Funcions de variables aleatòries

Ana Escudero
Alícia Miralles
Alícia Vila

PID_00193847

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

En mòduls “Introducció a la probabilitat” i “Variables aleatòries” hem vist les bases de la teoria de la probabilitat i hem estudiat les distribucions de variables aleatòries discretes i contínues més importants. A partir d’això ens podem plantejar la pregunta següent: què succeeix si modifiquem una variable aleatòria X? Imagineu que tenim un circuit electrònic i que introduïm la variable X com a senyal d’entrada. Quin resultat obtindrem a la sortida? Serà també una variable aleatòria? I amb quines característiques? Això dependrà en cada cas de les modificacions que apliquem sobre X. Per exemple, si fem passar un senyal, X, a través d’un rectificador d’ona, com veurem més endavant, podem obtenir a la sortida un senyal, Y, amb una distribució diferent de X.

En aquest mòdul parlarem d’una variable aleatòria Y que és funció d’una altra X i escriurem $Y = g(X)$. Aquest aspecte ja es tracta de passada en el mòdul “Variables aleatòries”. En els subapartats 2.2 i 3.3 d’aquell mòdul es veu que per a calcular la variància d’una variable aleatòria cal calcular l’esperança de la variable aleatòria $(X - E(X))^2$. En aquest cas diríem que $Y = g(X) = (X - E(X))^2$.

En aquest mòdul tractarem alguns casos senzills. Començarem veient, en l’apartat 1, com podem aplicar una funció sobre una variable aleatòria discreta. En l’apartat 2 aplicarem funcions sobre variables aleatòries contínues. Veurem alguns exemples molt concrets de funcions. En l’apartat 3 enunciarem el teorema de l’esperança i veurem com el podem aplicar.

Objectius

Els objectius que ha d'assolir l'estudiant un cop treballats els materials didàctics d'aquest mòdul són:

1. Entendre el concepte de funció d'una variable aleatòria discreta.
2. Saber calcular la funció de probabilitat d'una variable aleatòria discreta transformada mitjançant una funció a partir de la funció de probabilitat de la variable aleatòria original.
3. Entendre el concepte de funció d'una variable aleatòria contínua.
4. Calcular la funció de distribució i la funció de densitat d'una variable aleatòria contínua transformada mitjançant una funció a partir de la funció de probabilitat de la variable aleatòria original.
5. Estudiar tres casos particulars de funció sobre una variable aleatòria contínua i saber en quins casos es pot aplicar.
6. Entendre el teorema de l'esperança i les seves aplicacions.

1. Funció d'una variable aleatòria discreta

Suposem que X és una variable aleatòria discreta amb valors dins el conjunt $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$. Sigui Y una nova variable aleatòria discreta definida per una funció $Y = g(X)$. Ens interessa trobar la distribució de probabilitats de Y. Suposem que Y pren valors dins el conjunt $\{b_1,b_2,b_3,\cdots,b_m\}$. Per a trobar la probabilitat de cada un d'aquests valors, b_j, hem de trobar la probabilitat del subconjunt de valors de $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$, que tenen per imatge b_j. Ho escrivim de la següent manera.

$$P(Y=b_j) = \sum_{a_i;\ g(a_i)=b_j} P(X=a_i)$$

Observació

En el cas de variables aleatòries discretes podem treballar directament amb la funció de probabilitat.

El conjunt $\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ pot tenir un nombre determinat d'elements o una quantitat infinita d'elements. Vegem-ne un exemple.

Exemple 1.1

Sigui X la variable aleatòria discreta que compta el nombre de zeros en un missatge de mida 3 format pels bits 0 i 1 (elements del conjunt $\{0,1\}$). X pot prendre els valors $\{0,1,2,3\}$, ja que aquest és el nombre de zeros que podem comptabilitzar en el missatge. Si la probabilitat que hi hagi un zero en una posició determinada és $\frac{1}{2}$, $X \sim Bin(3,\frac{1}{2})$. Ara definim una funció g sobre la variable X, $Y = g(X)$ com

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 3 & \text{altrament} \end{cases}$$

Segons hem definit $g(x)$, Y pot prendre els valors $\{2,3\}$. Calcular la distribució de probabilitats de la variable Y és donar-ne totes les probabilitats. Així,

$$P(Y=2) = P(X=0) = \binom{3}{0}\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$P(Y=3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \binom{3}{1}\frac{1}{2^3} + \binom{3}{2}\frac{1}{2^3} + \binom{3}{3}\frac{1}{2^3} = \frac{3+3+1}{16} = \frac{7}{8}$$

La suma de les probabilitats $P(Y=2) = +P(Y=3) =$ és igual a 1, ja que $g(X)$ inclou tots els valors possibles de X i sabem que la suma de $\sum_{a_i} P(X=a_i)$ és igual a 1.

Distribució binomial

Recordeu que la distribució binomial que s'estudia en el subapartat 2.1.2 del mòdul "Variables aleatòries", $Bin(n,p)$, es caracteritza pel nombre d'experiments que es realitzen; en aquest cas generem un missatge de 3 bits, i per la probabilitat d'èxit, que aquí consisteix que surti un zero i és $\frac{1}{2}$.

Probabilitats en una distribució binomial

Recordeu del subapartat 2.1.2 del mòdul "Variables aleatòries" que $P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ amb $k \in \{0,1,2,\cdots,n\}$.

