

Agrupacions d'antenes

Aurora Andújar Linares
Jaume Anguera Pros

PID_00178411

Índex

Introducció	5
Objectius	7
1. Factor d'agrupació	9
2. Distribucions canòniques	15
2.1. Distribució uniforme	15
2.2. Distribució triangular	26
2.3. Distribució binomial	28
3. Efecte del diagrama de radiació sobre el factor d'agrupació.	34
4. Agrupacions amb elements paràsits	36
4.1. Matriu d'impedàncies	37
4.2. Agrupació formada per un alimentador i un paràsit curtcircuitat	38
4.3. Agrupació formada per un alimentador i un paràsit carregat	43
4.4. Antena Yagi-Uda	45
5. Síntesi de diagrames	47
5.1. Mètode de Woodward-Lawson	47
6. Lectures obligatòries i complementàries	51
Bibliografia	53

Introducció

“No hi ha d’haver barreres per a la llibertat de preguntar. No hi ha lloc per al dogma en la ciència. El científic és lliure i ha de ser lliure per a fer qualsevol pregunta, per a dubtar de qualsevol asseveració, per a buscar qualsevol evidència, per a corregir qualsevol error.”

Robert Oppenheimer (1904-1967), físic nord-americà

Al llarg d’aquest mòdul s’estudiaran les agrupacions d’antenes, que permeten solucionar les limitacions de les antenes lineals bàsiques presentades al llarg del mòdul “Fonaments bàsics. Antenes de fil”. Una **agrupació d’antenes**, com indica el nom, és un conjunt d’antenes en què es poden manipular l’amplitud i la fase d’excitació de cada element, a més de la distància entre ells, per a sintetitzar diagrames que difícilment es poden aconseguir amb un sol element.

Els avantatges de les agrupacions d’antenes respecte a les antenes lineals bàsiques es poden resumir en tres aspectes fonamentals:

a) Augment de la directivitat. Les agrupacions d’antenes permeten aconseguir valors de directivitat elevats respecte dels que es podrien obtenir amb una única antena. Tal com es descriu en el mòdul “Fonaments bàsics. Antenes de fil”, la directivitat és un paràmetre estretament relacionat amb la longitud elèctrica de l’antena i la distribució de corrents sobre aquesta. Així doncs, una tècnica per a augmentar la directivitat d’una estructura consisteix a incrementar-ne la longitud elèctrica. No obstant això, per al cas del dipol, el fet d’augmentar-ne la longitud elèctrica produeix modificacions en la distribució de corrent que afavoreixen l’aparició de nuls de radiació que al seu torn donen lloc a diagrames de radiació amb lòbuls secundaris que disminueixen dràsticament la directivitat. Hi ha, per tant, un compromís per a aquest tipus d’antenes lineals en què la màxima directivitat assolible es troba per a longituds elèctriques al voltant de $5 \lambda/4$, per a les quals s’obté un valor de directivitat de 3,33 dBi, aproximadament, que resulta especialment reduït si es compara amb els valors que proporcionen les agrupacions d’antenes.

b) Escombratge de feix. Les agrupacions d’antenes ofereixen també l’avantatge d’aconseguir variar la direcció del seu feix de radiació principal mitjançant la modificació de certs paràmetres, fet que permet fer un escombratge en l’espai. La variació d’aquests paràmetres es pot dur a terme mecànicament o bé automàticament de manera electrònica ajustant, per exemple, la fase d’excitació de cada element. En aquest sentit i com a exemple pràctic, les antenes d’estació base formades per agrupacions d’antenes ajusten la direcció del seu feix principal a fi de proporcionar cobertura a la cel·la de comunicacions mòbils que tenen assignada per mitjà d’aquest mecanisme d’ajust de la fase entre elements. D’aquesta manera, s’evita la pèrdua de potència mitjan-

çant la radiació cap a regions de l'espai no desitjades. Un altre exemple d'ús d'aquesta particularitat que ofereixen les agrupacions d'antenes es troba en les aplicacions radar.

c) **Síntesi de diagrames.** Un altre dels avantatges de les agrupacions d'antenes és que permeten sintetitzar diagrames de radiació. En aquest cas, s'invertiria el procediment clàssic en el qual es dissenya una antena i se'n calcula el diagrama de radiació. Les agrupacions d'antenes permeten dissenyar un diagrama de radiació, és a dir, ofereixen al dissenyador d'antenes la possibilitat de determinar els paràmetres de l'agrupació en termes de nombre d'elements, distància entre elements i fase entre elements a fi d'aconseguir sintetitzar el diagrama de radiació que es vol. Aquesta particularitat resulta especialment interessant a l'hora de dissenyar diagrames de radiació específics, com, per exemple, un diagrama de radiació amb dos lòbuls principals que apunten en unes direccions determinades. L'aplicació més directa consisteix a dissenyar antenes embarcades.

Objectius

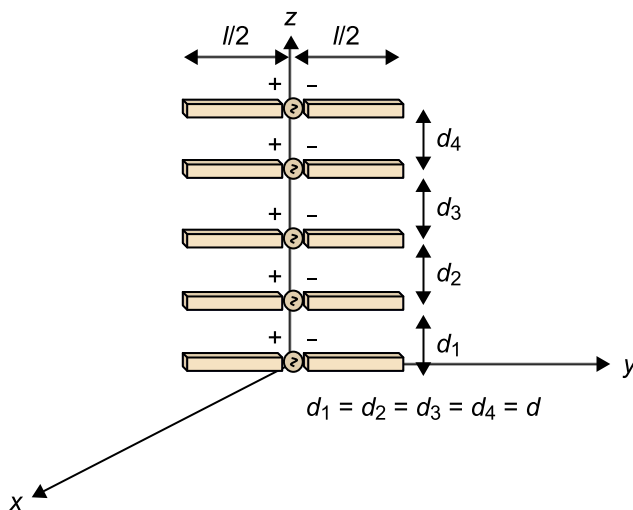
Els objectius principals d'aquest mòdul són els següents:

- 1.** Entendre les limitacions de les antenes lineals bàsiques analitzades en el mòdul "Fonaments bàsics. Antenes de fil" i les raons per les quals són necessàries les agrupacions d'antenes per a superar aquestes limitacions.
- 2.** Conèixer els avantatges i les limitacions de les agrupacions d'antena, i l'aplicabilitat que tenen.
- 3.** Determinar les expressions matemàtiques que permeten caracteritzar les agrupacions d'antenes.
- 4.** Entendre el factor d'agrupació com una eina matemàtica que permet calcular el diagrama de radiació de les agrupacions d'antenes.
- 5.** Conèixer el mecanisme per a calcular aquest diagrama de radiació i determinar, a partir d'aquest, tots els paràmetres d'antena que hi estan relacionats: densitat de potència radiada, potència radiada, resistència de radiació, directivitat i eficiència.
- 6.** Analitzar el comportament de les agrupacions d'antenes basades en distribucions canòniques.
- 7.** Entendre l'efecte dels elements paràsits en el comportament d'agrupacions d'antena.
- 8.** Modificar els diversos paràmetres de les agrupacions d'antenes a fi d'aconseguir sintetitzar un diagrama de radiació determinat o desitjat.

1. Factor d'agrupació

Els camps radiats per agrupacions d'antenes, i els seus paràmetres radioelèctrics més rellevants, es poden calcular seguint el procediment matemàtic que es descriu detalladament en el mòdul d'antenes de fil. D'aquesta manera, es podrien calcular individualment els camps radiats per cadascun dels elements de l'agrupació i fer el còmput del camp radiat total com la suma dels camps radiats per cadascun dels elements que s'han calculat de manera independent. No obstant això, per al cas de les agrupacions d'antenes hi ha un procediment matemàtic que simplifica considerablement els càlculs i que està basat en la funció matemàtica coneguda com a **factor d'agrupació** (*array factor*), que es descriurà en aquest apartat.

Figura 1. Agrupació d'antenes composta per cinc elements alineats al llarg de l'eix z



D'aquesta manera, si es consideren N fonts, en què N es correspon amb el nombre d'elements de l'agrupació, en aquest cas $N = 5$ dipols orientats en la direcció de l'eix y (figura 1) situades al llarg de l'eix z , separades una certa distància i amb corrents arbitraris de fase progressiva α (equació 3.1), el càlcul dels camps radiats per l'agrupació es determinaria d'acord amb els procediments que s'han desenvolupat en el mòdul d'antenes de fil.

$$I_n(y') = \begin{cases} a_n \cdot e^{jn\alpha} & |y'| \leq l/2 \\ 0 & |y'| > l/2 \end{cases} \quad 3.1$$

Lectura recomanada

Sobre el factor d'agrupació, també podeu consultar les obres següents:

C. A. Balanis (1997). *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley.

J. Anguera; A. Pérez (2008). *Teoria d'antenes*. Enginyeria La Salle ("Estudios Semipresenciales"). ISBN: 978-84-935665-4-8.

Vegeu també

Estudiareu el càlcul detallat dels camps radiats per agrupacions d'antenes en el mòdul "Fonaments bàsics. Antenes de fil" d'aquesta assignatura.

en què I_n és el corrent d'alimentació de l'element n -èssim de l'agrupació, a_n és el coeficient d'alimentació d'aquest element (en general, es pot tractar d'un coeficient complex, si bé el més habitual és que sigui un valor real) i $e^{j\alpha}$ és un terme de fase que designa la diferència de fase que hi ha entre els diversos elements de l'agrupació, el qual és útil per a desapuntar el feix principal.

Vegeu també

Podeu veure les distribucions canòniques de l'apartat 2 d'aquest mòdul didàctic.

En aquest sentit, el vector de radiació d'un element es calcula com la transformada de Fourier dels corrents que circulen per aquest element, tal com s'ha descrit en el mòdul d'antenes lineals. El vector de radiació total seria, per tant, la suma dels vectors de radiació originats per cadascun dels elements, tenint en compte les variacions en la distribució de corrent en termes de fase originades en cadascun (equació 3.1).

En el cas que s'estudia s'assumeix una distància (d) i una diferència de fase (a) uniforme entre elements. El vector de radiació $\vec{N}_0(\vec{r})$ es correspon amb el vector de radiació originat per l'element que es troba en l'origen de coordenades (element 0). Prèviament al càlcul de $\vec{N}_0(\vec{r})$ i a fi de poder relacionar fàcilment les expressions dels vectors de radiació de tots els elements de l'agrupació, es defineix i es calcula en primer lloc el vector de radiació $\vec{N}_0'(\vec{r})$, que és el vector de radiació de l'element 0 de l'agrupació si el seu corrent d'alimentació no és I_0 (segons l'equació 3.1), sinó un corrent constant I :

$$I(y') = \begin{cases} 1 & |y'| \leq l/2 \\ 0 & |y'| > l/2 \end{cases} \quad 3.2$$

D'aquesta manera, el vector de radiació $\vec{N}_0'(\vec{r})$ es calcula tal com es mostra a continuació:

$$\begin{aligned} \vec{N}_0'(\vec{r}) &= \hat{y} \int_{x'=-\infty}^{x'=\infty} \int_{y'=-l/2}^{y'=l/2} \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} \delta(x') I(y') \cdot \delta(z') \cdot e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} \cdot dv' = \\ &= \hat{y} \int_{y'=-l/2}^{y'=l/2} e^{jk_y y'} dy' = \hat{y} \frac{[e^{jk_y l/2} - e^{-jk_y l/2}]}{jk_y} \quad 3.3 \\ \vec{N}_0'(\vec{r}) &= \hat{y} \frac{2\sin(k_y(l/2))}{k_y} \end{aligned}$$

Calculant, ara sí, el vector de radiació de l'element 0 de l'agrupació, que és $\vec{N}_0(\vec{r})$, a partir del corrent I_0 (vegeu l'equació 3.1), s'aprecia la relació entre $\vec{N}_0(\vec{r})$ i $\vec{N}_0'(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \vec{N}_0(\vec{r}) &= \hat{y} \int_{x'=-\infty}^{x'=\infty} \int_{y'=-l/2}^{y'=l/2} \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} \delta(x') \cdot I_0(y') \cdot \delta(z') \cdot e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} \cdot dv' \\ \vec{N}_0(\vec{r}) &= \hat{y} \cdot a_0 \cdot e^{j0\alpha} \int_{y'=-l/2}^{y'=l/2} e^{jk_y y'} dy' = a_0 \cdot \hat{y} \frac{[e^{jk_y l/2} - e^{-jk_y l/2}]}{jk_y} \quad 3.4 \\ \vec{N}_0(\vec{r}) &= a_0 \cdot \hat{y} \frac{2\sin(k_y(l/2))}{k_y} = a_0 \cdot \vec{N}_0'(\vec{r}) \end{aligned}$$

Els vectors de radiació associats a la resta dels elements es calculen de la mateixa manera. No obstant això, s'observa que tots es corresponen amb el vector de radiació $\vec{N}_0(\vec{r})$ més un desplaçament en l'eix z representat per l'exponencial complexa. Es considera, a fi de compactar l'expressió del diagrama de radiació, que la separació entre tots els elements és uniforme i igual a d .

$$\begin{aligned}\vec{N}_1(\vec{r}) &= \hat{y} \int_{x'=-\infty}^{x'=\infty} \int_{y'=-l/2}^{y'=l/2} \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} \delta(x') \cdot I_1(y') \cdot \delta(z'-d) \cdot e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} \cdot dv' \\ \vec{N}_1(\vec{r}) &= \hat{y} \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} \delta(z'-d) \cdot e^{jk_z z'} dz' \cdot a_1 \cdot e^{j1\alpha} \int_{y'=-l/2}^{y'=l/2} e^{jk_y y'} dy' \\ \vec{N}_1(\vec{r}) &= a_1 \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{jk_z d} \cdot \hat{y} \frac{2\sin(k_y(l/2))}{k_y} = a_1 \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{jk_z d} \cdot \vec{N}_0(\vec{r})\end{aligned}\quad 3.5$$

$$\begin{aligned}\vec{N}_2(\vec{r}) &= \hat{y} \int_{x'=-\infty}^{x'=\infty} \int_{y'=-l/2}^{y'=l/2} \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} \delta(x') \cdot I_2(y') \cdot \delta(z'-(d_1+d_2)) \cdot e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}'} \cdot dv' \\ \vec{N}_2(\vec{r}) &= \hat{y} \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} \delta(z'-2d) \cdot e^{jk_z z'} dz' \cdot a_2 \cdot e^{j2\alpha} \int_{y'=-l/2}^{y'=l/2} e^{jk_y y'} dy' \\ \vec{N}_2(\vec{r}) &= a_2 \cdot e^{j2\alpha} \cdot e^{jk_z 2d} \cdot \hat{y} \frac{2\sin(k_y(l/2))}{k_y} = a_2 \cdot e^{j2\alpha} \cdot e^{jk_z 2d} \cdot \vec{N}_0(\vec{r})\end{aligned}\quad 3.6$$

$$\vec{N}_3(\vec{r}) = a_3 \cdot e^{j3\alpha} \cdot e^{jk_z 3d} \cdot \hat{y} \frac{2\sin(k_y \cdot (l/2))}{k_y} = a_3 \cdot e^{j3\alpha} \cdot e^{jk_z 3d} \cdot \vec{N}_0(\vec{r}) \quad 3.7$$

$$\vec{N}_4(\vec{r}) = a_4 \cdot e^{j4\alpha} \cdot e^{jk_z 4d} \cdot \hat{y} \frac{2\sin(k_y \cdot (l/2))}{k_y} = a_4 \cdot e^{j4\alpha} \cdot e^{jk_z 4d} \cdot \vec{N}_0(\vec{r}) \quad 3.8$$

Així, el vector de radiació total de l'agrupació s'obté a partir de la suma de tots els vectors de radiació individuals i es pot compactar de manera general tal com es mostra a continuació:

$$\vec{N}(\vec{r}) = \vec{N}_0(\vec{r}) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot e^{jn(kd\cos\theta+\alpha)} \quad 3.9$$

A partir del vector de radiació és possible calcular els camps radiats i, amb aquests, qualsevol paràmetre electromagnètic que caracteritzi el comportament de l'agrupació: densitat de potència radiada, potència radiada, directivitat, resistència de radiació, eficiència, guany, etc. Atès que la relació entre el vector de radiació i el camp elèctric és únicament una relació escalar (equació 1.13), l'equació 3.9 es tradueix directament a camp elèctric de la manera següent:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot e^{jn(kd\cos\theta+\alpha)} \quad 3.10$$

Normalment, la fase de l'agrupació es coneix per **angle elèctric** i queda definida com mostra l'equació 3.11. D'aquesta manera, l'expressió del camp elèctric radiat per l'agrupació d'antenes es pot reescriure en funció de l'angle elèctric ψ (equació 3.12):

$$\psi = kd\cos\theta + \alpha \quad 3.11$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot e^{jm\psi} \quad 3.12$$

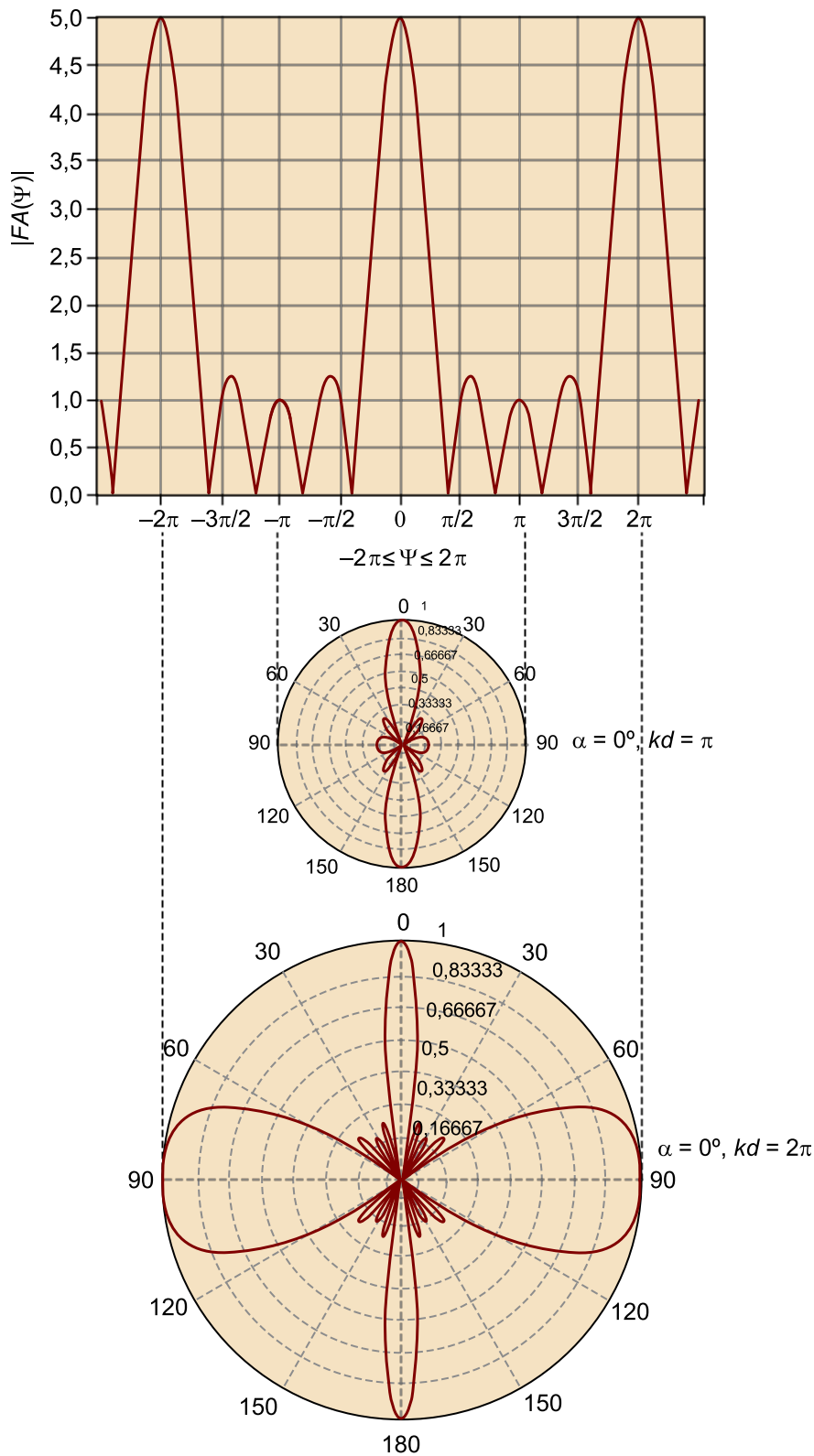
És important destacar que, de la mateixa manera que succeïa amb el vector de radiació, el camp elèctric radiat per l'agrupació es correspon amb el vector de camp elèctric radiat originat per l'element que es troba en l'origen de coordenades alimentat amb un corrent unitari ($\vec{E}_0(\vec{r})$), multiplicat pel sumatori que té en compte la contribució dels N elements. Cal subratllar que aquesta contribució no preveu els possibles efectes mutus deguts al camp proper, cosa que pot modificar el diagrama de radiació. No obstant això, amb l'objectiu de demostrar els principis bàsics de la utilitat d'agrupacions, es considera que no hi ha acoblament mutu entre els elements de l'agrupació. Així doncs, aquest sumatori es coneix com a **factor de l'agrupació** (equació 3.13) i presenta la particularitat que únicament depèn dels factors següents:

- Nombre d'elements de l'agrupació i la seva distribució de corrent (N, a_n).
- Distància entre els elements de l'agrupació (d).
- Diferència de fase entre els elements de l'agrupació (α).

$$FA(\psi) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot e^{jm\psi} \quad 3.13$$

En aquest sentit, coneixent el diagrama de radiació de l'element i el factor de l'agrupació, és possible obtenir-ne el diagrama de radiació d'una manera senzilla, reduint la complexitat matemàtica del càlcul.

