

Fonaments bàsics. Antenes de fil

Aurora Andújar Linares
Jaume Anguera Pros

PID_00178410

Índex

Introducció	5
Objectius	6
1. Mecanisme de radiació	7
2. Equacions de radiació	10
3. Dipols	20
4. Espires	27
5. Teoria d'imatges: monopols i dipols sobre plans conductors.	34
5.1. Pla elèctric conductor infinit amb conductivitat infinita	34
5.1.1. Fil horitzontal	35
5.1.2. Fil vertical	38
5.1.3. Monopol	40
5.2. Pla elèctric conductor infinit amb conductivitat finita	47
5.3. Pla elèctric conductor de dimensions finites	49
6. Lectures obligatòries i complementàries	51
Bibliografia	53

Introducció

“En qüestions de ciència, l'autoritat de mil individus no val el mateix que l'humil raonament d'un de sol.”

Galileu Galilei (1564-1642), astrònom i físic italià

Aquest mòdul versa sobre els fonaments bàsics de radiació, que permeten calcular d'una manera metòdica la radiació produïda per una distribució arbitrària de corrents sobre una estructura conductora. En aquest sentit i partint de les equacions de Maxwell, es presenta de manera resumida el mètode que permet trobar l'equació que relaciona els corrents sobre una estructura qualsevol amb el camp electromagnètic radiat.

Amb l'objectiu de simplificar el càlcul i sense perdre generalitat, s'aplica el mètode a distribucions lineals de corrent que es corresponen amb les que es troben en antenes de fil com els dipòls, que són l'objectiu d'estudi d'aquest mòdul. El procediment matemàtic presentat permet, a més, abordar problemes més complexos, com les agrupacions d'antenes. Malgrat que les agrupacions d'antenes són objecte d'estudi en el mòdul “Agrupacions d'antenes”, en aquest mòdul es mostra com es pot abordar el càlcul d'estructures formades per diversos fils. En aquest sentit, s'analitza una espira quadrada com a combinació de quatre fils. Finalment, el mòdul acaba amb l'estudi de la influència del pla de massa sobre el comportament de les antenes. Exemples de plans de massa són la mateixa superfície de la Terra o les estructures metàl·liques d'avions i vaixells en el cas d'antenes embarcades.

El mecanisme matemàtic presentat en aquest mòdul transcendeix el camp de les antenes més bàsiques, ja que permet entendre i analitzar totes les antenes de les quals es conegui la distribució de corrent, tant volumètrica, superficial com lineal. En la majoria dels casos aquesta distribució s'aproximarà, la qual cosa resulta relativament senzill per a antenes simples. Per a antenes més complexes, es recourrà a tècniques de càlcul numèric que permetran conèixer aquesta distribució de corrent de manera més precisa. Una vegada que queda definida la distribució de corrent, s'aplica el procediment matemàtic exposat en aquest mòdul per a poder calcular els camps radiats.

Objectius

Els principals objectius d'aquest mòdul són els següents:

1. Conèixer el mecanisme de radiació de les ones electromagnètiques de manera qualitativa.
2. Comprendre les expressions matemàtiques que permeten caracteritzar aquest mecanisme de radiació de manera quantitativa.
3. Conèixer el mecanisme per a calcular els camps radiats per un dipol elemental, i també els paràmetres d'antena més rellevants: diagrama de radiació, potència radiada, resistència de radiació i directivitat.
4. Entendre quines són les limitacions del dipol elemental.
5. Calcular els camps radiats, el diagrama de radiació, la potència radiada, la resistència de radiació i la directivitat d'antenes lineals bàsiques: dipols i espïres.
6. Conèixer i saber modelitzar l'efecte del pla de massa en el comportament d'una antena.
7. Comprendre la limitació multifreqüència de les antenes dipol.

1. Mecanisme de radiació

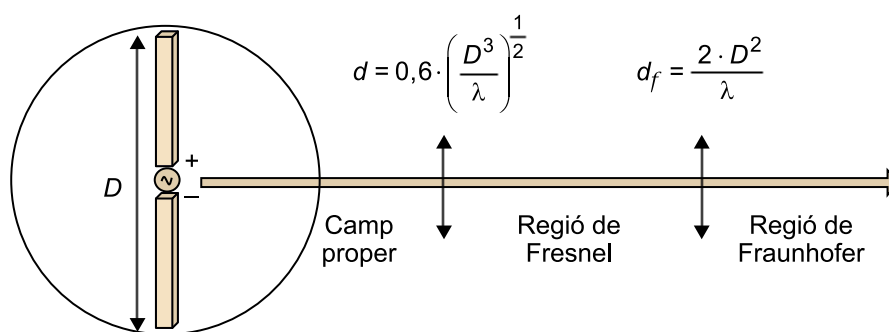
Aquest apartat aborda de manera qualitativa el mecanisme de radiació d'una antena a fi d'introduir el concepte físic de la generació d'una ona electromagnètica.

La radiació electromagnètica és una combinació de camps elèctrics i magnètics que es propaguen per l'espai transportant energia d'un lloc a un altre. Aquesta radiació electromagnètica es pot propagar en el buit.

D'aquesta manera, perquè el fenomen de la radiació electromagnètica tingui lloc és important disposar d'una font i d'un conductor, encara que a vegades n'hi haurà prou amb un dielèctric per a establir les condicions de contorn que permetin la radiació. La font s'encarrega d'induir un corrent i al seu torn aquest corrent genera un camp elèctric i un camp magnètic que, si es donen les condicions adequades, es propagaran en forma d'ona electromagnètica a la mateixa freqüència que el corrent altern generat per la font. Les condicions de contorn establertes pel conductor determinaran si hi haurà una ona electromagnètica que es propagui o no.

A tall d'exemple, se suposa un dipol i un observador situat a la regió de camp llunyà o regió de Fraunhofer. Cal introduir en aquest punt les diferents regions de l'espai que determinen el comportament principal dels camps electromagnètics quan aquests s'avaluen a una determinada distància de la font (figura 1).

Figura 1. Regions de camp



Camp proper reactiu, camp proper radiat o regió de Fresnel i camp llunyà o regió de Fraunhofer

La particularitat de la **regió de camp llunyà** o **regió de Fraunhofer** és que hi predominen els camps radiats i el diagrama de radiació és independent de la distància. Per això, el comportament radioelèctric de les antenes que es presentaran al llarg d'aquest mòdul i en la resta de mòduls s'estudiarà sempre considerant la regió de camp llunyà. A la regió intermèdia o **regió de Fresnel** el diagrama de radiació es modifica segons la distància. Al seu torn, la **regió de camp proper** és la que determina el comportament reactiu de l'antena ja que,

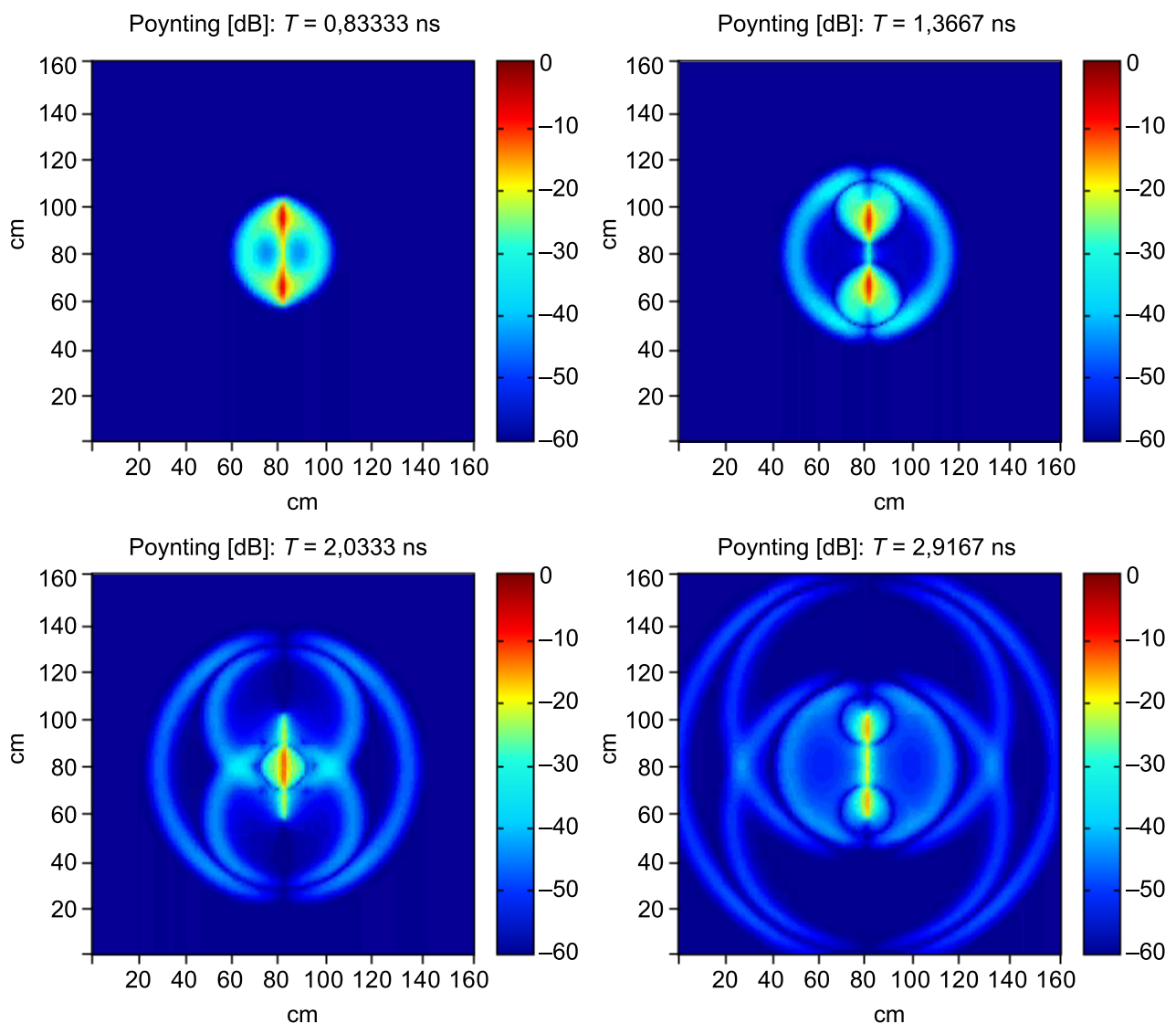
a diferència de la zona de Fraunhofer, en aquesta zona de l'espai predominen els camps induïts, que resulten interessants a l'hora d'analitzar les perturbacions que experimenten les antenes en presència d'objectes propers.

Una vegada analitzades les tres regions de l'espai que caracteritzen el comportament dels camps electromagnètics, es reprèn l'exemple anterior. D'aquesta manera, es presenta un dipol que s'alimenta per mitjà d'una font que genera un corrent altern que es distribueix al llarg del fil. Aquesta distribució de corrent genera al seu torn camps elèctrics i magnètics que donen lloc a la radiació electromagnètica. La distribució de corrent al llarg de l'estructura varia en funció de la freqüència. Aquesta variació de corrent produeix variacions en el diagrama de radiació de l'antena.

Vegeu també

En aquest mòdul reprenem l'exemple que s'ha desenvolupat al llarg del mòdul "L'antena en un sistema de comunicació".

Figura 2. Radiació produïda per una antena de fil (dipol de 40 cm) en el domini del temps excitat per un impuls gaussià



El dipol està col·locat de manera vertical i centrat en la figura.

De manera qualitativa, es pot entendre que la font genera un front d'ona que es propaga en l'espai. Al seu torn, les discontinuïtats de l'estructura (els extrems del dipol) generen altres fronts d'ona que, en el punt d'observació de

camp llunyà, es poden sumar constructivament o destructivament, la qual cosa dóna lloc al valor de camp elèctric i magnètic en aquesta posició de l'espai (figura 2). Si aquesta anàlisi es fa per a totes les posicions de l'espai, es determina el diagrama de radiació de l'antena i, a partir d'aquest, és possible obtenir els diferents paràmetres que caracteritzen el comportament de l'antena, com la potència radiada, la resistència de radiació, la directivitat, l'eficiència, el guany, etc.

La representació mostrada en la figura 2 s'ha obtingut mitjançant simulació per FDTD¹. En l'instant $t = 0,83$ ns, el primer front d'ona és el produït per la font situada en el centre del dipol i correspon a un impuls gaussià que presenta una gran amplada de banda. La raó d'excitar-lo amb un impuls i no amb un senyal de tipus sinusoidal és que amb l'impuls es pot determinar on es produeixen les reflexions, mentre que si s'hagués fet amb una excitació periòdica en règim harmònic, les reflexions quedarien emmascarades. Per a $t = 1,36$ ns, es produeixen dos nous fronts d'ona a causa dels extrems del dipol. De la mateixa manera, per a $t = 2,03$ ns, es genera un nou impuls produït per la reflexió de l'impuls en els extrems en arribar a la discontinuïtat en què es troba la font. Per a $t = 2,9$ ns, es produeixen dos nous impulsos en els extrems a conseqüència de l'impuls anterior una vegada aquest impuls ha arribat als extrems. Es conclou, per tant, que la simulació en el domini del temps permet caracteritzar l'antena quan es transmeten impulsos amb alt contingut espectral, com els sistemes UWB². Observeu que, depenent de la longitud i la geometria de l'antena, els fronts d'ona es generen en posicions i instants diferents, i això dóna lloc a un diagrama de radiació determinat.

⁽¹⁾FDTD és la sigla de l'expressió anglesa *Finite Difference Time Domain*.

⁽²⁾UWB és la sigla de l'expressió anglesa *Ultra Wide Band*.

2. Equacions de radiació

Una vegada presentat de manera qualitativa el mecanisme de radiació, cal abordar en aquest apartat quins són els instruments matemàtics que s'utilitzaran per a calcular de manera quantitativa el fenomen de la radiació.

Tal com s'ha anticipat en l'apartat anterior, els camps radiats depenen fortament de la distribució de corrent en una estructura de tipus fil o del camp elèctric en el cas d'una obertura. Són les equacions de Maxwell les que s'encarreguen de relacionar aquests corrents o camps amb els camps radiats.

A causa de la complexitat de les equacions de Maxwell, en primer lloc es presenten les definicions que s'utilitzaran al llarg d'aquest apartat, a fi de facilitar-ne l'anàlisi i el seguiment posteriors:

- \vec{E} = camp elèctric (V/m)
- \vec{H} = camp magnètic (A/m)
- \vec{D} = densitat de flux elèctric (C/m²)
- \vec{B} = densitat de flux magnètic (Wb/m²)
- \vec{J} = densitat de corrent elèctric (A/m²)
- \vec{M} = densitat de corrent magnètica (V/m²)
- q_{ve} = densitat de càrrega elèctrica (C/m³)
- q_{vm} = densitat de càrrega magnètica (Wb/m³)
- ϵ = permitivitat elèctrica (F/m)
- μ = permeabilitat magnètica (H/m)

Abans d'exposar les equacions de radiació definides per Maxwell, cal esmentar altres grans científics que amb els seus descobriments van participar activament en el desenvolupament i l'assentament posterior de les equacions de Maxwell com a base fonamental de la teoria electromagnètica. A continuació s'esmentaran breument les lleis que van establir aquests científics, i també la seva rellevància en la teoria electromagnètica actual:

1) La **lei d'Ampère** relaciona la integral del camp magnètic al voltant d'un bucle tancat amb el corrent que circula a través del bucle. D'aquesta manera, la integral de línia al voltant d'una corba tancada de la densitat de camp magnètic dona com a resultat el valor del corrent que travessa aquesta superfície definida pel bucle tancat, multiplicada per la permeabilitat en el buit, tal com es manifesta en l'equació següent:

Vegeu també

Podeu veure la figura 3 del mòdul "L'antena en un sistema de telecomunicació" d'aquesta assignatura.

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{enc} \quad 2.1$$

Avui dia forma part d'una de les quatre equacions que constitueixen les bases de l'electromagnetisme.

2) Al seu torn, la **Llei de Gauss** estableix que el flux elèctric total en l'exterior d'una superfície tancada equival al valor de la càrrega que tanca aquesta superfície dividida per la permitivitat. Tant la tercera com la quarta equació de Maxwell es basen en aquesta llei:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad 2.2$$

3) La **Llei de Faraday** estableix que la tensió induïda en qualsevol circuit tancat és igual a la variació temporal del flux magnètic a través del circuit:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad 2.3$$

El significat del signe menys en l'equació anterior es deriva de la llei de Lenz, que estableix que la direcció o el sentit de la tensió generada és tal que qualsevol corrent resultant produeix un camp magnètic en direcció oposada al camp magnètic que va crear aquesta tensió.

Les equacions de Maxwell, per tant, resulten una combinació de les lleis anteriors. Hi queda recollit el principi de conservació de l'energia per mitjà de l'equació de continuïtat i se'n desprèn que un camp elèctric variable en el temps genera un camp magnètic variable en el temps i, recíprocament, la variació temporal del camp magnètic genera un camp elèctric també variable en el temps. Es pot visualitzar la radiació electromagnètica com dos camps que es generen mútuament, per la qual cosa no necessiten cap medi material per a propagar-se i, per tant, queda demostrat que les ones electromagnètiques es poden propagar en el buit a una velocitat igual a la velocitat de la llum ($c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s).

Taula 1. Expressió general de les equacions de Maxwell

Equacions integrals	Equacions diferencials
$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$
$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{\tau}{\mu_0}$	$\nabla \cdot \vec{H} = \tau$
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -M - \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$	$\nabla \times \vec{E} = -\vec{M} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$
$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$

Cal destacar que en les expressions anteriors s'han incorporat als corrents i a les càrregues magnètics els corrents i les càrregues elèctrics. Aquests no són més que un utensili matemàtic que algunes vegades permet simplificar els càlculs. No obstant això, cal remarcar que es tracta de càrregues i corrents ficticis que no existeixen en la realitat, però el fet d'introduir-los permet incorporar el principi de dualitat a les equacions de Maxwell.

Si a les expressions anteriors s'hi afegeix la variació temporal de la font:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \Re[\vec{J}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}] \quad 2.4$$

els camps variaran de la mateixa manera i, així, les equacions de Maxwell es poden expressar d'acord amb les equacions següents:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\vec{M} - j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} - j\omega\epsilon\vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= q_{ve} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= q_{vm} \end{aligned} \quad 2.5$$

Aquestes equacions, juntament amb l'equació de continuïtat, són les que defineixen el fenomen de la radiació electromagnètica:

$$\nabla \cdot \vec{J} + j\omega q_{ve} = 0 \quad 2.6$$

No obstant això, no és possible calcular els camps elèctrics i magnètics de manera directa amb les equacions de Maxwell sense operar prèviament. D'aquesta manera, manipulant les equacions de Maxwell és possible obtenir les expressions generals dels camps \vec{E} i \vec{H} respectivament:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = j\omega\mu\vec{J} + \nabla \times \vec{M} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho \quad 2.7$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{M} + \nabla \times \vec{J} + \frac{1}{\mu} \nabla \tau \quad 2.8$$

en què $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ es defineix com la **constant de propagació**.