2. Funció d'una variable aleatòria contínua

Suposem que X és una variable aleatòria contínua amb funció de densitat coneguda $f_X(x)$. Definim una nova variable aleatòria $Y = g(X)$, i el que voldríem és trobar la funció de distribució de Y.

Funcions de distribució i de densitat

En el subapartat 3.1 del mòdul "Variables aleatòries" vam veure que per a les variables aleatòries contínues podíem definir la funció de distribució, $F_X(x)$, i la funció de densitat, $f_X(x)$. La relació entre aquestes és: $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Segons la definició de funció de distribució de Y,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y).$$

L'equació anterior ens diu que per a cada valor de y hem de trobar la probabilitat de tots els valors de X que satisfan $g(X) \leq y$. Per tant, prèviament, cal determinar quins són els valors de X que satisfan $g(X) \leq y$. Vegem-ne un exemple.

Observació

En el cas de variables aleatòries contínues treballem amb la funció de distribució.

Exemple 2.1

Si X segueix una distribució uniforme en l'interval (8,10), vam veure que les seves funcions de densitat i de distribució són:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10-8} = \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \in (8,10) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 8 \\ \frac{1}{2}(x-8) & \text{si} \quad 8 \leq x < 10 \\ 1 & \text{si} \quad 10 \leq x \end{cases}$$

Vegeu també

En el subapartat 3.2.1 del mòdul "Variables aleatòries" podeu trobar la definició de distribució uniforme, $X \sim U(a,b)$.

Definim la nova variable $Y = g(X) = 8/X$ i volem trobar quina funció de distribució segueix, és a dir, volem trobar $F_Y(y)$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{8}{X} \leq y\right) = P\left(X \geq \frac{8}{y}\right),$$

ja que X i Y són positives.

La funció de distribució d'una variable aleatòria es defineix com $F_X(x) = P(X \leq x)$. Per tant, per a poder escriure $F_Y(y)$ en funció de $F_X(x)$ farem el canvi següent:

$$P\left(X \geq \frac{8}{y}\right) = 1 - P\left(X < \frac{8}{y}\right).$$

Recordeu que si la probabilitat d'un succés és p, la del seu complementari és $1 - p$. Continuem, doncs, amb els càlculs:

$$F_Y(y) = 1 - P\left(X < \frac{8}{y}\right) = 1 - F_X\left(\frac{8}{y}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{8}{y} - 8\right) = 5 - \frac{4}{y}.$$

Observació

En el cas de variables aleatòries contínues $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X < x)$ ja que $\forall x, P(X = x) = 0$.

Les igualtats anteriors són vàlides quan X es troba entre 8 i 10. Com que $y = \frac{8}{x}$, els càlculs són vàlids en l'interval de y $\frac{8}{10}$ i $\frac{8}{8}$, és dir, $0{,}8 < y \leq 1$.

Figura 1. Funció $y = g(x) = \frac{8}{x}$

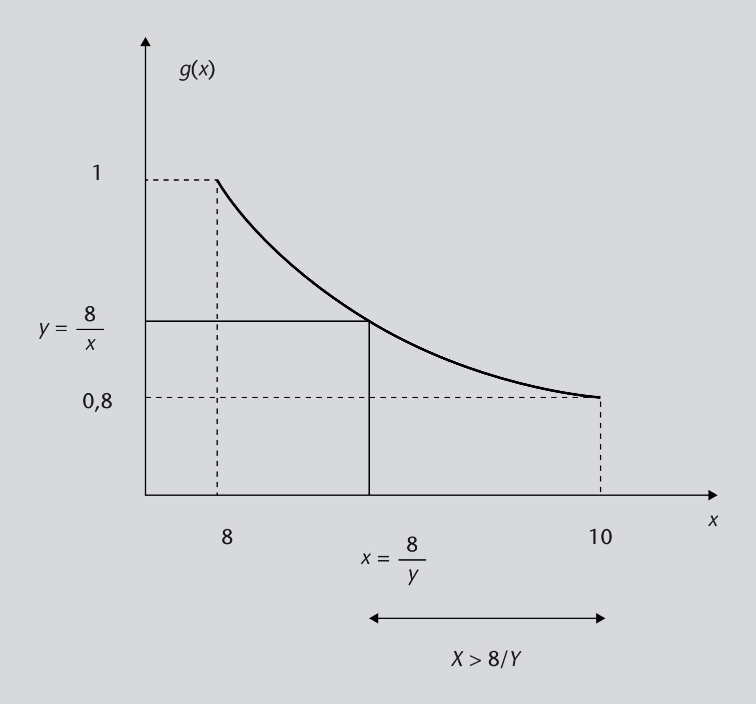


Figura 1

En aquesta figura podeu veure quina és la transformació que hem aplicat a la variable aleatòria X.

La funció de distribució és:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \leq 0{,}8 \\ 5 - \frac{4}{y} & \text{si} \quad 0{,}8 < y \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad y > 1 \end{cases}$$

La funció de densitat de Y la trobem derivant la funció de distribució. Tenim

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{y^2} & \text{si} \quad 0{,}8 < y < 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Observem que Y no segueix una distribució uniforme, ja que tot i que partíem d'una distribució uniforme, $F_X(x)$, li hem aplicat una transformació no lineal.

En l'exemple anterior, per a poder obtenir la funció de densitat de Y, $f_Y(y)$ hem hagut de calcular prèviament la funció de distribució $F_Y(y)$. Quan la funció $g(x)$ és derivable i estrictament creixent o estrictament decreixent, podem trobar la funció de densitat de Y directament a partir de la funció de densitat de X, $f_X(x)$, tal com s'explica a continuació.

