



Máster en Ingeniería Computacional y Matemática
Tesis Final de Máster

Jerarquías emergentes en Redes Complejas

Javier Sainz

Grado de Máster en Ingeniería Computacional y Matemática

Director: Sergio Gómez Jiménez

Departament d'Enginyeria Informàtica i Matemàtiques, U.R.V.

15 de Junio de 2017

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI
UNIVERSITAT OPERTA DE CATALUNYA

Jerarquías emergentes en Redes Complejas

Javier Sainz

Trabajo final de Máster en cumplimiento parcial de los requisitos para la
obtención del Grado de Máster en Ingeniería Computacional y Matemática



Esta obra está sujeta a una licencia de Reconocimiento 3.0 España de Creative Commons. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

©2017 Javier Sainz

Reservados todos los derechos. Está prohibido la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la impresión, la reprografía, el microfilme, el tratamiento informático o cualquier otro sistema, así como la distribución de ejemplares mediante alquiler y préstamo, sin la autorización escrita del autor de acuerdo con los límites que autorice la Ley de Propiedad Intelectual.

“Dime, Bruto, puedes verte la cara?. -No, Casio, porque los ojos se ven a sí mismos por refracción mediante otros objetos”

Julio César, William Shakespeare

Ficha del Trabajo Final

Título del trabajo:	Jerarquías emergentes en Redes Complejas
Nombre del autor:	Francisco Javier Sainz Sanchez
Nombre del director:	Sergio Gómez Jiménez
Fecha de entrega(mm/aaaa):	06/2017
Area del Trabajo Final:	Teoría de Grafos y sus Aplicaciones
Titulación de Grado:	Master en Ingeniería Computacional y Matemática
Abstract	
<p>A fundamental and recurring issue in the study of a social system formed by agents that have initially the same social status is how a hierarchical society develops from the interactions of agents. In this study we analyze the impact of the density of interaction, the network density, -the proportion of agents that interact-, that causes social inequality represented in the simulation model by the social relative position of an agent as compared to that of others. The competition model presented includes two mechanisms, the probability to win or loose the competition and a relaxation process that tends to equate the social position of agents. The existence of previous coalitions, expressed by the clustering coefficient that represents a network randomly generated, affects, jointly with the two mechanisms mentioned, to the critical value of network density and consequently the emergence of a transition phase that distinguishes between an egalitarian society and a hierarchical society. The transition phase effect emerges with different algorithms that generate a degree sequence that follows the Pareto law, a potential function. While the use of a network with an expected degree distribution does not allow us to observe a phase transition effect this way showing the distinction between egalitarian and hierarchical societies, a transition effect can be observed with a uniform distribution of degrees, in this way questioning whether the principle of preferential adjunction is a condition for the emergence of the effect in free scale network models.</p>	
Keywords	
Complex networks; Network formation models; Hierarchical networks; Network density; Network grouping coefficients; Invariance of scale-free networks; Emergent transitions phase effects.	

Resumen

Una cuestión fundamental y recurrente en el estudio de un sistema social formado por agentes que parten de una situación de igualdad es cómo se llega a conformar, como resultado de las interacciones locales de los agentes, una sociedad jerárquica. En este trabajo se analiza el impacto de la densidad de la interacción, –el número proporcional de agentes que interactúan–, en la aparición de desigualdad social representada en el modelo de simulación por la posición social relativa de los agentes. El modelo de competición que se presenta incluye dos mecanismos, la probabilidad de ganar o perder la competición y un proceso de relajación que tiende a igualar la posición social de los agentes. La existencia de coaliciones previas, que se expresa en el coeficiente de agrupamiento que presenta espontáneamente una red generada aleatoriamente, afecta, conjuntamente con los dos mecanismos mencionados, al valor crítico de densidad de red que determina una transición de fase que distingue entre una sociedad igualitaria y una sociedad jerárquica. El efecto de transición de fase aparece con distintos algoritmos de generación de una secuencia de grados si se conforman a la ley de Pareto, una función potencial. Mientras, el empleo de una red con una distribución de grados esperada no permite observar un efecto de transición de fase que permita distinguir entre sociedades igualitarias y jerárquicas, si se observa, en cambio, en una red con una distribución uniforme de grados, de este modo cuestionando el principio de adjunción preferencial como condición de aparición del efecto en modelos de red de escala libre.

Palabras clave

Redes complejas; Modelos de formación de redes; Redes jerárquicas; Densidad de red; Coeficientes de agrupamiento de red; Invariancia de redes de escala libre; Efectos emergentes de transición de fase.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI
UNIVERSITAT OPERTA DE CATALUNYA

Jerarquías emergentes en Redes Complejas

Javier Sainz

Grado de Máster en Ingeniería Computacional y Matemática

Resumen

Una cuestión fundamental y recurrente en el estudio de un sistema social formado por agentes que parten de una situación de igualdad es cómo se llega a conformar, como resultado de las interacciones locales de los agentes, una sociedad jerárquica. En este trabajo se analiza el impacto de la densidad de la interacción, –el número proporcional de agentes que interactúan–, en la aparición de desigualdad social representada en el modelo de simulación por la posición social relativa de los agentes. El modelo de competición que se presenta incluye dos mecanismos, la probabilidad de ganar o perder la competición y un proceso de relajación que tiende a igualar la posición social de los agentes. La existencia de coaliciones previas, que se expresa en el coeficiente de agrupamiento que presenta espontáneamente una red generada aleatoriamente, afecta, conjuntamente con los dos mecanismos mencionados, al valor crítico de densidad de red que determina una transición de fase que distingue entre una sociedad igualitaria y una sociedad jerárquica. El efecto de transición de fase aparece con distintos algoritmos de generación de una secuencia de grados si se conforman a la ley de Pareto, una función potencial. Mientras, el empleo de una red con una distribución de grados esperada no permite observar un efecto de transición de fase que permita distinguir entre sociedades igualitarias y jerárquicas, si se observa, en cambio, en una red con una distribución uniforme de grados, de este modo cuestionando el principio de adjunción preferencial como condición de aparición del efecto en modelos de red de escala libre.

Agradecimientos

A las instituciones que hacen posible aprender en la madurez.

A Sergio Gómez Jiménez por su comprensión, paciencia y apoyo.

A cuantos tratando de perjudicarme me pusieron en la pista de perseguir mis objetivos.

Índice general

Resumen	V
Agradecimientos	VI
Lista de Figuras	IX
Lista de Tablas	X
Acrónimos	XI
Constantes físicas	XII
Símbolos	XIII
1. Introducción	1
1.1. Contexto y motivación del proyecto	1
1.2. Objetivos y desarrollo del proyecto	4
1.3. Resultados del desarrollo del proyecto	6
2. Simulación de sistemas complejos	7
2.1. Redes de agentes. Modelos de simulación	8
2.1.1. Simulación de sistemas complejos	9
2.1.2. La emergencia social de líderes	11
2.1.3. El concepto de densidad	12
2.1.4. El impacto de la densidad en la formación de capital social	16
2.1.5. La formación de coaliciones	18
2.2. La física estadística en el análisis de la dinámica social	24
2.2.1. Emergencia de efectos holísticos por interacción local	25
2.2.2. Topología de la red	27
2.2.3. Aplicaciones de la simulación basada en agentes	30
2.3. Simulación de procesos de formación de jerarquías	30
2.3.1. El modelo de Bonabeau	32
2.3.1.1. El modelo de solución de campo medio	33
2.3.2. Críticas y modificaciones del modelo de Bonabeau	34

3. Modelos de simulación	37
3.1. Modelos estocásticos de formación de jerarquías	37
3.1.1. Propiedades de redes de escala libre	41
3.1.1.1. Invariancia escalar	41
3.1.1.2. Resistencia a fallos	41
3.1.1.3. Coeficiente de agrupamiento	42
3.1.1.4. Distancia media entre vecinos	42
3.1.2. Formación de jerarquías con funciones de potencia	43
3.1.3. Formación de jerarquías con funciones no potenciales	44
3.2. Modelos de aplicación del modelo de configuración	45
3.3. Implementación de un modelo de competición	50
3.3.1. Estructura de un algoritmo de competición entre agentes	54
3.3.2. Resultados de la aplicación bajo el modelo de configuración	56
3.3.3. Resultados de la aplicación en modelos de función no potencial	59
4. Conclusión	62
A. Código fuente de la aplicación	68
Bibliografía	91

Índice de figuras

3.1. Modelo AP Alto agrupamiento (0.31): Panel A: 30 %. Panel B: 60 % . . .	51
3.2. Modelo AP Bajo Agrupamiento (0.03): Panel A: 30 %. Panel B: 60 % . . .	52
3.3. Modelo HH Alto agrupamiento (0.59): Panel A: 30 %. Panel B: 60 % . . .	52
3.4. Modelo HH Bajo Agrupamiento (0.19): Panel A: 30 %. Panel B: 60 % . . .	52
3.5. Modelo PL Alto agrupamiento (0.22): Panel A: 30 %. Panel B: 60 % . . .	53
3.6. Modelo PL Bajo agrupamiento (0.01): Panel A: 30 %. Panel B: 60 % . . .	53
3.7. Modelo PV Alto agrupamiento (0.07): Panel A: 30 %. Panel B: 60 % . . .	53
3.8. Modelo PV Bajo agrupamiento (0.00): Panel A: 30 %. Panel B: 60 % . . .	54
3.9. Modelo AP: Panel A: Alto agrupamiento. Panel B: Bajo agrupamiento. . .	57
3.10. Modelo HH: Panel A: Alto agrupamiento. Panel B: Bajo agrupamiento. . .	57
3.11. Modelo PL: Panel A: Alto agrupamiento. Panel B: Bajo agrupamiento. . .	58
3.12. Modelo PV: Panel A: Alto agrupamiento. Panel B: Bajo agrupamiento. . .	58
3.13. Modelo EX Alto agrupamiento (1.00): Panel A: 30 %. Panel B: 60 % . . .	60
3.14. Modelo EX Bajo Agrupamiento (0.60): Panel A: 30 %. Panel B: 60 % . . .	60
3.15. Modelo EX: Panel A: Alto agrupamiento. Panel B: Bajo agrupamiento. . .	61
3.16. Modelo UF Alto agrupamiento (0.48): Panel A: 30 %. Panel B: 60 % . . .	61