Figura 2. Factor d'agrupació d'una distribució uniforme $N = 5$ i els diagrames de radiació resultants considerant distàncies diferents entre elements i , per tant, una finestra visible diferent



El **factor d'agrupació**⁽¹⁾, per tant, permet calcular *a priori* els efectes que els diversos paràmetres de l'agrupació (nombre, distància i fase entre elements) produiran en el diagrama de radiació i es pot interpretar com el diagrama de radiació d'una agrupació constituïda per antenes isòtropes ($\langle \vec{E}_0(\vec{r}) \rangle = 1$).

⁽¹⁾En anglès, *array factor*.

De totes maneres, hi ha un matís, i és que el factor de l'agrupació expressat en funció de l'angle elèctric ψ únicament depèn del nombre d'elements i de la seva distribució de corrent. D'aquesta manera, el factor d'agrupació, donada una certa distribució de corrent, és un en particular, independentment de la distància i de la fase (figura 2). És a dir, es tracta d'una funció universal. Una vegada es fixen la distància i la fase, es determina el factor d'agrupació en el domini real (en funció de les coordenades esfèriques θ i φ), que es pot considerar el diagrama de radiació d'una agrupació formada per elements isòtrops. En la figura 2 es mostra un exemple d'una distribució uniforme amb $N = 5$. El mateix factor d'agrupació s'utilitza per a calcular el diagrama de radiació d'una agrupació amb $d = \lambda/2$ i per a una altra amb $d = \lambda$, considerant en totes dues una $\alpha = 0^\circ$.

2. Distribucions canòniques

En aquest apartat s'analitzen tres tipus de distribucions de corrent amb l'objectiu de comprendre quina influència té aquesta distribució de corrent sobre el diagrama de radiació de l'agrupació. En particular, s'analitzen les distribucions uniforme, triangular i binomial. En la primera, tots els elements radien o reben amb la mateixa potència. En la triangular, els elements del centre radien o reben més potència i el perfil decreix linealment cap als extrems seguint un patró triangular. En la binomial hi ha la mateixa tendència que en la triangular, però amb un patró no lineal.

2.1. Distribució uniforme

Si es considera una agrupació de N antenes situades en l'eix z i alimentades de manera uniforme, en què els coeficients de l'alimentació es corresponen amb $a_n = 1$ ($\forall n \in [0, N - 1]$), el factor de l'agrupació queda definit de manera simplificada a partir de la suma d'una sèrie geomètrica tal com es mostra a continuació:

$$\begin{aligned}
 FA(\psi) &= \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot e^{jn\psi} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j\psi})^n = 1 + e^{j\psi} + e^{j2\psi} + \dots + e^{j(N-1)\psi} \\
 FA(\psi) &= \frac{1 - e^{jN\psi}}{1 - e^{j\psi}} = \frac{e^{j\frac{N}{2}\psi} (e^{-j\frac{N}{2}\psi} - e^{+j\frac{N}{2}\psi})}{e^{j\frac{\psi}{2}} (e^{-j\frac{\psi}{2}} - e^{+j\frac{\psi}{2}})} = e^{j\frac{(N-1)}{2}\psi} \frac{\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$|FA(\psi)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right| \tag{3.15}$$

El factor d'agrupació es pot associar, per tant, amb la transformada de Fourier dels coeficients de l'alimentació (l'angle elèctric ψ és la variable del domini transformat):

$$|FA(\psi)| = |TFSD\{a_n\}| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot e^{jn\psi} \right| \tag{3.16}$$

A més a més, el factor d'agrupació es pot compactar encara més per mitjà del que es coneix com a **polinomi de l'agrupació**, $P(z)$:

$$P(z) = TZ\{a_n\} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot z^n \tag{3.17}$$

D'aquesta manera, el factor d'agrupació es pot reescriure en funció d'aquest polinomi tal com es mostra a continuació:

$$|FA(\psi)| = |P(z)|_{z=e^{j\psi}} = |TZ\{a_n\}|_{z=e^{j\psi}} = \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot z^n \right|_{z=e^{j\psi}} \quad 3.18$$

Aquesta descripció del factor d'agrupació en funció de la transformada Z associada als coeficients d'alimentació té una gran utilitat, ja que permetrà determinar d'una manera senzilla els zeros del polinomi i, per tant, el diagrama de radiació de l'agrupació. Al seu torn, és útil per a la síntesi de diagrames, ja que es poden fixar nuls en l'espai (els zeros del polinomi de l'agrupació) i sintetitzar $P(z)$.

Seguint amb el mateix cas de les N antenes situades en l'eix z i alimentades mitjançant una distribució uniforme, a continuació es presenta la manera d'obtenir el factor d'agrupació que hem calculat abans a partir del polinomi de l'agrupació:

$$P(z) = TZ\{a_n\} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot z^n = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot z^n = \frac{1-z^N}{1-z} \quad 3.19$$

$$FA(\psi) = P(z)|_{z=e^{j\psi}} = \frac{1-e^{jN\psi}}{1-e^{j\psi}} = e^{j\frac{(N-1)\psi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \rightarrow |FA(\psi)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right| \quad 3.20$$

Analitzant el polinomi de l'agrupació, s'observa que presenta $N - 1$ zeros a $z = e^{j\frac{2\pi}{N}l} \forall l \in [1, N - 1]$, ja que $P(z)$ s'anul·la per a tots els valors de z que anul·len el seu numerador sense anul·lar-ne també el denominador. Això permet determinar que el factor de l'agrupació també presenta $N - 1$ zeros i conèixer-ne la situació ($\psi = \frac{2\pi}{N}l \forall l \in [1, N - 1]$):

$$\left. \begin{aligned} 1-z^N=0 &\rightarrow z=e^{j\frac{2\pi}{N}l} \forall l \in [0, N-1] \\ 1-z^1=0 &\rightarrow z=1 \end{aligned} \right\} P(z)=0 \rightarrow z=e^{j\frac{2\pi}{N}l} \forall l \in [1, N-1] \quad 3.21$$

$$FA(\psi) = P(z)|_{z=e^{j\psi}} = 0 \rightarrow z = e^{j\psi} = e^{j\frac{2\pi}{N}l} \rightarrow \psi = \frac{2\pi}{N}l \forall l \in [1, N-1] \quad 3.22$$

Per al cas $l = 0$ ($z = 1 \rightarrow \psi = 0$) no existeix un zero, sinó una indeterminació que és igual a N ; és a dir:

$$P(1) = TZ\{a_n\} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot 1^n = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot 1^n = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N \quad 3.23$$

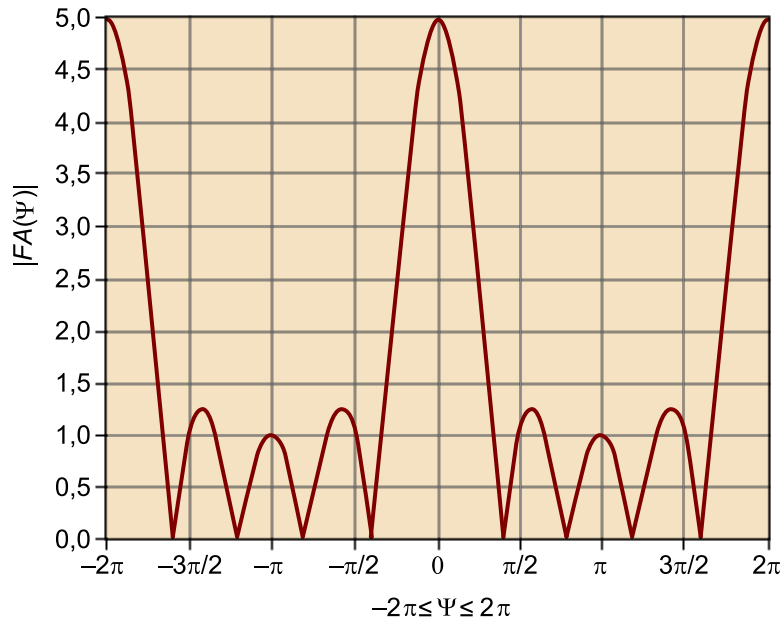
$$FA(0) = P(z)|_{z=e^{-j0}=1} = P(1) = N \quad 3.24$$

Lectura recomanada

Sobre aquests resultats, podeu consultar l'obra següent:
J. Anguera; A. Pérez (2008).
Teoria d'antenes. Enginyeria La Salle ("Estudios Semipresenciales"). ISBN: 978-84-935665-4-8.

Conèixer la posició dels zeros de $P(z)$ és útil per a calcular d'una manera aproximada l'amplitud del lòbul secundari més proper al principal (que normalment sol ser el lòbul secundari de més amplitud) del diagrama de radiació de l'agrupació, fet que es pot verificar mitjançant la representació gràfica del factor de l'agrupació (figura 3).

Figura 3. Factor d'agrupació amb alimentació uniforme i $N = 5$



En efecte, si considerem que entre dos zeros hi ha un màxim, la posició del màxim del primer lòbul secundari resulta la mitjana aritmètica entre el primer zero ($\psi = 2\pi/N$) i el segon zero ($\psi = 4\pi/N$) i, en aquest cas, el màxim en qüestió queda situat a $\psi = 3\pi/N$. D'aquesta manera, l'SLL² es pot calcular tal com es mostra a continuació:

$$SLL = 20 \log \frac{FA(0)}{FA\left(\frac{3\pi}{N}\right)} \approx 13dB \quad 3.25$$

SLL també se sol anomenar NLPS³.

Sabent la posició dels zeros que defineixen el lòbul principal, l'amplada entre zeros és la corresponent a l'equació 3.26, que en el domini visible i tenint en compte l'equació 3.11, és a dir, una agrupació alienada en l'eix Z es correspon amb l'equació 3.27.

$$\Delta\psi_{zeros} = \frac{4\pi}{N} \quad 3.26$$

⁽²⁾SLL és la sigla de l'expressió anglesa *side lobe level*.

⁽³⁾NLPS és la sigla de *nivell lòbul primari a secundari*.

$$\begin{aligned}\Delta\theta_c &= \cos^{-1}\left(\frac{\Psi_{c-esquerra}}{kd}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{\Psi_{c-dreta}}{kd}\right) = \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{-2\pi}{kd}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{2\pi}{kd}\right) = 2\cos^{-1}\left(\frac{2\pi}{kd}\right)\end{aligned}\quad 3.27$$

D'això es comprova que si el nombre d'elements augmenta mantenint l'espaiat, el feix és més estret, amb la qual cosa s'obté més directivitat.

Amb l'objectiu d'entendre l'efecte que té el nombre d'elements en l'amplada de feix, l'exemple següent il·lustra que no sempre es compleix l'afirmació anterior.

Sigui una agrupació amb N elements ($N \gg 1$) i una separació entre elements d . Si s'afegeixen elements entre cada dos, el nombre d'elements de la nova agrupació és $2N$, aproximadament. De totes maneres, la separació és ara $d/2$. Utilitzant l'equació 3.27 es comprova que l'amplada de feix és la mateixa. Això demostra que augmentar el nombre d'elements no implica incrementar la directivitat. Si, en comptes d'afegir els N elements intercalats, s'afegeixen de manera que s'allarga l'agrupació, és a dir, es té ara una agrupació de $2N$ i la mateixa separació d original, en aquest cas sí que disminuiria l'amplada de feix i, per tant, augmentaria la directivitat.

Aquest fet enllaça una vegada més amb el principi que l'espai és un transformador de Fourier. En l'agrupació que és el doble de llarga i amb la mateixa d , s'obté més directivitat. Pel que fa a l'agrupació amb elements intercalats, l'avantatge respecte del primer és que permet un escombratge més gran del feix principal.

Aquesta definició del factor d'agrupació permet determinar d'una manera qualitativa la forma del diagrama de radiació de l'agrupació en funció del posicionament dels zeros definits pel polinomi de l'agrupació en la circumferència unitària. En els exemples següents s'il·lustra aquest fet.

Exemple pràctic I

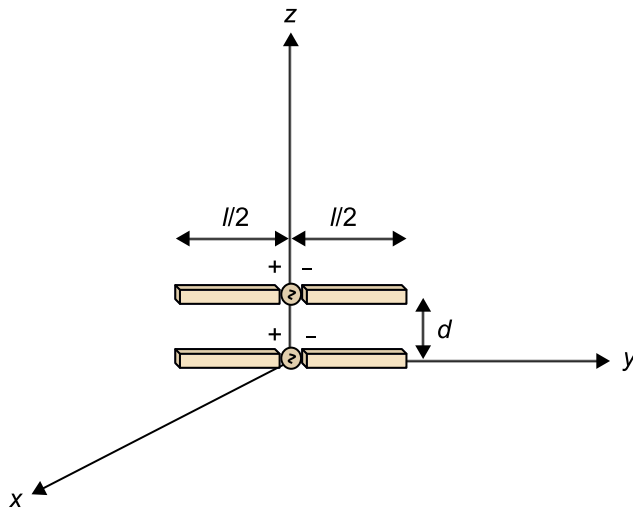
Es considera una agrupació d'antenes composta per dos elements separats una distància igual a la meitat de la longitud d'ona de la freqüència d'operació i alimentats mitjançant una distribució de corrent uniforme, d'amplitud unitària el desfasament de la qual entre elements és igual a 0° .

Es pretén calcular el factor d'agrupació i, amb aquest, el diagrama de radiació de l'agrupació. Aquest exemple posarà de manifest la rellevància de la representació del factor d'agrupació, ja que, coneixent la separació entre elements i la fase d'aquests, serà possible determinar d'una manera gràfica com serà el diagrama de radiació de l'estructura. Cal destacar que el diagrama és el producte del factor de l'agrupació i el diagrama de l'element que compon l'agrupació (equació 3.12).

Vegeu també

Per a aquest exemple, és convenient repassar les transformades de Fourier i les limitacions de directivitat que hi ha en les antenes lineals bàsiques, les quals s'estudien en el mòdul "Fonaments bàsics. Antenes de fil" d'aquesta assignatura.

Figura 4. Agrupació d'antenes



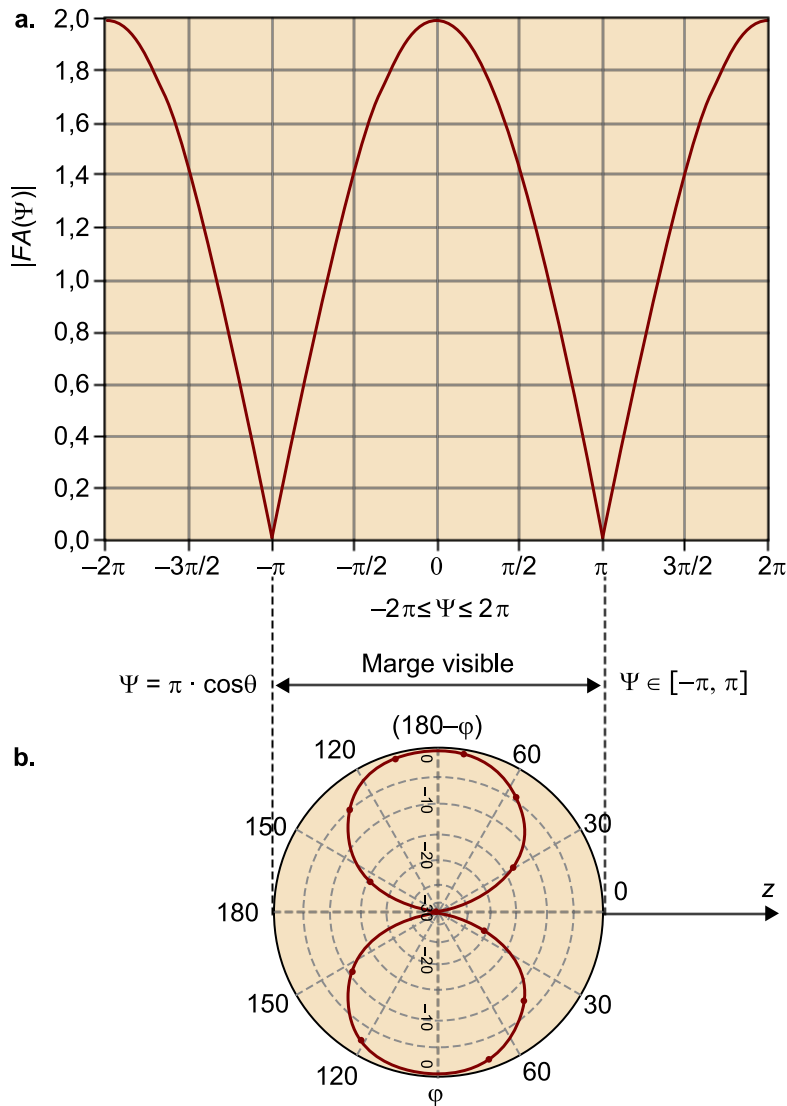
Agrupació d'antenes composta per dos elements alineats en l'eix z, separats una distància $d = \lambda/2$ i alimentats mitjançant una distribució uniforme d'amplitud $a_n = 1$ i fase $\alpha = 0$.