Funcions derivables

De manera informal, diem que una funció és derivable quan és contínua i no té salts ni pics.

2.1. Funció de densitat de $Y = g(X)$ quan $g(x)$ és estrictament creixent

Comencem, doncs, assumint una funció contínua, creixent i amb una correspondència d'un a un entre la variable X i els valors que pren, $Y = g(X)$. Per definició, sabem que la funció de distribució de la variable Y es defineix com $F_Y(y) = P(Y \leq y)$. També sabem que $Y = g(X)$; per tant:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y).$$

Sota les condicions que acabem d'enumerar en el paràgraf anterior per a $Y = g(X)$, existeix una funció inversa, $g^{-1}(x)$, que està ben definida en tots el punts i que ens permet obtenir els valors de X a partir de Y. Si apliquem la funció inversa als dos costats de l'expressió $g(X) \leq y$ obtenim el següent:

Funció inversa

Intuïtivament, la funció inversa $g^{-1}(x)$ desfà els canvis que havia fet la funció $g(x)$.

$$g^{-1}(g(X)) \leq g^{-1}(y) = X \leq g^{-1}(y).$$

Si seguim amb el càlcul que havíem començat de $F_Y(y)$, podem escriure el següent:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)).$$

Ara, en el darrer terme d'aquesta igualtat apareix la probabilitat que X sigui més petita que un cert valor, és a dir, apareix la definició de la funció de distribució de X, ja que $P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$. Per tant, podem dir que:

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)).$$

De fet, com que $g^{-1}(y) = x$ i $g(x) = y$, l'expressió anterior és equivalent a escriure el següent:

$$F_Y(g(x)) = F_X(x).$$

Vegeu també

La funció de densitat s'estudia al subapartat 3.1 del mòdul "Variables aleatòries".

Un cop trobada la funció de distribució en farem la derivada per a trobar la funció de densitat. Abans de fer aquest pas cal apuntar que el fet que $g(x)$ sigui estrictament creixent i derivable ens permet escriure:

$$(g^{-1}(y))' = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \frac{1}{g'(x)} \quad \text{amb} \quad x = g^{-1}(y),$$

Derivada de funcions inverses

Si $f(x)$ i $g(x)$ són funcions inverses, és a dir, $g \circ f = f \circ g = I$, llavors $g'(x) = \frac{1}{f'(x)}$.

és a dir, la derivada d'aquesta funció inversa, $g^{-1}(x)$, és 1 dividit entre la derivada de la funció $g(x)$. Ara ja podem derivar l'expressió següent:

$$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y)),$$

i arribem al resultat següent.

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} \quad \text{amb} \quad x = g^{-1}(y)$$

Exemple 2.2

Considerem les variables aleatòries X i $Y = X^3$. En aquest cas tenim $g(x) = x^3$, que és estrictament creixent i derivable. Utilitzant el resultat que acabem de trobar que relaciona les funcions de densitat $f_Y(y)$ i $f_X(x)$, arribem al resultat següent:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{f_X(x)}{3x^2} \quad \text{amb} \quad x = g^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}.$$

Exemple 2.3

Suposeu que tenim una variable aleatòria gaussiana amb valor mitjà μ i variància σ^2. Definim una nova variable aleatòria segons la transformació següent: $Y = aX + b$. Si fem $a > 0$, llavors aquesta funció $g(X) = aX + b$ és estrictament creixent.

Ara calculem la funció de densitat de la nova variable Y:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{1}{a} f_X(x) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Per a arribar a aquest resultat, recordeu que $dy/dx = a$ i que $x = \frac{y-b}{a}$. Ara substituïm la funció de densitat $f_X(x)$ d'aquesta darrera igualtat per la funció de densitat de la distribució normal o de Gauss i arribem a l'equació següent:

Vegeu també

La distribució de Gauss s'estudia en el subapartat 3.2.3 del mòdul "Variables aleatòries".

$$f_Y(y) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-(b+am))^2}{2a\sigma^2}}.$$

Fixeu-vos que la funció de densitat de la variable Y és també gaussiana; això és perquè hem aplicat una transformació lineal i, per tant, la forma de la variable Y s'ha mantingut. Únicament han canviat el valor mitjà i la variància.

2.2. Funció de densitat de $Y = g(X)$ quan $g(x)$ és estrictament decreixent

Si la funció $g(x)$ és estrictament decreixent i derivable, obtenim una expressió semblant a la del subapartat anterior:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y)).$$

Fixeu-vos, però, en la tercera igualtat d'aquesta equació. Com que la funció que apliquem ara és decreixent, el succés $Y \leq y$ és equivalent al succés $X \geq g^{-1}(y)$. En la quarta igualtat apliquem el fet que si un succés té una probabilitat p, el seu complementari té una probabilitat $1 - p$.