Índice de tablas

1.1. Paradigmas teóricos de sistemas de procesamiento de información	3
2.1. Construcción de capital social: Niveles de confianza según densidad	18
2.2. Número de estructuras de coalición según el número de agentes	22
3.1. Coeficientes de agrupamiento para funciones potenciales generadoras.	49

Acrónimos

- AP** Modelo de red con distribución según la ley de potencia y exponente asignado
- EX** Modelo de red con distribución de grados esperados
- HH** Modelo de red con distribución de grados de Havel-Hakimi
- PL** Modelo de red con distribución según la ley de potencia y exponente libre
- PV** Modelo de red con distribución de grados de Pareto
- UF** Modelo de red con distribución uniforme de grados

Constantes físicas

$$\text{Constante de Apéry } \zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots$$

Símbolos

Q probabilidad de ganancia en una competición

ρ densidad de población de la red

γ exponente de la función potencial

η parámetro libre de varianza de la distribución

σ parámetro de desviación típica calculada de la distribución

μ parámetro libre de relajación o decaimiento

*A **Carmen**. Y a mis hijos Irene, Laura, Carmen y Javier,
fruto de nuestro amor.*

Capítulo 1

Introducción

El trabajo que se presenta se enmarca en las áreas de Trabajo Final de Master que coordina la Universitat Rovira i Virgili, en particular en el área de Teoría de Grafos y sus Aplicaciones del grupo de investigación en Matemática Discreta que incluye temáticas relacionadas con la Teoría de Grafos, área coordinada por el Prof. Dr. Juan Alberto Rodríguez Velázquez. Se presenta al objeto de satisfacer los requisitos para la obtención del un título académico, un magnífico pretexto para proceder a una indagación intelectual con los recursos que proporciona la Teoría de Redes y con la asistencia de expertos.

1.1. Contexto y motivación del proyecto

En este trabajo se habla continuamente del concepto de red, una noción que nace de la Teoría de Grafos, que ha dado lugar al desarrollo de una ciencia que trata de captar fenómenos emergentes que resultan de la interacción local, en una red compleja, de una serie de elementos o unidades formalmente independientes. El concepto de red no es privativo del estudio de las redes sociales. El concepto de red, y su expresión en un grafo, permite captar procesos organizativos que se manifiestan en fenómenos singulares de naturaleza holística. Un ejemplo clásico de esos sistemas naturales en los que la dinámica de las interacciones juega un papel crucial es el cerebro. Desde las observaciones que le permitieron a [Ramón y Cajal \(2006\)](#) obtener el Premio Nobel de Medicina en 1906, ha venido a reconocerse que el cerebro está formado por redes neurales constituidas por unidades independientes o neuronas que constituyen las unidades anatómicas y funcionales que explican el funcionamiento cerebral y la aparición de patologías funcionales. Desde la publicación de [Marr \(1982\)](#) que caracterizó el sistema cognitivo como un sistema dinámico, numerosas observaciones empíricas y modelos teóricos han tratado de explicar

las complejas funciones cerebrales como el resultado de la organización en redes neurales de esos constituyentes biológicos fundamentales que identifican las neuronas cerebrales. Marr (1982) caracterizó la ciencia cognitiva en términos de tres niveles interrelacionados, el nivel de las transiciones cognitivas o nivel de computación –no necesariamente funciones cognitivas computables–, el nivel del diseño matemático o algorítmico que permite la ejecución de procesos que explican el funcionamiento cerebral, y, el nivel de la implementación física –los mecanismos por los que aquellas funciones y procesos vienen a implementarse en un sistema físico, siendo que la causalidad física es el único tipo de causalidad que existe.

El cerebro constituye, sin duda, el epítome de un sistema complejo, el sistema natural más complejo de cuantos existen cuya comprensión reta a la ciencia actual, y a la humanidad. Los principios que rigen las redes complejas y sus propiedades dinámicas no son sino la expresión más simple del proceso por el que tratamos de comprender qué mecanismos operan en el cerebro (Gros, 2015). El cerebro es el fundamento del sistema cognitivo, un sistema vivo y dinámico cuyos mecanismos pretendemos estudiar como un sistema de procesamiento de información, en el que unidades locales –las neuronas– interactúan integrando redes neurales que determinan las propiedades emergentes del sistema. Las redes neurales expresan estos principios generales que se implementan en un tipo de mecanismos y estructuras biológicas que constituyen redes asociativas dinámicas que representan datos del entorno y procesos que operando sobre este tipo de representaciones permiten predecir estados del mundo, resolver problemas y tomar decisiones. La irrupción del concepto de sistema dinámico ha modificado de manera substancial el enfoque de sistemas físicos complejos como el cerebro en tanto sistema de procesamiento de información. Quizás el rasgo más notable del cerebro humano es su habilidad para adaptarse rápida y eficientemente a cualquier demanda del medio. Sorprende que la adaptación a tareas rutinarias o nuevas puedan implementarse más rápidamente que los cambios que pueden observarse en la estructura de sus conexiones. Las bases neurales de esta dinámica son demasiado complejas para ser entendidas sin apelar al concepto de red. Aplicando algoritmos de detección dinámica de comunidades es posible identificar que áreas cerebrales están implicadas en la resolución de ciertas tareas. El concepto de red, la construcción que del concepto de red se hace en la que ha venido a denominarse Ciencia de Redes, desarrollo de la Teoría de Grafos, es fundamental para comprender la dinámica cerebral y proponer modelos comprensivos de su funcionamiento. La flexibilidad y estabilidad del sistema, el carácter aislado o conexo de sus unidades son propiedades fundamentales en el estudio de la dinámica de una red neural. Este es el tipo de propiedades que ha interesado analizar a este candidato académico al decidirse por el estudio de la conformación de una red social jerárquica a partir de una red social de agentes con iguales propiedades iniciales. La estabilidad del sistema afecta a la

detección de invarianzas que se mantienen a pesar de cambios en la red; la flexibilidad del sistema se expresa en el mantenimiento de la estructura topológica que tiene lugar a pesar de los procesos de competición que explican cambios representacionales. La naturaleza aislada o conexas de las unidades en la red, la identificación de los mecanismos que operan en la formación y mantenimiento de una red de conexiones, deben formar parte de un modelo que explique el mantenimiento y decaimiento de un tipo de soluciones a una clase de problemas y la aparición de estrategias nuevas de solución (Mattar, Cole, Thompson-Schill, & Bassett, 2015).

Existen al menos dos paradigmas que entroncan con el concepto de red en la neurociencia y la ciencia cognitiva contemporáneas que tratan de explicar el procesamiento cognitivo acudiendo a la noción de red neural y construir un modelo formal de las funciones cognitivas, el paradigma conexionista y el paradigma que Vernon (2014) ha venido a denominar paradigma emergentista. Ambos paradigmas son complementarios (McClelland et als., 2010) al tratar de unir qué algoritmos computacionales operan en el proceso que conduce a una acción, y el modo en que estos algoritmos se implementan en un sistema de naturaleza física, en términos de una red constituida por unidades elementales e independientes. Vernon (2014) ha comparado el paradigma conexionista clásico con el paradigma que hace descansar en el modelo de redes el funcionamiento cerebral, que identifican como el paradigma emergentista, identificando las principales características de cada enfoque tal como se recoge en la Tabla 1.1

TABLA 1.1: Paradigmas teóricos de sistemas de procesamiento de información

Propiedades	Paradigma cognitivista	Paradigma emergentista
Operaciones	Sintaxis sobre símbolos	Auto-organización sincrónica
Representaciones	Patrones de símbolos	Estados globales emergentes
Semántica	Conexión símbolo-percepto	Construcción de habilidades
Curso temporal	Atemporal	Constructivo sincrónico
Papel de agentes	Independiente de agente	Dependiente de agente
Papel del cuerpo	Ninguno: Funcionalismo	Constitutivo: No funcionalista
Percepción	Símbolos abstractos	Perturbación del entorno
Acción	Resultado de símbolos	Perturbación del sistema
Anticipación	Inferencia probabilística	Recorrido sobre estados
Adaptación	Aprendizaje	Desarrollo dinámico
Motivación	Selección de objetivos	Desarrollo de la interacción
Autonomía	No implicada	Cognición implica autonomía
Rol de la cognición	Logro de objetivos	Auto-formación
Bases filosóficas	Positivismo	Fenomenología

El punto de partida de este proyecto ha sido examinar, en un contexto similar al que representa el tipo de interacciones que tiene lugar entre unidades simples en el cerebro, los procesos que vienen a conformar una estructura social jerárquica en cuanto este tipo de estructuras representan un proceso de evolución análoga al que puede reconocerse

en la dinámica cerebral. Dada la opacidad de las funciones cerebrales, el estudio de los procesos que determinan la evolución de una sociedad de un sistema igualitario a un sistema conformado por jerarquías y coaliciones representa una oportunidad para examinar cómo, a partir del registro de información perceptiva, expresada por la composición de unidades de proceso elementales, se generan representaciones que se expresan en redes complejas, descriptivas de un estado de hechos. Identificar una red compleja es un problema transversal a una diversidad de sistemas naturales, y el estudio de una red en un ámbito ofrece información y recursos teóricos y metodológicos para explicar sistemas complejos en otras áreas de investigación.

1.2. Objetivos y desarrollo del proyecto

El objetivo específico de este trabajo viene expresado por la necesidad de construir un modelo formal del proceso de formación de una red compleja de naturaleza jerárquica a partir de la mera agregación de unidades elementales con iguales propiedades. Este trabajo se proyecta, por tanto, hacia el análisis del proceso de especialización y auto-organización que tiene lugar como consecuencia de la interacción local entre las unidades elementales que constituyen una red o sistema. Cualquier trabajo contrae deudas con el pasado, con las aportaciones realizadas por tantos y tantos autores que han empujado hacia el futuro el conocimiento; este trabajo nace y deriva de los modelos originalmente propuestos por [Bonabeau, Theraulaz, & Deneubourg \(1995\)](#) que pretendían explicar como una sociedad igualitaria se transforma como resultado de la interacción local de sus agentes en una sociedad jerárquica. La profusa bibliografía que se cita muestra las deudas que este trabajo ha contraído con numerosos estudiosos de este problema en el pasado. Sin duda, y aunque las bases fundamentales provienen del trabajo pionero de [Bonabeau, Theraulaz, & Deneubourg \(1995\)](#), existen otros trabajos que deben reconocerse. Se describen con cierto detalle los más importantes.