El factor d'agrupació es calcula amb l'equació 3.15, ja que igualment es considera una distribució uniforme d'amplitud unitària. En aquest cas, el nombre d'elements és igual a 2, amb la qual cosa n'hi haurà prou de substituir N pel seu valor per a obtenir la representació gràfica del factor d'agrupació en coordenades cartesianes en funció de l'angle elèctric ψ (figura 5):

$$|FA(\psi)| = \frac{\left| \sin\left(\frac{N\psi}{2}\right) \right|}{\left| \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \right|} = \left| \frac{\sin(\psi)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right| \quad 3.28$$

Aquesta representació del factor d'agrupació en coordenades cartesianes permet conèixer el diagrama de radiació de l'agrupació d'una manera gràfica. El procediment consisteix a convertir la representació en coordenades cartesianes en la representació típica del diagrama de radiació en coordenades polars. Per a això, es traça una circumferència centrada a $\psi = \alpha$ (en aquest cas, atès que $\alpha = 0$, centrada a $\psi = 0$) el radi de la qual queda definit per l'angle elèctric 3.11, que determina el marge visible i que en aquest cas es correspon amb $\psi = \pi \cdot \cos\theta$ (ja que $d = \lambda/2$, $\alpha = 0$ i $k = 2\pi/\lambda$), que dóna lloc, per tant, a un marge visible comprès entre $\psi \in [-\pi, \pi]$:

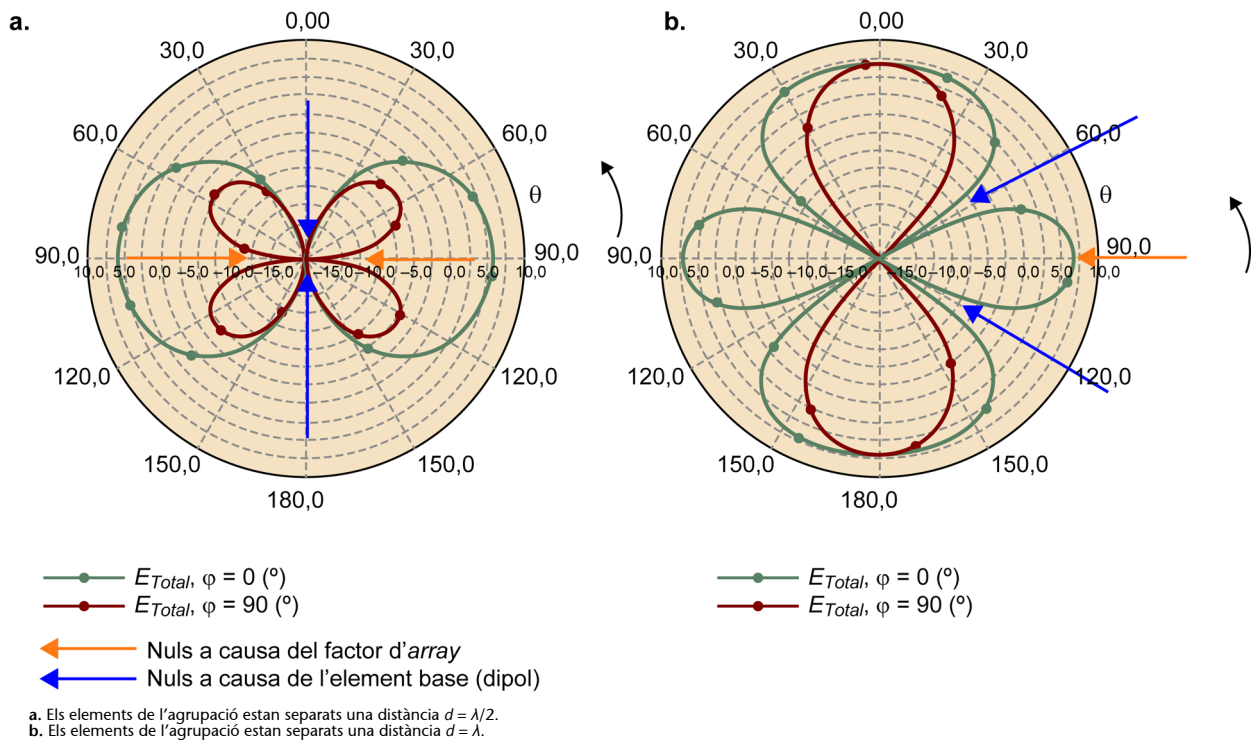
Figura 5. Factor d'agrupació i representació gràfica del diagrama de radiació



- a. Factor d'agrupació corresponent a una agrupació d'antenes composta per dos elements alineats en l'eix z , d'amplitud uniforme $a_n = 1$ i fase $\alpha = 0$.
 b. Representació gràfica del diagrama de radiació (dB) considerant una separació entre elements $d = \lambda/2$.

En aquest cas, els nuls de radiació estan situats en les direccions $(\theta = 90^\circ, \varphi = 90^\circ)$ i $(\theta = 90^\circ, \varphi = 270^\circ)$. Atès que la fase progressiva és nul·la ($\alpha = 0^\circ$), els màxims tindran lloc en la direcció normal a l'eix en què hi ha situada l'agrupació (*broadside*); és a dir, per a $(\theta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ)$ i $(\theta = 90^\circ, \varphi = 180^\circ)$. Si, en comptes de dipòls, els elements base fossin antenes isòtropes, el diagrama presentaria simetria de revolució al voltant de l'eix z , que és on està alineada l'agrupació. Com que ara es té en compte el diagrama del dipòl, aquesta simetria de revolució es destrueix. Per exemple, en el cas que la font fos isòtropa, hi hauria un màxim en la direcció $(\theta = 90^\circ, \varphi = 90^\circ)$ i $(\theta = 90^\circ, \varphi = 270^\circ)$. No obstant això, ara hi ha un nul a causa del dipòl. Finalment, atès que en el marge visible apareixen dos nuls a $\psi = \pm 180^\circ$, es tradueixen segons l'equació 3.27 en dos nuls en l'espai real a $\theta_{nul} = \cos^{-1}(\lambda/2d)$, cosa que es tradueix en zeros a $\theta = 0^\circ$ i 180° per al cas $d = \lambda/2$, i a $\theta = 60^\circ$ i $\theta = 120^\circ$ per al cas $d = \lambda$, tenint en compte en tots dos casos la simetria de revolució.

Figura 6. Diagrama de radiació (dB) corresponent a una agrupació d'antenes composta per dos elements alineats en l'eix z, d'amplitud uniforme $a_n = 1$ i fase $\alpha = 0$



Ja sabem la manera com es pot aproximar el diagrama de radiació d'una antena per la transformada de Fourier de la distribució de corrent sobre aquesta (equacions 2.13 i 2.15). Per això, un mètode per a augmentar la directivitat consistiria a incrementar la grandària elèctrica de l'antena. No obstant això, augmentar-ne la grandària elèctrica produeix variacions en la distribució de corrent que donen lloc a nuls que originen lòbuls secundaris no volguts i, consegüentment, una pèrdua de directivitat.

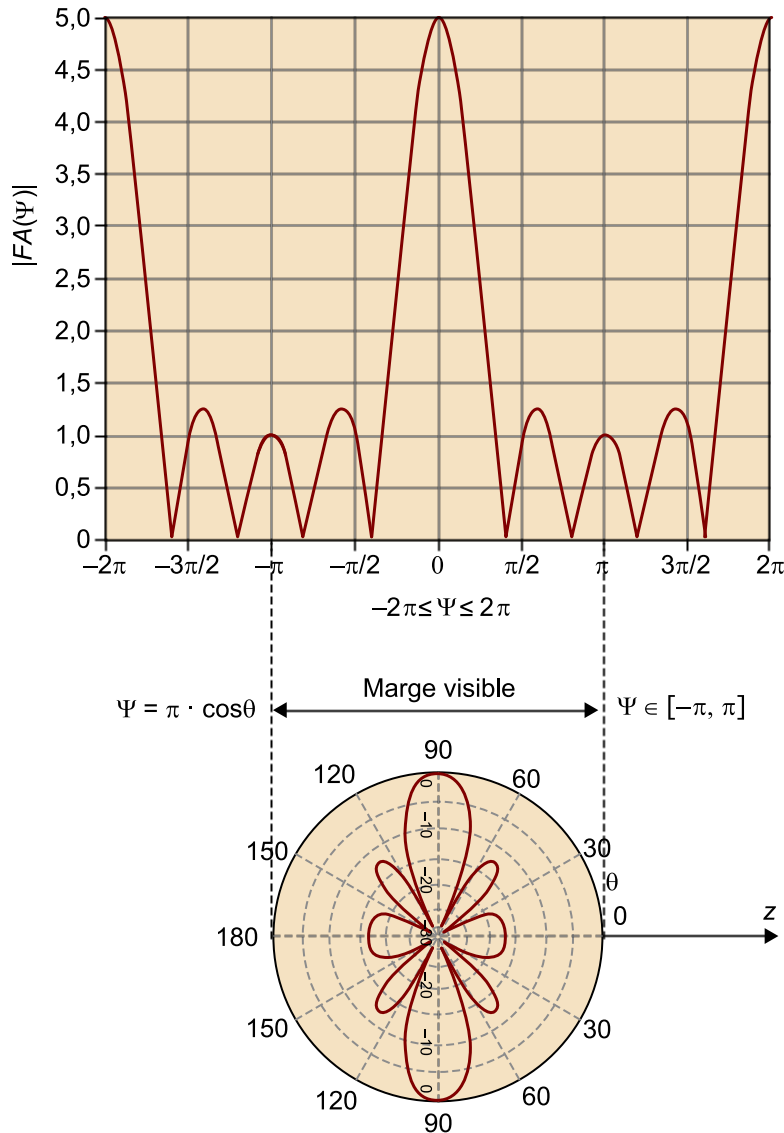
Tal com s'ha comentat en el primer apartat d'aquest mòdul, les agrupacions d'antenes es posicionen com una solució per a resoldre les limitacions de directivitat que hi ha en les antenes lineals bàsiques. En aquest sentit, seria lògic pensar que l'augment de la distància entre els elements de l'agrupació, incrementant d'aquesta manera la longitud elèctrica de l'agrupació, seria una bona tècnica per a augmentar-ne la directivitat.

No obstant això, és important destacar la rellevància de l'efecte de la distància sobre el marge visible del diagrama de radiació i, per tant, sobre l'aparició dels lòbuls de difracció, ja que aquests en disminueixen considerablement la directivitat. Aquest efecte queda clarament representant en la figura 2, en què es demostra que el fet d'augmentar la distància de separació entre els elements de l'agrupació introdueix l'aparició dels lòbuls de difracció en el diagrama de radiació.

Exemple pràctic II

A fi de determinar l'efecte que produeixen el nombre d'elements de l'agrupació en el diagrama de radiació, en aquest exemple s'analitza una agrupació de les mateixes característiques que la presentada en l'exemple anterior, però amb un augment del nombre d'elements, passant de $N = 2$ a $N = 5$ (figura 7). S'observa com disminueix l'amplada de feix, ja que el factor d'agrupació té ara un feix principal més estret.

Figura 7. Factor d'agrupació i representació gràfica del diagrama de radiació



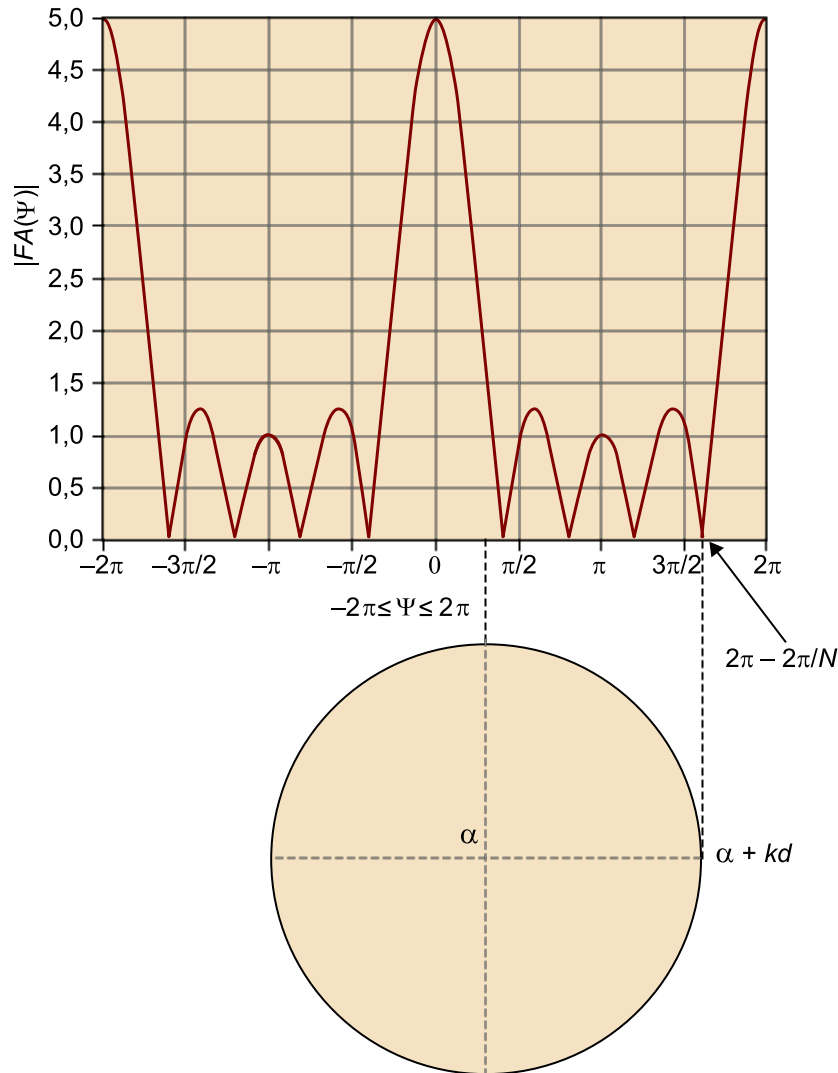
a. Factor d'agrupació corresponent a una agrupació d'antenes composta per cinc elements alineats en l'eix z, d'amplitud uniforme $a_n = 1$ i fase $\alpha = 0$.
 b. Representació gràfica del diagrama de radiació (dB) considerant una separació entre elements $d = \lambda/2$.

Si es calcula el factor d'agrupació d'acord amb l'equació 3.15 i es representa en coordenades cartesianes, s'aprecia un increment del nombre de lòbuls secundaris (figura 7). No obstant això, els lòbuls de difracció que presenten amplituds comparables al lòbul principal apareixen en posicions més allunyades. En aquest sentit, i d'una banda, aquesta configuració composta per cinc elements permetria augmentar la directivitat respecte a la configuració anterior de dos elements, a causa de l'augment de la longitud física de l'agrupació. A més a més, i d'altra banda, el fet que els lòbuls de difracció apareguin per a un marge visible més gran permet augmentar les possibilitats d'escombratge del feix, ja que es poden fer variacions de fase progressiva més grans sense que es produeixi l'aparició dels lòbuls de difracció. Per tal d'evitar la disminució de la directivitat a causa de l'aparició d'aquests lòbuls de difracció dins del marge visible, cal assegurar que es compleixi la inequació següent:

$$k \cdot d + \alpha \leq \left| 2\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{N} \right) \right| \quad 3.29$$

en què $k \cdot d + \alpha$ representa l'extrem de la finestra del marge visible, i per tant, per a evitar que aparegui en el marge visible el lòbul de difracció, s'ha de complir que, com a màxim, estigui en la posició del zero que defineix el lòbul de difracció 2π (figura 8).

Figura 8. Condió per a evitar l'aparició del lòbul de difracció

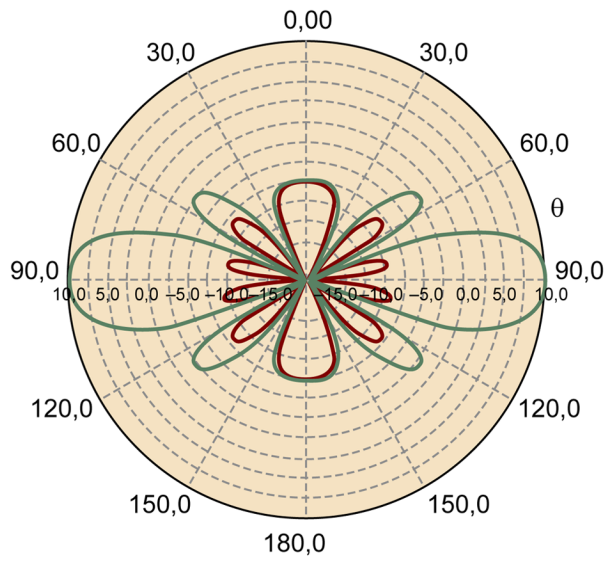


En aquest cas, la distància entre elements no ha de superar $d \leq (4/5) \lambda$, a fi d'evitar l'aparició dins del marge visible dels lòbuls de difracció no desitjats. Aquesta distància es troba a partir de l'equació 3.29, en què $\alpha = 0^\circ$ i $N = 5$. En la figura 9 s'il·lustra aquesta situació per a $d = \lambda/2$, $d = 3\lambda/4$ i $d = \lambda$. En aquest darrer cas és on apareixen els lòbuls de difracció.

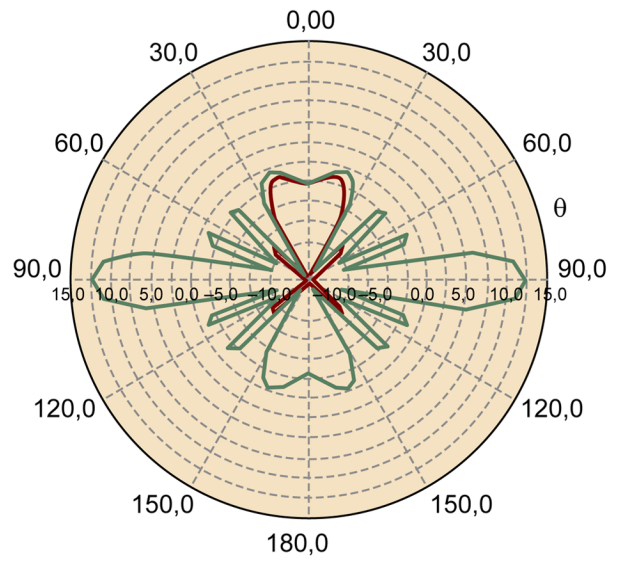
Amb la finalitat d'il·lustrar la rellevància de la distància entre elements a l'hora de definir el marge visible, la figura 9 mostra els diversos diagrames de radiació corresponents a l'agrupació composta per cinc elements per a distàncies diferents. S'observa que, per a distàncies superiors a $d = 3\lambda/2$, els lòbuls de difracció comencen a aparèixer en el marge visible i provoquen la disminució de la directivitat que no volem (figura 9c).