Com hem fet en el subapartat 2.1, si derivem aquesta expressió arribem a la següent expressió.

$$f_Y(y) = -\frac{f_X(x)}{g'(x)} \quad \text{amb} \quad x = g^{-1}(y).$$

Exemple 2.4

Considerem les variables aleatòries X i $Y = -X^3$. En aquest cas tenim $g(x) = -x^3$, que és estrictament decreixent i derivable. La relació entre les funcions de densitat és

$$f_Y(y) = -\frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{f_X(x)}{3x^2} \quad \text{amb} \quad x = g^{-1}(y) = (-y)^{\frac{1}{3}}.$$

2.3. Funció de densitat de $Y = g(X)$ quan $g(x)$ té extrems locals

En el cas més general en què la funció $y = g(x)$ és derivable i tingui un nombre finit d'extrems locals, cal separar el domini de $g(x)$ en intervals en què la funció sigui estrictament creixent o estrictament decreixent. Això ho aconseguim resolent prèviament l'equació $g'(x) = 0$ (per tal d'obtenir els màxims i mínims locals). Si obtenim n intervals, dins de cada un d'aquests intervals $g(x)$ serà estrictament creixent o estrictament decreixent i, per tant, existirà la inversa de $y = g(x)$. Per a cada interval $i \in \{1,2,...,n\}$, sigui $x_i = g^{-1}(y)$ dins de l'interval i. És a dir, resolem $y = g(x)$ amb solucions $x_1(y),...x_n(y)$.

Extrems locals

Anomenem *extrem local* un màxim o un mínim d'una funció $f(x)$. La derivada de la funció en els extrems locals (si existeix) és igual a zero.

Llavors, la funció de densitat de Y s'obté a partir de l'expressió següent:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \cdots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}.$$

2.4. Exemples aplicats a les comunicacions: el rectificador de mitja ona i el convertidor d'analògic a digital

Exemple 2.5

Un rectificador de mitja ona és un dispositiu electrònic que elimina la part positiva o negativa d'un senyal. En la figura 2 en podeu veure el funcionament.

Figura 2. Rectificador de mitja ona

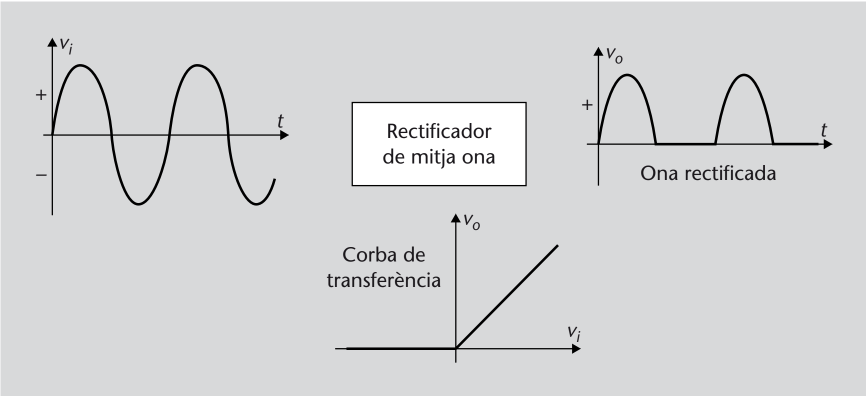


Figura 2

El rectificador de mitja ona d'aquest exemple elimina la part negativa del senyal d'entrada.

La funció $g(x)$ definida per aquest dispositiu és

$$y = g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Ara suposeu que fem passar per aquest rectificador un senyal gaussià de mitjana zero i variància σ^2. Calcularem la funció de densitat de la variable aleatòria generada a la sortida del rectificador.

Observació

Fixeu-vos que en realitat la variable y és mixta, ja que per a valors negatius de x pren un únic valor (discret), igual a zero, i per a valors positius, pren el valors de x.

Per a valors de x positius ($x \geq 0$), la derivada de y respecte de la variable x, $g'(x)$, és igual a 1. Per tant:

$$f_Y(y) = f_X(x).$$

Què succeeix per a valors de x negatius? En aquest cas $g(x) = 0$ i $g'(x)$ és igual a zero. Si intentem aplicar l'expressió que ens permet trobar $f_Y(y)$ en funció de $f_X(x)$ ens trobem que tindríem el valor zero al denominador. Per a treballar amb aquest cas, observeu que dir $X \leq 0$ és equivalent a l'esdeveniment $Y = 0$. És dir, $P(Y=0) = P(X < 0)$.

Hem definit el senyal d'entrada al rectificador com una variable de Gauss amb valor mitjà zero; per tant, $P(X < 0) = \frac{1}{2}$.

Així doncs, la funció de densitat del senyal de sortida del rectificador és la següent:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} u(y) + \frac{1}{2}\delta(y).$$

Fixeu-vos que aquesta funció de densitat té dues parts: una part contínua, que és dóna per a valors de y més grans que zero (per això el primer terme està multiplicat per la funció graó $u(y)$), i una part discreta per a $y = 0$, que representem utilitzant la funció delta ($\delta(y)$).

Exemple 2.6

Suposem que ara la transformació $g(x)$ que apliquem a un senyal d'entrada és $g(x) = y_0$ en comptes de $g(x) = x$ per a $x_1 \leq x \leq x_2$. Com hem vist en l'exemple anterior, la funció de densitat $f_Y(y)$ inclourà un component discret (acompanyat de la funció delta, $\delta(y)$) de valor igual a $P(Y = y_0) = P(x_1 \leq x \leq x_2)$ en el punt $y = y_0$. Podem definir diferents valors de $g(x)$ per a diferents intervals. Així és com funciona un convertidor d'analògic a digital. Donat un senyal d'entrada analògic (continu), aquest circuit el que fa és discretitzar-lo segons una sèrie d'intervals definits i amb una resolució concreta. En la figura 3 podeu veure com és la corba de transferència o transformació $g(x)$ d'aquest dispositiu.

