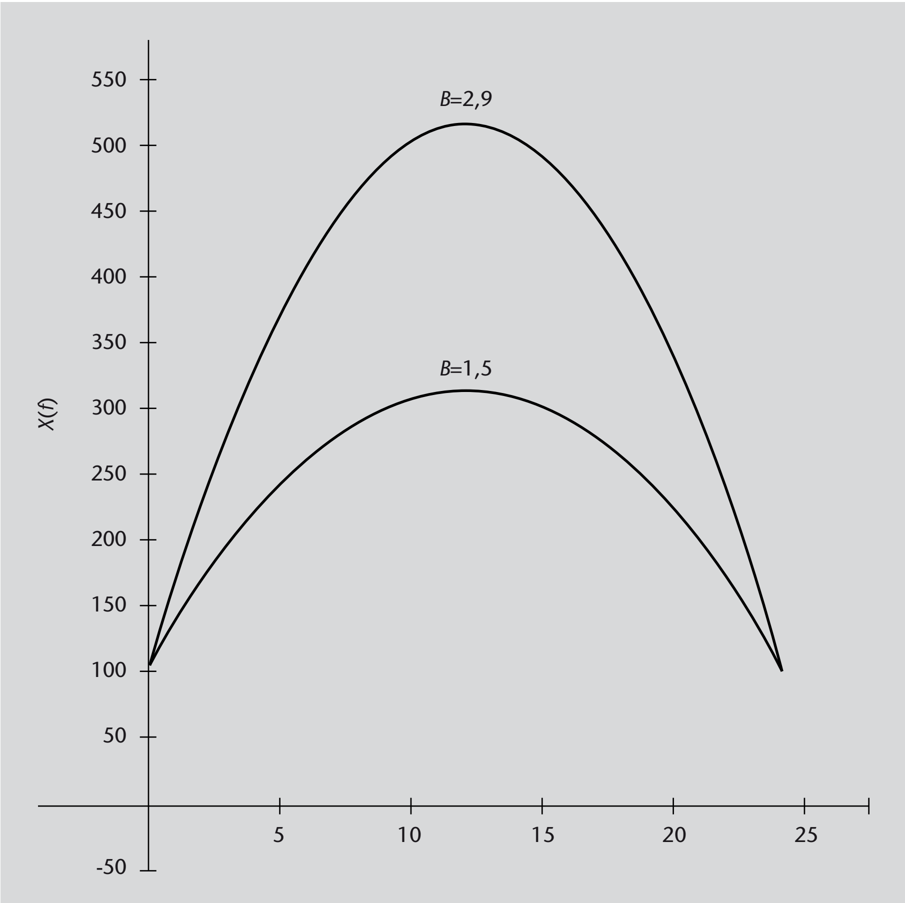


Figura 14

Realitzacions del procés de l'exercici 11 amb $B = 1{,}5$ i $B = 2{,}9$.

12. a) Atès que W és contínua, amb t fixat, $\cos(t + W)$ també és una variable contínua i el procés és d'estat continu.

b) Atès que B és discreta, fixat t, e^{-Bt} pren també un conjunt numerable de valors i el procés és d'estat discret.

c) $X_3(t)$ és d'estat continu ja que, fixat t, pot prendre qualsevol valor (entre t i ∞).

13. Les realitzacions són les funcions que s'obtenen donant valors concrets a la variable A. Perquè $\varphi(t)$ sigui una realització hi hauria d'haver algun valor de A en [0,2] tal que $A = 1+2\kappa$ i $\frac{1}{A} = \kappa$. Així, κ ha de verificar $\frac{1}{\kappa} = 1 + 2\kappa$, és a dir, $2\kappa^2 + \kappa - 1 = 0$. Les dues solucions són $\kappa = -1$ i $\kappa = \frac{1}{2}$. L'única possible és $\kappa = \frac{1}{2}$ corresponent a $A = 2$.

Vegeu en la figura 15 les realitzacions amb $A = 0{,}2$, $A = 0{,}5$ i $A = 1{,}5$.