Figura 9. Diagrama de radiació (dB) corresponent a una agrupació d'antenes composta per cinc elements alineats en l'eix z, d'amplitud uniforme $a_n = 1$ i fase $\alpha = 0$

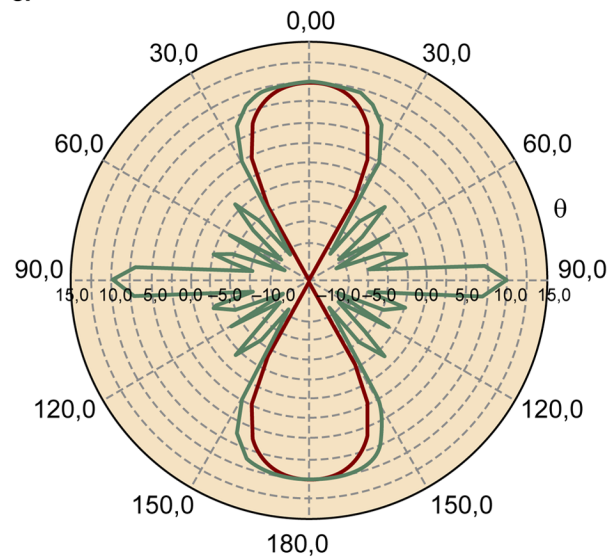
a.



b.



c.

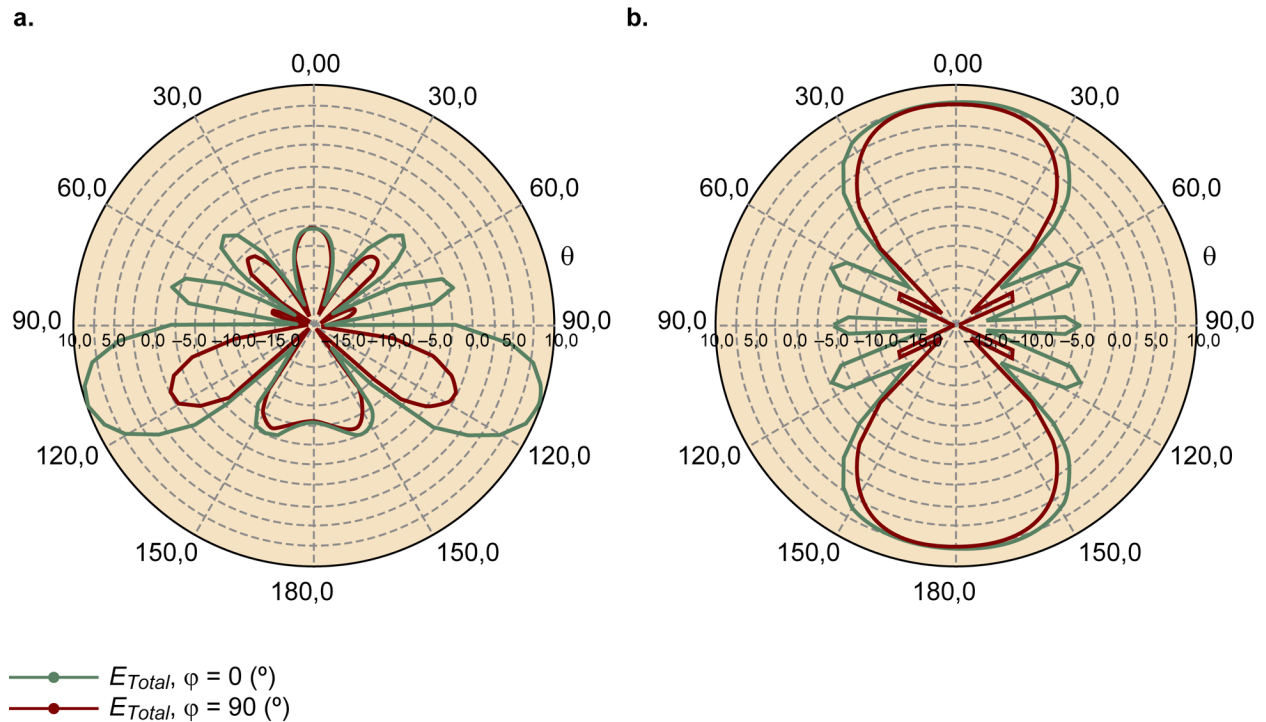


—●— $E_{Total}, \varphi = 0^\circ$
—●— $E_{Total}, \varphi = 90^\circ$

a. Els elements de l'agrupació estan separats una distància $d = \lambda/2$.
b. Els elements de l'agrupació estan separats una distància $d = 3\lambda/4$.
c. Els elements de l'agrupació estan separats una distància $d = \lambda$.

La variació progressiva de la fase de l'agrupació permet desplaçar la direcció del feix principal, tal com s'observa en la representació dels diagrames de la figura 10, i fins i tot pot transformar fàcilment una agrupació el màxim de radiació de la qual està en la direcció normal a l'eix (*broadside*) en una agrupació el màxim de radiació de la qual estigui en la direcció longitudinal a l'eix (*end-fire*), és a dir, la direcció de l'eix en el qual està situada l'agrupació (figura 10b):

Figura 10. Diagrama de radiació (dB) corresponent a una agrupació d'antenes composta per dos elements alineats en l'eix z , d'amplitud uniforme $a_n = 1$



a. Els elements de l'agrupació estan separats una distància $d = \lambda/2$ i alimentats amb una fase progressiva $\alpha = 60^{\circ}$.
 b. Els elements de l'agrupació estan separats una distància $d = \lambda/2$ i alimentats amb una fase progressiva $\alpha = 180^{\circ}$.

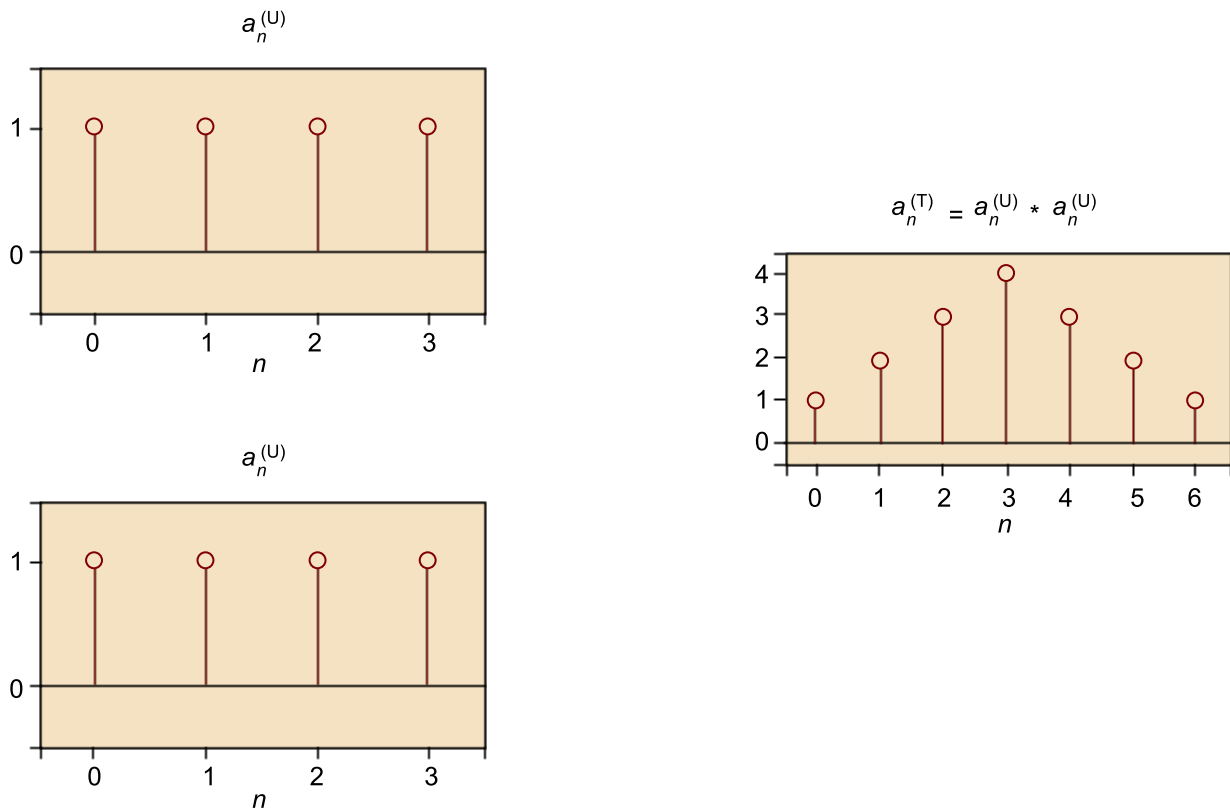
De l'anàlisi es poden extreure les **conclusions** següents:

- El factor de l'agrupació d'una distribució uniforme presenta un *NLPS* de 13 dB. En cas que el marge visible eviti els lòbuls de difracció, el diagrama presentarà un lòbul secundari que estarà 13 dB per sota del principal. En cas contrari, pot ser que el lòbul de difracció estigui per sobre d'aquesta relació i empitjori l'*NLPS*.
- Un augment del nombre d'elements mantenint la distància es tradueix en una disminució del feix principal i, per tant, en un increment de directivitat (equació 3.27).
- Per a una agrupació amb fase progressiva nul·la, el màxim es troba en la direcció normal a l'eix de l'agrupació (*broadside*).
- Si la fase progressiva és nul·la i se separen els elements tant com possible per a evitar que entrin els lòbuls de difracció, s'aconsegueix disminuir l'amplada de feix principal i, per tant, es maximitza la directivitat. A partir d'aquí, si s'augmenta la distància, la directivitat decreixerà a causa de l'aparició dels lòbuls de difracció situats a $\pm 2\pi$. També podrà disminuir si, per a aquest cas, es canvia la fase progressiva per a escombrar el feix, ja que es desplaçarà la finestra visible que farà aparèixer el lòbul de difracció. Per al cas en què calgui escombrar el feix, s'haurà d'assegurar que per a l'escombratge màxim mai no entrin els lòbuls de difracció (equació 3.29).

2.2. Distribució triangular

La distribució triangular és la segona distribució canònica que estudiarem. En la seva configuració més acadèmica és el resultat de la convolució de dues distribucions uniformes. Una distribució triangular de N elements s'obté com a convolució de dues distribucions uniformes de longituds $(N + 1)/2$. Per exemple, una distribució triangular de $N = 7$ elements configurada segons els coeficients d'alimentació $a_n^{(T)} = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1]$ s'obté a partir de la convolució de dues distribucions uniformes iguals de $(N + 1)/2 = 4$ elements tals que els seus coeficients d'alimentació són $a_n^{(U)} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$:

Figura 11. Seqüència triangular



La convolució de dues seqüències uniformes dóna com a resultat una seqüència triangular. El símbol * indica l'operador convolució.

Aleshores, atès que el factor d'agrupació és la transformada de Fourier en el domini de l'angle elèctric (ψ) dels coeficients d'alimentació (a_n) (equació 3.16), el factor d'agrupació d'una agrupació triangular de N elements és, gràcies a les propietats de la transformada de Fourier, el producte dels factors d'agrupació de dues agrupacions iguals amb distribució uniforme de $(N + 1)/2$ elements. Per tant, és possible calcular el factor d'agrupació de la distribució triangular de N elements elevant al quadrat el factor d'agrupació de la distribució uniforme de $(N + 1)/2$ elements (equació 3.15):

$$|FA(\psi)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{(N+1)\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right|^2 \quad 3.30$$

Pel que fa al polinomi de l'agrupació de la distribució triangular de N elements (atès que, al seu torn, és la transformada Z dels coeficients d'alimentació) (equació 3.17), s'obté (també a partir de les propietats de la transformada Z) elevant al quadrat el polinomi de l'agrupació uniforme de $(N+1)/2$ elements:

$$P(z) = \left(\frac{1 - z^{\frac{(N+1)}{2}}}{1 - z} \right)^2 \quad 3.31$$

D'aquesta manera, si el primer zero d'una distribució uniforme de N elements es troba a $\psi = 2\pi/N$ i, per tant, l'amplada de feix del seu lòbul principal (el doble de la distància entre dos zeros consecutius) és $\Delta\psi = 4\pi/N$, tal com s'ha demostrat, en el cas d'una distribució triangular de N elements el primer zero apareix a:

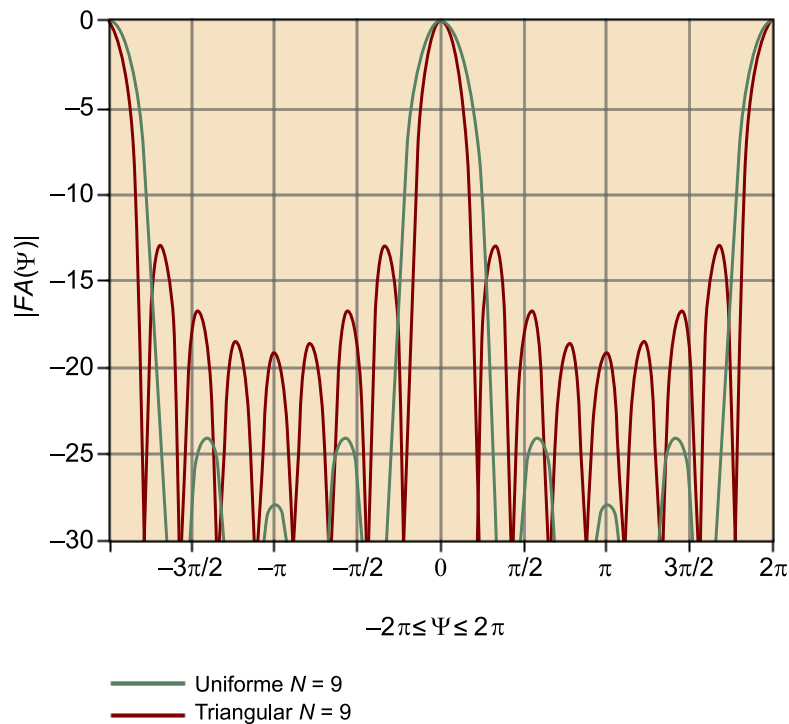
$$\psi = \frac{2\pi}{\frac{(N+1)}{2}} \quad 3.32$$

i l'amplada de feix del seu lòbul principal és:

$$\Delta\psi = \frac{4\pi}{\frac{(N+1)}{2}} \quad 3.33$$

Observeu, per tant, que, amb el mateix nombre d'elements, l'amplada de feix del lòbul principal és més gran en la distribució triangular, la qual cosa indica que es tracta d'una distribució menys directiva que la uniforme. D'altra banda, l'*NLPS* de la distribució triangular és de 26 dB (es pot calcular mitjançant el mateix procediment que l'utilitzat en el cas de la distribució uniforme).

Figura 12. Factor d'agrupació d'una agrupació uniforme i triangular amb nou elements en escala en dB



Es comprova que $NLPS = 13$ dB per a la distribució uniforme i 26 dB per a la distribució triangular, com també l'amplada de feix més estreta en la distribució uniforme que es tradueix en més directivitat.

Així, es pot concloure que, per a un mateix nombre d'elements i considerant la mateixa longitud elèctrica, la directivitat de la distribució uniforme és més gran que la de la triangular, però l' $NLPS$ és més gran en aquesta darrera. Per tant, hi ha un compromís entre directivitat i $NLPS$. Com s'ha comentat, tenir un $NLPS$ elevat pot ser útil per a minimitzar la radiació en direccions fora del lòbul principal.

2.3. Distribució binomial

Com a últim exemple de distribució canònica, tenim la distribució binomial. La particularitat que fa interessant aquesta distribució és que presenta un zero múltiple, cosa molt útil per a aconseguir un $NLPS$ elevat. És a dir, com que té un zero múltiple, el diagrama de radiació d'aquest tipus de distribució decreix del màxim fins al zero sense presentar cap lòbul secundari. La contrapartida és que la directivitat obtinguda per a una mateixa grandària elèctrica d'agrupació és inferior que en la distribució uniforme. En aquest punt cal remarcar que, encara que la distribució uniforme presenti un $NLPS$ més petit que les distribucions triangular i binomial, no és suficient per a produir una pèrdua de directivitat.

La presència d'aquest zero múltiple de la distribució binomial s'observa en el polinomi de l'agrupació:

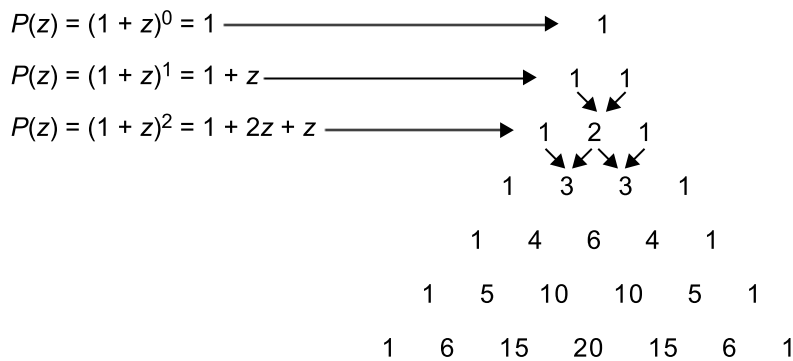
$$P(z) = (1+z)^{N-1} \quad 3.34$$

en què N és el nombre d'elements de l'agrupació. Es tracta, per tant, d'un polinomi d'ordre $N - 1$ que presenta un zero múltiple ($N - 1$ zeros iguals, concretament) a $z = -1$. Si desenvolupem el polinomi podem obtenir fàcilment els valors dels coeficients d'alimentació (a_n) de l'agrupació:

$$\begin{aligned} (1+z)^2 &= 1+2z+z^2 \rightarrow a_n = [1 \quad 2 \quad 1] \\ (1+z)^3 &= 1+3z+3z^2+z^3 \rightarrow a_n = [1 \quad 3 \quad 3 \quad 1] \end{aligned} \quad 3.35$$

Desenvolupar directament el polinomi per a valors superiors de N pot arribar a ser una tasca bastant pesada. Així i tot, hi ha un mètode general que permet obtenir molt fàcilment els coeficients a_n independentment del valor de N . N'hi ha prou d'observar que $P(z)$ és un binomi de Newton, de manera que se'n poden obtenir els coeficients fàcilment mitjançant el triangle de Tartaglia, que permet generar la seqüència de coeficients de la manera següent:

Figura 13. El triangle de Tartaglia



Els elements de qualsevol fila del triangle s'obtenen a partir de les sumes dels elements de la fila immediatament superior; els elements de la fila del triangle corresponent a $N = 6$, per exemple, són directament els coeficients a_n de la distribució binomial de sis elements.