Figura 3. Corba de transferència d'un quantificador

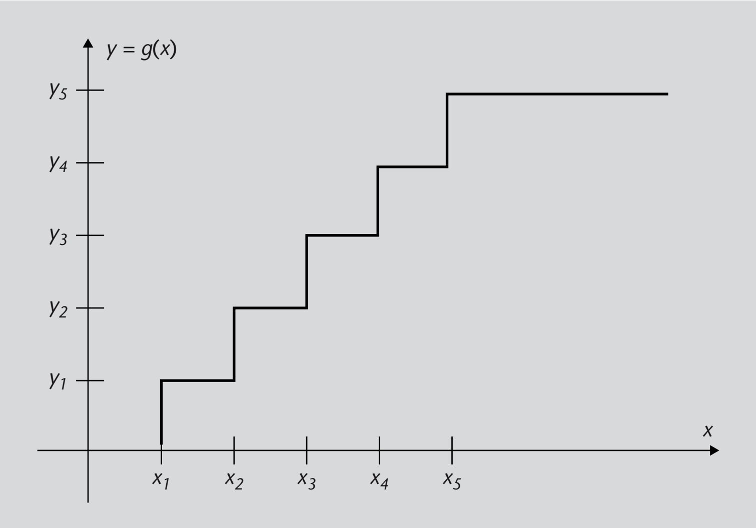


Figura 3

Un quantificador transforma un senyal analògic i continu en un senyal discret o digital.

En termes de variables aleatòries, aquest convertidor pren una variable aleatòria contínua, X, i la transforma en una variable aleatòria discreta. Si definim la funció $g(x)$ de la manera següent:

$$y = g(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si} \quad x < x_1 \\ & \dots \\ y_i & \text{si} \quad x_i \leq x < x_{i+1} \\ & \dots \\ y_N & \text{si} \quad x \geq X_N \end{cases}$$

Llavors Y es converteix en una variable aleatòria discreta i podem treballar directament amb les probabilitats, tal com hem vist en l'apartat 1 d'aquest mòdul. La funció de probabilitat per a aquest exemple queda, doncs, definida com segueix:

$$P(Y = y_i) = \begin{cases} P(X < x_1) \quad \text{per} \quad i = 0 \\ P(x_i \leq x < x_{i+1}) \quad \text{per} \quad i = 1,2,\dots N-1 \\ P(X \geq x_N)\text{per} \quad i = N \end{cases}$$

3. Teorema de l'esperança

En els apartats anteriors d'aquest mòdul hem vist com es poden aplicar funcions sobre una variable aleatòria, ja sigui discreta o contínua, per a obtenir una nova variable aleatòria. En el cas de les variables discretes hem vist que podem definir directament les probabilitats (funció de probabilitat) de la nova variable aleatòria. En el cas de les variables aleatòries contínues, hem vist com podem obtenir les funcions de distribució i de densitat. També hem obtingut una fórmula que ens simplifica els càlculs i que podem aplicar quan la funció de transformació, $g(x)$, és estrictament creixent, decreixent, o podem fer aquesta separació per trams.

Moltes vegades només ens interessa trobar el valor mitjà o esperança de la variable transformada $Y = g(X)$ i no ens cal trobar prèviament la funció de densitat $f_Y(y)$. El teorema de l'esperança ens permet trobar l'esperança, $E(Y)$, de la variable aleatòria Y definida per $Y = g(X)$, encara que $f_Y(y)$ no sigui coneguda.

Teorema de l'esperança per a variables aleatòries contínues. Si X és una variable aleatòria contínua i definim una nova variable aleatòria, $Y = g(X)$, llavors

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx.$$

Encara que hem enunciat aquest teorema per a variables aleatòries contínues, també és vàlid per a variables aleatòries discretes i només cal tenir en compte que en lloc d'integrals tindrem sumatoris.

Teorema de l'esperança per a variables aleatòries discretes. Si X és una variable aleatòria discreta que pren valors en el conjunt $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ i definim una nova variable aleatòria discreta $Y = g(X)$, llavors

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} g(a_i) P(X = a_i).$$

Exemple 3.1

Amb el mateix enunciat que en l'exemple 4.2, trobarem l'esperança de la variable Y de dues maneres diferents:

1) A partir de la definició de $E(Y)$ i a partir de $f_Y(y)$. Havíem trobat

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{y^2} & \text{si} \quad 0{,}8 < y < 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

tenim

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \int_{0{,}8}^{1} y\, \frac{4}{y^2}\, dy = [4\ \ln(y)]_{0{,}8}^{1} = -4\ln(0{,}8).$$

2) Utilitzant el teorema de l'esperança, en què només cal recordar la funció de densitat de la variable original, X:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad 8 < x < 10 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx = \int_{8}^{10} \frac{8}{x}\frac{1}{2} = 4(\ln 10 - \ln 8) = -4\ \ln(0{,}8)$$

Observació

El teorema de l'esperança ens permet calcular directament l'esperança de $Y = g(X)$ a partir de la funció de densitat (o de probabilitat) de la variable aleatòria X.

Proposició 3.1: linealitat de l'esperança. Sigui X una variable aleatòria contínua o discreta; se satisfà:

$$E(ag(X) + bh(X)) = aE(g(X)) + bE(h(X)),$$

en què $a, b \in \mathbb{R}$ i h, g funcions de X.

Amb aquesta propietat ara podem demostrar una propietat que ja havíem fet servir:

$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2.$

Observació

L'esperança és un operador lineal. A més, cal notar que en el cas d'una constant c se satisfà $E(c) = c$. Cal notar, però, que la variància no presenta aquesta propietat.