Per tant, hi ha dos mètodes per a calcular els camps radiats:

1) El primer consisteix a resoldre les equacions de Maxwell tenint en compte l'equació de continuïtat més les condicions de contorn mitjançant un procés tediós de diferenciació i integració.

2) El segon proposa una simplificació del càlcul per mitjà de l'ús d'unes funcions auxiliars intermèdies conegudes com a *potencials*. D'aquesta manera, aplicant la condició de Lorentz ($\nabla \cdot \vec{A} + j\omega\epsilon\mu\phi_e = 0$) a les equacions de Maxwell i te-

nint en compte únicament càrregues i corrents elèctrics, s'obtenen les relacions entre els camps elèctrics i els vectors potencials \vec{A} i φ , que donen lloc a dues equacions d'ona escalars i dues equacions d'ona vectorials respectivament:

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla \varphi - j\omega \vec{A} \\ \nabla^2 \vec{A} + \beta^2 \vec{A} &= -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi + \beta^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\epsilon}\end{aligned}\quad 2.9$$

El procediment per al càlcul dels camps radiats que es desenvoluparà en aquest apartat es basa en aquest últim mètode. La nomenclatura que s'utilitzarà per a definir els paràmetres requerits queda recollida en la figura 3.

Figura 3. Descripció del sistema de coordenades

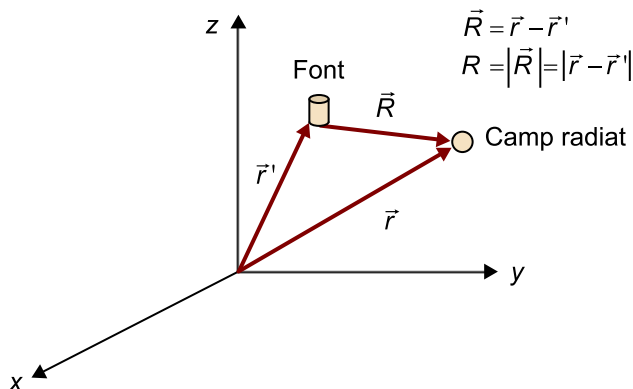


Figura 3

Definició gràfica dels vectors \vec{r} (vector definit entre l'origen de coordenades i les coordenades del punt d'observació), \vec{r}' (vector definit entre l'origen de coordenades i les coordenades de la font) i \vec{R} (vector que defineix la distància entre qualsevol punt de la font al punt d'observació).

Vegeu també

Podeu veure la relació entre el camp elèctric i el camp magnètic en el mòdul "L'antena en un sistema de telecomunicació" d'aquesta assignatura.

El camp radiat

Estrictament, el camp radiat s'obté de les components A_θ i A_φ del vector potencial.

La solució a les quatre equacions d'ona anteriors dona com a resultat el valor dels potencials \vec{A} i φ , que permetran calcular posteriorment els valors de \vec{E} i \vec{H} :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V q(\vec{r}') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dv' \quad 2.10$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dv' \quad 2.11$$

A partir d'aquests potencials és possible obtenir fàcilment el camp elèctric com a $\vec{E} = -\nabla \varphi - j\omega \vec{A}$. Una vegada s'obté el camp elèctric, el còmput del camp magnètic és directe, ja que totes dues magnituds estan relacionades mitjançant la impedància del medi. És important remarcar que el primer terme fa referència als camps induïts o al camp proper, mentre que el segon s'utilitza per a calcular els camps en la regió de camp llunyà.

En aquest sentit, si es considera únicament la regió de camp llunyà o regió de Fraunhofer, en què el diagrama de radiació de l'antena és independent de la distància, les components dels camps radiats es poden expressar segons les equacions següents.

$$\begin{aligned}
 \vec{H} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} & \vec{E} &= -\frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{A})}{\omega\mu\epsilon} - j\omega\vec{A} \\
 H_r &\approx 0 & E_r &\approx 0 \\
 H_\theta &\approx -\frac{E_\varphi}{\eta} & E_\theta &\approx -j\omega A_\theta \\
 H_\varphi &\approx \frac{E_\theta}{\eta} & E_\varphi &\approx -j\omega A_\varphi
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

El vector \vec{A} se sol expressar en funció del vector de radiació \vec{N} d'acord amb el següent:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jk r}}{r} \cdot \vec{N} \tag{2.13}$$

$$\vec{N} = \iiint_V \vec{J}(\vec{r}') \cdot e^{-jk\hat{k} \cdot \vec{r}'} dV' \tag{2.14}$$

en què el vector d'ona k es defineix com:

$$k\hat{k} = \vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z} \tag{2.15}$$

i, en coordenades esfèriques, cada component resulta:

$$\begin{aligned}
 k_x &= k \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\
 k_y &= k \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\
 k_z &= k \cdot \cos\theta
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Per tant, els camps radiats es poden calcular mitjançant la distribució de corrent de l'estructura $\vec{J}(\vec{r}')$. En el cas d'obertures, el procediment és exactament el mateix, amb la diferència que en disposar únicament del valor del camp en l'obertura, caldrà calcular els corrents equivalents mitjançant el teorema d'equivalència. Al seu torn, també es podran resoldre mitjançant el mateix mecanisme els problemes associats a elements situats sobre plans conductors. En aquest cas caldrà aplicar la teoria d'imatges.

És important destacar que el vector de radiació no és més que una transformada de Fourier. Aquest fet permet tenir una aproximació qualitativa del diagrama de radiació d'una antena una vegada se'n coneix la distribució de corrent. D'aquesta manera, si s'imaginen dos dipols, un d'alimentat amb una distribució de corrent constant (distribució uniforme) i un altre amb una distribució de corrent triangular (distribució triangular), i es té en compte que el diagrama de radiació s'obté com una transformada de Fourier, seria possible anticipar, sense fer un càlcul previ, que el diagrama de radiació del primer dipol presentaria més directivitat que el diagrama de radiació del segon dipol, ja que la transformada d'una distribució uniforme presenta un lòbul principal més estret encara que amb lòbuls secundaris més elevats que els que presenta la transformada d'una distribució triangular (figura 4).

Lectura recomanada

Sobre el teorema d'equivalència, podeu consultar l'obra següent:

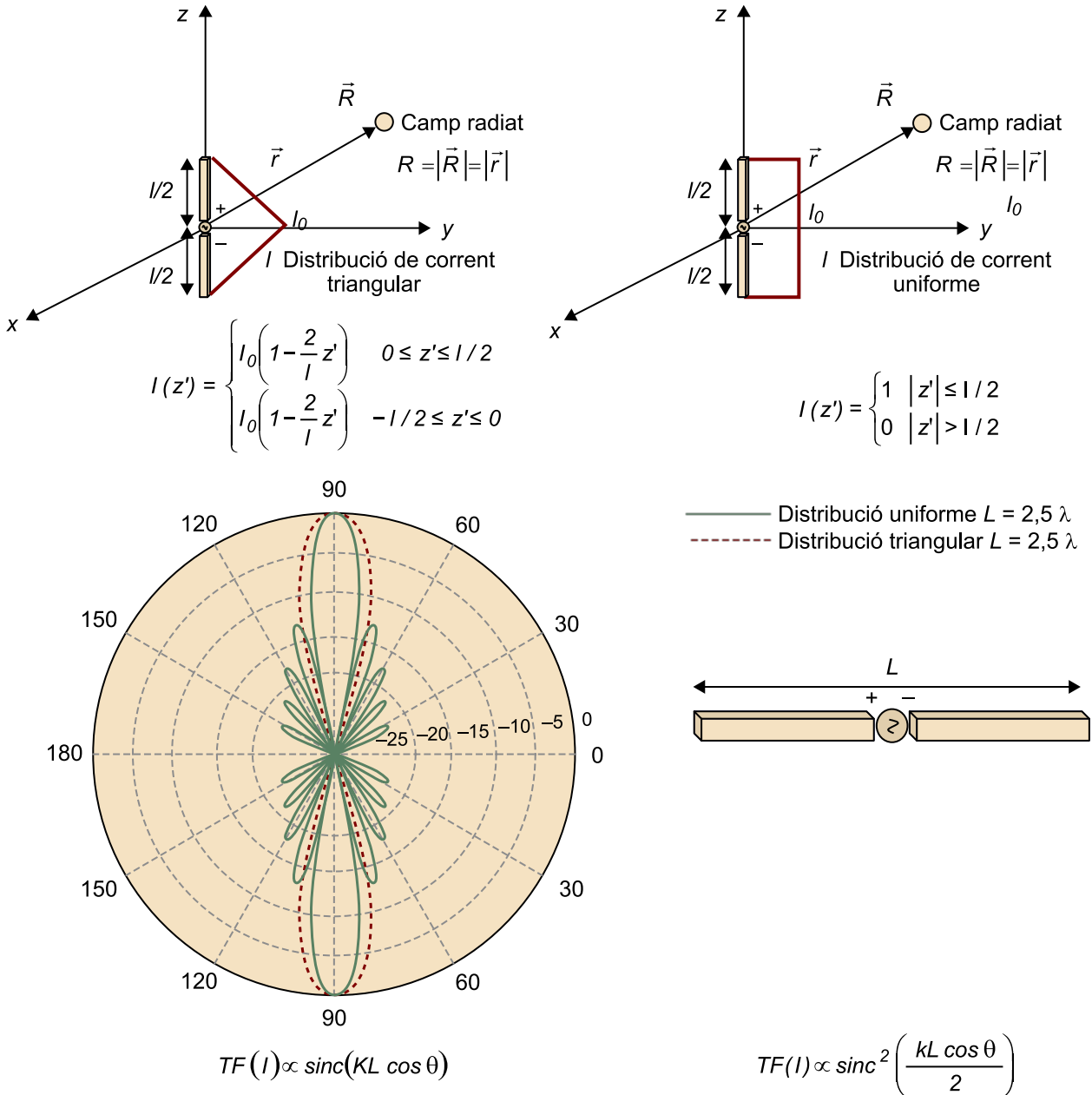
C. A. Balanis (1997). *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley.

Vegeu també

La teoria de les imatges s'estudia en l'apartat 5 d'aquest mòdul.

La figura 4 mostra un exemple per a dos fils de corrent de longitud $L = 2,5 \lambda$ en els quals el diagrama de radiació del fil amb distribució de corrent uniforme presenta un lòbul principal més estret, però amb uns lòbuls secundaris més grans que el del cas triangular. Així i tot, el nivell dels lòbuls està per sota de 13 dB respecte al lòbul principal i la directivitat està marcada per aquest lòbul, que és més estret en el cas uniforme. Aquest fet es tradueix en més directivitat.

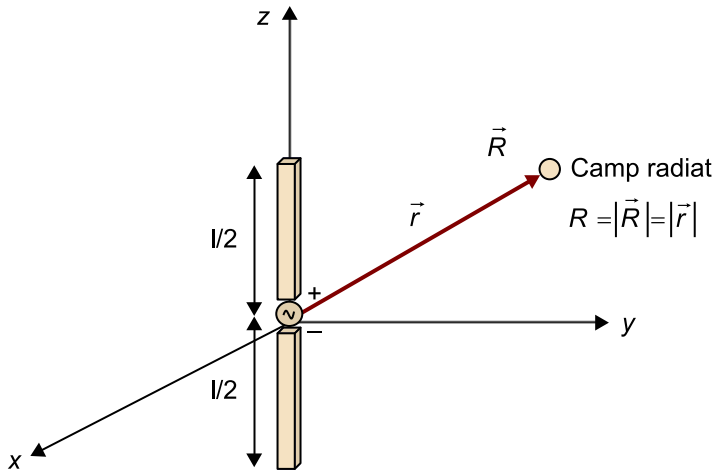
Figura 4. Distribució uniforme i triangular



Exemple pràctic

A fi de consolidar els conceptes, a continuació es presenta el càlcul dels camps radiats per a un dipol de longitud infinitesimal ($l \ll \lambda$) situat en l'eix z (figura 5).

Figura 5. Dipol elemental de longitud $l \ll \lambda$ situat en l'eix z



Vegeu també

Podeu repassar diversos conceptes esmentats en aquest exemple, com el sistema de coordenades esfèric, la densitat de potència radiada i el valor de la resistència de radiació, en el mòdul "L'antena en un sistema de telecomunicació" d'aquesta assignatura.

Amb aquesta aproximació, el corrent es pot considerar constant al llarg de l'estructura, fet que facilita considerablement els càlculs:

$$\vec{J}(\vec{r}') = \hat{z} \cdot I(z') \cdot \delta(x') \cdot \delta(y') \quad 2.17$$

en què la funció $\delta(x - a)$ és la funció delta de Dirac i pren valor unitat per a $x = a$. Observeu que l'equació 2.17 posa de manifest que el corrent està únicament definit en el fil i pren valors nuls en qualsevol altre punt de l'espai, essent:

$$I(z') = \begin{cases} 1 & |z'| \leq l/2 \\ 0 & |z'| > l/2 \end{cases} \quad 2.18$$

El vector de radiació es calcula de la manera següent:

$$\begin{aligned} \vec{N}(\vec{r}) &= \hat{z} \int_{x'=-\infty}^{\infty} \int_{y'=-\infty}^{\infty} \int_{z'=-l/2}^{l/2} I \cdot \delta(x') \cdot \delta(y') \cdot e^{jk_x x'} \cdot e^{jk_y y'} \cdot e^{jk_z z'} \cdot dV' = \\ &= \hat{z} \cdot I \int_{x'=-\infty}^{\infty} \delta(x') \cdot e^{jk_x x'} dx' \int_{y'=-\infty}^{\infty} \delta(y') \cdot e^{jk_y y'} dy' \int_{z'=-l/2}^{l/2} e^{jk_z z'} dz' \end{aligned} \quad 2.19$$

$$\vec{N}(\vec{r}) = \hat{z} \cdot I \cdot \frac{1}{jk_z} \cdot [e^{-jk_z z'}]_{z'=-l/2}^{z'=l/2} = \hat{z} \cdot I \cdot \frac{1}{jk_z} \cdot [e^{-jk_z l/2} - e^{jk_z l/2}] = \hat{z} \cdot I \cdot \frac{2}{k_z} \cdot \sin(k_z \cdot (l/2)) \quad 2.20$$

En aquest cas, com que es tracta d'un dipol infinitesimal de longitud $l \ll \lambda$, el sinus es pot aproximar pel seu argument i el vector de radiació queda definit de la manera següent:

$$\vec{N}(\vec{r}) = \hat{z} \cdot I \cdot l \quad N_z = I \cdot l \quad 2.21$$

El vector de radiació presenta, per tant, una única component en l'eix z. A partir d'aquesta equació és possible calcular el vector potencial \vec{A} , que en aquest cas també presentarà una única component a z. No obstant això, tal com sabem, el sistema de coordenades utilitzat en antenes és el sistema de coordenades esfèric, ja que permet definir de manera unívoca la posició a partir dels angles θ i ϕ . Per això, a fi de calcular els camps radiats, cal fer un pas intermediari per a convertir les coordenades rectangulars del vector de radiació en coordenades esfèriques mitjançant les relacions següents:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin\theta \cdot \cos\varphi & \sin\theta \cdot \sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta \cdot \cos\varphi & \cos\theta \cdot \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin\theta \cdot \cos\varphi & \cos\theta \cdot \cos\varphi & -\sin\theta \\ \sin\theta \cdot \sin\varphi & \cos\theta \cdot \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 2.22$$

D'aquesta manera, $N_z = I \cdot l$ expressat en coordenades esfèriques utilitzant la matriu unitària de transformació quedaria de la manera següent:

$$N_r = \cos\theta \cdot N_z \quad N_\theta = -\sin\theta \cdot N_z \quad N_\phi = 0 \quad 2.23$$

Tenint en compte que en la zona de camp llunyà la component radial del camp és negligible, el vector potencial \vec{A} queda únicament definit per la component θ de la manera següent:

$$A_\theta = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} (I \cdot l \cdot (-\sin\theta)) \quad 2.24$$

Una vegada calculat el **vector potencial**, és possible calcular els camps radiats mitjançant les relacions definides en les equacions 2.12:

$$E_r \approx 0 \quad 2.25$$

$$H_r \approx 0 \quad 2.26$$

$$E_\theta \approx \frac{j\omega\mu}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot I \cdot l \cdot \sin\theta \quad 2.27$$

$$H_\theta \approx 0 \quad 2.28$$

$$E_\phi \approx 0 \quad 2.29$$

$$H_\phi \approx \frac{\frac{j\omega\mu}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot I \cdot l \cdot \sin\theta}{\eta} \quad 2.30$$

El càlcul dels camps radiats permet caracteritzar per complet tots els paràmetres d'antena. D'aquesta manera, és possible calcular la **densitat de potència radiada** mitjançant el vector de Poynting de la manera següent:

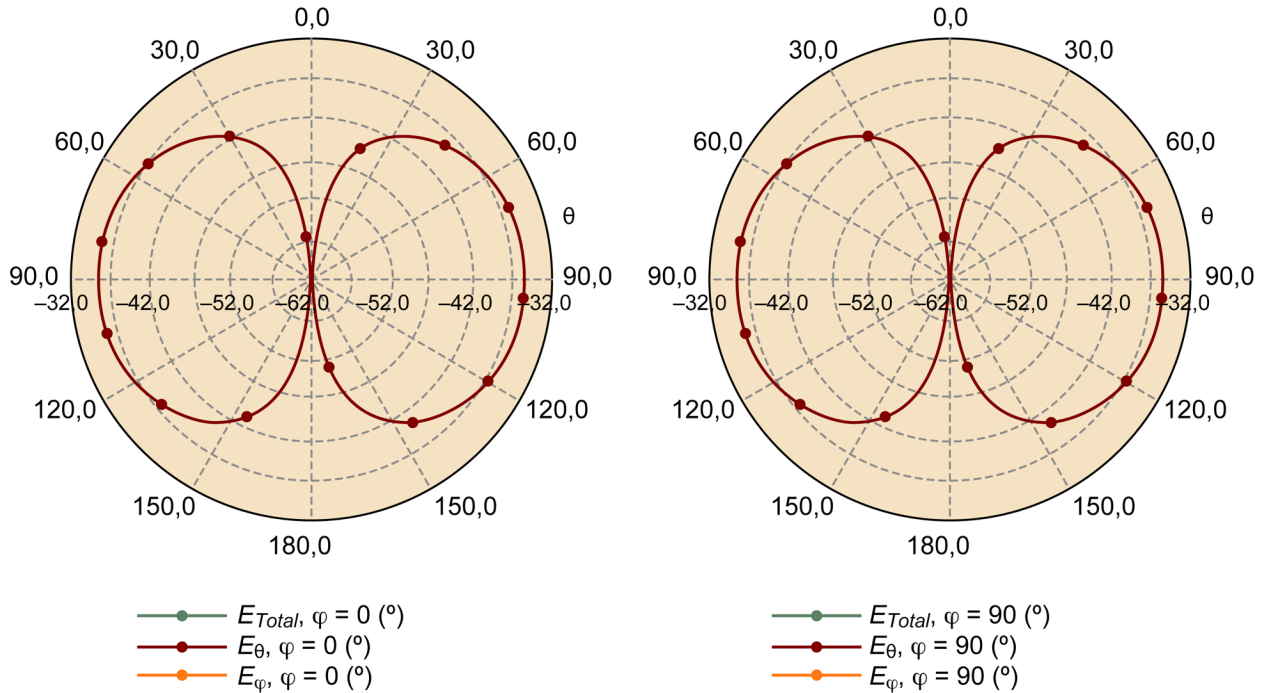
$$\vec{\rho} = \Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} [\text{W/m}^2] \quad 2.31$$

Tenint en compte la relació que hi ha entre el camp elèctric i el camp magnètic, és possible simplificar l'expressió anterior de la manera següent:

$$\vec{\rho}(\theta, \varphi) = \frac{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2}{\eta} \hat{r} = \frac{|E_\theta|^2}{\eta} \hat{r} = \frac{\left(\frac{\omega\mu}{4\pi r} \cdot I \cdot l \cdot \sin\theta\right)^2}{\eta} \hat{r} \quad [\text{W/m}^2] \quad 2.32$$

La representació de la densitat de potència dóna lloc al **diagrama de radiació de potència**, que difereix del **diagrama de radiació de camp** en el fet que un respon a la funció $\sin^2\theta$, mentre que l'altre ho fa per a la funció $\sin\theta$. Tots dos diagrames són exactament iguals en aparença si es representen en escala logarítmica. És important destacar que l'expressió de camp elèctric o, de manera equivalent, la densitat de potència, anticipa que en el diagrama de radiació apareixerà un nul de camp elèctric en la direcció $\theta = 0^\circ$.