La transformación de una sociedad igualitaria en una sociedad jerárquica es un fenómeno emergente, un fenómeno holístico que deriva de interacciones locales espontáneas, el sistema global como tal carece de fines o propósitos. Así los cambios que tienen lugar en el sistema global son un epifenómeno del tipo de relaciones que contraen los agentes individuales en el sistema. Al igual que ocurre en el cerebro humano, la mayor parte de los procesos se originan en un tipo de red distribuida –en el caso del cerebro, un sistema constituido por neuronas dispuestas en red– sin que exista ningún agente que pueda explicar la aparición de propiedades o características emergentes. El modelo de red cuestiona la existencia de un homúnculo que represente un tipo de agente central o nuclear que justifica la aparición de una propiedad emergente. De ahí la extraordinaria

importancia del concepto de red que permite explicar fenómenos emergentes invariantes sin apelar a un sistema con dirección centralizada. Estas propiedades emergentes nacen estrictamente de la interacción como un hecho consecutivo y necesario del comportamiento dinámico de la red.

Dos variables resultan ser críticas, por hipótesis, en la conformación de un sistema o red jerárquica a partir de un sistema de agentes con iguales propiedades. Las relaciones que estos agentes contraen, que pueden dar lugar a cambios en la topología de la red y a cambios en las características o propiedades de sus nodos, tienen de facto bases probabilísticas, y, sin embargo, el efecto que resulta no es accidental. Por el contrario, es una consecuencia necesaria del modo en que se producen estas relaciones o interacciones. Estas variables están representadas por la variable de densidad de red que se expresa en la proporción de nodos que interactúan con otros nodos de la red, y por la variable de agrupamiento, la tendencia o disposición de los nodos a formar grupos o coaliciones que condicionan la dinámica del sistema. El propósito a cumplir en este trabajo es mostrar el impacto de estas variables en el efecto de transición o cambio de fase que ha permitido aplicar los principios de la física estadística a los fenómenos sociales, en lo que ha venido a llamarse física social.

El capítulo que sucede a la presentación, el segundo de este documento, se ocupa de los procesos de simulación en sistemas complejos, los modelos de red multi-agente, la apelación a la física estadística en el estudio de la dinámica social, y la simulación de procesos de auto-organización jerárquica. En el tercer capítulo de este proyecto se explica la implementación de un modelo de simulación. Se parte de analizar los modelos estocásticos de formación de jerarquías, las propiedades formales que satisfacen las redes estocásticas de escala libre, y la formación de jerarquías con algoritmos generadores que satisfacen la ley de Pareto o función de potencia, y algoritmos generadores que no cumplen la ley de Pareto. La presentación de estos modelos de formación de jerarquías se introducen para explicar el algoritmo de competición multi-agente que se presenta, cuyo código fuente se proporciona en apéndices. Los modelos que satisfacen la ley de Pareto proporcionan el contexto para cuatro tipos de algoritmos generadores, todos los cuales definen secuencias de grado de un modelo de configuración que satisface las propiedades descritas para redes de escala libre de naturaleza estática. Asimismo, se presentan modelos de formación de jerarquías que no satisfacen la ley de Pareto al objeto de ofrecer criterios comparativos sobre la extensión de los fenómenos emergentes que luego se identifican en el análisis de resultados. Una sección de este tercer capítulo presenta la implementación de un modelo de competición que se describe con cierto detalle, para presentar luego los resultados que se obtienen con las distintas versiones del modelo de configuración, y los resultados de los dos modelos que no verifican una

función potencial. A estos capítulos le sigue un capítulo de conclusiones. En el único apéndice del proyecto se incluye el código fuente.

1.3. Resultados del desarrollo del proyecto

La realización del proyecto se expresa en la programación de una aplicación en Python que se lanza en el entorno Anaconda a partir de la aplicación Spyder. Se ha desarrollado como una aplicación que se ejecuta en el terminal, y no como una aplicación independiente y comercializable. El propósito de desarrollar esta aplicación es instrumental para mejorar nuestro conocimiento del comportamiento de una red social cuando se manipula la variable de densidad de interacción, y controlan los coeficientes de agrupamiento espontáneos surgidos de la generación aleatoria de una red. Dados los objetivos científicos del proyecto, no se ha pretendido un desarrollo comercial de una herramienta que no tiene una inmediata aplicación directa, a menos que su desarrollo y uso se extienda a concretas aplicaciones experimentales, como sería el caso de aplicarse al estudio de procesos de diseminación de hábitos o costumbres sociales, innovación de procesos, difusión de conocimiento, difusión del desarrollo tecnológico, etc. El objetivo primario no es desarrollar una herramienta para su uso y aplicación a situaciones y contextos reales, sino una herramienta de análisis de los mecanismos que determinan la aparición de una estructura social jerárquica. Para obtener los resultados que aquí se presentan se desarrolló la aplicación, después de haber estudiado el estado de la cuestión y definido los parámetros del modelo y las rutinas que permitirían luego el examen del funcionamiento de la red, y su final desarrollo.

Los resultados de este desarrollo que se presentan en las secciones de resultados del tercer capítulo y se resumen en el capítulo de conclusión sugieren que la manipulación de densidad de red tiene impacto en la aparición de diferencias entre agentes, expresadas estas diferencias en una medida de varianza. Estas diferencias entre agentes además de venir moduladas por la proporción de agentes que intercambian, viene modulada por la existencia de grupos o coaliciones en la red original. Así pues, esta simulación de procesos multi-agente proporciona evidencia de que las diferencias sociales derivan de la agrupación espontánea de los actores sociales en grupos o coaliciones además de provenir del aumento de densidad de red, el conjunto de interacciones en que los agentes entran en términos proporcionales.

Capítulo 2

Simulación de sistemas complejos

El cambio de un sistema social en el tiempo, dada una estructura social, responde a dos clases generales de procesos, (1) el proceso que implica las interacciones en que entran sus integrantes, y (2) el proceso que identifica el contexto en que aquellas interacciones tienen lugar. Con el primer tipo de proceso identificamos las interacciones en que entran los individuos entre sí, y sus preferencias en relación con los objetivos que desean obtener. Estas interacciones entre individuos definen, de una parte, las redes sociales en que entran ciertos actores humanos, y por otra, los bienes o servicios que procuran como resultado de ese intercambio, es decir, sus preferencias. Siguiendo una metáfora clásica, utilizada en economía política, el conjunto de relaciones que existen entre individuos y objetos es isomórfico al conjunto de relaciones que los individuos contraen entre sí cuando buscan satisfacer sus deseos y necesidades. Con el segundo tipo de proceso identificamos el contexto social en que estas interacciones ocurren, es decir, todas las variables que afectan al comportamiento de los actores humanos en el orden social. Este orden social no viene representado únicamente por las instituciones que existen, sino también por aquellos eventos sobrevenidos a los que estas instituciones deben responder. Así pues, un terremoto puede ser un evento sobrevenido, en una sociedad, que consciente del riesgo que corre el territorio, ha establecido normas imperativas para prever daños en caso de terremoto. Es obvio que estos eventos, previsibles o imprevisibles, condicionan los objetivos que los individuos puedan tener.

Expresión de estas dos clases generales de procesos son, de una parte, las estrategias que emplean los actores para lograr sus propósitos, y de otra, las reglas del juego que imponen la política y las leyes. Las estrategias permiten identificar el tipo de elección que los sujetos hacen, y los costes, de todo tipo en que incurren, incluidos costes de oportunidad, para obtener lo que buscan en su interacción con otros. El término coste de oportunidad representa la pérdida de una ganancia potencial dado un conjunto de alternativas de

acción distintas de la que ha sido efectivamente elegida. Las estrategias que los actores humanos emplean están sujetas a un orden político, legal y social; [Buchanan \(1999\)](#) las identifica como el dominio propio de la economía. La Economía es el estudio del sistema de relaciones de intercambio. La Política es el estudio del sistema de relaciones coercitivas o potencialmente coercitivas, que obligan a los agentes humanos a que respeten las reglas de juego impuestas por la política y las leyes. Las cuestiones que se plantean en relación con qué conjunto de reglas resultan positivas o negativas para que los individuos puedan realizar sus intereses no son un objeto propio de la economía, como tampoco es objeto propio de la economía identificar que eventos emergentes o sobrevenidos pueden amenazar el orden social. Tales acontecimientos pueden suponer, sin duda, una amenaza al orden social, pero el análisis descansa en lo que los individuos hacen en un contexto social regido por reglas, cualquiera sea el contexto. Son las estrategias que los jugadores adoptan a partir de reglas preexistentes las que son el dominio propio de la economía, aquello a que se refiere Buchanan como economía política constitucional. La constitución política debe ponderar y articular los intereses del Estado, de la sociedad en su totalidad, y de los individuos, y el instrumento para que esa articulación sea posible son las normas constitucionales, la base de la Teoría de la Elección Pública propuesta por [Buchanan \(1999\)](#). En la política y en las leyes constitucionales se deposita el conocimiento históricamente acumulado de las externalidades de la interacción humana. Las leyes constitucionales tienen por objeto regular la interacción en evitación de externalidades indeseables. La simulación de procesos presta atención a ambos tipos de procesos.

2.1. Redes de agentes. Modelos de simulación

En la simulación de procesos basado en agentes, se reconoce explícitamente que los sistemas sociales complejos son resultado de conductas o comportamientos individuales, de cómo interactúan los individuos, es decir, de las estrategias que emplean para lograr sus objetivos en esa sociedad dado un conjunto de normas preexistente. El componente básico de un modelo formal es el individuo identificado como un agente ([Edmonds, Moss, & Davidsson, 2001](#)). El término agente identifica a un actor humano que actúa en beneficio propio de acuerdo con sus preferencias, preferencias que se relacionan con el beneficio que obtiene si logra sus objetivos según distintas alternativas de actuación, respetando o conculcando leyes y normas sociales, explícitas e implícitas. La realidad objetiva se expresa en la interacción entre estos actores; esta interacción es social si tiene lugar entre individuos o actores humanos, y es económica si la relación se establece entre actores humanos y bienes o servicios que satisfacen en cierta medida sus deseos o necesidades. El mercado objetiva este segundo tipo de relaciones.