Exemple 3.2

El temps en anys, T, que triga a espatllar-se un component electrònic, segueix una distribució exponencial, $Exp(1)$. El cost, Y, de reparació del component durant el primer any, és funció de $2X$, mentre que després és de $3X + 2$. Trobem el valor mitjà del cost.

Podem expressar el cost Y com

$$Y = g(X) = \begin{cases} 2X & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 3X + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

A continuació calculem l'esperança de la variable Y:

$$E(Y) = \int_0^{\infty} g(X)e^{-x}dx = \int_0^1 2xe^{-x}dx + \int_1^{\infty} (3x+2)e^{-x}dx = = 2(1-2e^{-1}) + 3 \cdot 2e^{-1} + 2 = 4 + 2e^{-1}.$$

Una altra manera de trobar el valor mitjà del cost seria la següent. Representem per $E_1(X)$ la mitjana de X, en l'interval (0,1), i per $E_2(X)$ la mitjana de X, en l'interval $(1, +\infty)$. És a dir,

$$E_1(X) = \int_0^1 x \cdot e^{-x}\, dx = 1 - 2e^{-1} \quad E_2(X) = \int_1^{+\infty} x \cdot e^{-x}\, dx = 2e^{-1}.$$

A causa de les propietats de la integral, podem dir que

$$E(X) = E_1(X) + E_2(X)$$

$$E(Y) = E_1(2X) + E_2(3X + 2) = 2E_1(X) + 3E_2(X) + 2 = 2(1 - 2e^{-1}) + 3(2e^{-1}) + 2 = 4 + 2e^{-1}.$$

Resum

En aquest mòdul hem vist que podem prendre una variable aleatòria (ja sigui discreta o contínua) i aplicar-hi una funció $g(X)$ tal que obtenim una nova variable aleatòria $Y = g(X)$.

Per al cas de les variables aleatòries discretes (apartat 1 d'aquest mòdul) hem vist que podem calcular la distribució de probabilitats (és a dir, definir totes les probabilitats $P(Y = b_j)$) a partir de les probabilitats de X:

$$P(Y=b_j) = \sum_{a_i;\ g(a_i)=b_j} P(X=a_i).$$

Per al cas de les variables aleatòries contínues (apartat 2 d'aquest mòdul) hem vist que a partir de la funció de distribució i de densitat de X, $F_X(x)$ i $f(x)$, respectivament, podem calcular la funció de distribució i de densitat de la nova variable aleatòria Y:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y).$$

Hem vist també tres casos especials que ens permeten calcular ràpidament la funció de densitat de la nova variable Y a partir de la funció de densitat de la variable X. Aquests casos són els següents:

- Quan la funció $g(x)$ és estrictament creixent, llavors

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} \quad \text{amb} \quad x = g^{-1}(y).$$

- Quan la funció $g(x)$ és estrictament decreixent, llavors

$$f_Y(y) = -\frac{f_X(x)}{g'(x)} \quad \text{amb} \quad x = g^{-1}(y).$$

- Quan la funció $g(x)$ té extrems locals, llavors

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \cdots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}.$$

Finalment hem vist dos exemples aplicats a les telecomunicacions: el convertidor de mitja ona i el convertidor d'analògic a digital.

Activitats

1. Disposem d'un generador de nombres aleatoris, X, dins de l'interval (0,1). Volem estudiar què succeeix amb el nostre generador si apliquem sobre X una funció exponencial de tipus $Y = e^X$. Es demana el següent:

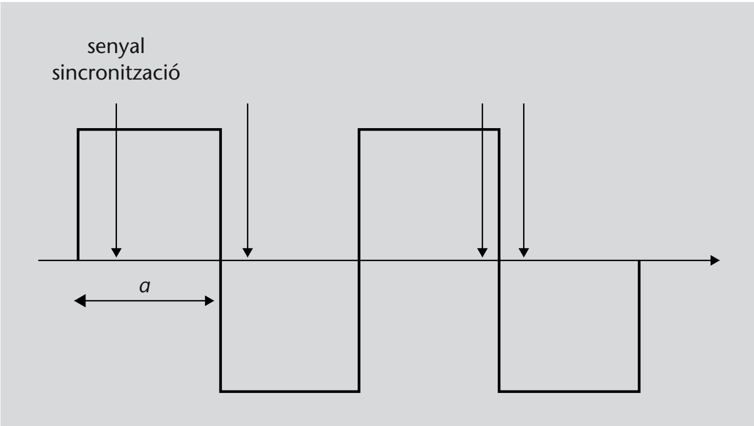
a) Trobeu la funció de distribució de la variable aleatòria Y.

b) Trobeu la funció de densitat de la variable aleatòria Y.

c) Trobeu $E(Y)$ a partir de la funció de densitat de X.
Pista: utilitzeu el teorema de l'esperança.

2. Disposem d'un generador d'ona quadrada en què l'amplada de cada pols depèn de la freqüència de treball. Anomenem aquesta amplada a. Dins de cada pols, necessitem rebre un senyal de sincronització. Anomenem X aquest senyal, que es comporta com una variable aleatòria uniforme en l'interval $(0,a)$, en què $a > 0$. En la figura 4 en podeu veure un exemple.

Figura 4. Variable X uniforme en l'interval $(0,a)$



Es demana:

a) Trobeu el valor esperat de la variable aleatòria X, és a dir, $E(X)$.

b) Trobeu el moment d'ordre 2 de la variable aleatòria X, és a dir, $E(X^2)$.

c) Trobeu l'expressió genèrica del moment d'ordre n de la variable aleatòria X, és a dir, $E[X^n],(n = 1,2,...)$.