Figura 6. Diagrama de radiació del dipol elemental de longitud $l \ll \lambda$ situat en l'eix z



Representació gràfica dels principals talls $\varphi = 0^{\circ}$ i $\varphi = 90^{\circ}$ del diagrama de radiació corresponent al dipol elemental de longitud $l \ll \lambda$ situat en l'eix z

Una vegada coneguda la densitat de potència, és possible completar el càlcul de la potència radiada integrant-la per a tota la superfície. D'aquesta manera:

$$P_r = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \rho(\theta, \varphi) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad [W] \quad 2.33$$

$$P_r = \left(\frac{\omega\mu}{2\pi r} \cdot I \right)^2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos\theta\right)}{\sin\theta} \right)^2 r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 73,1 \cdot I^2 [W] \quad 2.34$$

El coneixement del valor de la potència radiada permet conèixer el valor de la resistència de radiació (equació 2.35), que és la resistència que dissiparia la mateixa potència que la radiada per l'antena:

$$R_{rad} = \frac{P_r}{I^2} = 80 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l^2}{\lambda^2} \quad 2.35$$

La directivitat en funció de (θ, φ) es calcula d'acord amb el següent:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{\rho(\theta, \varphi)}{\frac{P_r}{4\pi r^2}} = 1,5 \sin^2\theta \quad 2.36$$

en què $D = 1,5$.

Dels càlculs anteriors s'extreuen les **conclusions** següents:

- El diagrama de radiació es calcula en la regió de camp llunyà, ja que és en aquesta regió on roman invariable amb la distància.
- Els camps induïts en la regió de camp proper són purament reactius, fet que permetria calcular la reactància de l'antena.
- El dipol infinitesimal presenta un nul de camp en l'eix z (eix en el qual està alineat el dipol –figura 5–), mentre que el seu màxim es

Lectura recomanada

Sobre les conclusions recollides aquí, podeu consultar l'obra següent:
J. Anguera; A. Pérez (2008). *Teoria d'antenes*. Enginyeria La Salle ("Estudios Semipresenciales"). ISBN: 978-84-935665-4-8.

troba en el pla XY . El seu diagrama és omnidireccional i presenta simetria de revolució respecte a l'eix z (figura 6).

- La directivitat del dipol infinitesimal és constant i independent de la longitud elèctrica (equació 2.36) i de valor $D = 1,5$ (1,7 dB).
- La resistència de radiació del dipol infinitesimal és reduïda, ja que $l \ll \lambda$, la qual cosa indica que la seva eficiència també ho serà. És important destacar que la resistència de radiació decreix amb la grandària elèctrica de l'antena i ho fa de manera quadràtica (equació 2.35). Aquest fet posa de manifest que, en general, les antenes elèctricament petites presentaran una resistència de radiació baixa i, per tant, una eficiència de radiació baixa, la qual cosa al seu torn dificultarà l'adaptació de l'antena a la impedància del generador.
- El camp elèctric i el camp magnètic estan relacionats mitjançant la impedància del medi, que en espai lliure és $\eta = 120\pi$ (Ω).
- En la regió de camp llunyà no hi ha component radial, la qual cosa indica que el camp elèctric i el camp magnètic són ortogonals a la direcció de propagació i ortogonals entre ells.
- La impedància d'entrada del dipol infinitesimal és purament capacitiva. Aquesta conclusió s'extreu del còmput dels camps propers d'acord amb J. Anguera i A. Pérez.
- El dipol elemental presenta polarització lineal vertical, ja que únicament s'observa component de camp elèctric en la direcció θ .

En el cas del dipol elemental, seria possible calcular directament el vector potencial \vec{A} sense haver de calcular prèviament el vector de radiació \vec{N} , ja que en aquest cas $|\vec{R}| = |\vec{r}|$. No obstant això, s'ha cregut convenient introduir el càlcul tenint en compte aquest pas intermediari, ja que per a geometries més complexes serà el procediment utilitzat.

Malgrat que en termes generals el dipol elemental és poc eficient, s'aplica com a sonda de camp elèctric, per exemple, per a verificar la radiació electromagnètica produïda per les antenes integrades en terminals de telefonia mòbil en presència del cos humà.

3. Dipols

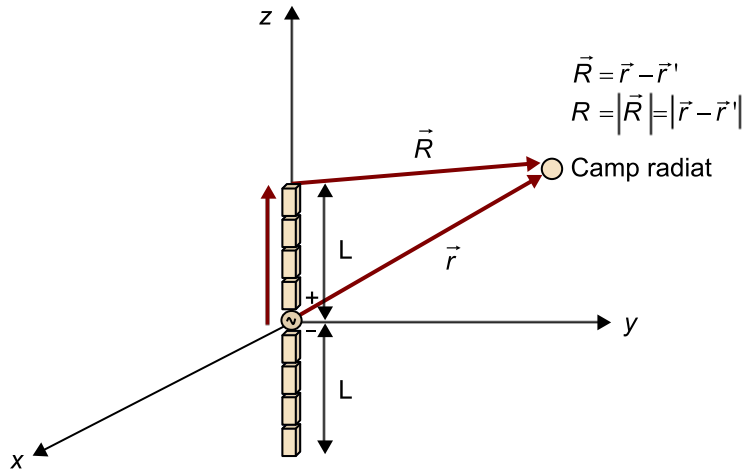
En l'apartat anterior s'ha analitzat minuciosament el comportament d'un dipol elemental. La seva eficiència de radiació reduïda, i també la seva impedància altament capacitiva, el converteixen en una antena de rendiment reduït. Per això cal introduir en aquest apartat les antenes de tipus fil de longituds comparables a la longitud d'ona de la freqüència d'operació. Malgrat que aquestes antenes presentaran un comportament similar al del dipol elemental en termes de diagrama de radiació, permetran aconseguir una eficiència de radiació elevada, i també una impedància d'entrada que possibilitarà una adaptació posterior a fi de proporcionar l'amplada de banda requerida per a cobrir els serveis de comunicacions especificats.

Amb aquesta finalitat, s'analitza detalladament al llarg d'aquest apartat el comportament d'un dipol de longitud $l = \lambda/2$. Tal com s'anticipava en l'apartat anterior, el procediment de càlcul dels camps radiats utilitzat en el dipol elemental és ampliable a totes les estructures de tipus fil. En aquest sentit, el procediment per a determinar les propietats de radiació que es desenvoluparà en aquest apartat i al llarg de l'apartat posterior serà el mateix que el desenvolupat per al cas del dipol elemental. No obstant això, una de les diferències fonamentals resideix en el fet que aquesta vegada el corrent que circula per l'estructura no es pot aproximar per una constant, ja que l'estructura es pot considerar com una suma d'elements de longituds infinitesimals que interactuen entre ells amb diferents amplituds i fases. Aquest fet dificultarà les expressions matemàtiques que s'han de desenvolupar, ja que s'hi haurà d'incloure una distribució de corrent de tipus sinusoidal de la manera següent (tenint en compte que el dipol està alineat novament amb l'eix z , tal com indica la figura 7):

$$\vec{J}(\vec{r}') = \hat{z} \cdot I(z') \cdot \delta(x') \cdot \delta(y') \quad 2.37$$

en què:

$$I(z') = I \cdot \text{sinc}(L - |z'|) = \begin{cases} I \cdot \text{sinc}(L - z') & 0 \leq z' \leq L \\ I \cdot \text{sinc}(L + z') & -L \leq z' \leq 0 \end{cases} \quad 2.38$$

Figura 7. Dipol de longitud comparable a λ situat en l'eix z

Una vegada coneguda la distribució de corrent sobre l'estructura, és possible conèixer-ne el vector de radiació, que adopta el sentit físic d'una transformada de Fourier del corrent al llarg de l'estructura. D'aquesta manera:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\vec{r}) &= \hat{z} \int_{x'=-\infty}^{x'=\infty} \int_{y'=-\infty}^{y'=\infty} \int_{z'=-L}^{z'=L} I(z') \cdot \delta(x') \cdot \delta(y') \cdot e^{jk} \vec{r}' dv' \\ \vec{N}(\vec{r}) &= \hat{z} \cdot \int_{x'=-\infty}^{x'=\infty} \delta(x') \cdot e^{jkx'} \int_{y'=-\infty}^{y'=\infty} \delta(y') \cdot e^{jky'} dy' \int_{z'=-L}^{z'=L} I(z') \cdot e^{jkz'} dz'\end{aligned}\quad 2.39$$

$$\vec{N}(\vec{r}) = \hat{z} \int_{z'=-L}^{z'=L} I \cdot \text{sinc}(L - |z'|) \cdot e^{jkz'} dz' = \hat{z} \cdot 2 \cdot I \cdot \frac{\cos(k \cdot L \cdot \cos\theta) - \cos(k \cdot H)}{k \cdot \sin^2\theta} \quad 2.40$$

En el cas que la integral resultant fos complicada de desenvolupar, un altre procediment per a calcular el vector de radiació consistiria a descompondre el dipol de longitud comparable a la longitud d'ona d'operació en una sèrie de dipols infinitesimals per als quals es podria considerar una distribució de corrent constant al llarg del dipol infinitesimal, i d'aquesta manera se simplifica el càlcul del vector de radiació corresponent. Per a cadascun es calcularien els camps radiats, i la suma d'aquests camps donaria lloc als camps radiats associats a tota l'estructura.

D'aquesta manera, N_z expressat en coordenades esfèriques utilitzant la matriu unitària de transformació quedaria de la manera següent:

$$N_r = \cos\theta \cdot N_z \quad N_\theta = -\sin\theta \cdot N_z \quad N_\phi = 0 \quad 2.41$$

Tenint en compte que en la zona de camp llunyà la component radial del camp és 0, el vector potencial \vec{A} queda únicament definit per la component θ de la manera següent:

$$A_\theta = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} (2 \cdot I \cdot \frac{\cos(k \cdot L \cdot \cos\theta) - \cos(k \cdot H)}{k \cdot \sin^2\theta}) \cdot (-\sin\theta) \quad 2.42$$

Una vegada calculat el vector potencial, és possible calcular els camps radiats per mitjà de les relacions definides en l'equació 2.12:

$$E_r \approx 0 \quad 2.43$$

$$H_r \approx 0 \quad 2.44$$

$$E_\theta \approx \frac{j\omega\mu}{2\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot I \cdot \frac{\cos(k \cdot L \cdot \cos\theta) - \cos(k \cdot H)}{k \cdot \sin\theta} \quad 2.45$$

$$H_\varphi \approx \frac{j\omega\mu}{2\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \cdot I \cdot \frac{\cos(k \cdot L \cdot \cos\theta) - \cos(k \cdot H)}{\eta \cdot k \sin\theta} \quad 2.46$$

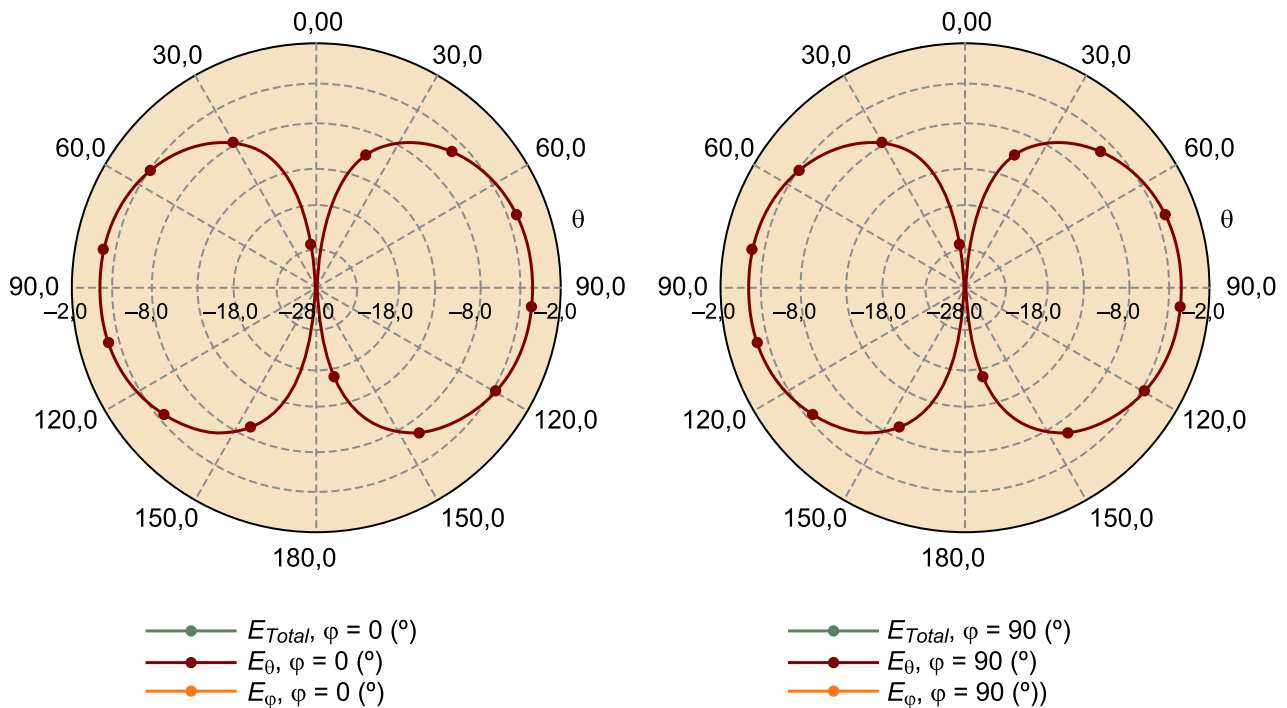
$$E_\varphi \approx 0 \quad 2.47$$

$$H_\theta \approx 0 \quad 2.48$$

Si particularitzem les expressions generals dels camps calculades anteriorment per al cas del dipol de longitud corresponent a la meitat de la longitud d'ona d'operació ($l = \lambda/2$), la densitat de potència radiada definida prèviament queda de la manera següent:

$$\mathcal{P}(\theta, \varphi) = \frac{|E_\theta|^2}{\eta} = \frac{\left(\frac{\omega\mu}{2\pi r} \cdot I \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{k \sin\theta} \right)^2}{\eta} \quad [\text{W/m}^2] \quad 2.49$$

La representació de la densitat de potència dóna lloc al **diagrama de radiació de potència**, que coincideix amb el diagrama de radiació de camp si tots dos són representats en escala logarítmica. És important destacar que l'expressió de camp elèctric o, de manera equivalent, la densitat de potència anticipa que en el diagrama de radiació apareixerà un nul de camp elèctric en la direcció $\theta = 0^\circ$. De la mateixa manera, i tal com ocorria amb el dipol elemental, presenta simetria de revolució al voltant de l'eix z amb el màxim de radiació localitzat en el pla XY.