A partir dels resultats obtinguts mitjançant el triangle de Tartaglia es pot observar que, a mesura que augmenta el nombre d'elements, la diferència d'amplituds també s'incrementa. Per exemple, per a $N = 6$, el mínim coeficient és 1 i el màxim, 20. Això vol dir que la xarxa que distribueixi la potència al llarg dels elements de l'agrupació haurà de tenir un divisor asimètric capaç d'oferir al primer element una potència proporcional a 1 i al central, 20^2 , és a dir, una diferència d'uns 26 dB. El fet de tenir disparitat de valors en la distribució pot comportar problemes tecnològics, ja que la grandària de les pistes del circuit imprès pot ser molt petita en alguns casos.

Anàlogament a les altres distribucions que ja hem estudiat, el factor d'agrupació de la distribució binomial de N elements es pot calcular directament a partir del polinomi de l'agrupació:

$$FA(\psi) = P(z) \Big|_{z=e^{j\psi}} = (1 + e^{j\psi})^{N-1}$$

$$|FA(\psi)| = \left| 2 \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \right|^{N-1} \quad 3.36$$

Exemple pràctic III

En l'exemple següent s'estudia una agrupació de deu elements amb distribució binomial a fi de comprendre els avantatges que aporta respecte de les distribucions que hem analitzat anteriorment. Els coeficients de la distribució són els següents: $a_n = [1 \ 9 \ 36 \ 84 \ 126 \ 126 \ 84 \ 36 \ 9 \ 1]$. L'agrupació està alineada amb l'eix x . El factor d'agrupació és determinat per l'equació 3.36 particularitzada per a $N = 10$. Es representa el factor d'agrupació normalitzat i s'observa que no hi ha lòbuls secundaris (figura 14). El nul múltiple està situat a $\psi = \pm\pi$ (el nul múltiple d'una distribució binomial sempre està situat a $\psi = \pm\pi$, ja que el zero múltiple del polinomi de l'agrupació sempre és a $z = -1$).

Una vegada representat el factor d'agrupació en coordenades cartesianes, es calcula el marge visible i s'obté el diagrama de radiació (figura 14). Com s'ha esmentat, la distribució binomial no presenta lòbuls secundaris. Malgrat això, cal matisar que poden aparèixer certs lòbuls secundaris en la distribució binomial que, en realitat, siguin part del lòbul de difracció. Per a il·lustrar això, s'han representat en la figura 14, a partir del factor d'agrupació, dos diagrames de radiació diferents, l'un per a $d = 0,5\lambda$ i l'altre per a $d = 0,8\lambda$. S'observa que no hi ha lòbuls secundaris en el cas de $d = 0,5\lambda$ i que, en el cas de $d = 0,8\lambda$, apareixen dos lòbuls secundaris que es deuen a una part del lòbul de difracció situat a $\psi = \pm 2\pi$. Fixeu-vos que aquests lòbuls secundaris apareixen en les direccions ($\theta = 90^\circ$, $\varphi = 0^\circ$) i ($\theta = 90^\circ$, $\varphi = 180^\circ$). Això succeeix en la distribució binomial, ja que, per a separacions entre elements superiors a $\lambda/2$ i considerant una fase progressiva nul·la ($a = 0$), el marge visible va més enllà de $\psi = \pm\pi$ i abraça part del lòbul de difracció situat a $\psi = \pm 2\pi$:

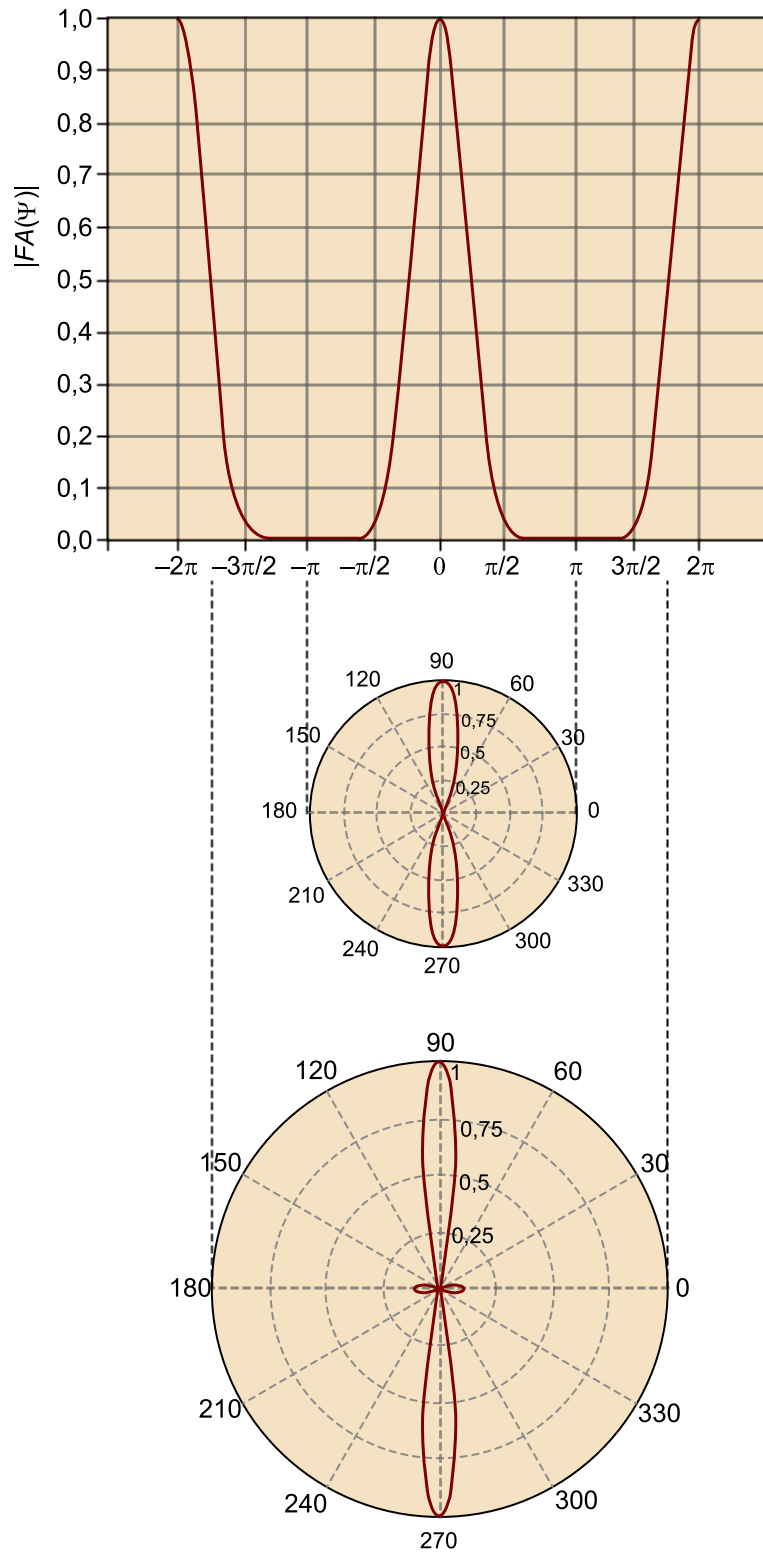
$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{array} \right\} \psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \cos\theta \quad \begin{array}{l} \text{Si } d > \frac{\lambda}{2} \rightarrow d = \frac{\xi\lambda}{2} \text{ i } \xi > 1 \\ \psi = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\xi\lambda}{2} \cos\theta = \xi\pi \cos\theta \end{array} \quad 3.37$$

$$\psi \in [-\xi\pi, \xi\pi] \text{ i } \xi > 1$$

Depenent del valor de ξ , apareixerà més o menys el lòbul de difracció situat a $\psi = \pm 2\pi$.

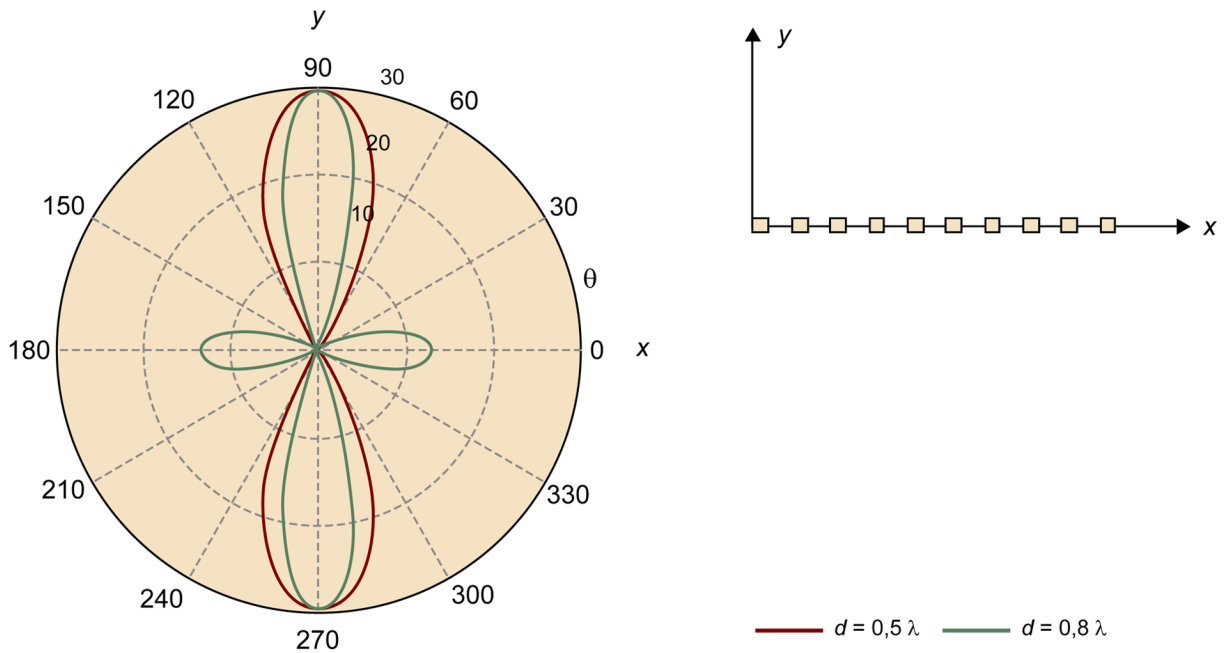
Els diagrames de radiació de la figura 14 apareixen representats en dB en la figura 15:

Figura 14. Factor d'agrupació i diagrames de radiació



A dalt: factor d'agrupació d'una distribució binomial formada per deu elements.
 A baix: diagrames de radiació per a una separació entre elements de $d = 0,5\lambda$ (diagrama superior) i $d = 0,8\lambda$ (diagrama inferior), i fase progressiva nul·la ($\alpha = 0$)

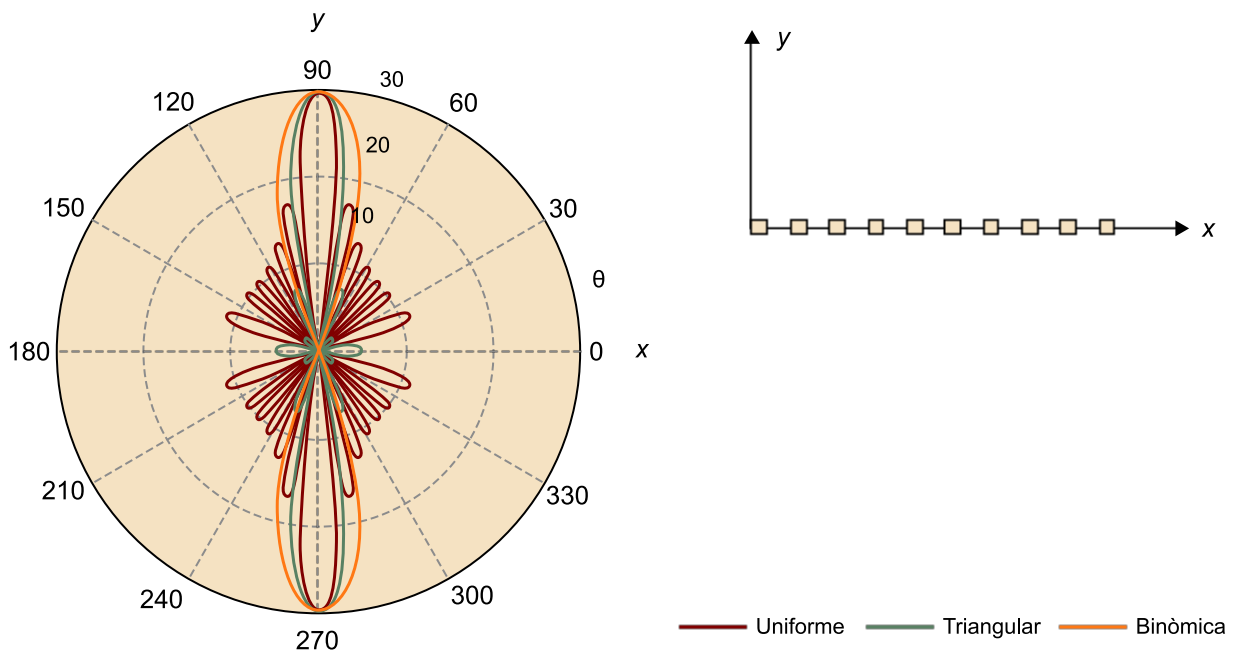
Figura 15. Diagrama de radiació (dB) normalitzat d'una distribució binomial de $N = 10$ elements i fase progressiva nul·la ($\alpha = 0$)



Separació entre elements igual a $d = 0,5\lambda$ i $d = 0,8\lambda$. Agrupació alienada en l'eix x . Els elements són radiadors isòtrops.

Finalment, es comparen les tres distribucions canòniques estudiades (uniforme, triangular i binomial) en igualtat de condicions: mateix nombre d'elements, mateixa separació i mateixa fase progressiva (figura 16).

Figura 16



Comparació dels diagrames de radiació (dB) obtinguts amb les tres distribucions canòniques estudiades, considerant en els tres casos deu elements separats $d = 0,7\lambda$ i de fase progressiva nul·la ($\alpha = 0$)

S'observa que la distribució que produeix una amplada de feix principal més estreta, i per tant, més directivitat, és la uniforme, seguida de la triangular i, finalment, de la binomial. Com a contrapartida, la distribució que presenta lòbuls secundaris més petits és la binomial (per tant, és la que presenta una *NPLS* més gran), seguida de la triangular i, finalment, de la uniforme.

Per tant, hi ha un compromís entre directivitat i lòbuls secundaris reduïts (*NPLS*) en funció de la distribució de corrent amb la qual s'alimenti una agrupació.

Observeu que aquesta conclusió confirma que l'espai actua com a transformador de Fourier de les excitacions. Se sap, per conceptes del processament digital del senyal, que les seqüències temporals amb variacions suaus impliquen poca amplitud en les freqüències altes; i a l'inrevés, variacions abruptes en el temps comporten molta amplitud en les freqüències elevades. Si apliquem aquests conceptes al cas present, el domini temporal es correspon amb el domini espacial i el domini freqüencial es correspon amb el domini angular. D'aquesta manera, s'entén fàcilment que variacions suaus en els valors de les excitacions (a_n) de l'agrupació (domini espacial) donin com a resultat diagrames de radiació amb lòbuls secundaris de poca amplitud (domini angular), i viceversa.

Lectura recomanada

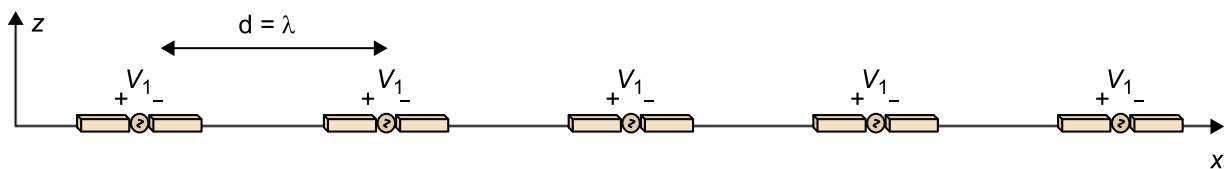
Sobre aquests resultats, podeu consultar l'obra següent:
J. Anguera; A. Pérez (2008).
Teoria d'antenes. Enginyeria La Salle ("Estudios Semipresenciales"). ISBN: 978-84-935665-4-8.

3. Efecte del diagrama de radiació sobre el factor d'agrupació

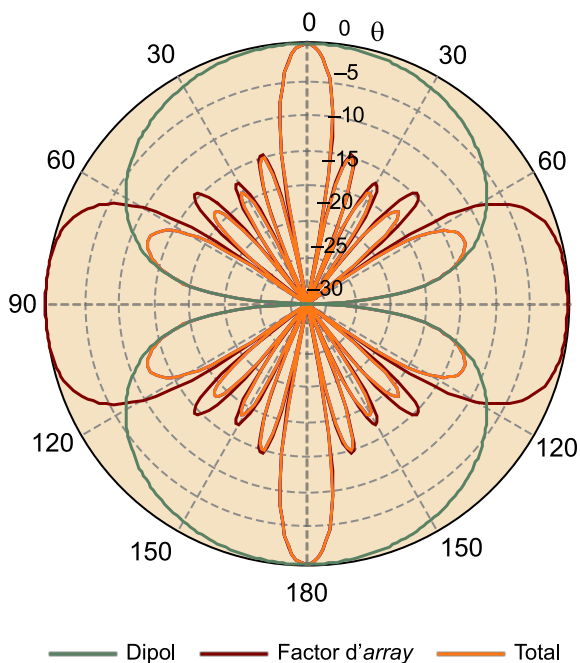
Tal com queda de manifest en l'equació 3.10, el diagrama total d'una agrupació és el producte del diagrama de radiació de l'element (es considera que tots els elements de l'agrupació són iguals i, per tant, tenen el mateix diagrama de radiació) pel factor d'agrupació. És interessant, doncs, analitzar amb una mica més de detall quina implicació té aquest producte. Per a això, considerem el cas següent: una agrupació uniforme alineada sobre l'eix x de cinc dipols de grandària $0,5\lambda$ també alineats sobre l'eix x , separats per una longitud d'ona i amb un desfasament de zero (figura 17a).