3. L'atenuació en els senyals transmesos que introdueix un canal de comunicacions es pot modelitzar amb una variable aleatòria X que segueix una distribució $N(m,\sigma)$. Per tal de compensar les pèrdues introduïdes fem passar el senyal de sortida per un filtre amb forma $Y = e^X$. Es demana el següent:

a) Representeu la funció $y = g(x) = e^x$ i comproveu que és una funció derivable i estrictament creixent.

b) Trobeu la funció de densitat de Y, expressada en funció dels paràmetres m i σ.
Pista: utilitzeu la conclusió de l'apartat anterior.

c) Quan $X = \ln Y$ és una normal, la distribució de Y s'anomena *log-normal*. Busqueu per Internet algun àmbit d'aplicació d'aquesta distribució log-normal (per exemple, l'àmbit de la fiabilitat) i comenteu-lo breument.

4. Hem mesurat un camp elèctric unidimensional en una única direcció i amb una amplitud que es representa per una variable aleatòria X uniforme en l'interval [0,2]. Per tal de calcular la potència que transporta l'ona electromagnètica, necessitem calcular el quadrat del mòdul del camp. Per tant, definim $Y = X^2$. Es demana el següent:

a) Trobeu la funció de distribució de la variable aleatòria Y.

b) Trobeu la funció de densitat de la variable aleatòria Y.

c) Trobeu $E(Y)$ a partir de la funció de densitat de X.
Pista: utilitzeu el teorema de l'esperança.

5. Sigui X una variable aleatòria contínua amb funció de distribució $F_X(X)$. Es defineix $Y = g(X) = F_X(X)$. Demostreu que Y és una variable aleatòria uniforme en (0,1), és a dir, que la seva funció de densitat coincideix amb la d'una uniforme en (0,1).

Pista: utilitzeu el fet que $F(x)$ és una funció creixent i derivable en l'interval considerat i apliqueu els resultats que s'han vist en el mòdul. La derivada de $F(x)$ és més gran que zero tret d'algun punt aïllat.

6. Fem passar un senyal acústic X per un distorsionador que té la funció característica següent: $y = g(x) = aX + b$, en què a és un valor positiu. La distribució de freqüències del senyal acústic és una variable aleatòria exponencial tal que:

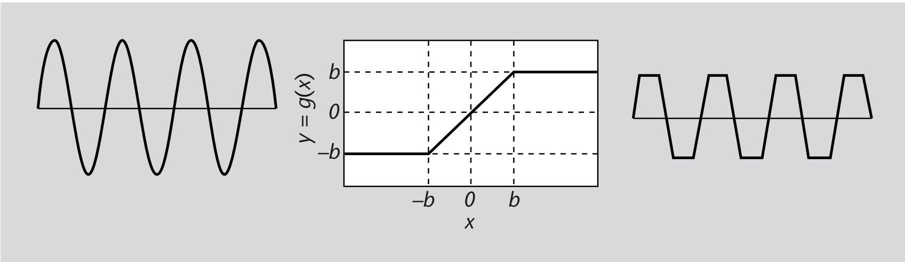
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-cx} & x \geq 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

amb $c > 0$. Trobeu la funció de distribució i la funció de densitat de la variable aleatòria, Y.

7. Un saturador és un circuit que retalla l'amplitud dels senyals a partir d'un cert llindar. En la figura 5 en podeu veure un exemple.

Trobeu la funció de distribució i de densitat de Y en funció del paràmetre b i de $F_X(x)$, $f_X(x)$.

Figura 5. Circuit saturador



Solucionari

1.

a) Ja que $X \approx U(0{,}1)$, la funció de densitat de X serà: $f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

Noteu que $0 < x < 1 \Leftrightarrow 1 < y < e$. Per tant, la funció de distribució de Y serà: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(e^X \leq y\right) = P(X \leq \ln y) = \int_{-\infty}^{\ln y} f_X(x)dx = \int_0^{\ln y} dx = \ln y \quad (1 < y < e)$.

És a dir: $F_Y(y) = \begin{cases} \ln y & 1 < y < e \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

b) La funció de densitat de Y serà: $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{y} \qquad (1 < y < e)$.

És a dir: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & 1 < y < e \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

c) Pel teorema de l'esperança: $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \cdot f_X(x)dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1$.

2.

a) $X \approx U(0,a) \rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

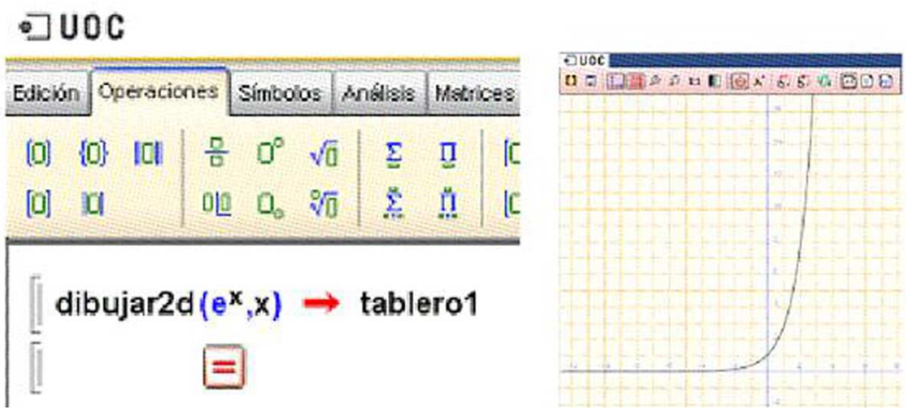
$$E(X) = \int_0^a \frac{x}{a}dx = \left[\frac{x^2}{2a}\right]_0^a = \frac{a}{2}$$

b) $E(X^2) = \int_0^a \frac{x^2}{a}dx = \left[\frac{x^3}{3a}\right]_0^a = \frac{a^2}{3}$

c) $E(X^n) = \int_0^a \frac{x^n}{a}dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)a}\right]_0^a = \frac{a^n}{n+1}$

3.

a) La gràfica de la funció és:



b) La funció de densitat de X és: $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right] \quad -\infty < x < \infty$.