Figura 8. Diagrama de radiació corresponent al dipol elemental de longitud $l = \lambda/2$ situat en l'eix z

Representació gràfica dels principals talls $\varphi = 0^\circ$ i $\varphi = 90^\circ$

Una vegada coneguda la densitat de potència, és possible completar el càlcul de la potència radiada integrant-la per a tota la superfície:

$$P_r = \int_{\varphi=2\pi}^{\varphi=0} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \mathcal{P}(\theta, \varphi) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad [\text{W}] \quad 2.50$$

$$P_r = \left(\frac{\omega\mu}{k \cdot \eta} \cdot I \right)^2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos\theta\right)}{\sin\theta} \right)^2 r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 73.1 \cdot I^2 \quad [\text{W}] \quad 2.51$$

El coneixement del valor de la potència radiada permet conèixer el valor de la resistència de radiació (equació 2.52), ja que la resistència de radiació és la resistència que dissiparia la mateixa potència que la radiada per l'antena:

$$R_{rad} = \frac{P_r}{I^2} = 73.1 \quad [\Omega] \quad 2.52$$

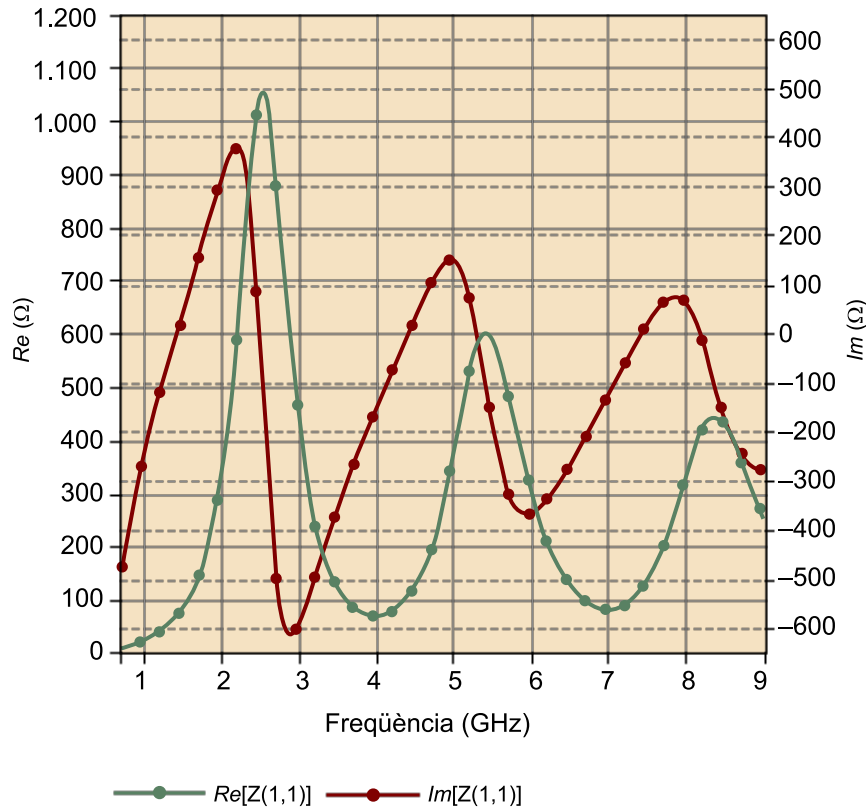
La directivitat es calcula d'acord amb el següent:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{\mathcal{P}(\theta, \varphi)}{\frac{P_r}{4\pi r^2}} = 1.64 \cdot \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos\theta\right)}{\sin\theta} \right)^2 \quad 2.53$$

Dels càlculs anteriors s'extreuen les **conclusions** següents:

- El diagrama de radiació es calcula en la regió de camp llunyà, ja que és on roman invariable amb la distància.

- Els camps induïts en la regió de camp proper són purament reactius, fet que permetria calcular la reactància de l'antena.
- El dipol $l = \lambda/2$ presenta un nul de camp en l'eix z (eix en el qual està alineat el dipol –figura 7–), mentre que el seu màxim es troba en el pla XY . El seu diagrama és omnidireccional i presenta simetria de revolució respecte a l'eix z (figura 8).
- La directivitat del dipol $l = \lambda/2$ (equació 2.53) és lleugerament superior a la del dipol elemental, essent $D = 1,64$ ($10 \cdot \log(1,64) = 2,1$ dB o 2,1 dBi, en què les unitats dBi es refereixen a l'antena isòtropa). A partir d'aquest resultat, la directivitat es pot expressar en dBd, que és una unitat referida a la directivitat del dipol $l = \lambda/2$. Per exemple, una directivitat de 2 dB és una directivitat 2 dBd superior a la del dipol $l = \lambda/2$. Per tant, 2 dBd = $4,1$ dB = $4,1$ dBi.
- La resistència de radiació del dipol $l = \lambda/2$ és aproximadament de $73,1 \Omega$, tal com indica el còmput numèric anterior (equació 2.52), i també els resultats de la simulació mostrats en la figura 9 amb una eficiència de radiació elevada ($> 80\%$), tenint en compte que les pèrdues associades als materials utilitzats habitualment per a la construcció d'aquest tipus d'antenes són reduïdes.
- El camp elèctric i el camp magnètic estan relacionats mitjançant la impedància del medi, que en espai lliure és $\eta = 120\pi (\Omega)$.
- En la regió de camp llunyà no hi ha component radial, la qual cosa indica que el camp elèctric i el camp magnètic són ortogonals a la direcció de propagació i ortogonals entre ells.
- La polarització del dipol $l = \lambda/2$ és lineal i alineada amb l'eix del dipol, que a més coincideix amb el caràcter vectorial del corrent. Cal ressaltar que generalment la polarització es considera en la direcció del màxim. Per al dipol estudiat, alineat en l'eix z (figura 6), no hi ha una sola direcció de màxima radiació, ja que qualsevol direcció en el pla $\theta = 90^\circ$ (pla XY) conté un màxim. Per a aquest pla, la polarització segueix el vector θ , que coincideix justament amb l'eix z i per tant es tracta d'una polarització lineal vertical.

Figura 9. Impedància complexa d'un dipol de longitud comparable a λ 

La figura 9 mostra la impedància complexa d'un dipol en funció de la freqüència obtinguda per simulació electromagnètica mitjançant el mètode numèric dels moments (MoM³).

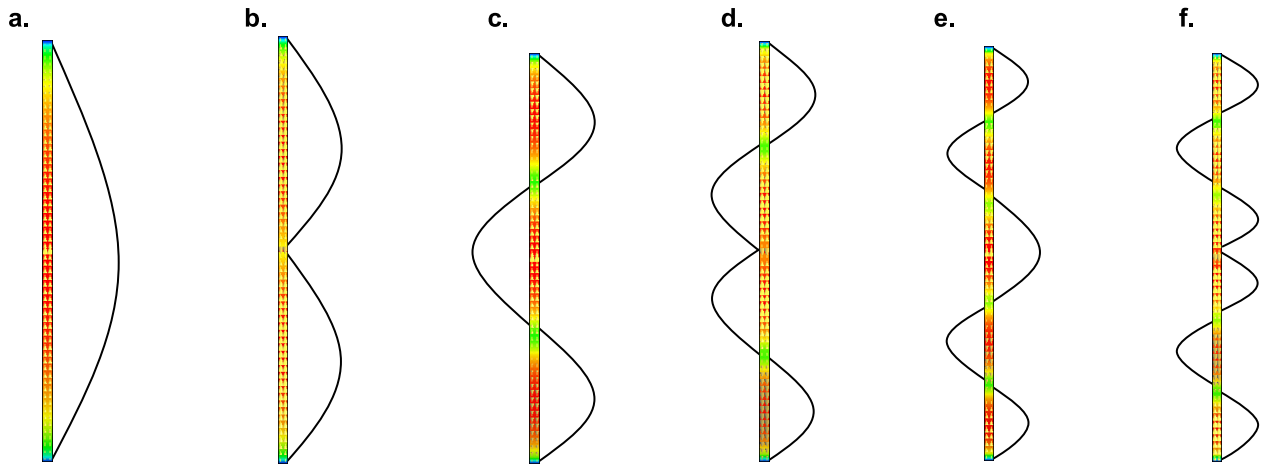
⁽³⁾ MoM és la sigla de l'expressió anglesa *Method of Moments*, mètode dels moments.

Els passos per zero de la part imaginària d'aquesta impedància d'entrada determinen les diferents freqüències de ressonància associades a aquesta estructura, cadascuna de les quals presenta una distribució de corrent específica (figura 10). Es comprova com, a mesura que augmenta la freqüència, la distribució de corrent al llarg de l'estructura es torna més variable, fet que es tradueix en diagrames de radiació amb més lòbuls i, per tant, de poc interès pràctic (figura 11). És important subratllar que, per a les dues primeres ressonàncies (figura 11a-11b), els diagrames són semblats, però no iguals, i molt diferents que els que s'obtenen a altres freqüències (figura 11c-11f). Per tant, obtenir una antena que operi igual a diverses freqüències (antena multifreqüència) no és senzill i per a dissenyar-ne i implementar-ne una s'ha de recórrer a tècniques especials, com, per exemple, l'aplicació de la geometria fractal.



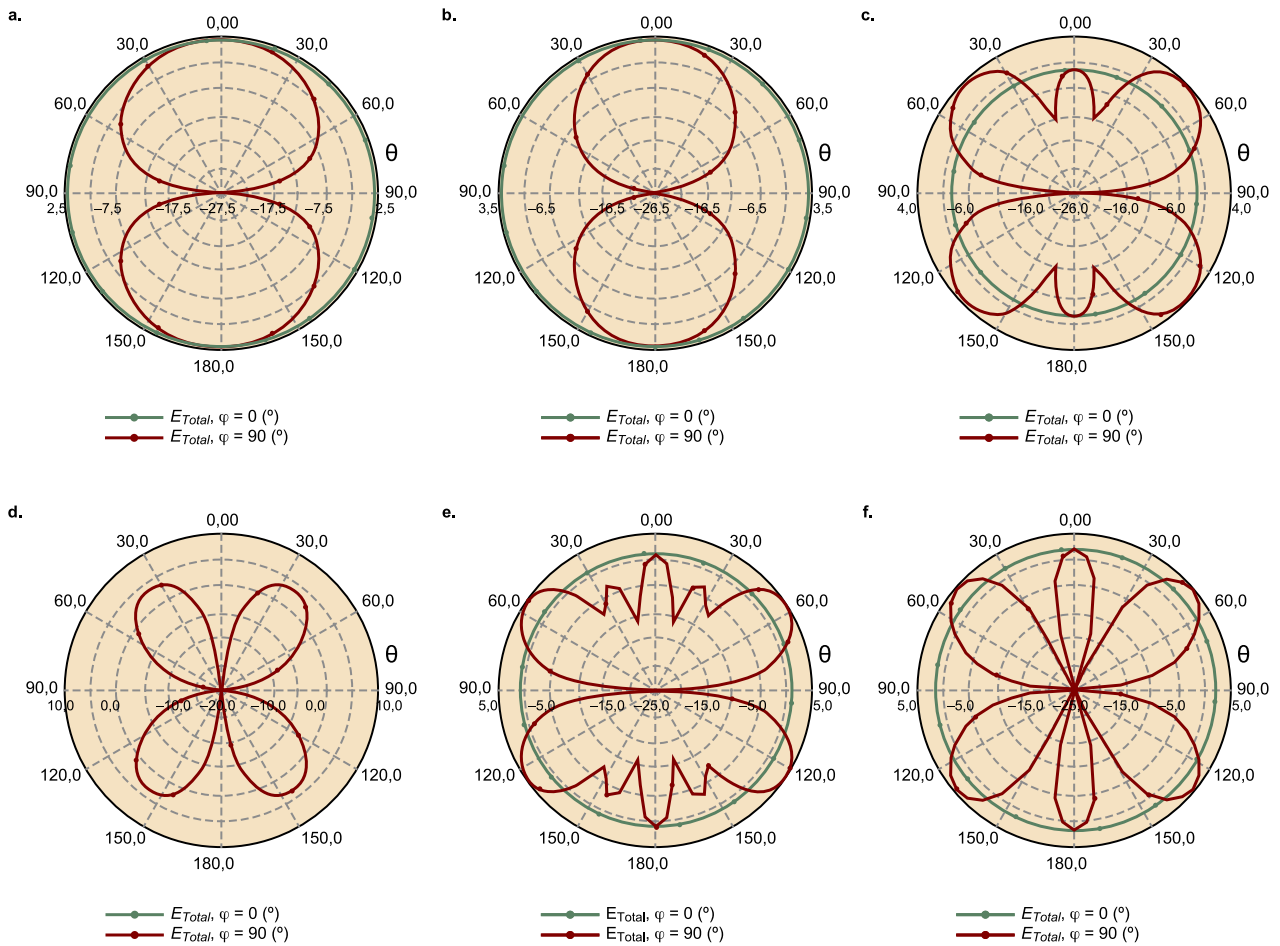
H. Hertz, físic alemany que va demostrar experimentalment l'emissió i la recepció d'ones electromagnètiques i la validesa de les equacions de Maxwell.

Figura 10. Distributions de corrent associades a l'antena dipol per a diferents longituds



a. $l = 0,5\lambda$; b. $l = 1\lambda$; c. $l = 1,5\lambda$; d. $l = 2\lambda$; e. $l = 2,5\lambda$ i f. $l = 3\lambda$

Figura 11. Talls principals del diagrama de radiació de l'antena dipol per a diferents longituds



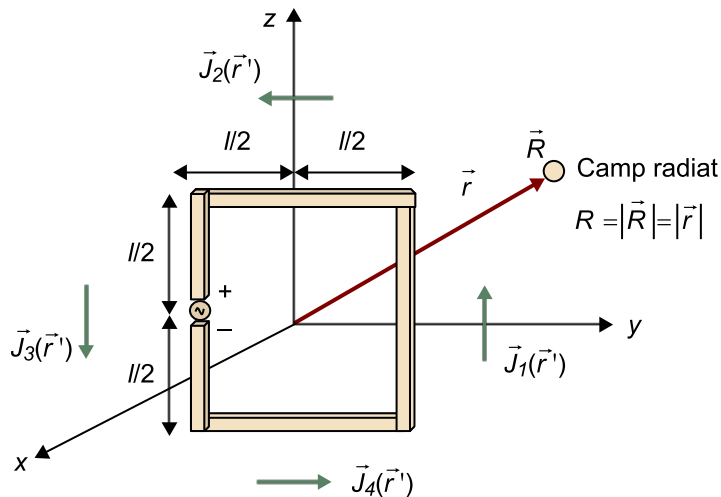
a. $l = 0,5\lambda$; b. $l = 1\lambda$; c. $l = 1,5\lambda$, d. $l = 2\lambda$; e. $l = 2,5\lambda$ i f. $l = 3\lambda$

4. Espires

En apartats anteriors s'ha analitzat el comportament dels dipòls, tant dels elementals com dels dipòls amb una grandària comparable a la longitud d'ona d'operació. No obstant això, cal introduir en aquest apartat el model d'un altre radiador bàsic: l'**espira elemental**.

Tal com s'ha introduït en l'apartat 2, el procediment matemàtic desenvolupat per al càlcul dels camps radiats es pot aplicar a qualsevol antena que es pugui descompondre en una sèrie d'elements lineals. D'aquesta manera, es pot aproximar una espira elemental de la manera següent (figura 12).

Figura 12. Espira elemental situada en el pla ZY



La grandària elèctrica de l'espira elemental és molt més petita que la longitud d'ona d'operació, tal com ocorria amb el dipol elemental ($l \ll \lambda$). Conseqüentment, el corrent que circula per l'espira es pot aproximar per un corrent constant definit com la superposició de quatre vectors de corrent, cadascun dels quals associat a un dels trams de l'espira.

És important destacar que l'espira està continguda en el pla ZY. D'aquesta manera:

$$\begin{aligned}
 \vec{J}_1(\vec{r}') &= \hat{z} \cdot I(z') \cdot \delta(y' - \frac{l}{2}) \cdot \delta(x') \\
 \vec{J}_2(\vec{r}') &= -\hat{y} \cdot I(y') \cdot \delta(z' - \frac{l}{2}) \cdot \delta(x') \\
 \vec{J}_3(\vec{r}') &= -\hat{z} \cdot I(z') \cdot \delta(y' + \frac{l}{2}) \cdot \delta(x') \\
 \vec{J}_4(\vec{r}') &= \hat{y} \cdot I(y') \cdot \delta(z' + \frac{l}{2}) \cdot \delta(x')
 \end{aligned}
 \tag{2.54}$$

En què el corrent, que s'assumeix constant en tots els trams de l'espira, queda definit de la manera següent:

$$I(z') = \begin{cases} I(z') = 1 & |z'| \leq l/2 \\ I(z') = 0 & |z'| > l/2 \end{cases} \quad 2.55$$

$$I(y') = \begin{cases} I(y') = 1 & |y'| \leq l/2 \\ I(y') = 0 & |y'| > l/2 \end{cases}$$

Una vegada definits els vectors de corrent per a cadascun dels trams de l'espira, es calcula un vector de radiació per a cadascun d'ells:

$$\begin{aligned} \vec{N}_1(\vec{r}) &= \hat{z} \int_{x'=-\infty}^{x'=\infty} \int_{y'=-\infty}^{y'=\infty} \int_{z'=-L}^{z'=L} I \cdot \delta(y' - \frac{l}{2}) \cdot \delta(x') \cdot e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dv' \\ \vec{N}_1(\vec{r}) &= \hat{z} \cdot I \int_{x'=-\infty}^{x'=\infty} \delta(x') \cdot e^{jk_x x'} dx' \int_{y'=-\infty}^{y'=\infty} \delta(y' - \frac{l}{2}) \cdot e^{jk_y y'} dy' \int_{z'=-l/2}^{z'=l/2} e^{jk_z z'} dz' \\ \vec{N}_1(\vec{r}) &= \hat{z} \cdot I \int_{y'=-\infty}^{y'=\infty} \delta(y' - \frac{l}{2}) \cdot e^{jk_y y'} \int_{z'=-l/2}^{z'=l/2} e^{jk_z z'} dz' \\ \vec{N}_1(\vec{r}) &= \hat{z} \cdot I \cdot e^{jk_y l/2} \cdot \left(\frac{1}{jk_z} \cdot [e^{jk_z z'}]_{z'=-l/2}^{z'=l/2} \right) = \hat{z} \cdot I \cdot e^{jk_y l/2} \cdot \left(\frac{1}{jk_z} \cdot [e^{jk_z l/2} - e^{-jk_z l/2}] \right) \\ \vec{N}_1(\vec{r}) &= \hat{z} \cdot I \cdot e^{jk_y l/2} \cdot \frac{2}{k_z} \cdot \sin(k_z \cdot (l/2)) \end{aligned} \quad 2.56$$

Cal destacar que el vector de radiació $\vec{N}_3(\vec{r})$ s'aproximarà al vector de radiació $\vec{N}_1(\vec{r})$ amb la diferència d'un canvi de signe en el sentit del corrent i en l'avaluació de $\delta(y')$, ja que la posició en l'espai és diferent. D'aquesta manera:

$$\begin{aligned} \vec{N}_3(\vec{r}) &= -\hat{z} \int_{x'=-\infty}^{x'=\infty} \int_{y'=-\infty}^{y'=\infty} \int_{z'=-l/2}^{z'=l/2} I \cdot \delta(y' + \frac{l}{2}) \cdot \delta(x') \cdot e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dv' \\ \vec{N}_3(\vec{r}) &= -\hat{z} \cdot I \int_{x'=-\infty}^{x'=\infty} \delta(x') \cdot e^{jk_x x'} dx' \int_{y'=-\infty}^{y'=\infty} \delta(y' + \frac{l}{2}) \cdot e^{jk_y y'} dy' \int_{z'=-l/2}^{z'=l/2} e^{jk_z z'} dz' \\ \vec{N}_3(\vec{r}) &= -\hat{z} \cdot I \cdot e^{-jk_y l/2} \cdot \frac{2}{k_z} \cdot \sin(k_z \cdot (l/2)) \end{aligned} \quad 2.57$$