2.1.1. Simulación de sistemas complejos

Los sistemas basados en agentes se caracterizan por comprender un número indefinido de agentes autónomos, habitualmente heterogéneos e independientes, que tienen sus propias metas y objetivos, y que son generalmente capaces de interactuar entre sí y con su entorno (Torsun, 1995). En el intercambio entre agentes se producen ciertas externalidades, es decir, se producen efectos que derivan o son consecuencia de las acciones que estos agentes realizan que tienen efectos sobre terceros. Representan externalidades aquellas acciones que afectan a otros sin que quienes las realizan paguen por ellas o quienes las sufren sean compensados. En tanto que los actores actúan “libremente” sobre la base de sus propias creencias, el sistema que configuran es un sistema adaptativo. Las interacciones entre agentes son locales; vienen determinadas por el acceso mutuo; su distribución en el espacio predetermina qué agentes interactúan con qué agentes de modo que los efectos globales que las acciones individuales tienen en la organización social resultan de interacciones locales con efectos ciegos sobre la estructura social. Los modelos que interpretan estos procesos locales tratan de analizar estas interacciones como conductas específicas; se identifican en un análisis microscópico o micro-escala en palabras de Squazzoni (2008). La interacción local entre actores individuales generan efectos globales, un tipo de externalidad que modifica las condiciones en que unos u otros agentes interactúan. Un fenómeno emergente típico que representa este tipo de externalidad es la formación de grupos diferenciados en el modelo de segregación de Schelling (1971). Aquellos agentes que toman conciencia de los efectos no deseados de su propia conducta, pueden, ulteriormente, modificar su comportamiento, complicando la estructura del intercambio, un fenómeno que Squazzoni (2008) ha identificado como una externalidad o un fenómeno emergente de segundo orden. Así un agente que opere en el mercado financiero, en concurrencia con otros agentes que adoptan decisiones análogas, puede darse cuenta de que su política de inversiones –o desinversiones– puede alterar el precio de las cosas perjudicando su expectativa de beneficios. En el mercado, la conducta concurrente de un conjunto de agentes puede modificar el precio de las cosas al alza o a la baja según las magnitudes de la oferta y la demanda. El estudio de la conducta del agente se realiza a nivel de los individuos mismos. El modelo asume el principio de individualismo metodológico de Buchanan (1999); solo los individuos, los agentes humanos, tienen propósitos, las instituciones que integran a tales individuos o agentes carecen propiamente de propósitos; las organizaciones sociales no tienen mas propósito que el que emerge de la interacción de los agentes que constituyen la base de las interacciones sociales en esas organizaciones. En estos términos una organización es una coalición espontánea o configurada por herencia de anteriores actores que se articula en relación con un conjunto de normas constitucionales. La simulación de procesos

basados en agentes asume el principio de individualismo metodológico, también llamado solipsismo metodológico, de [Buchanan \(1999\)](#).

En la simulación dinámica de sistemas, el concepto central no viene representado por las interacciones entre individuos. El análisis se centra en la detección de invariancias, lo que exige determinar qué variables operan en el sistema y qué propiedades resultan ser estables a pesar de los cambios estructurales que tienen lugar en el sistema. Se parte de la observación de las propiedades de los componentes del sistema al objeto de identificar qué relaciones de causalidad circular se presentan en su conjunto. Un ejemplo específico puede darse en física en la relación entre presión y temperatura, o en economía entre precio y elasticidad de la demanda. El comportamiento del sistema puede deducirse de la estructura causal impuesta por las variables que expresan la dinámica del sistema; fijando los efectos de una variable es posible establecer un conjunto de ecuaciones diferenciales cuyas variables son propiedades macroscópicas del sistema ([Izquierdo, Galán Ordax, Santos, & del Olmo Martínez, 2008](#)).

Un modelo de simulación basado en agentes es un tipo de modelo computacional que permite la simulación de acciones e interacciones de individuos autónomos en un entorno, y permite determinar qué efectos producen en el conjunto del sistema. En su expresión más compleja combina elementos de la teoría de juegos y la teoría de sistemas complejos, modelos de diseminación de información y modelos epidemiológicos, modelos computacionales de equilibrio, teorías sociológicas que analizan la estructura social y su impacto en la acción individual, y modelos de programación evolutiva, entre los principales. Un modelo de simulación basado en agentes simula las operaciones simultáneas entre múltiples agentes en un intento de recrear y predecir el impacto de estas acciones individuales en el conjunto del sistema. Se habla entonces de fenómenos complejos o fenómenos emergentes. Es un fenómeno emergente aquel que teniendo por causa la interacción entre elementos primitivos origina un cambio en la dinámica del sistema, modificando de retorno las interacciones entre aquellos elementos primitivos. Por tanto, el análisis y, en consecuencia, la simulación parte de descripciones de nivel microscópico para dar cuenta de fenómenos de nivel macroscópico. Estos fenómenos emergentes no resultan de una dinámica ajena a las interacciones que tienen lugar entre los elementos del sistema. Son, por tanto, procesos estructuralmente ciegos o no guiados, cuya dinámica, en último término, descansa sobre cambios locales de estado que provocan los elementos constituyentes del sistema, cuando interactúan. Estos cambios en el sistema como resultado de interacciones locales entre elementos dan lugar a lo que en física se denomina cambio de fase. En general, los agentes individuales actúan según lo que perciben como sus propios intereses, tales como la obtención de información, la mejora de su propio conocimiento, el beneficio económico, mejorar su posición social como un instrumento para imponer un tipo de conducta a otros, o la reproducción. Estos agentes tienen un

conocimiento limitado de qué acciones tienen a su disposición y qué efectos tiene su ejecución para sí mismos y qué efectos agregados tienen las acciones que desarrollan en su propio interés. A pesar de que actúan bajo incertidumbre, estos agentes pueden reputarse de racionales, por más que su racionalidad venga limitada por la información y el conocimiento de que disponen. En un modelo de simulación basado en agentes, los agentes pueden experimentar, aprender, adaptarse y reproducirse.

2.1.2. La emergencia social de líderes

De los efectos que resultan de la acción humana, pueden identificarse externalidades deseables e indeseables, y externalidades evitables e inevitables. La relación entre acciones y efectos de la acción son complejos y requieren un análisis detallado que no está fácilmente a nuestro alcance en este contexto. Una externalidad puede ser deseable o indeseable según los efectos que se derivan de una acción en el tiempo. La variable tiempo es, ciertamente, crucial en la consideración de qué prácticas de un agente pueden tener un impacto negativo o positivo de acuerdo con una ventana temporal. El tiempo puede invertir la polaridad de los efectos que producen los agentes con su comportamiento. Los agentes mismos pueden ser ciertamente complejos. Pueden ser agentes corporativos, cuando los agentes individuales de una corporación agregan su conducta o coordinan sus acciones con otros para obtener ventajas que no pueden obtener por sí mismos, o pueden ser agentes individuales o personales que actúan en su propio beneficio ignorando o despreciando los beneficios de coordinar sus acciones con otros. Estos agentes corporativos obtienen su beneficio de la delegación de poder que hacen agentes particulares en agentes institucionales de la organización, según normas constitucionales que son propias de la organización o institución. Ya [Marx \(1857\)](#) en la *Crítica de la Economía Política* advirtió sobre lo que representa que los actores humanos, al buscar su propio beneficio, contraigan relaciones que finalmente les alienan, es decir, relaciones que restringen o amenazan su libertad. Tampoco está al alcance de un agente determinar en qué medida una externalidad es evitable o inevitable ya que a menudo depende de los recursos que tiene para revertir los efectos indeseados de sus propias acciones. Por otra parte, los agentes corporativos aparecen, primero, como resultado de la interacción entre agentes bajo la forma de coaliciones. La aparición espontánea de líderes en el seno de estas coaliciones y su constitución jurídica con el establecimiento de normas coercitivas implícitas y explícitas sobre sus miembros concluyen finalmente en la formación de agentes corporativos que multiplican los efectos de la coalición original por delegación tácita de poder por parte de sus miembros. Cabe, por tanto, interrogarse sobre las condiciones en que tales coaliciones aparecen como resultado de la interacción entre agentes y cómo

emergen líderes que finalmente obtienen su capacidad de acción de otros agentes del sistema.

2.1.3. El concepto de densidad

Una manifestación del éxito de una especie es su proliferación, es decir, el progresivo aumento del número de sus miembros. La tasa de reproducción de una especie es proporcional a su rendimiento en términos adaptativos. Una externalidad inevitable del aumento de la población –con independencia de su tasa de reproducción en una ventana temporal– es el agotamiento o reducción de los recursos disponibles para sus miembros, lo que en la teoría económica introdujo Malthus con el concepto de crecimiento demográfico. La tesis de [Malthus \(1798\)](#), corregida por el aumento paralelo de la productividad, fue precisamente advertir de la importancia del crecimiento de la población en el agotamiento de los recursos, poniendo de este modo énfasis en la necesidad del control de la población, un problema recurrente en buena parte de las sociedades humanas tecnológica y científicamente más atrasadas. En ausencia de depredadores, cualquier especie resulta amenazada por su propio éxito si no cuenta con la posibilidad de movilizar recursos extra o con mecanismos para estabilizar su crecimiento demográfico. No es únicamente la sostenibilidad del propio sistema social, sino el modo en que el aumento progresivo de la población obliga a instituir una organización social que evite una gestión irracional de los recursos crecientemente escasos, que responda eventualmente a las crecientes necesidades de sus miembros. La constitución de este nuevo orden proviene de un aumento progresivo de la densidad de población que interactúa de tal suerte que su aumento en el tiempo modifica las condiciones en que estos agentes interactúan y se organizan contribuyendo al cambio social. De hecho los recursos libremente disponibles en la naturaleza han desaparecido de tal suerte que todas las culturas humanas, en mayor o menor medida, han creado una naturaleza artificial que entrega sus productos sólo por medio de la actividad humana a través de la producción industrial. La externalidad inevitable que [Malthus \(1798\)](#) ignora en su reflexión teórica es el impacto que el aumento de la población tiene sobre la organización social. En efecto, es un hecho que la densidad de población en un territorio dado no solo puede significar menos recursos, sino que estos nuevos recursos no puedan obtenerse si el modo de producción no sufre cambios; el modo de producción sufre cambios si la organización social cambia.