Ja que $y = g(x) = e^x$ és estrictament creixent i derivable, sabem que: $x = g^{-1}(y) = \ln y$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{1}{y}f_X(\ln y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln y - \mu)^2\right] \quad 0 < y < \infty$$

c) Un dels àmbits en què s'aplica la distribució log-normal és el de la fiabilitat. Aquesta distribució se sol utilitzar per a modelitzar temps de fallida o de reparació de dispositius electrònics que formen part de sistemes o xarxes de telecomunicacions. En aquests casos, se sol fer ús de la log-normal (o d'altres distribucions com la de Weibull) per a modelitzar els temps esmentats, ja que si utilitzéssim una distribució normal es podrien obtenir valors negatius per als temps de fallida o reparació, la qual cosa mancaria de sentit.

4.

a) Ja que $X \approx U(0,2)$, la funció de densitat de X serà: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

Noteu que $0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4$.

Per tant, la funció de distribució de Y serà:

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(X^2 \leq y\right) = P\left(0 \leq X \leq \sqrt{y}\right) = \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x)dx = \ \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{y}} dx = \frac{\sqrt{y}}{2} \ \ (0 \leq y \leq 4).$

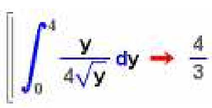
És a dir: $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{\sqrt{y}}{2} & 0 \leq y \leq 4 \\ 0 & y > 4 \end{cases}$

b) La funció de densitat de Y serà: $f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}\frac{\sqrt{y}}{2} = \frac{1}{4\sqrt{y}} \qquad (0 \leq y \leq 4).$

És a dir: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}} & 0 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$

c) Segons el teorema de l'esperança: $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{4}{3}$.

Podem verificar que coincideix amb el valor esperat: $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)dy = \int_0^4 \frac{y}{4\sqrt{y}}dy = \frac{4}{3}$.



5. Per les propietats de les funcions de distribució, $F(X)$ és creixent en $\mathbb{R}$ amb valors dins de (0,1). A més a més, fent ús del resultat sobre funcions de densitat de $Y = g(X)$, tenim que:

$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{f_X(x)}{\frac{dF_X(x)}{dx}} = \frac{f_X(x)}{f_X(x)} = 1 \qquad 0 < x < 1.$

És a dir:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Per tant, Y és una $U(0,1)$.

6. Sabem que $y = g(x) = aX + b$; per tant, aïllant la x d'aquesta expressió arribem a

$$x = g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$$

D'aquesta relació podem treure:

$$F_Y(Y) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Si X té la funció de distribució donada en l'enunciat amb $c > 0$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-cx} & x \geq 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Llavors:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-c\frac{y-b}{a}} & y \geq b \\ 0 & y < b \end{cases}$$

Per a calcular la funció de densitat sabem que:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|}$$

Per tant:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{c}{|a|}e^{-c\frac{y-b}{a}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Com que $a > 0$ podem concloure:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{c}{a}e^{-c\frac{y-b}{a}} & y \geq b \\ 0 & y < b \end{cases}$$

7. Segons la figura 5 la nostra variable Y pren els valors següents:

$$Y = \begin{cases} -b & x < -b \\ x & -b \leq x < b \\ b & x \geq b \end{cases}$$

Tenint en compte això i en funció de $F_X(x)$, és a dir, per a una funció de distribució de X genèrica, $F_Y(y)$ és:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -b \\ F_X(y) & -b \leq y < b \\ 1 & y \geq b \end{cases}$$

Per a calcular la funció de distribució hem de tenir en compte que, dins de l'interval $[-b,b]$, $X = Y$. Per a valors fora d'aquest interval, la funció $y = g(x)$ és una constant, i per tant la seva derivada és zero. Per tant, i tal com havíem vist en l'exemple 2.5 d'aquest mòdul, podem expressar la funció de densitat com segueix:

$$f_Y(y) = \begin{cases} P(X < -b) \cdot \delta(y) & y < -b \\ f_X(x) & -b \leq y < b \\ P(X > b) \cdot \delta(y) & y > b \end{cases}$$

Bibliografia

Gubner, J. A. (2006). *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers*. Cambridge University Press.

Hsu, H. (2010). *Schaum's Outline of Probability, Random Variables, and Random Processes*. McGraw-Hill.

Leon-Garcia, A. (2008). *Probability, Statistics, and Random Processes For Electrical Engineering*. Prentice Hall.

Miller, S.; Childers, D. (2004). *Probability and Random Processes: With Applications to Signal Processing and Communications*. Academic Press.

Yates, R. D.; Goodman, D. (2004). *Probability and Stochastic Processes: A Friendly Introduction for Electrical and Computer Engineers*. Wiley.