El mateix ocorre amb els vectors $\vec{N}_2(\vec{r})$ i $\vec{N}_4(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \vec{N}_2(\vec{r}) &= -\hat{y} \int_{x'=-\infty}^{x'=\infty} \int_{y'=-l/2}^{y'=l/2} \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} I \cdot \delta(z' - \frac{l}{2}) \cdot \delta(x') \cdot e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} dv' \\ \vec{N}_2(\vec{r}) &= -\hat{y} \cdot I \int_{x'=-\infty}^{x'=\infty} \delta(x') \cdot e^{jk_x x'} dx' \int_{y'=-l/2}^{y'=l/2} e^{jk_y y'} dy' \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} \delta(z' - \frac{l}{2}) \cdot e^{jk_z z'} dz' \\ \vec{N}_2(\vec{r}) &= -\hat{y} \cdot I \int_{y'=-l/2}^{y'=l/2} e^{jk_y y'} dy' \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} \delta(z' - \frac{l}{2}) \cdot e^{jk_z z'} dz' \\ \vec{N}_2(\vec{r}) &= -\hat{y} \cdot I \cdot e^{jk_z l/2} \cdot \left(\frac{1}{jk_y} \cdot [e^{-jk_y y'}]_{y'=-l/2}^{y'=l/2} \right) = \\ &= -\hat{y} \cdot I \cdot e^{jk_z l/2} \cdot \left(\frac{1}{jk_y} \cdot [e^{-jk_y l/2} - e^{jk_y l/2}] \right) \\ \vec{N}_2(\vec{r}) &= -\hat{y} \cdot I \cdot e^{jk_z l/2} \cdot \frac{2}{k_y} \cdot \sin(k_y \cdot (l/2)) \end{aligned} \quad 2.58$$

$$\vec{N}_4(\vec{r}) = \hat{y} \cdot I \cdot e^{-jk_z l/2} \cdot \frac{2}{k_y} \cdot \sin(k_y \cdot (l/2)) \quad 2.59$$

D'aquesta manera, es calcula el vector de radiació total com la suma dels quatre vectors associats a cadascun dels trams de l'espira:

$$\vec{N}_{total}(\vec{r}) = \vec{N}_1(\vec{r}) + \vec{N}_2(\vec{r}) + \vec{N}_3(\vec{r}) + \vec{N}_4(\vec{r}) \quad 2.60$$

Com es podia esperar, el vector de radiació presenta dues components, una en la direcció \hat{z} i l'altra en la direcció \hat{y} . S'analitza en primer lloc la component a \hat{z} :

$$\begin{aligned} N_z &= I \cdot e^{jk_y l/2} \cdot \frac{2}{k_z} \cdot \sin(k_z \cdot l/2) - I \cdot e^{-jk_y l/2} \cdot \frac{2}{k_z} \cdot \sin(k_z \cdot l/2) \\ \vec{N} &= \hat{z} \cdot I \cdot \frac{2}{k_z} \cdot \sin(k_z \cdot (l/2)) \cdot (e^{jk_y l/2} - e^{-jk_y l/2}) \end{aligned} \quad 2.61$$

Tenint en compte que $\sin(k_z \cdot (l/2)) \approx k_z \cdot (l/2)$, ja que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = x$:

$$\vec{N} = \hat{z} \cdot I \cdot \frac{2}{k_z} \cdot \sin(k_z \cdot (l/2)) \cdot 2j \cdot \sin(k_y \cdot (l/2)) \quad 2.62$$

Substituint les coordenades rectangulars del vector d'ona k per les corresponents coordenades esfèriques, el vector de radiació en la direcció \hat{z} dona com a resultat:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \hat{z} \cdot jI \cdot l^2 \cdot k_y \\ \vec{N} &= \hat{z} \cdot jI \cdot l^2 \cdot k \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \end{aligned} \quad 2.63$$

Anàlogament, la suma dels vectors de radiació en la direcció \hat{y} dona com a resultat:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \hat{y} \cdot (I \cdot e^{-jk_z l/2} \cdot \frac{2}{k_y} \cdot \sin(k_y \cdot (l/2)) - I \cdot e^{jk_z l/2} \cdot \frac{2}{k_y} \cdot \sin(k_y \cdot (l/2))) \\ \vec{N} &= \hat{y} \cdot I \cdot \frac{2}{k_y} \cdot \sin(k_y \cdot (l/2)) (e^{-jk_z l/2} - e^{jk_z l/2}) \\ N_y &= I \cdot \frac{2}{k_y} \cdot \sin(k_y \cdot (l/2)) \cdot (-2j) \cdot \sin(k_z \cdot (l/2)) \\ \vec{N} &= -\hat{y} \cdot jI \cdot l^2 \cdot k_z \\ \vec{N} &= -\hat{y} \cdot jI \cdot l^2 \cdot k \cdot \cos\theta \end{aligned} \quad 2.64$$

Una vegada calculats els vectors de radiació en coordenades rectangulars, cal fer el canvi a coordenades esfèriques mitjançant les matrius de conversió presentades al llarg de l'apartat 2. En aquest sentit, els vectors de radiació en coordenades esfèriques queden definits de la manera següent:

$$\begin{aligned} N_\theta &= \cos\theta \cdot \sin\varphi \cdot N_y - \sin\theta \cdot N_z \\ N_\varphi &= \cos\varphi \cdot N_y \\ N_\theta &= -jI \cdot l^2 \cdot k \sin\varphi (\cos^2\theta + \sin^2\theta) - jI \cdot l^2 \cdot k \sin\varphi \\ N_\varphi &= -jI \cdot l^2 \cdot k \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \end{aligned} \quad 2.65$$

És important recordar que en la zona de camp llunyà la component radial del camp és 0. Cal destacar que es calculen els camps en la regió de Fraunhofer, ja que és en aquesta zona on el diagrama de radiació roman invariable amb la distància. D'aquesta manera, el **vector potencial** \vec{A} queda únicament definit per la component θ i φ de la manera següent:

$$A_{\theta} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} (-jI \cdot l^2 \cdot k \sin\varphi) \quad 2.66$$

$$A_{\varphi} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} (-jI \cdot l^2 \cdot k \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi) \quad 2.67$$

Una vegada calculat el vector potencial, és possible calcular els camps radiats per mitjà de les relacions definides en la taula 1:

$$E_r \approx 0 \quad 2.68$$

$$H_r \approx 0 \quad 2.69$$

$$E_{\theta} \approx \omega \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} (I \cdot l^2 \cdot k \sin\varphi) \quad 2.70$$

$$E_{\varphi} \approx \omega \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} (I \cdot l^2 \cdot k \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi) \quad 2.71$$

$$E_{\varphi} \approx \omega \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} (I \cdot l^2 \cdot k \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi) \quad 2.72$$

$$H_{\varphi} \approx \frac{\omega \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} (I \cdot l^2 \cdot k \sin\varphi)}{\eta} \quad 2.73$$

Cal destacar que, en aquest cas, el desenvolupament s'ha fet considerant una aproximació rectangular de l'espira elemental situada en el pla $\varphi = 90^\circ$ (pla ZY). Així mateix, hi ha un mètode generalitzat que permet obtenir el vector de radiació per a espirals de geometries arbitràries, sempre que es compleixi que l'espira és elemental ($l \ll \lambda$).

Malgrat que el procediment mostrat anteriorment resulti una mica tediós, és important remarcar que es tracta d'un procediment general que permet calcular de manera relativament senzilla els camps radiats de qualsevol estructura que es pugui descompondre en fils de corrent. De la mateixa manera, el mètode permet determinar els vectors de radiació d'agrupacions d'antenes, únicament coneixent-ne la situació en l'espai i el corrent que circula per cadascun dels seus elements.

A partir de les expressions dels camps radiats, no solament es pot determinar el diagrama de radiació de l'espira, sinó també altres paràmetres d'antena, com la densitat de potència radiada, la potència total radiada en l'espai, la resistència

Lectures recomanades

Trobareu el càlcul del vector de radiació i els camps radiats d'una espira elemental circular en l'obra següent:

C. A. Balanis (1997). *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley.

I trobareu el desenvolupament detallat d'aquests càlculs a:

J. Anguera; A. Pérez (2008). *Teoria d'antenes*. Enginyeria La Salle ("Estudios Semipresenciales"). ISBN: 978-84-935665-4-8.

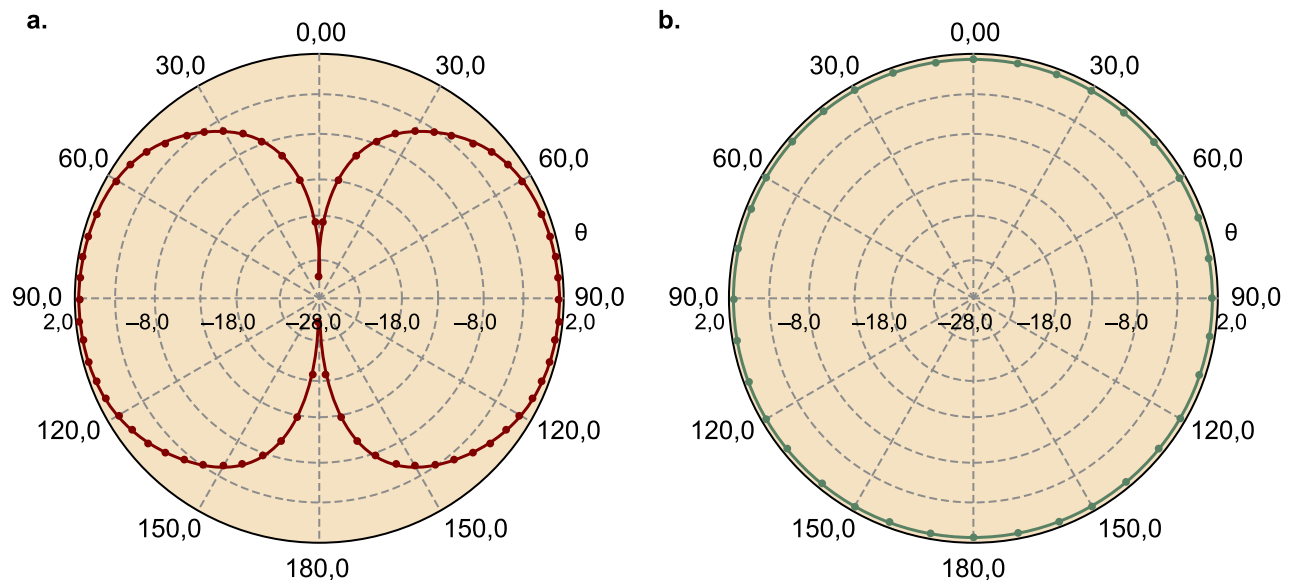
de radiació, la directivitat, etc. Per això, tal com es va procedir en l'estudi del dipol elemental, a continuació es caracteritzarà el comportament radioelèctric de l'espira elemental a partir del càlcul d'aquests paràmetres.

La densitat de potència radiada per l'espira resulta en:

$$\mathcal{P}(\theta, \varphi) = \frac{|E_\theta|^2 + |E_\varphi|^2}{\eta} = \frac{\left(\frac{\omega\mu}{4\pi r} \cdot I \cdot l^2 \cdot k\right)^2 \cdot ((\sin\varphi)^2 + (\cos\theta \cdot \cos\varphi)^2)}{\eta} \quad [\text{W/m}^2] \quad 2.74$$

La representació de la densitat de potència dóna lloc al **diagrama de radiació de potència**, que, representat en escala logarítmica, presenta la mateixa forma que el **diagrama de radiació de camp**. De l'expressió anterior s'obté que per a la direcció $\varphi = 0^\circ$ hi ha un nul de camp elèctric, mentre que el màxim de radiació tindrà lloc en la direcció $\varphi = 90^\circ$.

Figura 13. Representació gràfica dels principals talls



a. $\varphi = 0^\circ$; b. $\varphi = 90^\circ$ del diagrama de radiació corresponent a l'espira elemental de longitud $l \ll \lambda$ situat en el pla ZY (figura 12)

Una vegada coneguda la densitat de potència, és possible completar el càlcul de la potència radiada integrant-la per a tota la superfície. D'aquesta manera:

$$P_r = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \mathcal{P}(\theta, \varphi) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad [\text{W}]$$

$$P_r = \left(\frac{\omega\mu}{4\pi r} \cdot I \cdot l^2 \cdot k\right)^2 \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{((\sin\varphi)^2 + (\cos\theta \cdot \cos\varphi)^2)}{\eta} \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad 2.75$$

$$P_r = \left(\frac{\omega\mu}{4\pi r} \cdot I \cdot l^2 \cdot k\right)^2 \cdot \frac{r^2}{\eta} \cdot \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (\cos\theta \cdot \cos\varphi)^2 \cdot \sin\theta d\theta d\varphi \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} (\sin\varphi)^2 \cdot \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$P_r = \left(\frac{\omega\mu}{4\pi r} \cdot I \cdot l^2 \cdot k\right)^2 \cdot \frac{r^2}{\eta} \cdot \frac{8\pi}{3} = 320\pi^4 \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 \quad [\text{W}]$$

El coneixement del valor de la potència radiada permet conèixer el valor de la resistència de radiació, que, com ja sabem (equació 2.76), és la resistència que dissiparia la mateixa potència que la radiada per l'antena:

$$R_{rad} = \frac{P_r}{I^2} = 320\pi^4 \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^4 = 320\pi^4 \cdot \left(\frac{A}{\lambda^2}\right)^2 \quad 2.76$$

en què A es correspon amb l'àrea de l'espira $A = l^2$. Aquest resultat es pot generalitzar a espiras de contorn arbitrari sempre que es tingui en compte una espira elemental ($l \ll \lambda$).

La **directivitat** en la direcció del màxim es calcula d'acord amb el següent:

$$D = \frac{\rho_{max}}{\frac{P_r}{4\pi r^2}} = \frac{\left(\frac{\omega \mu}{4\pi r} \cdot l^2 \cdot k\right)^2}{\left(\frac{\omega \mu}{4\pi r} \cdot l^2 \cdot k\right)^2 \cdot \frac{r^2}{\eta} \cdot \frac{8\pi}{3}} = \frac{3}{2} \quad 2.77$$

en què la densitat de potència (ρ_{max}) en la direcció del màxim té lloc per a ($\varphi = 90^\circ$). Per tant, s'observa, tal com ocorria en el cas del dipol elemental, que el diagrama de radiació presenta simetria de revolució al voltant de l'eix x amb el màxim de radiació a $\varphi = 90^\circ$ i amb els nuls de radiació a ($\theta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ$) i ($\theta = 90^\circ, \varphi = 180^\circ$) (figura 13).

Lectura recomanada

Sobre la generalització d'aquest resultat, podeu consultar l'obra següent:

J. Anguera; A. Pérez (2008). *Teoria d'antenes*. Enginyeria La Salle ("Estudios Semipresenciales"). ISBN: 978-84-935665-4-8.

Dels càlculs anteriors s'extreuen les **conclusions** següents:

- El diagrama de radiació es calcula en la regió de camp llunyà, ja que és on roman invariable amb la distància.
- Els camps induïts en la regió de camp proper són purament reactius, fet que permet calcular la reactància de l'antena, que en aquest cas serà de tipus inductiu.
- L'espira elemental presenta un nul de camp en l'eix x (eix perpendicular al pla ZY , que és on es troba l'espira), mentre que el seu màxim es localitza en el pla ZY . El seu diagrama és omnidireccional i presenta simetria de revolució respecte a l'eix x (figura 12, figura 13).
- La directivitat de l'espira elemental és constant i independent de la longitud elèctrica, i de valor $D = 1,5$ (1,7 dB).
- La resistència de radiació de l'espira elemental és reduïda, ja que $l \ll \lambda$, la qual cosa indica que l'eficiència també ho serà. És important destacar que la resistència de radiació decreix amb la grandària elèctrica de l'antena i ho fa en un factor d'elevació igual a 4 (equació 2.77). Cal remarcar en aquest punt que l'espira elemental presenta una resistència de radiació més petita que la del dipol elemental per a dimensions comparables, ja que mentre que la resistència de radiació d'aquest últim decreix amb la longitud elèctrica elevada al

quadrat (equació 2.35), la de l'escala ho fa elevada a un factor 4 (equació 2.77).

- El camp elèctric i el camp magnètic estan relacionats mitjançant la impedància del medi, que en espai lliure és $\eta = 120\pi$ (Ω).
- En la regió de camp llunyà no hi ha component radial, la qual cosa indica que el camp elèctric i el camp magnètic són ortogonals a la direcció de propagació i ortogonals entre ells.
- L'escala elemental presenta una polarització lineal alineada amb el pla de l'escala.

Malgrat la poca eficiència de l'escala elemental, s'utilitza com a sonda de camp magnètic. Entre les diverses aplicacions hi ha la de mesurar el corrent sobre antenes, la qual cosa permet calcular el diagrama de radiació d'aquestes antenes a partir del vector de radiació.

Lectura complementària

Sobre el càlcul del diagrama de radiació d'antenes a partir de corrents, podeu consultar l'obra següent:

C. A. Balanis (1997). *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley.

5. Teoria d'imatges: monopols i dipols sobre plans conductors

Fins al moment s'han considerat antenes en l'espai lliure. En la pràctica, no obstant això, moltes antenes es troben en un sistema més complex o en forma part. Per exemple, les antenes de radiodifusió estan situades verticalment sobre el terra. Unes altres estan embarcades en avions, vaixells, cotxes, etc., en què l'estructura metàl·lica s'ha de tenir en compte a l'hora de dissenyar l'antena.

En aquest apartat s'analitzaran antenes en presència de plans conductors. Encara que les condicions de l'anàlisi són aproximades, els conceptes derivats tenen una repercussió transcendental que es pot aplicar en situacions més complexes.

El problema general que s'ha de resoldre consisteix a trobar els camps radiats a partir d'una distribució de corrent \vec{J} en presència d'un pla conductor. Concretament, aquest apartat considera tres situacions diferents:

- 1) Pla elèctric conductor infinit amb conductivitat infinita. Representa una situació acadèmica però en la qual els conceptes són extrapolables a nombroses situacions.
- 2) Pla elèctric conductor infinit amb conductivitat finita. En aquest apartat es té en compte la no-idealitat del pla conductor.
- 3) Pla elèctric conductor finit. És la situació més propera a la realitat.