En efecto, el progresivo aumento de la población humana ha forzado la creación y explotación de recursos que la naturaleza no podía proveer. La complejidad del orden social deriva de la formación de instituciones que no habrían nacido sin un crecimiento imparable de la población y la escasez de recursos que directamente podía proporcionar la naturaleza. La escasez de recursos naturales se refleja primariamente en la producción

de servicios y bienes que son objeto de producción; los modos de producción no pueden dissociarse de las estructuras sociales que los hacen posible. El aumento de la población ha contribuido a conformar un tipo de organización social en el que los vínculos, primero familiares, y luego tribales han disminuido su peso en la estructura social y han venido a ser substituidos por vínculos entre agentes que intercambian bienes y servicios sin que medie más vínculo que aquel que nace de la propia transacción bajo la forma de un contrato. Observemos que un contrato puede ser simétrico o asimétrico según la interacción temporal de los actores y el intercambio correlativo de valor, y puede ser implícito o explícito según si se establece un clausulado y existe una autoridad coercitiva, y puede ser emergente o consuetudinario si es novedoso o nace de una tradición. El éxito del contrato comercial ha sido tal que el contrato social, el contrato implícito que relacionaba a los individuos con la sociedad a la que pertenecen, se ha visto también modificado. Ya no nace de la existencia de familias concebidas como núcleos sociales, auténticas células de la estructura social, cuyo estatuto, todavía es, la expresión más característica de una función de reproducción social. La renuncia de un conjunto de actores humanos a la reproducción, el ensimismamiento que acompaña a esta renuncia, no son sino la respuesta natural a la imperiosa necesidad de limitar la tasa de reproducción de la especie generándose externalidades, paradójicamente indeseables, como el problema conocido del envejecimiento de la población. Si la figura del contrato supone separar el intercambio del que se producía en el seno de relaciones familiares, la figura del contrato tiende a su desaparición en el intercambio de información, en el desarrollo y ejercicio de preferencias que aumentan el valor de una marca, sin que realmente deba traducirse en una transacción reglada de naturaleza contractual, en tanto se expresa bajo la forma de fama o prestigio –un tipo de contrato implícito, y asimétrico en las redes sociales. De ahí el nacimiento y proliferación de leyes de protección del consumidor. ¿Qué tipo de obligaciones contractuales contrae aquel que se ve beneficiado por el seguimiento de una audiencia?. Conscientes o no de esta función de la audiencia en la formación de una marca, los líderes de opinión emergentes mejoran su posición social sin más que convertir en valor económico el seguimiento de otros individuos en las redes sociales en que participan.

Una manifestación de esa externalidad emergente son los cambios habidos en el modelo de reproducción. El modelo de reproducción ha cambiado en las sociedades desarrolladas de un tipo de reproducción extensiva en el que convivían altas tasas reproductivas con altas tasas de mortalidad y baja inversión de capital, a un tipo de reproducción intensiva en el que un menor número de hijos absorbe cada vez más y más recursos. Ambos modelos compiten entre sí a nivel global, y es incierto que pueda prevalecer uno u otro, aunque en este momento histórico parece razonable esperar que se imponga el modelo de reproducción intensiva de capital humano, como se deduce del coste creciente, en

términos de capital, de creación de un nuevo puesto de trabajo. En el antiguo modelo de familia, los hijos aseguraban el cuidado de sus padres ancianos; en el modelo de familia nuclear los hijos ya no responden al cuidado de los padres ya que éstos cuentan con recursos que los hijos no deben -y a menudo no pueden- proveer. El incremento de la población y la complicación de la estructura social ha traído cambios consecutivos en la organización social y, en paralelo, ha transformado las relaciones sociales de tal manera que los vínculos familiares fuertes han venido a quedar substituidos por vínculos débiles u ocasionales ([Granovetter, 1974](#)), que amplían extraordinariamente las capacidades humanas contribuyendo a ampliar y en parte resolver antiguas necesidades humanas. Al contrario de lo que cabía esperar en relación con los anteriores vínculos familiares, estos vínculos débiles resultan ser mas decisivos en cuanto la interacción entre agentes se extiende mas allá del conjunto de relaciones sociales que puede un actor humano contraer. Se da la paradoja de que estos vínculos débiles suelen ser asimétricos a pesar de aportar valor a los líderes que usufructúan la marca. En este contexto, el intercambio requiere poco o ningún contacto, no descansa en la existencia de vínculos emocionales y relacionales como los que existen entre familiares o amigos. La substitución de vínculos familiares por vínculos débiles viene contribuyendo de forma decisiva al desarrollo de lo que [Marx \(1857\)](#) denominó el desarrollo de las fuerzas productivas. De hecho en el mundo actual, las relaciones familiares son, a menudo, obstáculos para el desarrollo humano, porque los vínculos familiares pueden impedir el cambio de costumbres y la innovación. Una manifestación de ese desarrollo se expresa en la organización social donde compiten modelos jerárquicos y modelos distribuidos. El proceso que conduce a un tipo de organización social distribuida está en el origen de la democracia, y en el origen del actual sistema productivo, pero esa distribución espontánea de recursos y capacidades, de cuyo valor dá cuenta el mercado, es solo posible por la existencia de agentes que permiten agregar las distintas voluntades humanas, y unificar la acción colectiva para que se apliquen recursos suficientes y eficientes para la consecución de un fin. Aunque puede sorprender que a medida que aumenta la población disminuye el peso de los vínculos fuertes y paralelamente aumente el peso de los vínculos débiles, éste es el caso. Sin embargo, el valor que estos vínculos débiles aportan no ocurre en ausencia de un proceso de organización jerárquica que descansa sobre líderes cada vez mas desconocidos y ubicuos, líderes a menudo artificiales que imponen patrones de conducta a sus seguidores y afiliados, y que son origen de nuevas externalidades con efectos conocidos y desconocidos. En suma, los cambios en la estructura social aparecen relacionados con la densidad, la interacción entre agentes se multiplica, se torna asimétrica, aporta valor a líderes emergentes apenas representativos de los agentes que parecen representar, y se torna abstracta coaccionando la libertad de las personas, y reduciendo a un mínimo su creatividad. Un capítulo aparte merece considerar los agentes que intermedian en las relaciones que otros individuos contraen asegurando que las transacciones económicas

estén sujetas a garantías exigibles. Este es el caso que se produce en las operaciones de financiación colectiva en el que ciertos agentes se instituyen como intermediarios entre prestamistas y prestatarios, un tipo de relación enteramente similar a la que representa típicamente la actividad bancaria clásica.

Una externalidad emergente de este proceso de sustitución de vínculos fuertes por vínculos débiles es la facilitación del control social; la filiación se premia frente a la reproducción competitiva, pero se sacrifica la innovación y formación de nuevas generaciones de individuos y el capital social se torna abstracto. En un informe sobre el sistema educativo (Coleman, 1961), Coleman encuentra que los logros académicos de un estudiante están fuertemente influidos por la formación y las aspiraciones del resto de los estudiantes, y su participación en actividades deportivas y académicas depende de la presión indirecta que ejerce el resto de los estudiantes que participan en tales actividades. La filiación facilita la cooperación y ésta tiene impacto en las aspiraciones de los individuos; la innovación, sin embargo, requiere individuos inconformistas (Asch, 1956), capaces de romper con las convenciones sociales, persiguiendo sus propios objetivos. El conflicto entre cooperación y competición debe resolverse, no con la aquiescencia inconsciente de los individuos respecto de sus líderes, sino como resultado de un análisis racional de las condiciones en que uno u otro tipo de estrategia maximizan la utilidad. Parece que los individuos desconocen que la cooperación solo debería ser el resultado del análisis racional, del examen de su utilidad y no resultado de un acto de sumisión o delegación abstracta. Coleman (1988) introdujo el concepto de capital social para explicar como un conjunto de normas y relaciones entre adultos y escolares contribuyen a crear valor que repercute en el crecimiento de un niño. Coleman mostró que los colegios religiosos presentan una tendencia mayor a apoyar la existencia de redes de adultos con fuertes vínculos con sus hijos, proporcionando valores y normas consistentes que ayudan a la prosperidad del escolar. Los colegios religiosos, evidencia Coleman, son de las pocas instituciones transversales, mas allá de la familia, que apoyan la formación y extensión de redes sociales con vínculos fuertes. En este régimen los futuros adultos presentan una particular resistencia social a quedar a merced de redes sociales de agentes desconocidos que imponen patrones de conducta despersonalizantes. En otras palabras, la capacidad del individuo de desarrollar su agenda solo es posible si se ha desarrollado en un contexto de vínculos fuertes. Así pues, en el sistema social vienen a confluír vínculos fuertes y débiles con un impacto distinto, determinando la articulación de intereses privados e intereses públicos. El límite a esta articulación ideal viene dado por los mecanismos que determinan la aparición del líder, el conocimiento que los agentes tienen del rendimiento y externalidades de sus propias acciones y la existencia de vínculos sociales en redes densas y extensas o transversales. Liderazgo emergente y densidad social son variables

estrechamente relacionadas. Su estudio y simulación permite establecer de qué modo una organización social evoluciona a un cierto tipo de red distribuida o jerarquizada.

2.1.4. El impacto de la densidad en la formación de capital social

Una expresión del valor que tiene la participación del individuo en una comunidad, o más aún la creencia de pertenecer a una comunidad, a menudo abstracta, es la existencia del fenómeno religioso. El individuo cobra identidad en el contexto de una comunidad que si no le asegura recursos en el orden material, sí le asegura convicciones que afectan a la confianza de que en su interacción con otros no se verá defraudado. Dada la esencial asimetría de cualquier forma de interacción humana, la confianza que nace de este sentimiento informal de pertenencia a una comunidad imaginaria constituye un factor esencial que hace posible el intercambio, desde el intercambio de información, a un tipo de intercambio típicamente oneroso en el comercio de bienes o mercancías. La confianza no asegura que desaparezca el fraude, pero sí asegura el intercambio ya que éste no se producirá si el sujeto sospecha que puede ser engañado o que será engañado. Las interacciones sociales se rigen por reglas implícitas de confianza, y la confianza existe en tanto en cuanto un individuo percibe identidad de propósitos e intereses con sus semejantes. La confianza se origina en esta percepción de semejanza, y las creencias religiosas juegan un papel esencial en su construcción, especialmente en las sociedades menos desarrolladas, donde no existen principios constitucionales que puedan generar la confianza necesaria. No es una predicción en absoluta ingenua que el desarrollo de una organización social, de un sistema público de administración de justicia y la consolidación de un sistema legal se relacionan con la pérdida progresiva de fe religiosa, en tanto es el propio sistema constitucional el que provee los recursos con que un agente debe contar para interactuar con otro sobre la base de reglas de confianza, la confianza requerida para que los agentes en sus intercambios hagan honor a sus compromisos.