Figura 17

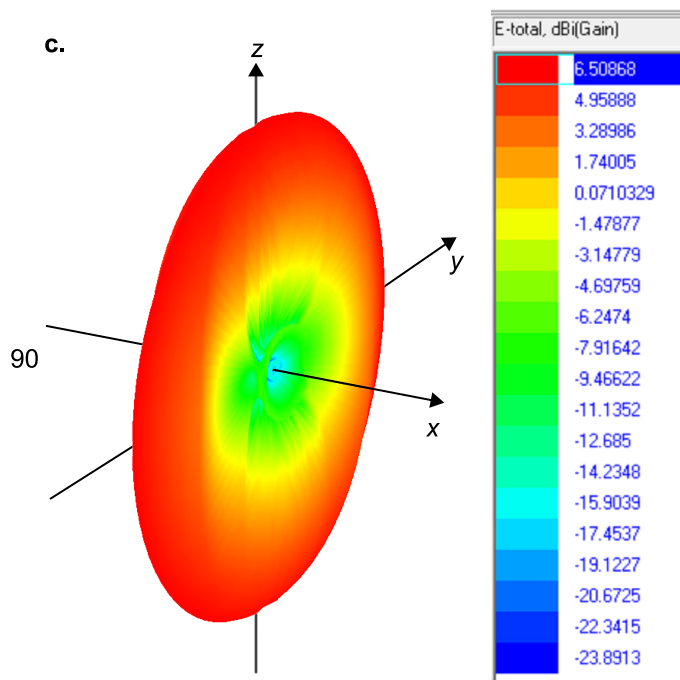
a.



b.



c.



a.: agrupació al llarg de l'eix x de cinc dipols $0,5\lambda$ també situats sobre l'eix x , amb una separació igual a λ i amb desfasament zero.
b.: diagrama de radiació (dB) del dipol, del factor d'agrupació en el domini real i de l'agrupació, tenint en compte el diagrama del dipol.
c.: representació tridimensional del diagrama de radiació (dB)

El factor d'agrupació en funció de la coordenada θ presenta el lòbul principal en la direcció *broadside* ($\theta = 0^\circ$) i, per simetria de revolució, en el pla YZ, és a dir, en l'eix x , que és on se situa l'agrupació (figura 17b,c). Al seu torn, aquest presenta també uns lòbuls de difracció en les direccions ($\theta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ$) i ($\theta = 90^\circ, \varphi = 180^\circ$) (podeu veure el diagrama en 2D de la figura 17b). Atès que l'element base de l'agrupació és un dipol de $0,5\lambda$ alineat també en l'eix x , presenta nuls de radiació a ($\theta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ$) i ($\theta = 90^\circ, \varphi = 180^\circ$); la posició angular dels dos nuls alineats amb l'eix x que presenta el dipol coincideix amb la posició angular dels lòbuls de difracció del factor d'agrupació, de manera que mitiga l'amplitud d'aquests lòbuls. Així, depenent del diagrama de radiació de l'element base, es poden obtenir separacions entre elements de l'ordre de λ , i fins i tot superiors, sense que apareguin lòbuls de difracció (és el cas d'agrupacions d'antenes elèctricament grans).

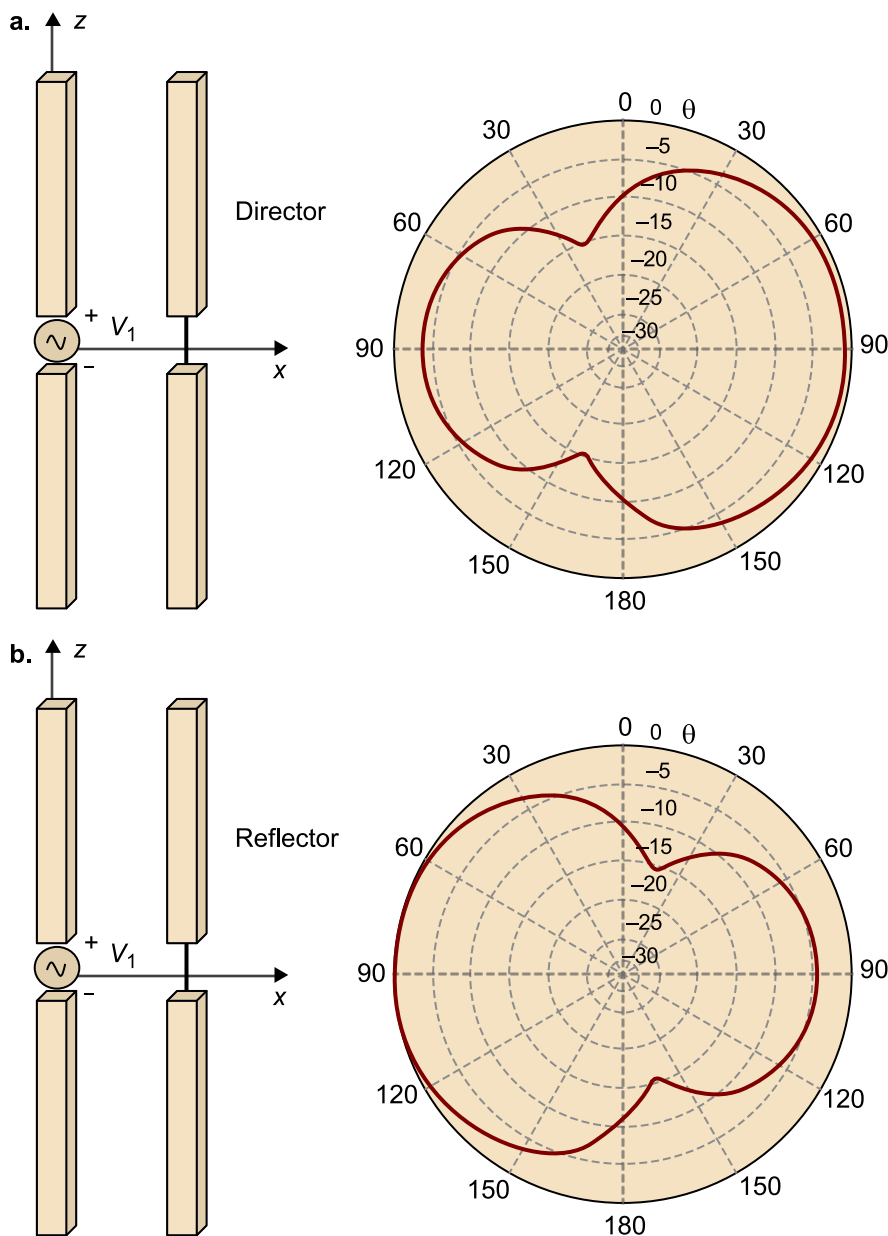
Lectura recomanada

Sobre l'anàlisi dels nuls, podeu consultar l'obra següent:
W. L. Stutzman; G. A. Thiele (1998). *Antenna Theory and Design*. John Wiley.

4. Agrupacions amb elements paràsits

Hi ha un tipus particular d'agrupacions en les quals només s'alimenta un element i almenys un altre no està directament alimentat (element paràsit). L'element paràsit és excitat per acoblament mutu, és a dir, està sotmès a la influència en camp proper de l'element alimentat.

Figura 18. Reflectors i directors



a. En el cas que la radiació estigui dirigida de paràsit a alimentador, el paràsit rep el nom de director.
 b. En el cas que la radiació estigui dirigida d'alimentador a paràsit, el paràsit rep el nom de reflector.

L'objectiu dels elements paràsits és, principalment, augmentar la directivitat de l'agrupació sense que això impliqui complicar la xarxa de distribució que requeriria una agrupació en què tots els elements estiguessin alimentats. A

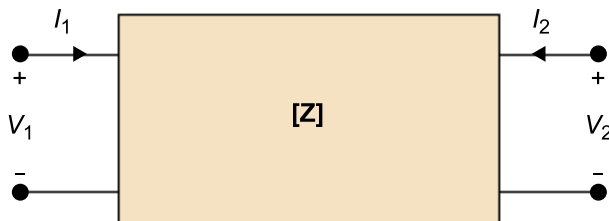
més a més, hi pot haver un o més paràsits disposats en costats diferents de l'element alimentat. Si la radiació va dirigida en el sentit de l'alimentador al paràsit, l'element paràsit rep el nom de **director** (figura 18a); en cas que la radiació apunti en sentit contrari, s'anomena **reflector** (figura 18b).

L'anàlisi d'agrupacions amb elements paràsits resulta senzilla una vegada s'ha presentat la teoria general d'agrupacions. La incògnita ara és saber quines són les excitacions dels elements que no estan directament alimentats. Per a això, s'ha de calcular la matriu d'impedàncies del sistema format per les N antenes que constitueixen l'agrupació, tal com es descriu en el subapartat següent.

4.1. Matriu d'impedàncies

Per trobar el diagrama de radiació d'una agrupació formada per un alimentador i almenys un element paràsit, es modelitza l'agrupació com un sistema de N ports (en què cada port es correspon amb una de les N antenes que formen l'agrupació) i es caracteritza mitjançant la matriu d'impedàncies d'aquest sistema, la qual permet tenir en compte la interacció que hi ha entre els diferents elements. La figura 19 mostra un sistema de dos ports amb tensions V_1 i V_2 i corrents I_1 i I_2 , que és un model que representa una agrupació formada per dues antenes:

Figura 19. Sistema de dos ports modelitzat mitjançant la seva matriu d'impedàncies (Z)



Les tensions V_i i els corrents I_i estan relacionats mitjançant el sistema d'equacions següent, que modelitza completament el sistema en termes de tensions, corrents i impedàncies:

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 \cdot Z_{11} + I_2 \cdot Z_{12} \\ V_2 &= I_1 \cdot Z_{21} + I_2 \cdot Z_{22} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \mathbf{V} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{V}} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}} \quad 3.38$$

en què Z_{ii} s'anomena **autoimpedància de l'antena i** (de fet, és la impedància d'entrada de l'antena i quan l'antena $j \neq i$ és molt lluny, ja que no hi ha amb prou feines interacció entre tots dos elements). Alhora, el terme Z_{ij} rep el nom d'**impedància mútua entre l'antena i i la j**. Per reciprocitat, es compleix que $Z_{ij} = Z_{ji}$. Cal destacar que totes les impedàncies de la matriu d'impedàncies de l'agrupació (Z) són complexes i depenen de la freqüència. El càlcul de la matriu d'impedàncies Z es pot tractar tant analíticament com numèricament.

Lectura recomanada

Sobre la reciprocitat de la impedància mútua entre dues antenes, i sobre el càlcul analític i numèric de la matriu d'impedàncies, podeu consultar l'obra següent:

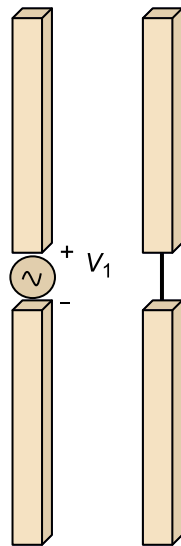
C. A. Balanis (1997). *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley.

Si el sistema presenta més de dos ports (agrupació amb més de dos elements), la modelització resulta fàcilment generalitzable mitjançant el sistema matricial definit a 3.38. En els subapartats següents es demostra la manera d'utilitzar l'equació 3.38 per a calcular la radiació de sistemes formats per alimentadors i/o paràsits.

4.2. Agrupació formada per un alimentador i un paràsit curtcircuitat

El sistema de la figura 20 mostra un sistema radiant format per dues antenes dipol: l'una alimentada i l'altra, curtcircuitada.

Figura 20.
Agrupació de dos dipòls



Un alimentador i un paràsit curtcircuitat

Considerant que el port 1 correspon a l'alimentador i el port 2 al paràsit, l'equació 3.38 es transforma en 3.39, en què la tensió V_2 s'ha igualat a zero, ja que s'ha curtcircuitat l'element 2 (el paràsit).

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 \cdot Z_{11} + I_2 \cdot Z_{12} \\ 0 &= I_1 \cdot Z_{21} + I_2 \cdot Z_{22} \end{aligned} \quad 3.39$$

Per tant, es pot trobar la relació entre I_1 (corrent de l'alimentador) i I_2 (corrent del paràsit):

$$I_2 = -\frac{I_1 \cdot Z_{21}}{Z_{22}} \quad 3.40$$

que resulta d'una gran utilitat per a calcular la impedància d'entrada del conjunt Z_{in} de la manera següent:

Lectura recomanada

Sobre la modelització de sistemes de més de dos ports, podeu consultar l'obra següent:

J. Anguera; A. Pérez (2008). *Teoria d'antenes*. Enginyeria La Salle ("Estudios Semipresenciales"). ISBN: 978-84-935665-4-8.

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + \frac{I_2}{I_1} \cdot Z_{12} = Z_{11} - \frac{Z_{12} \cdot Z_{21}}{Z_{22}} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} \quad 3.41$$

Es pot calcular el diagrama de radiació de l'agrupació, ja que es coneix la relació entre els corrents. El factor d'agrupació resultant és:

$$FA(\psi) = I_1 + I_2 \cdot e^{j\psi} = I_1 \cdot \left(1 - \frac{Z_{21}}{Z_{22}} e^{j\psi}\right) \quad 3.42$$

Atès que el valor de I_1 no depèn de l'angle elèctric ψ , és irrellevant per a determinar la forma del factor d'agrupació, de manera que aquest queda simplificat en:

$$FA(\psi) = 1 - \frac{Z_{21}}{Z_{22}} e^{j\psi} \quad 3.43$$

De les equacions 3.41 i 3.42 s'extreuen les **conclusions** següents:

- Si la separació entre les antenes és molt gran ($>\lambda$) (considerant sempre termes de la longitud d'ona), l'efecte mutu és negligible i $Z_{12} = Z_{21} \approx 0$. D'aquesta manera, es pot considerar que la impedància d'entrada és directament l'autoimpedància de l'alimentador ($Z_{in} = Z_{11}$).
- Si la separació entre les antenes no és prou gran per a negligir l'efecte mutu, la impedància d'entrada no és Z_{11} , ja que és modificada per Z_{21} .
- Quan la separació entre les antenes és molt petita, la seva impedància mútua tendeix a ser igual a l'autoimpedància de l'alimentador ($Z_{12} = Z_{21} \approx Z_{11}$). Si, a més, considerem que les antenes alimentadores i paràsits són iguals ($Z_{11} = Z_{22}$), de l'equació 3.41 es desprèn que la impedància d'entrada tendeix a zero ($Z_{in} \approx 0$). És a dir, quan el paràsit és molt a prop de l'alimentador, tendeix a cancel·lar la radiació, ja que s'hi excita un corrent $I_2 = -I_1$ i radia d'una manera poc eficient. Observeu que amb aquesta formulació s'entén l'efecte negatiu de tenir un pla conductor elèctric molt proper a un dipol horitzontal. Per teoria d'imatges, el dipol imatge presenta un corrent $I_2 = -I_1$. En el cas que el dipol sigui molt a prop del conductor, els dos corrents es tendeixen a cancel·lar i el dipol es converteix en un mal radiador.
- El diagrama de radiació presenta un terme Z_{21}/Z_{22} que és complex (podeu veure l'equació 3.43). Això significa que aporta una fase progressiva a que prové de l'argument de Z_{21}/Z_{22} . Depenent d'aquest argument, la fase progressiva pot ser positiva o negativa. Això implica que el feix de radiació presenti el màxim en una direcció o en una altra. Aquesta fase progressiva depèn tant del paràsit com de la distància entre elements. Dissenyats de la manera adient, aquests

Lectura recomanada

Sobre aquest resultat, podeu consultar l'obra següent:

C. A. Balanis (1997). *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley.

Vegeu també

L'efecte negatiu de tenir un pla conductor elèctric molt proper a un dipol horitzontal s'estudia en el mòdul "Fonaments bàsics. Antenes de fil".

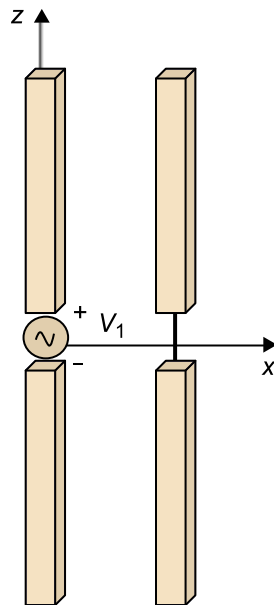
paràmetres permeten manipular el feix principal perquè la radiació tingui un màxim en el sentit de l'alimentador cap al paràsit, o viceversa.

Exemple pràctic IV

L'exemple següent mostra la utilitat de la formulació presentada i permet determinar com un element paràsit és útil per a manipular el diagrama de radiació.

Tenim un parell de dipòls (alimentador i paràsit) de mitja longitud d'ona disposats tal com es mostra en la figura 21 de manera que per a la freqüència central de treball es dona que $Z_{11} = Z_{22} = 73 + j42,5 \Omega$. Tots dos dipòls estan orientats en el sentit de l'eix z i alineats al llarg de l'eix x :

Figura 21. Agrupació formada per un parell de dipòls de mitja longitud d'ona



L'alimentador i el paràsit curtcircuitat estan orientats en el sentit de l'eix z i alineats al llarg de l'eix x .

Per a una separació entre dipòls de $d = 0,1\lambda$, s'esdevé que $Z_{12} = 65 + j10 \Omega$. Es calculen la impedància d'entrada i el diagrama de radiació de l'agrupació.

Respecte a l'obtenció de la impedància d'entrada, de l'equació 3.41 es dedueix el següent:

$$Z_{in} = 73 + j42,5 - \frac{(65 + j10)^2}{73 + j42,5} = 22 + 53j \quad 3.44$$

La impedància d'entrada rep l'efecte de l'acoblament mutu i s'ha de tenir en compte a l'hora d'adaptar el conjunt radiant usant, per exemple, una xarxa d'adaptació.

Pel que fa al diagrama de radiació, es comença per l'obtenció del factor d'agrupació, que és determinat per l'equació 3.43:

$$FA(\psi) = 1 - \frac{Z_{21}}{Z_{22}} e^{j\psi} = 1 - \frac{65 + j10}{73 + j42,5} e^{j\psi} = 1 - (0,72 + j0,28) e^{j\psi} = 1 - 0,78 e^{-j0,369} e^{j\psi} \quad 3.45$$

Segons l'equació 3.10, el diagrama de radiació total de l'agrupació és el producte del diagrama de radiació de l'element base (el dipòl de mitja longitud d'ona) multiplicat

Vegeu també

Les xarxes d'adaptació són motiu d'estudi en el mòdul "Adaptació d'impedàncies i factor de qualitat" d'aquesta assignatura.