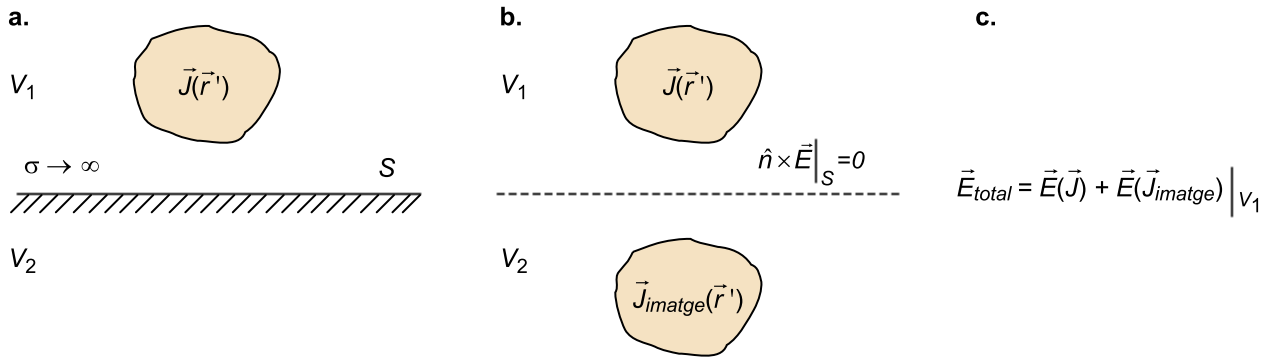
Malgrat que la primera situació és purament acadèmica, permetrà derivar la majoria dels conceptes útils per al disseny d'antenes en presència de plans conductors.

5.1. Pla elèctric conductor infinit amb conductivitat infinita

En aquest subapartat es presenta com tractar el problema de la radiació d'una antena quan es troba sobre una superfície conductora. La consideració és que el conductor és de conductivitat infinita i d'extensió infinita. En la pràctica aquesta situació no es dona, però sí que és aproximada per a alguns conductors com els típics utilitzats en antenes embarcades (conductivitats de l'ordre de 10^7 S/m) i d'extensions elèctricament grans.

Imagineu una distribució de corrent arbitrari (no necessàriament unidimensional) disposada sobre un pla conductor. Fins al moment se sap que mitjançant el vector de radiació és possible abordar el problema de la radiació mitjançant la integració dels corrents, però ara la qüestió resideix a saber com tractar el problema en presència del conductor (figura 14).

Figura 14

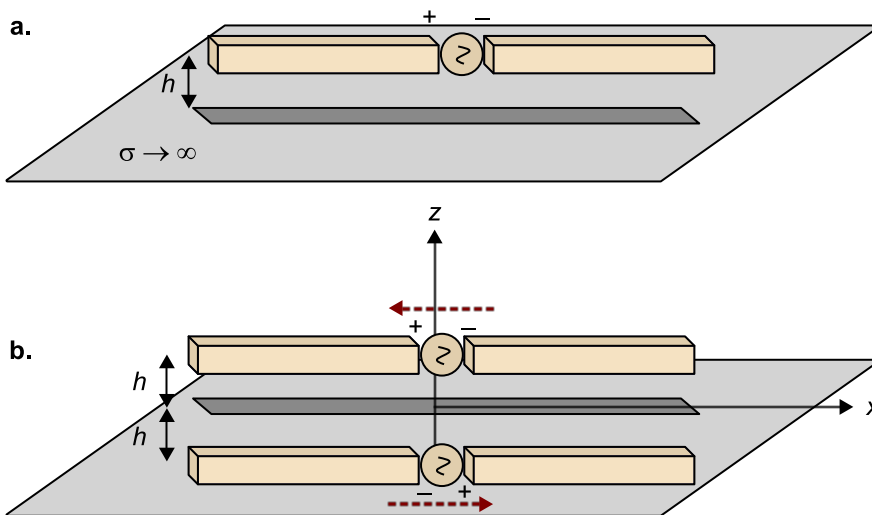


- a. Situació original en què una distribució de corrent arbitrari en un volum V_1 es troba en presència d'un pla conductor elèctric pla (S) de dimensions infinites i conductivitat infinita.
- b. Mitjançant la teoria d'imatges se substitueix el problema per un d'equivalent en el qual el nou corrent imatge ha de satisfer les condicions de contorn derivades de les equacions de Maxwell.
- c. La radiació del problema a és la suma dels camps deguts a les dues distribucions de corrent tenint en compte que el camp solament existeix en el volum V_1 .

5.1.1. Fil horitzontal

Per a veure l'aplicació del procediment il·lustrat en la figura 14, es considera, sense pèrdua de generalitat, un element lineal de corrent elèctricament petit disposat horitzontalment sobre un pla conductor d'extensió infinita amb conductivitat infinita (figura 15).

Figura 15



- a. Dipol horitzontal sobre pla conductor a una altura h .
- b. Problema equivalent format per dos dipols separats una distància h respecte al pla conductor, en què el corrent de la imatge està invertida per a satisfer les condicions de contorn en el conductor.

Així doncs, el problema consisteix a calcular els vectors de radiació corresponent al dipol superior i al dipol imatge:

$$\vec{N}_{Total} = \vec{N}_{V_1} + \vec{N}_{V_2} \quad 2.78$$

El càlcul de \vec{N}_{V_1} resulta:

$$\vec{J}(r') = \hat{x} I \delta(y') \delta(z' - h) \quad -\frac{l}{2} \leq x' \leq \frac{l}{2} \quad 2.79$$

Per la qual cosa el vector de radiació per al volum V_1 resulta:

$$\vec{N}_{V_1} = \int_{x'=-\frac{l}{2}}^{x'=\frac{l}{2}} \int_{y'=-\frac{l}{2}}^{y'=\frac{l}{2}} \int_{z'=-\frac{l}{2}}^{z'=\frac{l}{2}} \hat{x} I \delta(y') \delta(z' - h) e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} e^{jk_z z'} dx' dy' dz' = I e^{jk_z h} \frac{2 \text{sen}\left(k_x \frac{l}{2}\right)}{k_x} \hat{x} \quad 2.80$$

Atès que el dipol és elèctricament curt ($l \ll \lambda$) i amb l'objectiu de simplificar el càlcul matemàtic:

$$k_x = k \sin(\theta) \cos(\varphi) l = \frac{2\pi}{\lambda} \sin(\theta) \cos(\varphi) l \ll 1 \quad 2.81$$

s'obté:

$$\vec{N}_{V_1} = I l e^{jk_z h} \hat{x} \quad 2.82$$

Repetint anàlogament per al dipol inferior, es té que:

$$\vec{N}_{V_2} = -I l e^{-jk_z h} \hat{x} \quad 2.83$$

El **vector de radiació** total resultant és:

$$\vec{N}_{Total} = \hat{x} 2 I l \sin(kh \cos(\theta)) = N_x \hat{x} \quad 2.84$$

Passant a coordenades esfèriques s'obté:

$$\begin{aligned} N_\theta &= \cos(\theta) \cos(\varphi) N_x \\ N_\varphi &= -\sin(\varphi) N_x \end{aligned} \quad 2.85$$

I el **camp elèctric radiat** es calcula directament a partir del potencial vector \vec{A} :

$$\begin{aligned} E_\theta &= -j\omega A_\theta = -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} N_\theta = \omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \cos(\theta) \cos(\varphi) 2 I l \sin(kh \cos(\theta)) \\ E_\varphi &= -j\omega A_\varphi = -j\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} N_\varphi = -\omega \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin(\varphi) 2 I l \sin(kh \cos(\theta)) \end{aligned} \quad 2.86$$

Mitjançant la integració del vector de Poynting, s'obtenen la **directivitat** i la **resistència de radiació**:

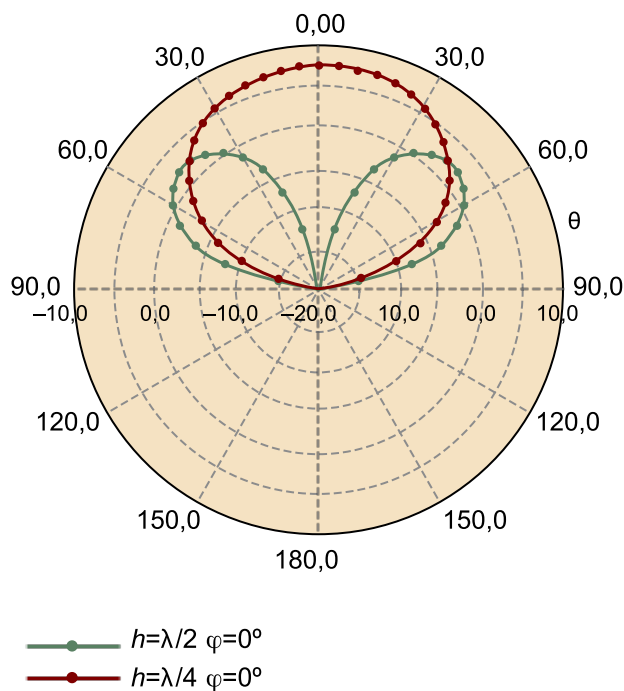
$$D = \begin{cases} \frac{4\sin^2(kh)}{R(kh)} & h \leq \frac{\lambda}{4} \\ \frac{4}{R(kh)} & h > \frac{\lambda}{4} \end{cases} \quad 2.87$$

$$R(kh) = \left[\frac{2}{3} - \frac{\sin(2kh)}{2kh} - \frac{\cos(2kh)}{(2kh)^2} + \frac{\sin(2kh)}{(2kh)^3} \right]$$

$$R_r = \pi \eta \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \left[\frac{2}{3} - \frac{\sin(2kh)}{2kh} - \frac{\cos(2kh)}{(2kh)^2} + \frac{\sin(2kh)}{(2kh)^3} \right] \quad 2.88$$

Mitjançant l'equació 2.86 es representa el diagrama de radiació per a dues situacions (figura 16). En la primera, l'altura h (figura 15) és igual a $\lambda/4$, i en la segona a $\lambda/2$.

Figura 16. Talls del diagrama de radiació per a $\varphi = 0^\circ$ (figura 15), per a $h = \lambda/4$ i $h = \lambda/2$



Observacions:

- El camp produït és el producte del camp originat pel dipol horitzontal multiplicat pel terme $2I\sin(kh\cos(\theta))$ (equació 2.86). Aquest terme rep el nom de *factor d'agrupació*. És important subratllar que si el dipol no fos elemental, el procediment hauria estat el mateix i s'hauria obtingut com a resultat el diagrama de l'element pel factor d'agrupació. Per tant, coneixent el diagrama de l'element aïllat, es poden obtenir les expressions dels camps totals.

Lectura recomanada

Sobre la directivitat i la resistència de radiació, podeu consultar l'obra següent:

C. A. Balanis (1997). *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley.

Lectura recomanada

En l'obra següent s'analitza per què apareix un màxim i un nul en la direcció perpendicular al pla conductor:

J. Anguera; A. Pérez (2008). *Teoria d'antenes*. Enginyeria La Salle ("Estudios Semipresenciales"). ISBN: 978-84-935665-4-8.

Lectures recomanades

Sobre les observacions recollides aquí, podeu consultar les obres següents:

C. A. Balanis (1997). *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley.

J. Anguera; A. Pérez (2008). *Teoria d'antenes*. Enginyeria La Salle ("Estudios Semipresenciales"). ISBN: 978-84-935665-4-8.

- Per a altures petites en termes de la longitud d'ona ($h \ll \lambda$), la radiació tendeix a zero, atès que la imatge cancel·la la radiació produïda pel dipol superior. Matemàticament, el factor d'agrupació tendeix a zero. En efecte, $2I\sin(kh\cos(\theta))$ tendeix a zero si $h \ll \lambda$, ja que $kh \rightarrow 0$. Aquesta conclusió és important, perquè indica que fils de corrent horitzontals disposats molt propers en termes de la longitud d'ona sobre un pla conductor radien poc i requereixen l'aplicació de tècniques que mitiguin aquest efecte. Una possible tècnica consisteix a utilitzar superfícies sintètiques com un conductor magnètic artificial (AMC, *artificial magnetic conductor*), que té la particularitat que la imatge va en el mateix sentit. No obstant això, aquest comportament és selectiu en freqüència i, per tant, està limitat.
- Per a altures que siguin múltiples imparells de $\lambda/4$ ($h = (2n + 1) \cdot \lambda/4$), hi ha un màxim de radiació en la direcció zenital ($\theta = 0^\circ$). En qualsevol cas, aquest efecte es pot explicar tenint en compte que l'ona que viatja perpendicularment fins al conductor i es reflecteix recorre un camí de longitud $\lambda/2$ i, per tant, es produeix un desfasament de 180° (consulteu J. Anguera i A. Pérez). Tenint en compte que el pla conductor afegeix una fase addicional de 180° , la fase total és zero i per tant es produeix una suma constructiva (figura 16).
- Per a altures que siguin múltiples parells de $\lambda/2$ –o, el que és el mateix, múltiples enters de λ : $h = (2n) \cdot \lambda/2 = n \cdot \lambda$ –, hi ha un mínim de radiació en la direcció zenital $\theta = 0^\circ$. L'explicació d'aquest fenomen es mostra amb detall a J. Anguera i A. Pérez. El mateix raonament aplicat en l'observació anterior es pot aplicar aquí i, en aquest cas, el desfasament total resultant és de 180° , amb la qual cosa hi ha una interferència destructiva.
- La directivitat per a altures elèctriques molt petites ($h < 0,05\lambda$) tendeix a ser cinc vegades la de l'element aïllat, és a dir, $D = 5 \cdot 1,5 = 7,5$. Per a altures molt elevades ($h > 5\lambda$), és quatre vegades la de l'element aïllat, és a dir, $D = 6$, encara que amb l'inconvenient que apareixen molts lòbuls en el diagrama.

Vegeu també

El factor d'agrupació s'estudia en el mòdul "Agrupació d'antenes" d'aquesta assignatura.

Activitat

Demostreu formalment que per a altures que siguin múltiples imparells de $\lambda/4$ ($h = (2n + 1) \cdot \lambda/4$) hi ha un màxim de radiació en la direcció zenital ($\theta = 0^\circ$).

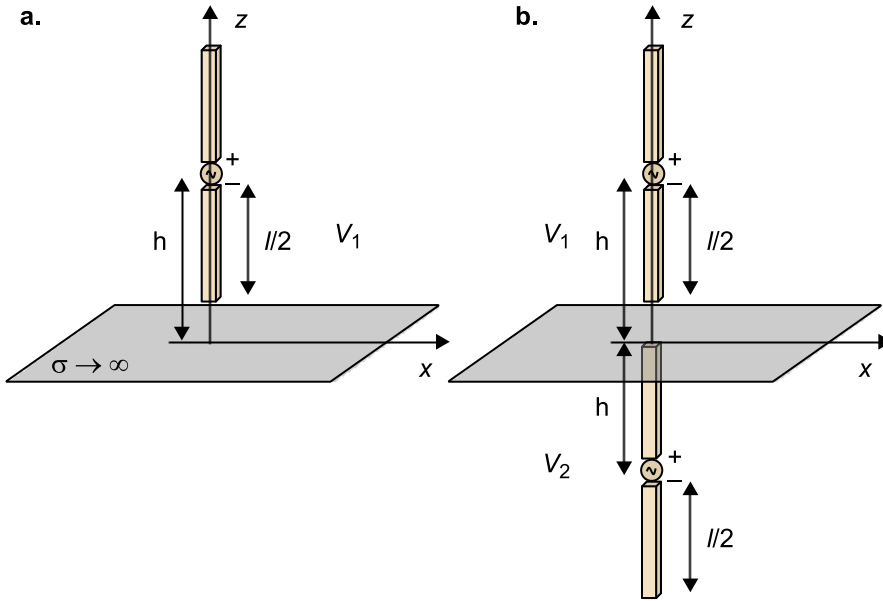
5.1.2. Fil vertical

En la figura 17 es mostra una antena de fil disposada verticalment sobre un pla conductor. Igual que en el cas anterior i sense pèrdua de generalitat, es considera que l'antena és petita en termes elèctrics ($l \ll \lambda$). Aquest fet comporta una simplificació en el càlcul, però no resta importància a les conclusions que s'obtenen, perquè es poden generalitzar per a antenes de qualsevol longitud.

Lectura recomanada

Sobre les generalitzacions d'aquestes conclusions, podeu consultar l'obra següent: C. A. Balanis (1997). *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley.

Figura 17



a. Dipol de longitud l situat a una altura h pel que fa a un pla elèctric conductor d'extensió i conductivitat infinites.
 b. Problema equivalent format per dos dipols de longitud l separats una distància $2h$, en què el corrent que travessa el dipol imatge ho fa en el mateix sentit que el que travessa el dipol original, a fi de satisfer les condicions de contorn en el conductor. En el problema equivalent no hi ha pla conductor.

Per al càlcul de \vec{N}_{V_1} se segueix el mateix procediment que en el cas anterior:

$$\vec{J}(r') = \hat{z} I \delta(x') \delta(y') \quad h - \frac{l}{2} \leq z' \leq h + \frac{l}{2} \quad 2.89$$

El vector de radiació \vec{N}_{V_1} resulta:

$$\vec{N}_{V_1} = \int_{z'=h-\frac{l}{2}}^{z'=h+\frac{l}{2}} \hat{z} I \delta(x') \delta(y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} e^{jk_z z'} dx' dy' dz' = I e^{jk_z h} \frac{2 \sin(k_z \frac{l}{2})}{k_z} \hat{z} \quad 2.90$$

Considerant que el dipol és elèctricament petit ($l \ll \lambda$) amb l'objectiu de simplificar el càlcul matemàtic:

$$kz = k \cos(\theta) l = \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\theta) l \ll 1 \quad 2.91$$

i s'obté:

$$\vec{N}_{V_1} = I l e^{jk_z h} \hat{z} \quad 2.92$$

que en coordenades esfèriques és:

$$N_{\theta V_1} = -I l e^{jk_z h} \sin(\theta) \quad 2.93$$

Si es repeteix el mateix procediment per al dipol inferior, es demostra directament el següent:

$$N_{\theta V_2} = -I l e^{-jkz} \sin(\theta) \quad 2.94$$

Per tant, la suma de tots dos vectors resulta:

$$N_{\theta_{Total}} = -I l \sin(\theta) 2 \cos(kh \cos(\theta)) \quad 2.95$$

Finalment, s'obté el camp elèctric radiat:

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= j\eta k I l \frac{e^{-jkr}}{r} \sin(\theta) 2 \cos(kh \cos(\theta)) & z \geq 0 \\ E_{\theta} &= 0 & z < 0 \\ E_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad 2.96$$

Mitjançant la integració del vector de Poynting, es calculen la directivitat i la resistència de radiació:

$$\begin{aligned} D &= \frac{2}{\left[\frac{1}{3} - \frac{\cos(2kh)}{(2kh)^2} + \frac{\sin(2kh)}{(2kh)^3} \right]} \\ R_r &= 2\pi\eta \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{\cos(2kh)}{(2kh)^2} + \frac{\sin(2kh)}{(2kh)^3} \right] \end{aligned} \quad 2.97$$

Conclusions:

- Anàlogament a la situació amb el fil horitzontal, el camp produït és el producte de l'originat pel dipol vertical aïllat multiplicat pel factor d'agrupació $2I l \cos(kh \cos(\theta))$.
- Per a altures petites en termes de longitud d'ona ($h < 0,05\lambda$), la radiació no tendeix a zero, com succeïa anteriorment.
- La directivitat per a altures elèctriques petites tendeix al doble de la directivitat del dipol aïllat, és a dir, $D = 2 \cdot 1,5$. Per a separacions elevades ($h > \lambda$), la directivitat és quatre vegades la del dipol aïllat, però amb l'inconvenient que el diagrama de radiació presenta molts lòbuls. Es pot demostrar a partir de la representació gràfica de les equacions 2.96 i 2.97.
- Sempre hi ha un nul de radiació en la direcció zenital ($\theta = 0^\circ$), la qual cosa és lògica, ja que el dipol aïllat té un nul en aquesta direcció, atès que el camp radiat és producte de la radiació produïda pel dipol multiplicat pel factor de l'agrupació (equació 2.96).