La formación de coaliciones, y la formación de comunidades representan dos temas esenciales en la articulación de las interacciones en que entran los agentes de un sistema social. La diferencia entre una coalición y una comunidad más amplia reside estrictamente en la densidad de la población que conforma un sistema social y determina su estructura. La amplísima tradición de los seminarios sobre capital social y responsabilidad social de las políticas públicas y de responsabilidad corporativa de la Escuela de Gobierno John F. Kennedy de la Universidad de Harvard muestra cuán necesario se ha hecho considerar cómo interviene el capital social en el bienestar de los individuos, en el desarrollo económico, en la seguridad colectiva y en la formación de gobiernos responsables que se someten a escrutinio público (Sander, & Lowney, 2006). La resistencia característica de una sociedad a poderes autoritarios y sistemas autocráticos deriva estrictamente de la

fortaleza del capital social. El concepto de capital social se define como el conjunto de redes sociales y las normas de confianza y reciprocidad que emergen en ellas. La noción de capital social se centra en el análisis de las redes sociales que existen –básicamente quien conoce a quien– y el carácter de estas redes, la fuerza de sus lazos, y la medida en que estas redes contribuyen al fortalecimiento de la confianza y la experiencia de reciprocidad. El núcleo esencial del capital social es la confianza. La confianza deriva de la reputación percibida por los agentes en el intercambio social. El intercambio en el mercado de diamantes de Nueva York queda asegurado por la pertenencia de sus actores a una comunidad de fe religiosa, que si bien no asegura por sí misma que no sea posible el fraude, si asegura que quienes no respondan a la confianza otorgada será expulsada del intercambio. Ninguna transacción debe negociarse por separado en términos de esa interacción en tanto la comunidad asegura que se cumplirán las reglas. ¿Cómo surge esta confianza?.

Las reglas que rigen el proceso de formación o construcción de relaciones de confianza depende al menos de los siguientes supuestos: (1) Las partes deben ser honestas en sus intercambios; (2) Las partes cumplen con los compromisos que adquieren; (3) La repetición de la interacción da lugar a que aumente la confianza en otros si se cumplen las condiciones anteriores; (4) Las partes darán mayor valor al lucro cesante de la interrupción de la interacción que al valor eventualmente mayor de una transacción única supuesta la posibilidad de interacción repetida; y, (5) El valor del intercambio para un agente será directamente proporcional al valor que concede el actor que se beneficia, y no directamente proporcional al valor percibido por el primer agente, sino a la diferencia entre el valor percibido por el primer agente y el valor concedido por quien se beneficia. Estos supuestos configuran un tipo de red social densa, aquella en que es posible la repetición del intercambio.

En la construcción de relaciones de confianza, no existe un tipo único de capital social. Caben distinguir, al menos, los siguientes tipos de capital social: (1) Por su impacto, capital social público o privado; no es lo mismo una asociación de padres que un club de golfistas, en términos de su impacto social; (2) Por su estatuto legal, capital social formal o informal, por mas que las relaciones informales puedan eventualmente mutar a un tipo de relaciones formales constreñidas por un cuerpo doctrinal y una base legal; (3) Por las características de sus socios, capital social transversal o capital social por afinidad, según los lazos sociales se establezcan con independencia de las particulares características de los socios, o se establezcan precisamente por relaciones de afinidad; y, (4) Por la naturaleza y posibilidad de la interacción, capital social de enlaces fuertes, o capital social de enlaces débiles, según el impacto que tiene la interacción sobre los individuos si son de naturaleza no episódica o episódica, es decir, necesaria u oportunista. Parece obvio que cierto tipo de problemas se tratan en el contexto de relaciones fuertes y significativas, y

otros tipos de problemas se tratan en un contexto de relaciones oportunistas y episódicas en donde es difícil vengarse de un intercambio desigual. La Tabla 2.1 presenta la variación del nivel de confianza según el tipo de interacción y la densidad de la red social en que tiene lugar, con un ejemplo particular de interacción para cada tipo de interacción según niveles de confianza y reciprocidad.

TABLA 2.1: Construcción de capital social: Niveles de confianza según densidad

n	Festivo	Afición	Favor	Debate	Objetivo	Relación
<i>Nivel</i>	Baja	←	←	→	→	Alta
$> n$	Boda	Asociación	–	Foro	Activismo	Cita
$< n$	Guateque	Club	Cooperativa	Vecinal	Círculo	Pareja
$n = 1$	Invitación	Excursión	Préstamo	Charla	Tutoría	Socorro

2.1.5. La formación de coaliciones

En un sistema en el que actúa un número indefinido de agentes, existen individuos que deciden cooperar con otros para satisfacer los objetivos cuyo logro pretenden. Estos objetivos se expresan como tareas que asume un grupo de agentes en tanto que su consecución eficiente no puede ser alcanzada por un único agente. En el mismo sentido, es posible hablar de asignación de una tarea cuando un conjunto de agentes asume su realización bien porque no puede ser llevada a cabo por un único individuo, o porque la actuación del grupo al que un agente puede pertenecer genera un beneficio mayor del que podría obtener este agente por separado. Ray, & Vohra (2015) definen el término de coalición como un grupo de agentes que determina obligarse a un conjunto de acuerdos que imponen a cada uno de sus miembros, en tanto interactúa con otros individuos no miembros del grupo y con el mundo general, ignorando las externalidades de sus acciones sobre los no-miembros. Así, una coalición incluye dos tipos de procesos, el proceso por el que la coalición viene a formarse y a coordinar sus acciones, y el proceso por el que determina y coacciona las acciones del grupo, procesos que configuran un estado de equilibrio que mantiene viva la coalición. von Neumann, J. & Morgenstern (2004) precisaron los principios que definen la existencia de una coalición, donde cada agente está primariamente interesado en su propia recompensa, (1) El principio de especificación de una función característica: Estado de los pagos totales para cada coalición posible en un juego; (2) El principio de imputación: Una imputación es una lista de los pagos de cada agente para una coalición dada; (3) El principio de tamaño: Control de la admisión de una coalición vencedora mínima; y, (4) El principio de limitación de imputaciones admisibles: una especificación de las estructuras de coaliciones admisibles. La característica fundamental de una coalición es la asignación grupal de responsabilidades, semejante al

que opera en la política en relación con los valores. La política es la asignación imperativa de valores.

La cooperación entre agentes se realiza a través de la formación de coaliciones: los miembros de cada coalición comparten sus recursos y dividen entre sí el beneficio que obtienen de la coordinación de sus acciones. El truco es dividir el beneficio de modo que la coalición resulte ser estable (Procaccia, & Rosenschein, 2016). Incluso para una banda de criminales que se empeñe en un único golpe, la coalición debe resultar suficientemente estable para evitar la delación, un riesgo que existe para cada banda cuando un miembro en cuestión se empobrece o pacta la cooperación con una banda alternativa. La estabilidad es una condición para que los agentes se mantengan leales a sus coaliciones respectivas en lugar de desertar y formar nuevas coaliciones que puedan garantizarles un mayor rendimiento.

La formación de una coalición utilitaria cubre dos actividades principales: (1) Generar estructuras de coaliciones y distribuir el beneficio entre los participantes de una coalición; y (2) Definir un juego cooperativo en el que para un conjunto de agentes X existen subconjuntos de X o coaliciones y una función característica v que asigna a cada coalición C en X su ganancia máxima (Klusch, & Gerber, 2002). Cualquier coalición C se forma por un acuerdo sobre la distribución del valor de la coalición $v(C)$ entre sus miembros. La solución de un juego cooperativo con pagos colaterales es una configuración de la coalición que consiste en una partición de X , la estructura de la coalición, y un vector de distribución n -dimensional de pagos en que los componentes se evalúan por una función de utilidad u . La distribución de pagos asigna a cada agente en X su utilidad $u(X)$, un valor distinto del valor $v(C)$ de la coalición C en una estructura de coaliciones dada (Rahwan, Michalak, et. al., 2011). Solo las estructuras de coaliciones que maximizan el bienestar social –la suma de todos los valores de coaliciones en la estructura considerada son núcleo-estables. Un juego se caracteriza por la existencia de una función estocástica de pagos o beneficios definido por el conjunto de agentes, un conjunto de acciones posibles que pueden adoptar las coaliciones, y una función que asigna a cada acción un valor real probabilístico con expectativas bien definidas, que representa el pago a la coalición cuando ésta adopta un curso de acción y lo ejecuta. En tanto el beneficio esperado es una variable informacional, las coaliciones nacen, se mantienen y mueren en función de las expectativas de sus agentes.

El primer problema que enfrenta un modelo de coaliciones es el que se deriva del concepto de partición. Rahwan, Michalak, et. al. (2015) han llevado a cabo una revisión exhaustiva de las estrategias heurísticas para resolver el que se conoce como problema de la partición. Existe una función de partición cuando es posible determinar un conjunto $V = X_j | j \in J$ de subconjuntos de X que satisface las condiciones siguientes: (1) Cada

parte de X_j es un conjunto no vacío y se verifica $\forall j \in J \Rightarrow X_j \neq \emptyset$; (2) Cualquier par de conjuntos diferentes son conjuntos disjuntos, es decir $X_j \cap X_p = \emptyset$, si y solo si $j \neq p$; y (3) La unión de todos los subconjuntos que forman parte del conjunto V representan a V en su totalidad, es decir, la división de V en un conjunto de subconjuntos es exhaustiva y se satisface la condición $\cup_{j \in J} X_j = V$. Así pues, la adopción de una función de partición para identificar las coaliciones en que es posible distribuir, por completo, los agentes de un sistema social, exige asumir que ningún agente pertenece a más de una coalición, y que todos los agentes del sistema pertenecen a alguna, reconociendo un conjunto residual, por defecto, al que pertenecen todos los que no pertenecen a alguna otra coalición, lo que técnicamente puede considerarse una coalición adicional. Aunque estas asunciones no impiden la movilidad de los individuos, la dinámica del sistema impone que, en cada ocasión, cualquier agente deje de pertenecer a una coalición para formar parte de otra, y asumir que las coaliciones son siempre coaliciones hedónicas, es decir, coaliciones que reportan ventajas para cualquier agente miembro, –bajo la asunción de racionalidad no parece lógico aceptar que los individuos escojan pertenecer a alguna clase de coalición suicida, salvo que se redefina convenientemente el concepto mismo de racionalidad en términos no intuitivos. Aunque en un contexto real, un agente puede pertenecer simultáneamente a más de una coalición y formar parte de grupos competitivos con intereses contrapuestos, no importa que estos supuestos no se verifiquen en un mundo real. Ningún modelo acepta que un agente pueda pertenecer a más de una coalición simultáneamente (Zhang, Jiang, Su, Qi, & Fang, 2010), con intereses competitivos, aunque en el mundo real es una situación no inusual, y existen algoritmos heurísticos que pretenden tratar el problema (Zhang, Jiang, Su, Qi, & Fang, 2010). Una coalición hedónica –o también un juego hedónico– es aquel en que los jugadores expresan sus preferencias solo en las coaliciones a que pertenecen. De este modo, las preferencias de los agentes afectan únicamente a los miembros de sus coaliciones en función de su propia estructura de relaciones.