Figura 15. Realitzacions amb A = 0,2, A = 0,5 i A = 1,5

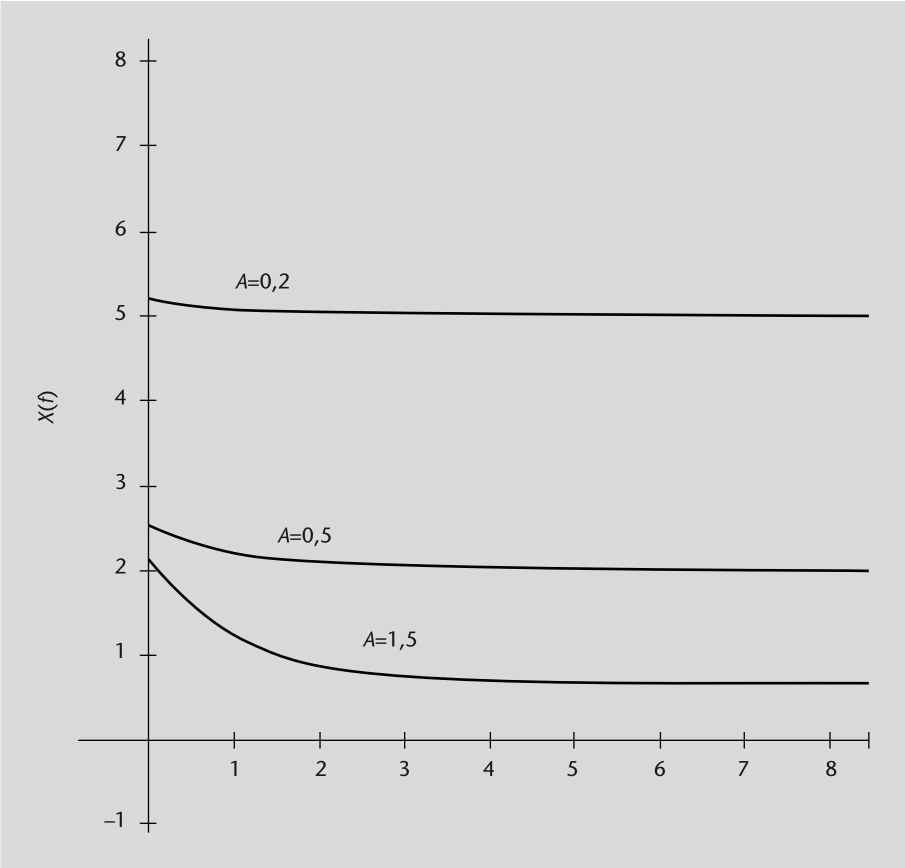


Figura 15

Realitzacions amb A = 0,2, A = 0,5 i A = 1,5

14. a) Com U pren qualsevol valor positiu, $X(2) = \cos(2 + U)$ pren valors en tot l'interval [–1,1]. Com V pren valors 0,1,2,3,4, $Y(2) = \sin(\frac{\pi}{2}V)$ només pot valer –1, 0 i 1. $Z(2)$ només pot valer 0 i 1.

b) Generalitzant a qualsevol t l'apartat anterior, veiem que $X(t)$ és d'estat continu i $Y(t)$ i $Z(t)$ són d'estat discret.

c) No és possible, ja que el procés seria funció d'una variable que només pren un conjunt numerable de valors i tal funció només prendria, per tant, un conjunt numerable de valors.

15. És a temps continu, ja que t és un paràmetre real sense cap restricció. És d'estat discret, ja que amb t fixat només pot prendre dos valors: $\cos t$ o $\sin t$.

16. Les dues primeres són realitzacions. $\varphi_1(t) = (1-t)^2 = 1-2t+t^2$, s'obté quan $A = 1, B = \sqrt{2}$. $\varphi_2(t)$ s'obté quan $A = \sqrt{2}$, $B = \sqrt{3}$. $\varphi_3(t)$ no és realització, ja que requereix $B = \sqrt{5} > 2$, mentre que B pren valors entre 1 i 2.