5.1.3. Monopol

Una antena monopol consisteix, en la configuració més general, en un fil disposat sobre un pla de massa (figura 18a). Mitjançant la teoria d'imatges, se substitueix aquest escenari per un parell de fils amb un corrent que circula per

Lectura recomanada

Sobre el càlcul de la directivitat i la resistència de radiació, podeu consultar l'obra següent:

C. A. Balanis (1997). *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley.

Lectures recomanades

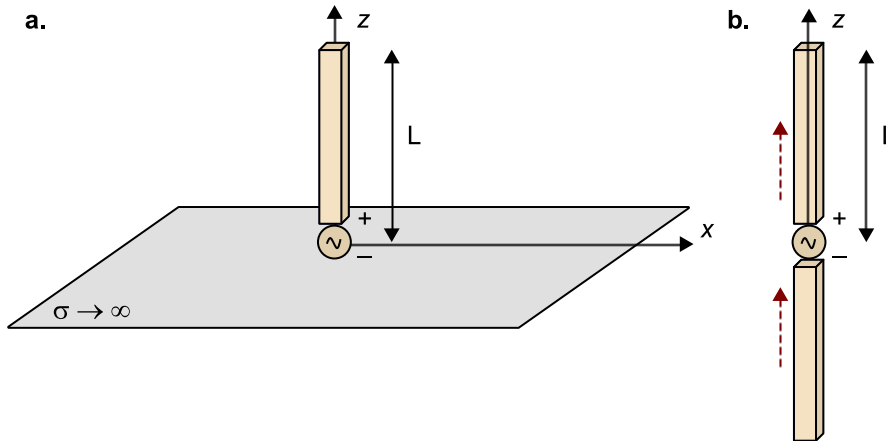
Sobre les observacions recollides aquí, podeu consultar les obres següents:

C. A. Balanis (1997). *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley.

J. Anguera; A. Pérez (2008). *Teoria d'antenes*. Enginyeria La Salle ("Estudios Semipresenciales"). ISBN: 978-84-935665-4-8.

tots dos en el mateix sentit (figura 18b). Per tant, el monopòl radia com un dipòl, però únicament tenint en compte la radiació en l'espai $z > 0$ (això és, únicament per sobre del pla de massa).

Figura 18



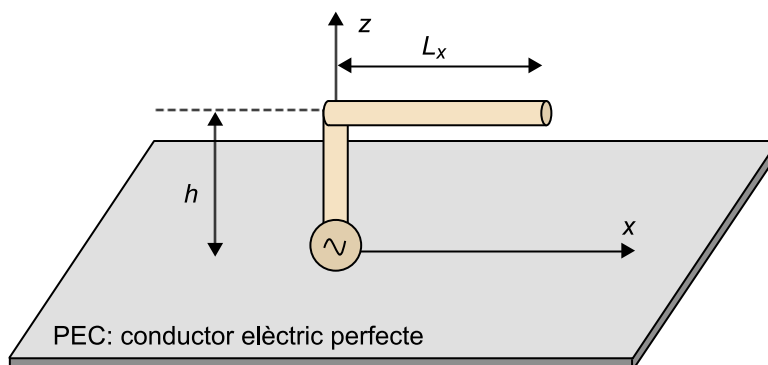
a. Antena monopòl. b. El problema equivalent del monopòl és un dipòl.

Atès que radia en el semiplà $z > 0$, la directivitat del monopòl és el doble que la del dipòl equivalent. Així doncs, per a un monopòl de longitud $\lambda/4$, la directivitat és 3 dB superior a la del dipòl de longitud $\lambda/2$, amb la qual cosa resulta de 5,1 dB. Recordeu que la directivitat és la capacitat de concentrar la potència i, per tant, en radiar el monopòl de la mateixa manera que un dipòl però amb la meitat de volum, la seva directivitat és el doble.

Exemple pràctic II

Dissenyu una antena embarcada en el sostre d'un tren de manera que el diagrama de radiació presenti un nivell de camp radiat de la mateixa amplitud en les direccions $\theta = 0^\circ$ i $(\theta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ)$ (en podeu veure els eixos en la figura 19). Es considera la hipòtesi que la teulada del tren és elèctricament infinita i de conductivitat infinita. El dissenyador ha pensat a combinar els diagrames d'una antena amb un màxim de radiació a $(\theta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ)$ perquè és un monopòl vertical i un dipòl horitzontal proper al conductor que radia amb un màxim a $\theta = 0^\circ$. Atès que el sistema ha de presentar la màxima simplicitat possible, el disseny presenta un sol punt d'excitació i la geometria de l'antena és la que presenta la figura: es tracta d'un monopòl en forma de L amb un braç vertical de longitud h i un braç horitzontal de longitud L_x .

Figura 19. Monopòl en L situat en un pla conductor de conductivitat i dimensions elèctricament molt grans (infinites a l'efecte dels càlculs del problema)



Abans de buscar els valors de h i L_x que satisfan el disseny, responeu les qüestions següents:

Lectures recomanades

Podeu consultar les obres següents:

J. Anguera; A. Pérez (2008). *Teoria d'antenes*. Enginyeria La Salle ("Estudios Semipresenciales"). ISBN: 978-84-935665-4-8.

A. Andújar; J. Anguera; C. Puente; A. Pérez (2009). "On the Radiation Pattern of the L-Shaped Wire Antenna". *Progress In Electromagnetics Research Magazine* (vol. 6, pàg. 91-105).

a) Considerant que el corrent sobre el monopòl és unitari, calculeu els camps radiats $E_\theta(\theta, \varphi)$ i $E_\varphi(\theta, \varphi)$ en coordenades esfèriques i en funció de h i L_x .

b) Per a $\varphi = 0^\circ$, com és la polarització per a cada valor de θ ?

c) Obtingueu l'expressió del camp E radiat si $L_x = 0$ i $h = \lambda/4$. Expressen-ho de la forma $E_\theta(\theta, \varphi)$ i $E_\varphi(\theta, \varphi)$. Quina és la direcció del màxim de radiació? Com és la polarització en aquesta direcció?

d) Dibuixeu el tall del diagrama de radiació per a $\varphi = 0^\circ$ en escala logarítmica, amb un marge dinàmic de 30 dB i anotant clarament els màxims i els nuls de radiació.

Amb l'objectiu de dissenyar l'antena perquè compleixi el que s'ha comentat en l'enunciat, és a dir, que la radiació sigui de la mateixa amplitud tant a $\theta = 0^\circ$ com a $(\theta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ)$ i tenint en compte que $h + L_x = \lambda/4$:

a) Calculeu el valor de h i L_x en funció de la longitud d'ona.

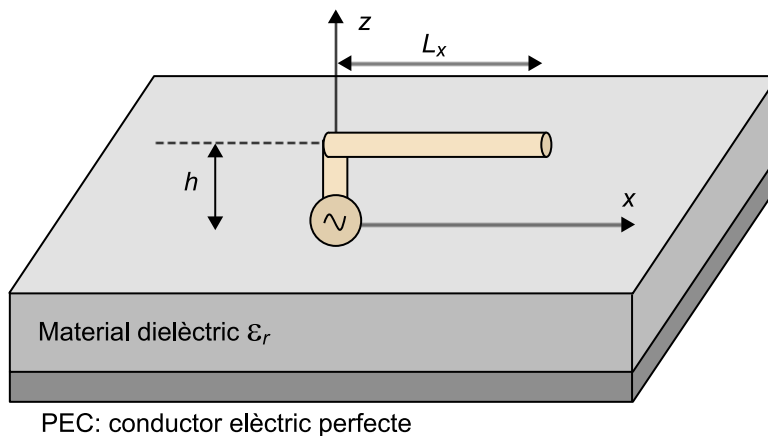
b) Com és la polarització en les direccions $\theta = 0^\circ$ i $(\theta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ)$?

c) Si el corrent presenta una distribució triangular (figura 4), raoneu de manera qualitativa com varia l'amplitud de camp radiat en les direccions de l'apartat anterior (es mantindran iguals o n'hi ha cap que augmenta en detriment de l'altra?).

d) De manera heurística, proposeu una expressió per a la resistència de radiació en funció de h i L_x tenint en compte que $h + L_x = \lambda/4$.

Per qüestions de robustesa mecànica, es decideix construir el monopòl sobre un substrat de la mateixa altura que el tram h de l'antena, de manera que el braç L_x s'imprimeix sobre el substrat tal com indica la figura 20.

Figura 20



La part horitzontal del monopòl està impresa sobre un substrat de constant dielèctrica ϵ_r ; la part vertical travessa el substrat.

Considerant el substrat de constant dielèctrica ϵ_r :

a) Què succeeix al disseny inicial?

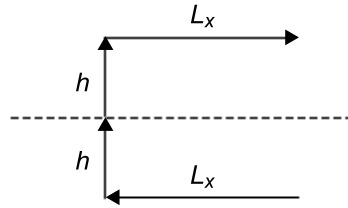
b) Varia la freqüència de ressonància?

c) Varia la resistència de radiació?

Solució

a) Mitjançant la teoria d'imatges es descompon el problema com es mostra en la figura 21:

Figura 21



Descomposició del problema en el fil de corrent original i la seva imatge, en què la imatge vertical manté el mateix sentit, mentre que l'horitzontal l'inverteix.

El vector de radiació \vec{N}_{Total} és la suma de \vec{N}_1 i \vec{N}_2 ; \vec{N}_1 correspon al tram vertical i \vec{N}_1 al conjunt horitzontal superior (V_1 : volum a $z > 0$) i inferior (V_2 : volum a $z < 0$):

$$\vec{N}_1 = \int \int \int \hat{\lambda} \delta(x') \delta(y') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} e^{jk_z z'} dx' dy' dz' = \hat{\lambda} \int_{-h}^{+h} e^{jk_z z'} dz' = \frac{\hat{\lambda}}{jk_z} [e^{jk_z h} - e^{-jk_z h}]$$

$$\vec{N}_1 = \hat{\lambda} 2 \frac{\sin(k_z h)}{k_z} = \hat{\lambda} 2 \frac{\sin(k h \cos \theta)}{k \cos \theta}$$
2.98

$$\vec{N}_2^{V1} = \int \int \int \hat{\lambda} \delta(y') \delta(z' - h) e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} e^{jk_z z'} dx' dy' dz'$$

$$\vec{N}_2^{V1} = \hat{\lambda} e^{jk_z h} \int_0^{L_x} e^{jk_x x'} dx' = \frac{\hat{\lambda}}{jk_x} e^{jk_z h} [e^{jk_x L_x} - 1]$$
2.99

$$\vec{N}_2^{V1} = \frac{\hat{\lambda}}{jk_x} e^{jk_z h} e^{jk_x \frac{L_x}{2}} \left[e^{jk_x \frac{L_x}{2}} - e^{-jk_x \frac{L_x}{2}} \right] = \hat{\lambda} e^{jk_z h} \frac{e^{jk_x \frac{L_x}{2}}}{k_x} 2 \sin\left(k_x \frac{L_x}{2}\right)$$

$$\vec{N}_2^{V2} = -\hat{\lambda} e^{-jk_z h} \frac{e^{jk_x \frac{L_x}{2}}}{k_x} 2 \sin\left(k_x \frac{L_x}{2}\right)$$
2.100

$$\vec{N}_2 = \vec{N}_2^{V1} + \vec{N}_2^{V2} = \hat{\lambda} \frac{e^{jk_x \frac{L_x}{2}}}{k_x} 2 \sin\left(k_x \frac{L_x}{2}\right) 2j \sin(k_z h)$$
2.101

$$\vec{N}_{Total} = \hat{\lambda} 2 \frac{\sin(k h \cos \theta)}{k \cos \theta} + \hat{\lambda} \frac{e^{jk_x \frac{L_x}{2}}}{k_x} 2 \sin\left(k_x \frac{L_x}{2}\right) 2j \sin(k_z h)$$

$$\vec{N}_{Total} = N_x \hat{x} + N_z \hat{z}$$

Fent el canvi a coordenades esfèriques:

$$N_\theta = \cos \theta \cos \varphi N_x - \sin \theta N_z$$

$$N_\varphi = -\sin \varphi N_x$$
2.102

i tenint en compte la relació entre el vector de radiació \vec{N} i el camp elèctric radiat \vec{E} , s'obté:

$$E_\theta = \frac{-j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left(\cos \theta \cos \varphi \frac{e^{jk_x \frac{L_x}{2}}}{k \sin \theta \cos \varphi} 2 \sin\left(k_x \frac{L_x}{2}\right) 2j \sin(k_z h) - \sin \theta \frac{2 \sin(k h \cos \theta)}{k \cos \theta} \right)$$

$$E_\varphi = \frac{-j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \left(-\sin \varphi \frac{e^{jk_x \frac{L_x}{2}}}{k \sin \theta \cos \varphi} 2 \sin\left(k_x \frac{L_x}{2}\right) 2j \sin(k_z h) \right)$$
2.103

Considerant que $\frac{\omega\mu}{k} = \eta = 120\pi$, se simplifica i finalment s'obté:

$$E_{\theta} = -j30 \frac{e^{-jkr}}{r} \left(\cos\theta \cos\varphi \frac{e^{jk_x \frac{L_x}{2}}}{\sin\theta \cos\varphi} 2\sin\left(k_x \frac{L_x}{2}\right) 2j\sin(k_z h) - \sin\theta \frac{2\sin(kh \cos\theta)}{\cos\theta} \right)$$

$$E_{\varphi} = -j30 \frac{e^{-jkr}}{r} \left(-\sin\varphi \frac{e^{jk_x \frac{L_x}{2}}}{\sin\theta \cos\varphi} 2\sin\left(k_x \frac{L_x}{2}\right) 2j\sin(k_z h) \right)$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$
2.104

b) Per a $\varphi = 0^\circ$ no hi ha component de camp E_{φ} , sinó que únicament hi ha component E_{θ} , amb la qual cosa la polarització és sempre lineal per a qualsevol direcció de θ .

c) Si $L_x = 0$, el que queda és un monopòl de longitud h . Si, a més, $h = \lambda/4$, s'obtenen les equacions del camp radiat pel monopòl $\lambda/4$:

$$E_{\theta} = j30 \frac{e^{-jkr}}{r} \left(\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta \cos\theta} \right)$$

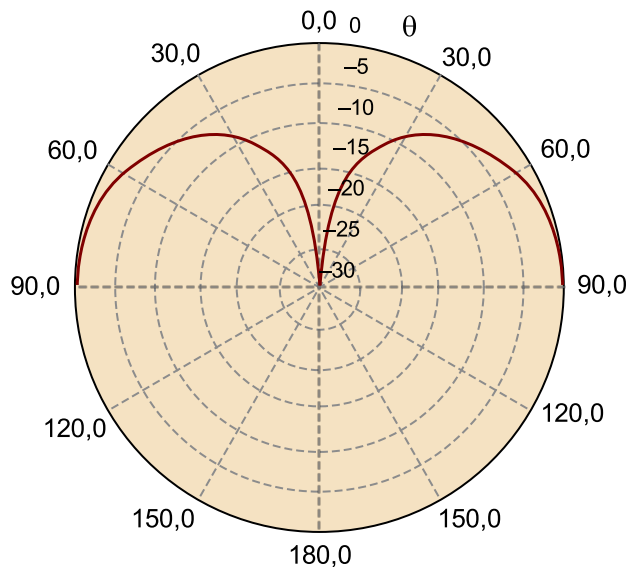
$$E_{\varphi} = 0$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$
2.105

La polarització és lineal tenint el màxim de radiació a $\theta = 90^\circ$. En el pla $\theta = 90^\circ$, el camp està alineat segons $\hat{\theta}$ i, per tant, la polarització és lineal i vertical. Es comprova que per a la direcció normal al pla $\theta = 0^\circ$, apareix un nul de radiació.

d) Es tracta del diagrama de radiació d'un fil vertical d'un quart de longitud d'ona que es denomina *monopòl* $\lambda/4$.