Estudiareu el diagrama de radiació del dipòl i el mètode de càlcul del camp radiat element a element en el mòdul "Fonaments bàsics. Antenes de fil".

pel factor de l'agrupació. El camp total es calcula tenint en compte que l'agrupació està alineada al llarg de l'eix x , amb la qual cosa $\psi = k \cdot d \cdot \sin\theta \cos\varphi$:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_o \cdot FA(\psi) = \vec{E}_o \cdot (1 - 0,78e^{-j0,369}e^{j\psi}) = \vec{E}_o \cdot (1 - 0,78e^{-j0,369}e^{jkdsin\theta\cos\varphi}) \quad 3.46$$

en què \vec{E}_o és el diagrama de radiació del dipol orientat en la direcció de l'eix z :

$$\vec{E}_o = E_\theta \cdot \hat{\theta} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos\theta\right)}{\sin\theta} \cdot \hat{\theta} \quad 3.47$$

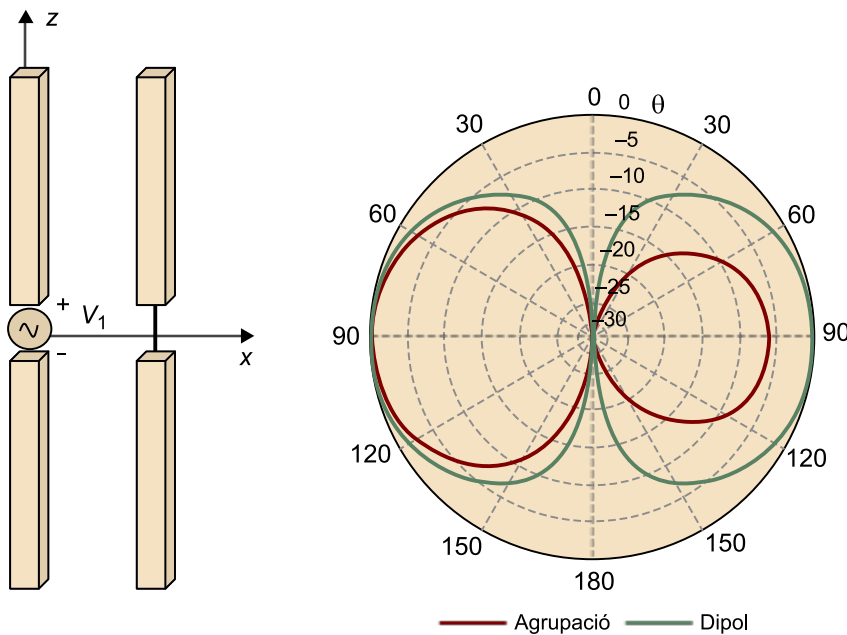
S'observa que s'han obviat les constants (η, ϵ), que no afecten la forma del diagrama de radiació.

Així, el camp total de l'agrupació és el següent:

$$\vec{E}_t = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos\theta\right)}{\sin\theta} \cdot (1 - 0,78e^{j(kdsin\theta\cos\varphi - 0,369)}) \cdot \hat{\theta} \quad 3.48$$

Observeu que el caràcter vectorial del camp radiat per l'agrupació és determinat pel camp radiat per l'element (\vec{E}_o). Això implica que la polarització de l'agrupació és designada per l'element que la constitueix (en aquest cas, el dipol). D'altra banda, és important subratllar que apareix un terme de fase progressiva ($e^{-j0,369}$). Aquest terme és el responsable que es produeixi un desajustament del feix principal, ja que el màxim es troba en la direcció longitudinal (*end-fire direction*):

Figura 22. Agrupació d'antenes i diagrames de radiació normalitzats



A l'esquerra: agrupació formada per un parell de dipols de mitja longitud d'ona (alimentador i paràsit curtcircuitat) orientats en el sentit de l'eix z i alineats al llarg de l'eix x .
A la dreta: diagrames de radiació (dB) normalitzats de l'agrupació i del dipol aïllat.

El resultat és un diagrama de radiació de l'agrupació el lòbul principal de la qual apunta en el sentit del paràsit cap a l'alimentador (en el sentit de les x negatives) (figura 22). Per tant, es tracta d'un element paràsit reflector. En la pràctica s'utilitza un element reflector de dimensions lleugerament superiors amb l'objectiu de minimitzar el lòbul que apareix en la direcció ($\theta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ$).

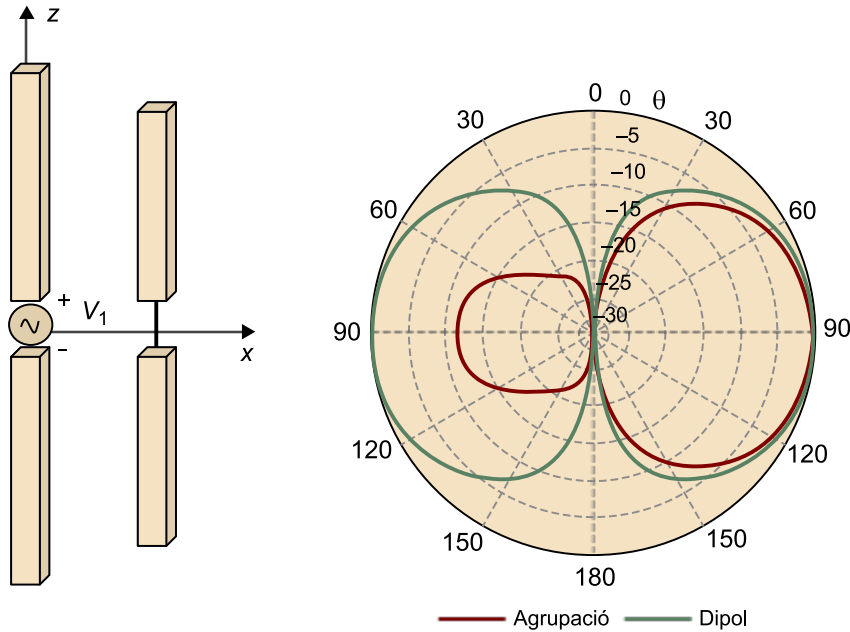
La fase progressiva es pot manipular, a partir de l'element (en aquest cas, un dipol) o a partir de la distància entre l'alimentador i el paràsit. Per a un dipol de mitja longitud d'ona, la impedància presenta una component inductiva. Escurçant lleugerament (de l'ordre de $0,01\lambda$) la longitud del dipol, s'aconsegueix anul·lar-la, i fent que sigui encara més curt, es converteix en capacitiva. D'aquesta manera es manipula la fase progressiva perquè el feix apunti en l'altra direcció. Per exemple, si el paràsit és lleugerament més

curt que l'alimentador, i considerant una autoimpedància de $Z_{22} = 73 + j42,5 \Omega$, el factor d'agrupació resulta:

$$FA(\psi) = 1 - (0,60 + 0,49j)e^{j\psi} = 1 - 0,77e^{j0,67\psi} \quad 3.49$$

Aquest factor d'agrupació presenta un terme de fase positiu en comparació de l'anterior. El diagrama de radiació que s'obté apunta ara en el sentit de l'alimentador cap al paràsit (figura 23). En aquest cas, el paràsit s'ha convertit en un director.

Figura 23. Agrupació d'antenes i diagrames de radiació normalitzats



A l'esquerra: agrupació formada per un parell de dipols (l'alimentador, de mitja longitud d'ona, i el paràsit curtcircuitat, lleugerament més curt) orientats en el sentit de l'eix z i alineats al llarg de l'eix x.
A la dreta: diagrames de radiació (dB) normalitzats de l'agrupació i del dipol aïllat

Cal ressaltar que els diagrames de radiació estan normalitzats. Per a conèixer el valor de l'amplitud en la direcció del màxim, n'hi ha prou de substituir aquests valors en l'expressió del camp total. Per al primer cas (paràsit de la mateixa longitud que l'alimentador), el màxim es troba en la direcció ($\theta = 90^\circ$, $\varphi = 180^\circ$):

$$E_t = (1 - 0,78e^{j(-kd - 0,369)}) = 0,87 \quad 3.50$$

I, per al segon cas (paràsit lleugerament més curt que l'alimentador), el màxim es troba en la direcció ($\theta = 90^\circ$, $\varphi = 0^\circ$):

$$E_t = (1 - 0,77e^{j(kd + 0,67)}) = 1,09 \quad 3.51$$

És importat remarcar que el camp radiat pel dipol de mitja longitud d'ona (E_0) és en tots dos casos igual a 1.

S'observa també que, encara que s'ha considerat que el dipol paràsit té una longitud diferent que el dipol alimentador, a l'efecte de càlcul s'ha assumit que el seu diagrama de radiació és el mateix que el del dipol alimentador. Aquesta consideració és totalment versemblant, ja que la diferència de longituds és tan petita que afecta mínimament la forma del diagrama de radiació quan el dipol és aproximadament de mitja longitud d'ona.

Si aquesta consideració no fos totalment plausible, s'hauria de tenir en compte que l'alimentador i el paràsit són dos elements diferents i, per tant, no es podria obtenir el camp total de l'agrupació com un producte entre el camp radiat per l'element bàsic de l'agrupació i el factor d'agrupació. Com que no es pot definir un diagrama de radiació comú a tots els elements de l'agrupació, la metodologia de càlcul (basada en el fet que tots els elements que formen l'agrupació són iguals i en la definició subsegüent del factor d'agrupació) que es desenvolupa en aquest mòdul no serviria i s'hauria d'aplicar el mètode de càlcul del camp radiat element a element.

4.3. Agrupació formada per un alimentador i un paràsit carregat

Amb l'objectiu d'ampliar la teoria presentada, es treballa ara amb una agrupació de dos elements en què el paràsit no està curtcircuitat, sinó que està carregat amb una impedància complexa Z_L (figura 24).

Figura 24. Model d'agrupació de dues antenes



El port 1 està alimentat i el port 2 està carregat amb una impedància complexa Z_L .

Les equacions que caracteritzen el model mitjançant la matriu de paràmetres Z definides a 3.38 queden, aplicats de la mateixa manera a aquest escenari:

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 \cdot Z_{11} + I_2 \cdot Z_{12} \\ -I_2 \cdot Z_L &= I_1 \cdot Z_{21} + I_2 \cdot Z_{22} \end{aligned} \quad 3.52$$

en què la tensió V_2 és ara el producte del corrent I_2 per la impedància complexa Z_L .

Procedint de la mateixa manera que en el subapartat anterior, es pot trobar la relació entre els corrents I_1 i I_2 :

$$I_2 = -I_1 \cdot \frac{Z_{21}}{Z_L + Z_{22}} \quad 3.53$$

Per a $Z_L = 0$, l'equació 3.53 es converteix en l'equació 3.39. Per a $Z_L \rightarrow \infty$, el corrent I_2 s'anul·la ($I_2 = 0$), la qual cosa significa que no hi ha acoblament mutu entre alimentador i paràsit (això és cert per al dipol de mitja longitud d'ona, ja que, per a altres casos, encara que el paràsit estigui en circuit obert, es poden excitar corrents. Això ocorre, per exemple, quan es considera un dipol de longitud λ , en què un circuit obert converteix cadascun dels braços en dos dipols de longitud $\lambda/2$, i es pot excitar cada braç). En aquest sentit, es pot modificar el valor de Z_L per a manipular el diagrama de radiació de l'agrupació. Tal com s'ha vist anteriorment, la fase de I_2 repercuteix en la forma del diagrama de radiació. Així, atès que I_2 depèn de Z_L , a part de la distància entre elements i la longitud del paràsit, s'afegeix la impedància Z_L al conjunt de variables que permeten manipular el diagrama de radiació de l'agrupació. Observeu que si Z_L presenta una component real, part de la potència es dissipa en la càrrega, fet que comporta una pèrdua d'eficiència de radiació.

Anàlogament al que es planteja en les equacions 3.42 i 3.43, i tenint en compte la relació entre els corrents I_1 i I_2 (equació 3.53), el factor d'agrupació que s'obté és el següent:

$$FA(\psi) = 1 - \frac{Z_{21}}{Z_L + Z_{22}} e^{j\psi} \quad 3.54$$

Exemple pràctic V

Amb l'objectiu d'il·lustrar com una càrrega complexa pot modificar el diagrama de radiació, es planteja l'exemple següent.

En l'agrupació de la figura 25 el paràsit està carregat amb una impedància complexa Z_L . Considerant les mateixes dades que en l'exemple pràctic IV es calculen, per a dos valors diferents de Z_L ($Z_L = 60j$ i $Z_L = -60j$), el factor d'agrupació i el diagrama de radiació de l'agrupació.

- Per a $Z_L = 60j$, el factor d'agrupació resulta:

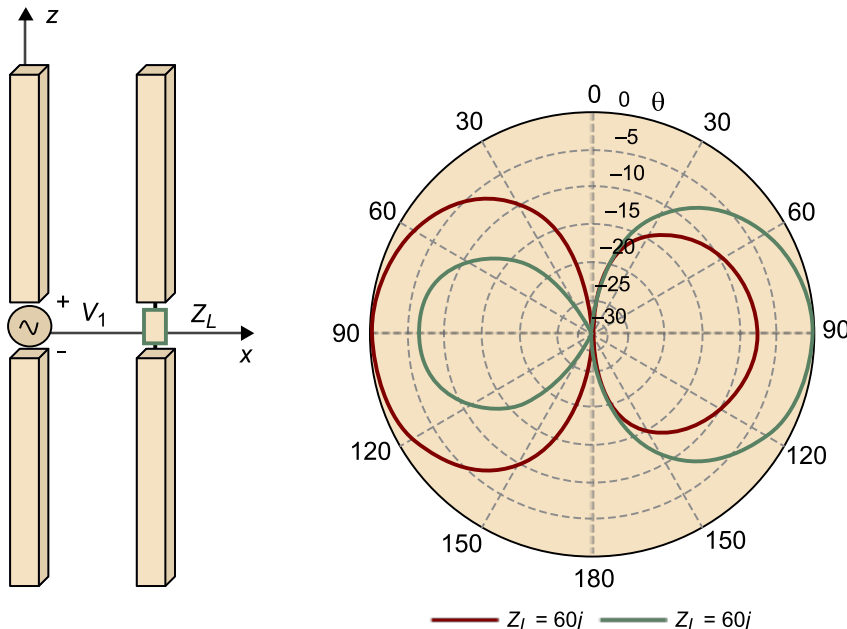
$$FA(\psi) = 1 - \frac{Z_{21}}{Z_L + Z_{22}} e^{j\psi} = 1 - (0,36 - 0,37j)e^{j\psi} = 1 - 0,52e^{-j0,799}e^{j\psi} \quad 3.55$$

- Per a $Z_L = -60j$, el factor d'agrupació resulta:

$$FA(\psi) = 1 - \frac{Z_{21}}{Z_L + Z_{22}} e^{j\psi} = 1 - (0,81 - 0,33j)e^{j\psi} = 1 - 0,87e^{j0,387}e^{j\psi} \quad 3.56$$

En el primer cas, el terme de fase progressiva que s'afegeix és negatiu, i en el segon és positiu; d'aquesta manera varia el màxim de radiació, que apunta, en el primer cas ($\theta = 90^\circ$, $\varphi = 180^\circ$) i en el segon ($\theta = 90^\circ$, $\varphi = 0^\circ$), en sentits oposats (figura 25). S'observa que en el primer cas el paràsit fa les funcions de reflector i, per contra, en el segon les fa de director.

Figura 25. Agrupació d'antenes i diagrames de radiació



A l'esquerra: agrupació formada per un parell de dipols de mitja longitud d'ona (alimentador i el paràsit carregat) orientats en el sentit de l'eix z i alineats al llarg de l'eix x .
A la dreta: diagrames de radiació de l'agrupació en funció del valor de la impedància de càrrega del paràsit ($Z_L = 60j$ i $Z_L = -60j$)

S'observa, per tant, que el fet de carregar un dipol paràsit amb una càrrega complexa afegeix més graus de llibertat a l'hora d'optimitzar el disseny i aconseguir un efecte de director o de reflector.

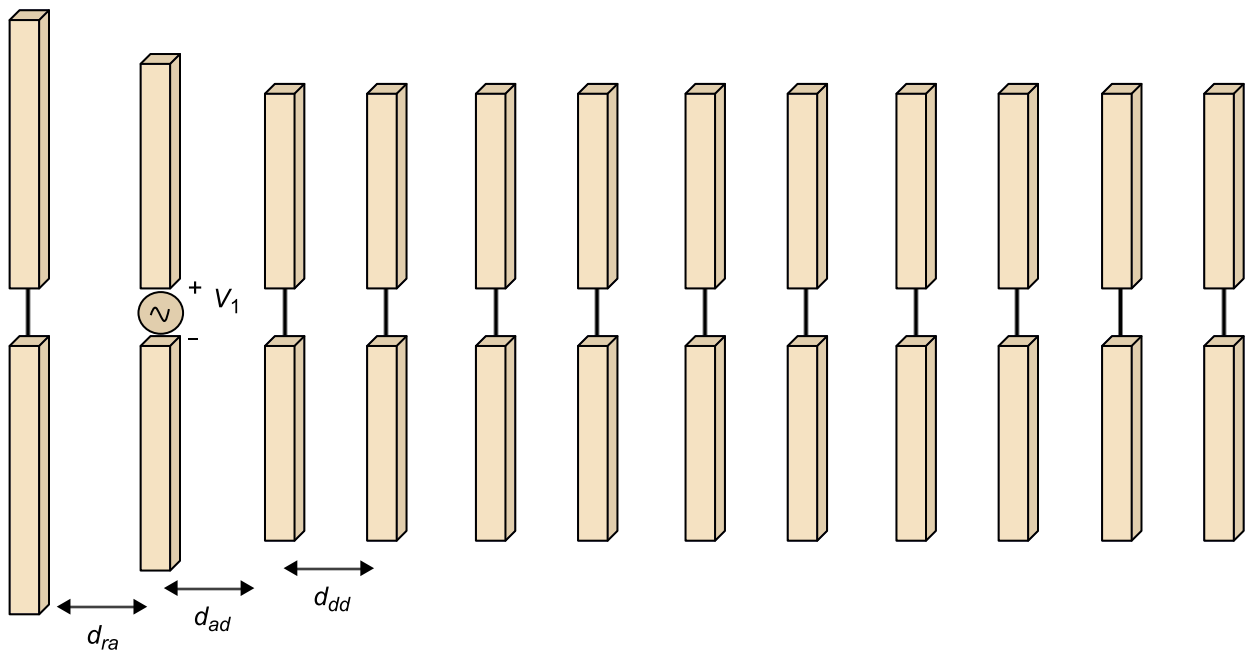
Vegeu també

Podeu veure l'exemple pràctic IV en el subapartat 4.2 d'aquest mòdul.

4.4. Antena Yagi-Uda

La popular antena Yagi-Uda és precisament una agrupació com les anteriors. Amb l'objectiu d'aconseguir directivitats elevades, s'incrementa el nombre de paràsits. En la configuració més general, l'antena Yagi-Uda presenta un alimentador, un paràsit reflector i diversos paràsits directors. Deu el nom als seus inventors, els japonesos Yagi i Uda. La seva invenció ha estat reeixida i s'ha convertit en un tipus d'antena molt popular, ja que és l'antena clàssica de televisió.

Figura 26. Antena Yagi-Uda formada per un reflector, un alimentador i deu directors



Per a fer-ne l'anàlisi, es pot procedir de la mateixa manera que en el subapartat anterior. En aquest cas hi ha més variables que s'han de tenir en compte en el disseny, com són les separacions entre elements d_{ra} , d_{ad} i d_{dd} , que representen les distàncies entre reflector i alimentador, entre alimentador i director, i entre directors, respectivament (figura 26).

En termes d'ordre de magnitud, l'antena Yagi-Uda pot augmentar la directivitat d'uns 2,1 dB de l'element bàsic (dipol) fins als 12-15 dB. En la pràctica, el dipol alimentador se sol substituir per un element anomenat **dipol doblegat**, que radia de la mateixa manera que un dipol convencional, però amb una resistència de radiació quatre vegades superior. La raó és que en la seva aplicació més comuna d'antena de recepció de televisió, la línia de transmissió a la qual va connectada l'antena presenta una impedància característica de 300 Ω , valor que és aproximadament quatre vegades la impedància d'entrada d'un dipol de mitja longitud d'ona (73,1 Ω). Si es quadruplica aquesta impedància d'entrada (292,4 Ω), el dipol doblegat aconsegueix una millor adaptació d'impedàncies amb la línia de transmissió que alimenta l'antena, de manera que maximitza la transferència de potència del senyal que lliura la línia a l'antena.