En general, los análisis de la teoría de juegos proporcionan un marco teórico para analizar los procesos de cooperación. von Neumann, J. & Morgenstern (2004) (pp. 583–584) introdujeron el concepto de coalición para estudiar el comportamiento del mercado. La teoría de juegos ha estudiado estas coaliciones, y sus aplicaciones se han extendido desde la economía a la ciencia política y a la inteligencia artificial lo que incluye investigación de sistemas multi-agente. En un juego de coaliciones, los agentes actúan en unión con otros y forman coaliciones para llevar a cabo una tarea en beneficio de la colectividad o en beneficio propio. Existe una amplísima diversidad de situaciones que requieren coordinación y cooperación de un número indefinido de agentes, como es el caso de compañías o corporaciones empresariales, de partidos políticos y grupos de presión, etc. Tanto los agentes de un mundo real, como los agentes de una sociedad virtual, necesitan

tomar decisiones conjuntamente y actuar cooperativamente aunque puedan mantener diferentes puntos de vista e intereses antitéticos sobre cursos alternativos de acción. Una cuestión básica es determinar que coaliciones son estables en el sentido de que ningún jugador miembro tenga incentivos para desertar o procurar únicamente beneficios para sí mismo. Se supone que los jugadores en un juego de esta naturaleza son racionales en el sentido de que buscan maximizar la utilidad esperada, sea para maximizar la utilidad de su propio equipo o sea para maximizar su propia utilidad.

La teoría algorítmica de juegos se ha ocupado del desarrollo y estudio de algoritmos computacionales que tienen por objetivo analizar de forma sistemática los mecanismos que operan en la formación de coaliciones (Nisan, Roughgarden, Tardos, & Vazirani, 2007). El problema es encontrar una partición estable que maximice la utilidad de las coaliciones que concurren en el juego. Shehory, & Kraus (1998) identifican las etapas de resolución del problema de identificar los mecanismos que operan en la conformación de una coalición. En la primera etapa es preciso determinar los valores de coaliciones alternativas, lo que requiere obtener información de todas las coaliciones posibles para escoger la preferida. La segunda etapa implica desarrollar un algoritmo iterativo voraz de manera que los agentes puedan decidir sobre las coaliciones que prefieren y formar una. Por último, los beneficios de la cooperación deben poder distribuirse entre los agentes que la conforman. Debe asumirse que el conjunto de los individuos deben distribuirse en coaliciones en términos de una partición que satisface los postulados arriba referidos.

En los términos propuestos por Shehory, & Kraus (1998), el primer problema es determinar el número de coaliciones posibles. Formulados en estos términos, determinar todas las coaliciones posibles no es una expresión realista de lo que sucede en el mundo real. En efecto, ningún agente considera todas las posibles coaliciones en que puede entrar, sino solo aquellas que o bien existen o pueden formarse, y siempre a partir de su disposición y capacidad para interactuar bien con alguno o algunos de sus miembros, o para interactuar con aquellos con los que desea coordinar sus acciones. Efectivamente, el número de coaliciones posibles es exponencial en relación con el número de agentes. Con n agentes, existen $2^n - 1$ coaliciones posibles. El número de posibles coaliciones que pueden obtenerse con una partición del conjunto N en subconjuntos no vacíos se corresponde con el número de Bell $B(n)$ que viene dado por

$$B(n) = \sum_{k=1}^n S(n, k)$$

donde $S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1)$ es el número de Stirling de Segunda Clase que nos proporciona el número de coaliciones posibles cuando los agentes se distribuyen

exhaustivamente en $k, k \leq n$ coaliciones. La suma de números de Stirling de Segunda Clase $S(n, k)$ se obtiene a partir de la ecuación

$$|CS(n)| = \sum_{k=1}^n S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^k \binom{k}{i} (k-i)^n$$

La Tabla 2.2 presenta el crecimiento del número de posibles estructuras de coaliciones cuando crece el número de agentes. Para un número significativo de agentes, el problema es matemáticamente intratable. Existen, sin embargo, estrategias para paralelizar el proceso de resolución del problema por segmentación de la población. Este tratamiento es similar al que emplea el conocido problema del comercial viajero que debe hacer un recorrido óptimo en el espacio de ciudades que visita. Una estrategia práctica consiste en definir coaliciones de un tamaño determinado, y ejecutar un algoritmo incremental de manera que cada individuo mejora su utilidad esperada escalando gradualmente sus expectativas de rendimiento por interacción local con sus vecinos, candidatos posibles para un cambio de coalición.

TABLA 2.2: Número de estructuras de coalición según el número de agentes

n	$ CS(n) $	n	$ CS(n) $
4	15	30	8,46749E+23
5	52	40	1,57451E+35
6	203	50	1,57451E+35
7	877	60	1.85724E+47
8	4.140	70	9.76939E+59
9	21.147	80	1.8075E+73
10	115.975	90	9.91268E+86
11	678.570	100	1.4158E+101
12	4.213.597	110	4.7585E+115
13	27.644.437	120	3.4685E+130
14	190.899.322	130	5.1.4522E+161
15	1.382.958.545	140	7.5161E+176
20	51.724.158.235.372	150	6,8206E+192

La complejidad computacional de una función de partición que maximiza la modularidad en una red compleja representa un tipo de problema de complejidad no determinista polinomial difícil (*NP*-Difícil). La clase de problemas de complejidad *NP* viene representada por problemas de decisión para los que no existe un procedimiento que permita verificar de forma determinista si la respuesta de ese proceso de decisión será sí o no. De forma análoga, puede establecerse que un problema es de complejidad *NP* si puede resolverse en tiempo polinomial por una máquina de Turing no-determinista, *NP* representa, por tanto, tiempo polinomial no determinista. Por contra, una función es

polinomial sí puede expresarse mediante un polinomio de potencias enteras positivas de x y x no es una fracción con x en el denominador y ninguna raíz. P representa todos los problemas decisionales que pueden resolverse en un tiempo polinomial en una máquina de Turing determinista. La importancia práctica de este razonamiento no puede ignorarse; no es, sencillamente, posible determinar en sus propios términos el conjunto de coaliciones posibles si se considera cualquier partición del conjunto de agentes. Sin embargo, los problemas que supone encontrar particiones no son necesariamente NP ni NP -completos ni NP -difíciles, porque, en rigor, depende del objetivo, por ejemplo, encontrar la partición que agrupa nodos del mismo grado es lineal (P).

Se ha demostrado experimentalmente que un algoritmo de búsqueda estocástica local que se combine con una función específica de vecindad puede encontrar soluciones quasi-óptimas al problema de formación de coaliciones. Las coaliciones dependen de la estructura de la red, y ningún individuo coordina su conducta con otros agentes a menos que estén en su vecindario. Shehory, & Kraus (1998) proponen un algoritmo iterativo por el que la búsqueda tiene lugar examinando los vecinos de la solución actual, de modo que un agente puede escoger como socio a aquel vecino que representa una mejora en el valor de una función objetiva independientemente definida. A estos efectos, se ha propuesto considerar que dos agentes, nodos de un grafo, son vecinos si y solo si difieren exactamente en k agentes, e, idealmente si $k = 1$. Este enfoque representa una simplificación del problema de examinar todas las coaliciones posibles de manera determinista ya que incluso con un número muy reducido de agentes, las soluciones deterministas son imposibles o impracticables. Existen además otros problemas que no es oportuno considerar, en particular, el que se refiere a coaliciones subóptimas por mínimos locales, coaliciones en los que un agente se enquistaba en su posición al detectar que todas las coaliciones alternativas que puede considerar con sus vecinos resultan, ciertamente, menos ventajosas que aquella a la que ya pertenece. Este problema deriva de la distancia que existe entre un actor y otros actores en términos de un parámetro de distancia de vecindad que es una asunción crítica de algoritmos estocásticos de búsqueda de coaliciones. Otro conjunto de problemas para estos algoritmos es definir la función de equilibrio, aquella situación en que las coaliciones resultan estables y no son amenazadas por agentes o coaliciones competidoras. Finalmente, un problema es el que supone considerar soluciones no triviales, bien la formación de una coalición que abarca la totalidad de los agentes, o las coaliciones constituidas por un único agente, lo que se conoce como las soluciones super-aditivas o sub-aditivas.

El proceso de formación de jerarquías no exige necesariamente considerar la formación de coaliciones. Las coaliciones mismas están sujetas a un proceso de jerarquización, por lo que la formación de una estructura jerárquica es, sin duda, una cuestión preliminar en el estudio del proceso de formación de coaliciones.

La formación de coaliciones tiene importancia práctica si de alguna forma afectan al desarrollo de una sociedad igualitaria o jerárquica y representa el proceso por el que emergen líderes en el sistema social que de un modo u otro se apropian de recursos ajenos. Considerar este proceso de formación de coaliciones excede, por otra parte, los propósitos de este trabajo. Sin embargo, no es contraintuitivo considerar que la existencia de coaliciones en un sistema social puede interferir –o tal vez facilitar– la formación de una sociedad jerárquica. Una cuestión práctica es determinar si la existencia de coaliciones tiene efectos lineales o no lineales en la conformación de una sociedad jerarquizada. Newman (2009), en su crítica al modelo de Bonabeau, Theraulaz, & Deneubourg (1995) sugiere que no puede ignorarse la existencia de coaliciones en el proceso por el que una sociedad igualitaria deviene en una sociedad jerárquica, y apela a la oportunidad de considerar la existencia de triángulos de nodos en una red estocástica en contraposición al efecto que tendría la formación de jerarquías en ausencia de relaciones triangulares o cuadrangulares. Esta sugerencia de Newman (2009) tiene una gran importancia práctica a los efectos de este trabajo y da consistencia a la hipótesis de que el agrupamiento de los agentes tiene un impacto en la formación de una sociedad jerárquica.