Figura 22. Diagrama de radiació d'un monopòl de longitud $\lambda/4$



e) A $\varphi = 0^\circ$, les expressions del camp queden:

$$E_{\theta} = -j30 \frac{e^{-jkr}}{r} \left(\cos\theta \frac{1}{\sin\theta} 2\sin\left(k\sin\theta \frac{L_x}{2}\right) 2j\sin(k\cos\theta h) - \sin\theta \frac{2\sin(kh \cos\theta)}{\cos\theta} \right)$$

$$E_{\varphi} = 0$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$
2.106

En què ja s'han substituït els valors de k_x i k_z pels corresponents en funció de θ i φ . El camp a $\theta = 0^\circ$ és degut únicament al primer terme, atès que l'aportació del segon (el del braç vertical) és nul·la. Per tant, una vegada eliminat el factor 30, el mòdul de E_{θ} queda:

$$\begin{aligned} |E_{\theta}| &= \left| \frac{1}{\sin\theta} 2\sin\left(k\sin\theta\frac{L_x}{2}\right) 2\sin(kh) - 0 \right| \\ E_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad 2.107$$

Per a $\theta = 0^\circ$ s'anul·la el numerador, però també el denominador. Per a això se substitueix $\sin(x) \approx x$ ($x \ll 1$), de manera que:

$$\begin{aligned} |E_{\theta}| &= \left| \frac{1}{\sin\theta} 2\left(k\sin\theta\frac{L_x}{2}\right) 2\sin(kh) - 0 \right| \\ E_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad 2.108$$

I es resol la indeterminació:

$$\begin{aligned} |E_{\theta}| &= k \cdot L_x \cdot 2 \cdot \sin(kh) \\ E_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad 2.109$$

Per a $\theta = 90^\circ$ el camp és degut al monopòl (el braç vertical), ja que el camp del primer terme (el degut al braç horitzontal) s'anul·la, amb la qual cosa resulta:

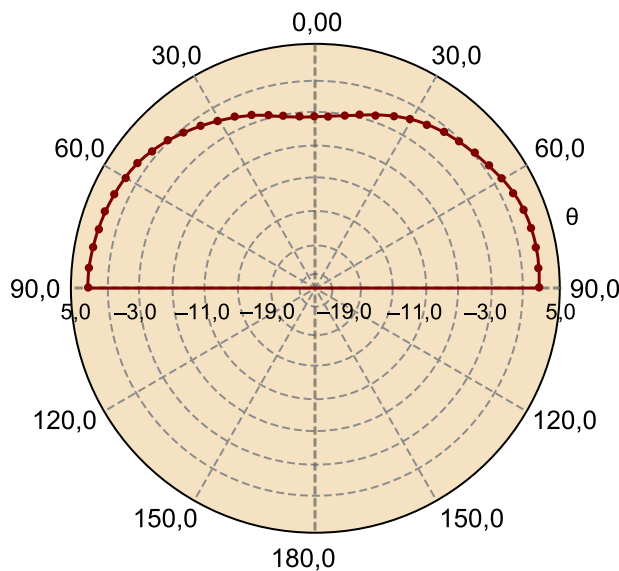
$$\begin{aligned} |E_{\theta}| &= |2\sin(kh)| \\ E_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad 2.110$$

Perquè l'amplitud sigui igual en les dues direccions (equacions 2.109 i 2.110), s'ha de complir que $k \cdot L_x = 1$, $L_x = \lambda/2\pi \approx 0,16\lambda$ i $h = 0,09\lambda$.

f) La polarització en el pla $\varphi = 0^\circ$ és sempre lineal, a $\theta = 0^\circ$ és horitzontal i a $\theta = 90^\circ$ és vertical.

g) Si el corrent no és triangular en lloc d'uniforme, ocorre que el braç vertical implica un factor ponderador menor en l'expressió del camp, atès que el corrent decreix cap a l'extrem obert. Per tant, en aquesta situació es radiarà més a $\theta = 90^\circ$ que a $\theta = 0^\circ$ (figura 23).

Figura 23. Tall a 0° de la component de camp E_{θ}



La simulació té en compte una situació real, és a dir, un corrent que és màxim en el punt d'excitació i decreix fins a l'extrem. S'observa que radia més a $\theta = 90^\circ$ que a $\theta = 0^\circ$.

h) Sabent que el monopòl vertical presenta una $R_{rad} = 36 \Omega$ (C. A. Balanis) i que el monopòl ($h = 0$) $R_{rad} = 0 \Omega$, es proposa una expressió del tipus lineal:

$$R_{rad}(h) = 36 \cdot h \cdot \frac{4}{\lambda} \Omega \quad 2.111$$

Encara que és un model simple, la raó de proposar l'expressió anterior és que mostra que la resistència de radiació decreix en apropar elèctricament el fil al pla conductor.

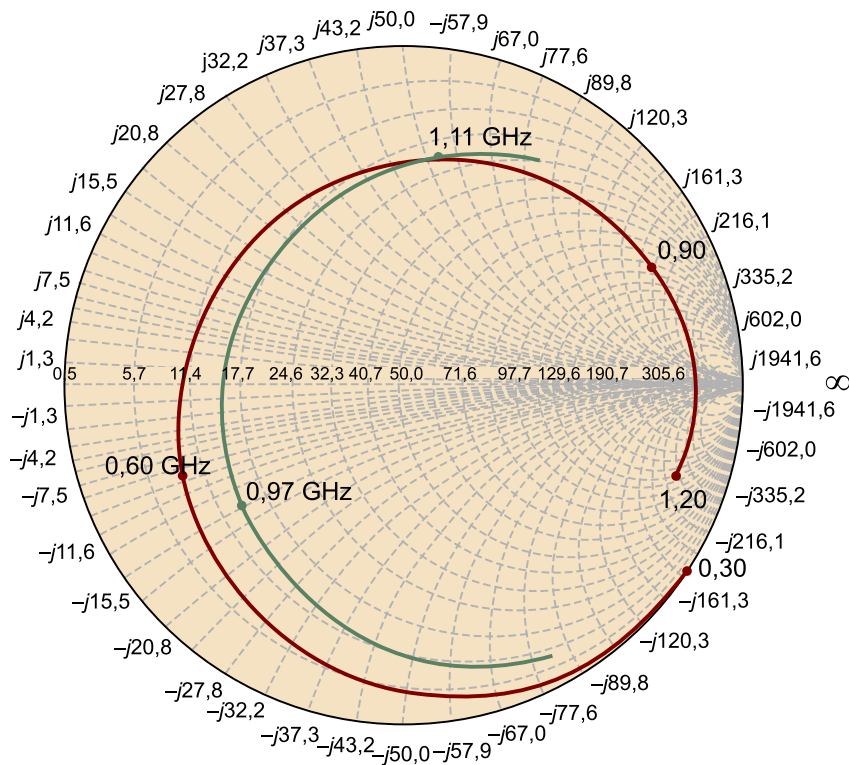
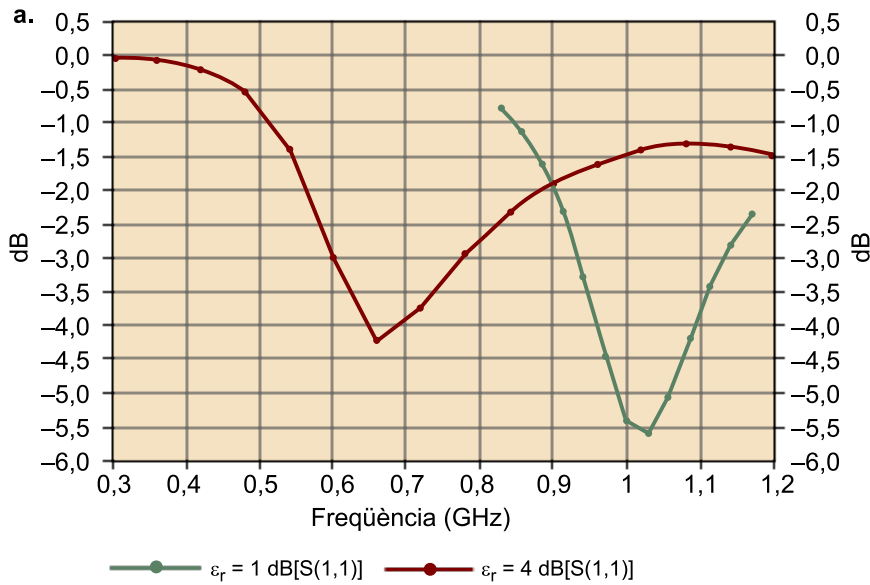
i) Per a respondre aquest apartat, s'han d'analitzar les antenes en medis materials, la qual cosa està explicada a J. Anguera i A. Pérez. El disseny es veu modificat, ja que la freqüència de ressonància disminueix. La màxima disminució s'obté si tota l'antena està immersa en un dielèctric:

$$\begin{aligned} f_o' &= \frac{f_o}{\sqrt{\epsilon_r}} \\ R_r' &= \frac{R_r}{\sqrt{\epsilon_r}} \end{aligned} \quad 2.112$$

Per tant, com a màxim disminuiria aquest valor.

j) Per a recuperar el comportament inicial, caldria retallar els braços vertical i horitzontal. Si el dielèctric presenta pèrdues, es tradueix en un augment de les pèrdues òhmiques de l'antena i, per tant, en una disminució de l'eficiència de radiació.

k) La resistència de radiació varia lleugerament (equació 2.112), i és lleugerament menor (figura 24).

Figura 24. Monopol sobre $\epsilon_r = 1$ i sobre $\epsilon_r = 4$ 

S'observa com disminueix la freqüència de ressonància.

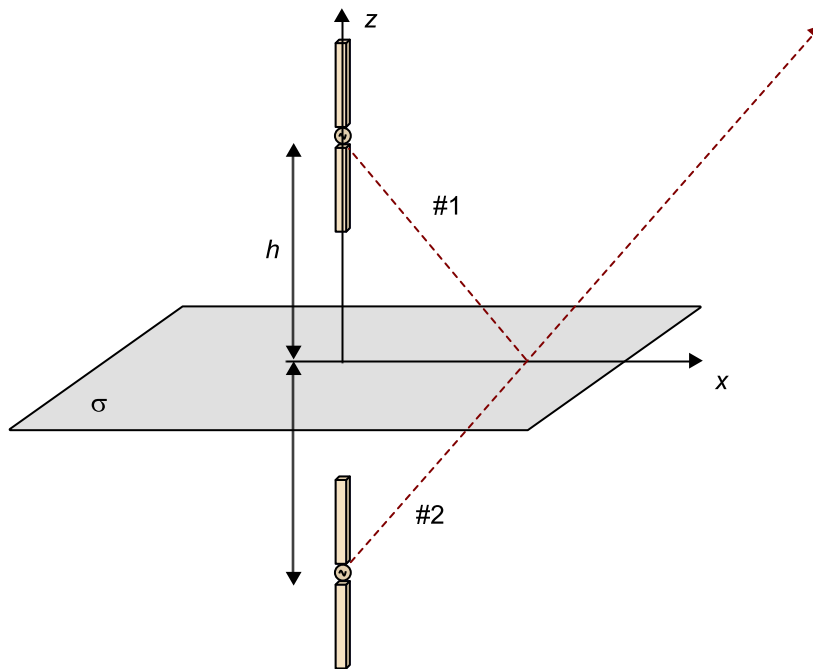
L'antena monopol s'utilitza molt en sistemes de comunicació de telefonia mòbil com a element per a donar cobertura a cel·les petites.

5.2. Pla elèctric conductor infinit amb conductivitat finita

En la realitat, la conductivitat infinita no existeix i s'ha d'analitzar quin impacte provoca una conductivitat finita. En antenes dipol/monopol situades sobre bons conductors (coure $\sigma = 5,9 \cdot 10^7$ S/m), per exemple, antenes embar-

rades en vehicles en què les conductivitats són elevades, s'aplica l'aproximació utilitzada anteriorment. No obstant això, hi ha altres situacions en les quals la conductivitat està molt per sota d'aquests valors. Aquest és el cas d'antenes col·locades sobre la superfície terrestre, com per exemple antenes de radiodifusió i enllaços ionosfèrics (freqüències d'FM i HF), o embarcades en vehicles. En aquest subapartat es descriuran els efectes produïts per una conductivitat baixa.

Figura 25



Utilitzant models d'òptica geomètrica, el raig #1 que emana de l'antena es reflecteix en el conductor, que al seu torn produeix un raig #2 atenuat a causa de la seva no-idealitat. Aquest raig #2 seria el produït per la font imatge, però tenint en compte que radia amb menys amplitud.

Mitjançant el procediment elaborat en el subapartat anterior, es dedueix que el camp total produït és igual al camp de l'element superior més el camp de la imatge ponderat per l'efecte de la no-idealitat del conductor. Matemàticament:

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= j\eta k I l \frac{e^{-jkr}}{r} \sin(\theta) \left(e^{jk h \cos \theta} + \Gamma_V e^{-jk h \cos \theta} \right) & z \geq 0 \\ E_{\theta} &= 0 & z < 0 \\ E_{\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad 2.113$$

en què Γ_V és el coeficient de reflexió per a una ona plana incident en un terra pla. Aquest coeficient depèn del tipus de terra i de l'angle d'incidència del raig amb el terra. En l'esquema de la figura 25 s'il·lustra com l'antena situada en la part superior radia un raig #1 cap al pla conductor. El raig es reflecteix i produeix un altre raig #2, que és equivalent al que produiria l'antena imatge. A diferència del cas amb conductor ideal, la reflexió del raig #1 no està sotmesa a un coeficient de reflexió $\Gamma = -1$, sinó que ara presenta una atenuació a causa de la conductivitat finita del conductor, i també un canvi de fase.

Lectura recomanada

Sobre la dependència del coeficient de reflexió del tipus de terra i l'angle d'incidència del raig amb el terra, vegeu: **W. L. Stutzman; G. A. Thiele** (1998). *Antenna Theory and Design*. John Wiley.

Observeu que el procediment matemàtic és el mateix que l'utilitzat per a un pla conductor ideal. El camp depèn del diagrama de l'element que s'ha considerat elemental ($\sin \theta$) multiplicat per un terme que conté el desplaçament de la font a h i la imatge ponderada pel coeficient de reflexió.

Les **conclusions bàsiques** que s'extreuen dels desenvolupaments anteriors són les següents:

- Per a un **element de corrent horitzontal**, els canvis en el diagrama són menyspreables pel que fa al cas del conductor ideal.
- Si, per contra, es considera un **element de corrent vertical**, els canvis són més significatius, ja que per exemple es produeix una atenuació en la direcció del pla conductor. A tall il·lustratiu, el diagrama d'un monopòl d'un quart de longitud d'ona (monopòl $\lambda/4$) es modifica de tal manera que hi ha una atenuació en el pla XY i el màxim s'eleva per sobre d'aquest pla. Per a mitigar aquest efecte, se sol procedir a recobrir el terra mitjançant varetes metàl·liques amb l'objectiu de recrear un conductor ideal.

5.3. Pla elèctric conductor de dimensions finites

Naturalment, el pla infinit és una aproximació de la realitat en les situacions en què la grandària del pla és elèctricament gran. Per a les situacions en les quals el pla conductor és petit, tant els diagrames de radiació com les impedàncies es veuen alterats. Per a analitzar antenes amb plans de massa finits, es recorre a mètodes d'altres freqüències, com la teoria geomètrica de la difracció, o a mètodes numèrics, com el mètode dels moments (MoM).

Com a conseqüència de tenir plans de massa finits, es produeix una radiació en el semiplà inferior, la qual cosa pot resultar un inconvenient en algunes situacions en què el lòbul posterior crea una interferència amb un altre sistema de telecomunicació. D'altra banda, es produeix un arissament en la forma del diagrama a causa de la reflexió en les arestes.

En la figura 26 es mostra un monopòl $\lambda/4$, de 43 mm de longitud, en un pla de massa finit de 200 mm \times 200 mm. A partir de les dades se'n pot calcular la freqüència de ressonància, ja que $L = \lambda/4 = c/(f_0 \cdot 4)$, i d'això s'obté que $f_0 = c/(4 \cdot \lambda)$, que resulta 1744 MHz. La simulació mitjançant mètodes numèrics ofereix una freqüència de ressonància de 1735 MHz, i per tant és molt aproximada. S'observa com el diagrama presenta un nul en la direcció zenital característica d'un monopòl vertical i radiació posterior a causa de la grandària finita del pla conductor.

Lectura recomanada

Trobareu el procediment per a una font horitzontal en l'obra següent:

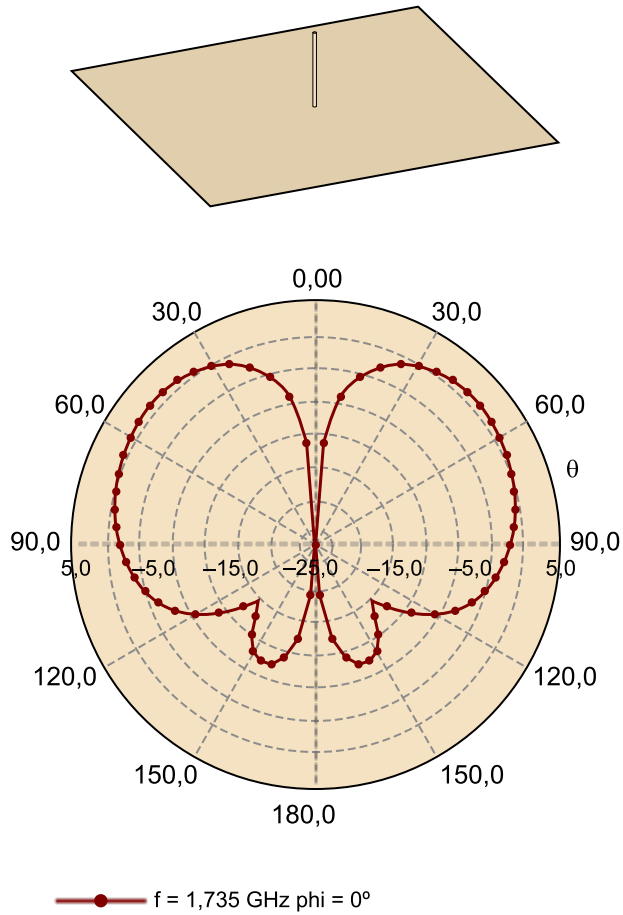
W. L. Stutzman; G. A. Thiele (1998). *Antenna Theory and Design*. John Wiley.

Lectura recomanada

Sobre el mètode dels moments, podeu consultar les obres següents:

W. L. Stutzman; G. A. Thiele (1998). *Antenna Theory and Design*. John Wiley.

Figura 26



- a. Antena monopòl de 43 mm d'altura i grandària de pla de massa de 200 mm x 200 mm.
 b. Tall del diagrama de radiació en el pla $\phi = 0^\circ$ per a una freqüència de ressonància de $f_0 = 1735 \text{ MHz}$.

6. Lectures obligatòries i complementàries

Lectures obligatòries

- **M. J. Ammann; Z. N. Chen** (2003, abril). "Wideband Monopole Antennas for Multi-Band Wireless Systems". *IEEE Antennas and Propagation Magazine* (vol. 45, núm. 2, pàg. 146-150).
- **A. Andújar; J. Anguera; C. Puente; A. Pérez** (2009). "On the Radiation Pattern of the L-Shaped Wire Antenna". *Progress in Electromagnetics Research Magazine* (vol. 6, pàg. 91-105).

Lectures complementàries

- **E. K. Miller** (2001). "Electromagnetics without Equations". *IEEE Potentials* (pàg. 17-20).
- **H. Morishita; Y. Kim; K. Fujimoto** (2002, octubre). "Design Concept of Antennas for Small Mobile Terminals and the Future Perspective". *IEEE Antennas and Propagation Magazine* (vol. 44, núm. 5, pàg. 30-43).

Bibliografia

Andújar, A.; Anguera, J.; Puente, C.; Pérez, A. (2009). "On the Radiation Pattern of the L-Shaped Wire Antenna". *Progress in Electromagnetics Research Magazine* (vol. 6, pàg. 91-105).

Anguera, J.; Pérez, A. (2008). *Teoria d'antenes*. Enginyeria La Salle ("Estudios Semipresenciales"). ISBN: 978-84-935665-4-8.

Balanis, C. A. (1997). *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley.

Stutzman, W. L.; Thiele, G. A. (1998). *Antenna Theory and Design*. John Wiley.