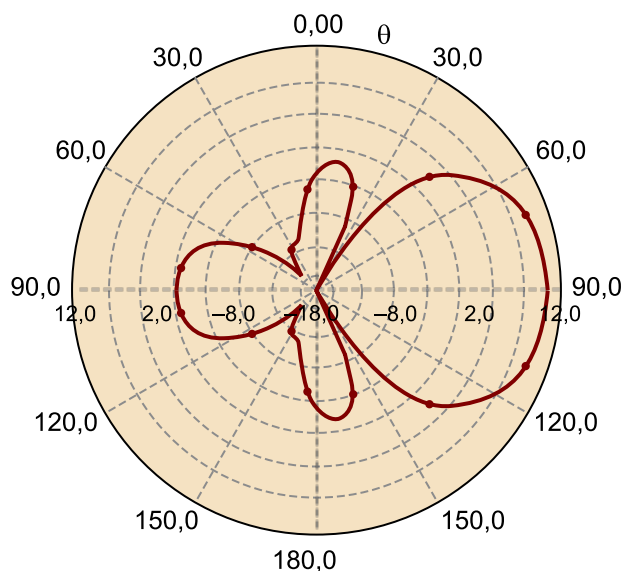
Aquest mecanisme de radiació de la Yagi-Uda es pot aplicar a antenes d'un altre tipus, com les antenes *microstrip*.

A tall il·lustratiu, es mostra el tipus de diagrama directiu que es pot obtenir d'una agrupació Yagi-Uda com la de la figura 26 formada per un alimentador, un reflector i deu directors (figura 27).

Vegeu també

Les antenes micropistes són objecte d'estudi en el mòdul "Antenes planes: ranures i antenes *microstrip*" d'aquesta assignatura.

Figura 27. Simulació del guany en el pla E d'una antena Yagi-Uda formada per un reflector, un alimentador i deu directors



—●— 0,528 GHz Etot phi = 0

El reflector (podeu veure la figura 26) té una longitud de 270 mm, l'alimentador de 250 mm i els directors de 200 mm. Les distàncies de separació entre elements són $d_{ra} = 75$ mm i $d_{ad} = d_{dd} = 50$ mm. La freqüència d'operació és de 530 MHz. La directivitat assolida en aquestes condicions és d'11,5 dB.

5. Síntesi de diagrames

Fins al moment, tot el procediment matemàtic utilitzat ha estat enfocat a l'anàlisi de diferents agrupacions d'antenes. A partir de les anàlisis presentades, es dedueix que variant l'excitació, la fase i la distància entre elements, i també el nombre, és possible modificar el diagrama de radiació d'una agrupació d'antenes. El problema que es planteja resoldre ara és precisament l'invers, és a dir, es tracta de resoldre un problema de disseny. En aquest cas, fixat un diagrama de radiació objectiu, s'ha de determinar quins valors han d'adoptar els diversos paràmetres que caracteritzen l'agrupació a fi d'obtenir aquest diagrama. Es tracta, doncs, d'un procés de síntesi.

Entre els processos de síntesi clàssics hi ha diversos mètodes, com ara els següents:

- **Modelització de feix:** l'especificació és el diagrama de radiació. Mètodes de Fourier i Woodward-Lawson; aquest darrer és el que s'analitza en el present apartat.
- **Mètode d'NLPS:** es tracta d'obtenir agrupacions amb un cert nivell de lòbuls secundaris.
- **Mètodes de fixació de zeros:** es basen a imposar nuls en el diagrama de radiació a partir dels zeros del polinomi de l'agrupació.

Actualment, els processos de síntesi es poden tractar mitjançant mètodes numèrics, com poden ser els mètodes basats en algorismes genètics (GA⁴). Això comporta afegir una certa flexibilitat al procés de disseny, ja que permet imposar restriccions en la variació dels coeficients d'alimentació amb l'objectiu de simplificar la construcció de la xarxa de distribució, i també d'optimitzar la separació entre elements sense que totes les distàncies hagin de ser iguals.

5.1. Mètode de Woodward-Lawson

Aquest subapartat il·lustra el mètode de Woodward-Lawson com a mètode de síntesi de diagrames de radiació. Es tracta d'un mètode acadèmicament senzill que permet il·lustrar la utilitat dels mecanismes de síntesi.

El mètode de Woodward-Lawson utilitza conceptes del processament digital de senyal, especialment la transformada de Fourier. En la nomenclatura del processament digital de senyal, s'utilitzen $x[n]$ i $X(e^{j\omega})$ per a designar els senyals en els dominis temporal i freqüencial (o espectral), respectivament. En aquest cas, l'equivalent al domini temporal serà el domini espacial i els elements per-

Lectura recomanada

Sobre els mètodes de Fourier i de fixació de zeros, podeu consultar l'obra següent:

J. Anguera; A. Pérez (2008). *Teoria d'antenes*. Enginyeria La Salle ("Estudios Semipresenciales"). ISBN: 978-84-935665-4-8.

Sobre el mètode d'NLPS, podeu consultar l'obra següent:

C. A. Balanis (1997). *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley.

⁽⁴⁾GA és la sigla de l'expressió anglesa *genetic algorithm*.

tanyents a aquest domini seran els coeficients a_n . D'altra banda, l'equivalent al domini espectral serà el domini angular definit per l'angle elèctric (ψ), i els elements pertanyents a aquest domini seran designats com a coeficients A_m . Per a passar de a_n a A_m , s'utilitza, per tant, la transformada discreta de Fourier.

Els passos que constitueixen el procés de síntesi d'una agrupació de N elements separats entre si una distància d i amb fase progressiva nul·la ($\alpha = 0$) mitjançant el mètode de Woodward-Lawson, són els següents:

1) Especificar el factor d'agrupació objectiu en el domini de l'angle elèctric. Per simplificar la nomenclatura, es treballa en el domini de la variable w , que es defineix:

$$\frac{\psi}{k \cdot d} = \cos(\theta) = w \quad | \quad w \in [-1, 1] \quad 3.57$$

2) Mostrejar el diagrama objectiu. A partir del factor d'agrupació objectiu (FA), s'obtenen els coeficients discrets A_m :

$$A_m = FA(w = w_m) \quad 3.58$$

en què

$$w_m = \frac{m}{L} \lambda \quad \begin{cases} \text{Si } N \text{ és parell} \rightarrow m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M \quad (M = \frac{N}{2}) \\ \text{Si } N \text{ és senar} \rightarrow m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M \quad (M = \frac{N-1}{2}) \end{cases} \quad 3.59$$

i en què λ és la longitud total de l'agrupació (per exemple, en una agrupació de N elements separats entre si una distància d , la longitud total és $L = (N - 1) \cdot d$).

3) Obtenir les excitacions a partir de la transformada discreta de Fourier inversa dels coeficients A_m :

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=-M}^M A_m \cdot e^{-j2\pi(\frac{z_n}{\lambda})w_m} \quad \forall n \in [0, N - 1] \quad 3.60$$

en què el recorregut de la variable del sumatori (m) es fa segons el que es defineix en l'equació 3.59 i en què:

$$\begin{aligned} \text{Si } N \text{ és parell} &\rightarrow z_n = \frac{2(n-M)+1}{2} \cdot d \quad (M = \frac{N}{2}) \\ \text{Si } N \text{ és senar} &\rightarrow z_n = (n-M) \cdot d \quad (M = \frac{N-1}{2}) \end{aligned} \quad 3.61$$

4) Obtenir el factor d'agrupació sintetitzat a partir dels pesos a_n mitjançant:

Lectura recomanada

Sobre el mètode de Woodward-Lawson, podeu consultar l'obra següent:

W. L. Stutzman; G. A. Thiele (1998). *Antenna Theory and Design*. John Wiley.

$$FA(w) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot e^{j2\pi\left(\frac{z_n}{\lambda}\right)w} \quad 3.62$$

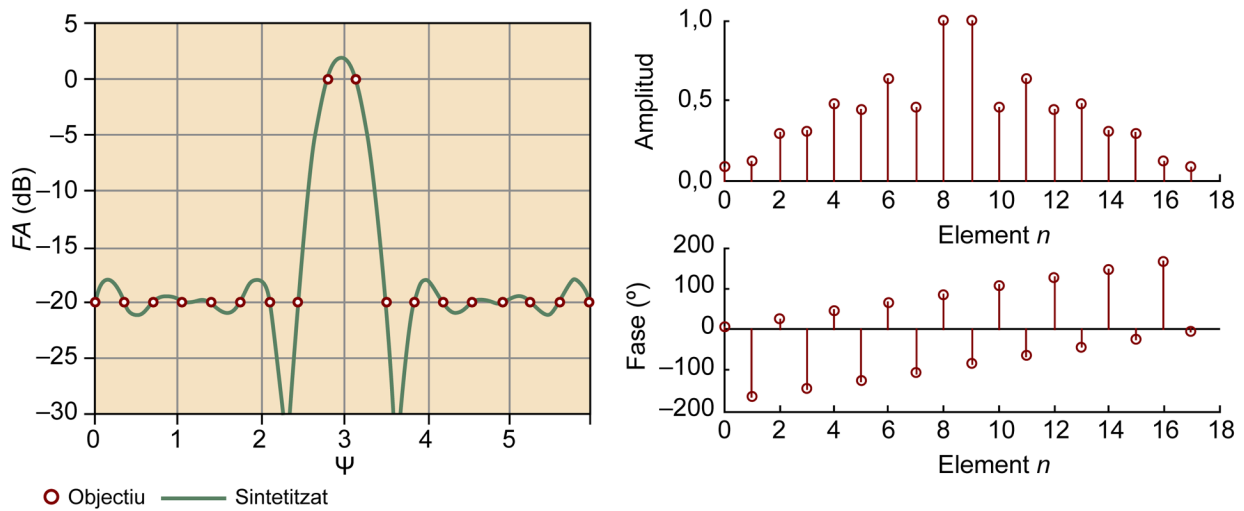
Exemple pràctic VI

Per tal d'il·lustrar l'aplicació d'aquest mètode, a continuació es presenta un exemple en el qual se sintetitzen tres diagrames de radiació diferents.

Es vol sintetitzar una agrupació de 18 elements, separats $d = 0,5\lambda$ i amb fase progressiva nul·la, tal que:

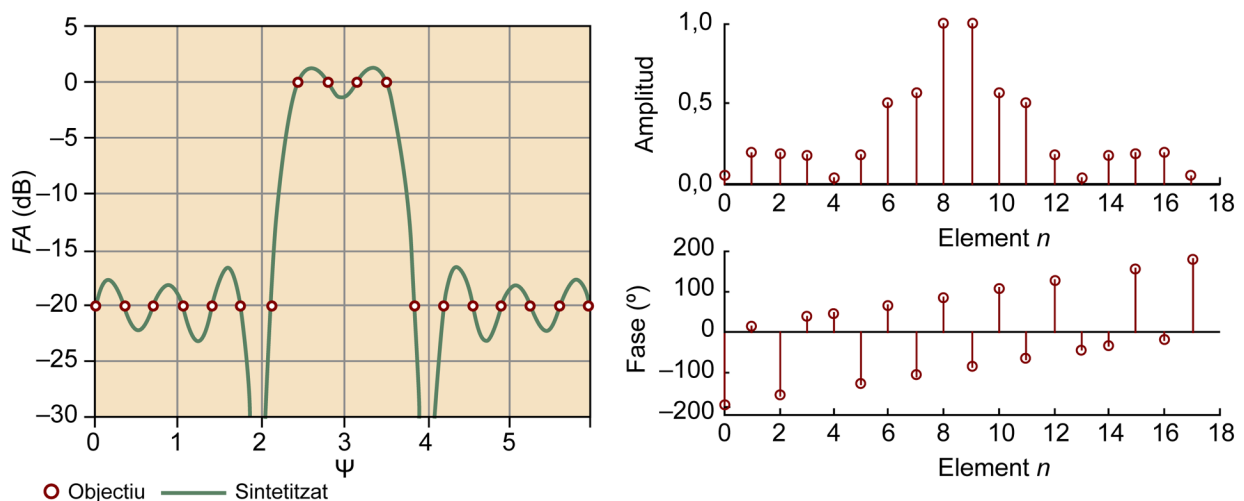
- Presenti un diagrama de radiació amb un NLPS de 20 dB (els resultats es poden veure en la figura 28).
- Presenti un diagrama de radiació amb un NLPS de 20 dB, però amb menys directivitat que en el cas anterior (els resultats es poden veure en la figura 29).
- Presenti un diagrama de radiació amb un NLPS de 20 dB en unes direccions de l'espai i de 10 dB en d'altres (els resultats es poden veure en la figura 30). Aquest tipus de diagrama és útil en estacions base en què el diagrama de l'agrupació que apunta a la cel·la d'interès pot tenir uns lòbuls secundaris situats angularment per sota del feix principal d'un nivell moderat, ja que van a parar a la mateixa cel·la. En canvi, els lòbuls que estan angularment per sobre del feix principal apunten a una altra cel·la, de manera que s'imposa que aquests lòbuls tinguin una amplitud molt inferior que la del feix principal, amb l'objectiu de minimitzar les interferències entre cel·les.

Figura 28. Coeficients del factor d'agrupació objectiu, mòdul i fase



A l'esquerra: factor d'agrupació objectiu, coeficients A_n , resultants del mostreig del factor d'agrupació objectiu i factor d'agrupació sintetitzat
 A la dreta: mòdul (a dalt) i fase (a baix) dels coeficients a_n dissenyats

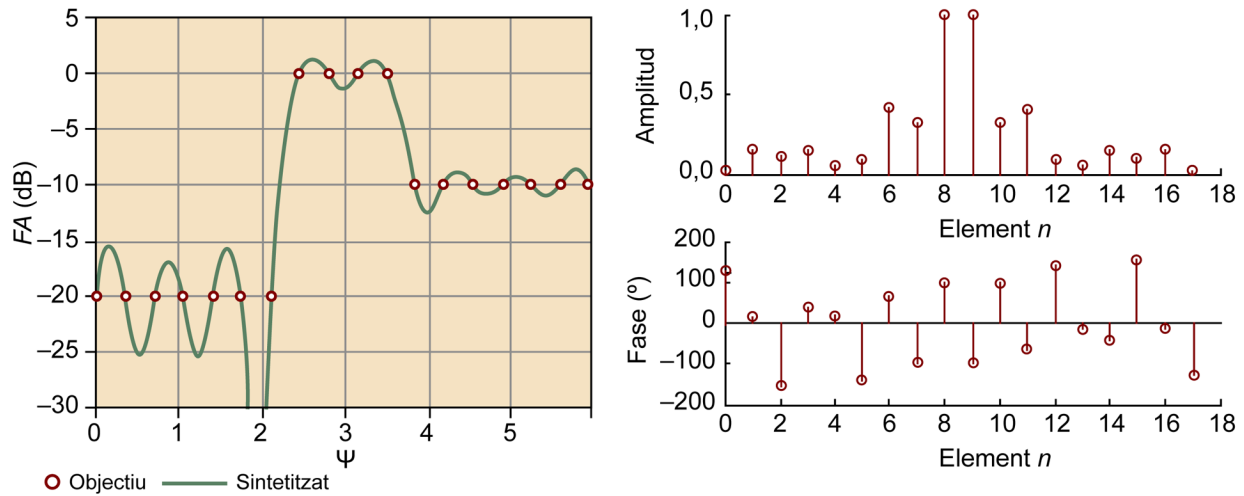
Figura 29. Coeficients del factor d'agrupació objectiu, mòdul i fase



A l'esquerra: factor d'agrupació objectiu, coeficients A_n , resultants del mostreig del factor d'agrupació objectiu i factor d'agrupació sintetitzat

A la dreta: mòdul (a dalt) i fase (a baix) dels coeficients a_n , dissenyats

Figura 30. Coeficients del factor d'agrupació objectiu, mòdul i fase



A l'esquerra: factor d'agrupació objectiu, coeficients A_n , resultants del mostreig del factor d'agrupació objectiu i factor d'agrupació sintetitzat
A la dreta: mòdul (a dalt) i fase (a baix) dels coeficients a_n , dissenyats

En els dos primers casos es tracta d'una síntesi d'un factor d'agrupació simètric, per la qual cosa els coeficients d'alimentació dissenyats són reals. En les gràfiques de resultats s'adjunten els valors dels pesos, tant en mòdul com en fase. S'observa com en els dos primers casos les fases dels coeficients són de 0° o de 180° (pesos positius o negatius, respectivament).

És interessant subratllar que, en els tres casos, la tendència que segueix el perfil d'amplituds (mòduls) dels coeficients de l'agrupació és disminuir des del centre (amplituds màximes) cap als extrems (amplituds mínimes), perfil similar al triangular o al binomial que, com ja hem estudiat, s'utilitzen per a obtenir nivells *NLPS* més elevats que el perfil uniforme.

Per al segon cas s'observa, a més, que hi ha més elements d'amplitud propera a zero que en els altres dos. Això resulta del tot lògic, ja que en el segon cas el factor d'agrupació objectiu requereix una agrupació menys directiva i, per tant, no es necessiten tants elements. Dit d'una altra manera, fixat un cert nombre d'elements, no es podria imposar un diagrama de radiació objectiu qualsevol, ja que, si per exemple es pretengués imposar molta directivitat amb pocs elements, no es podria obtenir la solució desitjada.

6. Lectures obligatòries i complementàries

Lectures obligatòries

- **J. S. K. Raj; A. P. Kabilan** (2007, agost). "Teaching and Designing Antenna Arrays Using Signal and Image-Processing Toolboxes of MATLAB". *IEEE Antennas and Propagation Magazine* (vol. 49, núm. 4, pàg. 184-190).
- **M. N. O. Sadiku** (2010, juliol/agost). "Wireless Wises Up with Smart Antennas". *IEEE Potentials* (pàg. 37-39).

Lectures complementàries

- **S. Bellofiore; C. A. Balanis; J. Foutz; A. S. Spanias** (2000, juny). "Smart-Antenna Systems for Mobile Communication Networks - Part 1: Overview and Antenna Design". *IEEE Antennas and Propagation Magazine* (vol. 44, núm. 3, pàg. 145-154).
- **El-Hajj; K. Y. Kabalan; M. Al-Husseini** (2003, agost). "Antenna Array Design Using Spreadsheets". *IEEE Transactions on Education* (vol. 46, núm. 3, pàg. 319-324).

Bibliografia

Anguera, J.; Pérez, A. (2008). *Teoria d'antenes*. Enginyeria La Salle ("Estudios Semipresenciales"). ISBN: 978-84-935665-4-8.

Balanis, C. A. (1997). *Antenna Theory: Analysis and Design*. John Wiley.

Stutzman, W. L.; Thiele, G. A. (1998). *Antenna Theory and Design*. John Wiley.