2.2. La física estadística en el análisis de la dinámica social

El descubrimiento de que el comportamiento colectivo de las partículas podía trasladarse al comportamiento de las colectividades humanas no fue una simple metáfora, sino una necesidad, incluso práctica, para interpretar los efectos de tales cambios siendo que a simple vista parecían substraerse a la explicación. La física estadística ha proporcionado un marco teórico para describir fenómenos que superan el marco conceptual de la física clásica. Los trabajos que son razón de esta tesis académica proceden de este paradigma, el intento de físicos, matemáticos e informáticos de estudiar los fenómenos colectivos que emergen de las interacciones de los individuos concebidos como unidades elementales de estructuras sociales. Un amplio conjunto de temas que van desde la conformación y dinámica de la opinión pública hasta la conducta de masas humanas, pasando por la formación de estructuras sociales jerárquicas, la dinámica social y la difusión de la cultura y la innovación, se analizan como resultado de un conjunto limitado de interacciones entre iguales, un número proporcionalmente despreciable si se compara con el número de personas que componen un sistema social. Maxwell y Boltzman jugaron un papel fundamental en esta evolución de los modelos de la física clásica al abandonar la idea de describir la trayectoria de partículas únicas e introducir en su lugar una descripción estadística del comportamiento de estas partículas en la física de estado gaseoso, fundando, de este modo, la física estadística. ¿Cómo las interacciones entre agentes sociales generan orden a partir de una situación originalmente caótica?. El concepto de orden

es la traducción en el lenguaje de la física de lo que en ciencias sociales se ha denominado consenso, concierto, acuerdo, o uniformidad en tanto el término desorden expresa fragmentación, desacuerdo o discrepancia. Las repetidas interacciones en el tiempo entre agentes sociales generan un mayor grado de homogeneidad de los individuos, un tipo de efecto o fenómeno emergente que puede depender por completo, o al menos parcialmente, del tiempo y del espacio en que aquellas interacciones tienen lugar. El estudio de estos fenómenos se expresa en la interacción entre estos actores humanos y no tanto en las estrategias que pueden emplear para mejorar la utilidad que se deriva de sus intercambios. Se trata, pues, de un análisis muy preliminar y básico, a saber, el que resulta de la interacción local de actores mutuamente accesibles. En el contexto particular de esta tesis, los cambios estructurales que se producen en el sistema como resultado de la interacción local de actores humanos y que se expresan en su posición social.

2.2.1. Emergencia de efectos holísticos por interacción local

¿Qué mecanismos operan en la aparición de estos fenómenos emergentes, en el proceso de homogeneización de la opinión, en la diseminación de la cultura, en la conducta colectiva de masas humanas, en el tráfico circulatorio, en la generalización de un lenguaje o un habla comunes, en la aparición de estructuras sociales jerárquicas y qué variables pueden afectar a su aparición?. Pueden existir, razonablemente, mecanismos distintos para el caso en que viene a conformarse la opinión pública o se produce consenso social en torno a una cuestión en debate, y para el caso en que los individuos contraen relaciones sociales que finalmente afectan a su libertad de acción. En ambos casos, sin embargo, la interacción local de los individuos explica la conformación de la opinión pública, la distribución de los individuos en el espacio, la diseminación de información o la formación de estructuras sociales jerárquicas; los mecanismos que operan en la evitación de efectos indeseables, la búsqueda del beneficio, la satisfacción de deseos o necesidades y la maximización de utilidad conforman un entramado de mecanismos que subyacen al fenómeno que Festinger ([Festinger, 1950a,b, 1951](#)) denominó procesos de influencia social. Los supuestos teóricos parecen ser diferentes y, a menudo, lo son, cuando se repara en la variabilidad de los actores individuales, pero los mecanismos son comunes en una cierta variedad de situaciones sociales cuando se examinan los efectos a los que la interacción entre individuos da lugar. Así puede suponerse que la homogeneización de la opinión pública nace de la percepción que, en la interacción, tienen dos individuos que se creen o se saben semejantes, en tanto en la conformación de estructuras jerárquicas los individuos pueden substraerse de interactuar con aquellos que eventualmente perciben mas poderosos. Este tipo de creencias, sin embargo, ignora que los individuos actúan

bajo incertidumbre entretanto mantienen propósitos que buscan obtener ventaja o utilidad de la interacción. En su comportamiento, los individuos están sometidos a su propio sistema de creencias acerca de qué interacciones redundarán en su beneficio, acerca de sus recursos y capacidades, y acerca del éxito de sus acciones o movimientos. Es sobre esa confianza limitada que los individuos suponen que su interacción les reportará mas ventajas sociales que inconvenientes, o mas beneficios que perjuicios en un contexto de presión social que puede obligarles a posicionarse en una cierta opinión o a someterse al dictado de un agente eventualmente mas poderoso. Los mecanismos de asimilación y de contraste se han propuesto para explicar el proceso por el que viene a extenderse lo que [Noëlle-Neumann \(1977\)](#) denomina la espiral del silencio. El mecanismo de asimilación explica que se tienda a percibir como idéntica a la propia, la opinión de una fuente prestigiosa, y el mecanismo de contraste explica la disposición a percibir como diferente a la propia, la opinión de una fuente minoritaria y socialmente percibida como indeseable como se conoce en la explicación del razonamiento informal con el argumento *ad hitlerum*. La misma dinámica afecta en la conformación de opiniones minoritarias o alternativas con tal de que exista suficiente presión social en la dirección opuesta. Efectos alternativos resultan de la construcción de un sistema o estructura social sobre la que opera un complejo sistema de equilibrios múltiples lo que a menudo se expresa bajo modelos de optimización en la aparición de ciertos fenómenos. El contrapunto a este equilibrio son procesos de polarización, donde dos o mas estados alternativos son el resultado final de una serie de interacciones. Un objetivo crítico es, pues, como viene un agente, o un conjunto particular de agentes, a afectar la conducta de otros agentes en un proceso de interacción local entre individuos, de modo que emerjan ciertos fenómenos holísticos. En el lenguaje de la física estadística, las perturbaciones locales de un conjunto finito de partículas en un campo definido afectan al campo de interacciones del resto de las partículas, o los elementos de una nube de partículas. La distribución en el espacio, y la posición de cada elemento en ese espacio, son variables fundamentales, como lo es la probabilidad de interacción según parámetros de densidad local.

Aplicando un modelo de simulación basado en agentes, [Axelrod \(1997c\)](#) presenta una simulación numérica del proceso de diseminación de características sociales y culturales, que determina la conformación de un estado, en el que viene a converger una serie de individuos, que concurre con un efecto global de polarización de características sociales y culturales, de naturaleza opuesta a los grupos que se conforman por interacción local de sus miembros. Axelrod parte de que cuanto mas semejante se percibe a sí mismo un actor en relación con su vecino, mas probable es que adopte su modelo cultural. El modelo muestra como la interacción local entre agentes adyacentes puede dar lugar a una polarización de los rasgos culturales. El número de regiones homogéneas en que se distribuyen los agentes disminuye con el número de rasgos, aumenta con el número de

variantes que existen para cada rasgo cultural, y disminuye con el rango de la interacción, e inesperadamente disminuye cuando el territorio geográfico crece a partir de un cierto tamaño. El planteamiento de Axelrod ilustra lo que vino en denominarse la sociofísica, el análisis de los fenómenos sociales bajo un modelo paradigmático de transiciones caos-orden del tipo del que presenta el modelo de Ising para fenómenos ferromagnéticos. Mas allá de su relevancia como modelo físico, el modelo de Ising se ha visto como una expresión de la dinámica de la opinión en la que un agente se ve influido por los agentes con los que interactúa. Los sistemas que emplean el modelo de Ising muestran que la presencia de una tensión superficial en un material ferromagnético es resultado de que cada espín empieza a alinearse con la mayoría de sus vecinos. Cuando la mayoría no juegan ningún papel, las diferencias cualitativas de este proceso de reordenación cambia. Una diferencia cuantitativa emerge cuando se controla la proporción de pares de espines en los que cada par de vecinos se encuentra en diferentes estados en relación con su número total, cuando esta proporción es igual a $1/2$, el caos es completo, cuando esta proporción es igual a 0, la correspondencia es completa o total (Castellano, et al., 2009). La aplicación de un modelo de simulación basado en agentes se ha aplicado satisfactoriamente a otros tipos de análisis de fenómenos sociales dinámicos. El objetivo es estudiar el problema de la aparición de fenómenos sociales de nivel macrofísico a partir de las interacciones microfísicas o locales de un número reducido y limitado de agentes del sistema. Los modelos basados en agentes se remontan a 1940 cuando Von Neumann y Ulam introdujeron la noción de autómatas celulares (Ulam, 1960; von Neumann, 1966), una máquina compuesta de una colección de células o elementos simples dispuestos en red. En este marco teórico cobra sentido el término actor para expresar los efectos que se producen cuando un cierto número de entidades caracterizadas por un cierto número de estados internos interactúan con otras, en paralelo, intercambiando mensajes (Hewitt, 1970). Con esta misma lógica, Schweitzer (2003) introdujo el concepto de agente browniano, que generaliza el concepto de partícula browniana de la mecánica estadística. Un agente browniano es una partícula activa que presenta estados internos, puede almacenar energía e información, e interactúa con otros agentes en el entorno.

2.2.2. Topología de la red

Un factor fundamental en el estudio de la dinámica social es la estructura de la sociedad en la que se producen los cambios, en términos de la teoría de grafos, que se aplica al estudio de las redes sociales, la estructura de las interacciones que viene expresada por la topología del modelo. Es de vital importancia describir la topología de la red, en tanto es la distribución de los agentes en la red la que determina quién interactúa con quién,

con qué frecuencia y con qué intensidad. Las interacciones que se dan en una red dependen de la distribución de grados de sus nodos. Los nodos son las unidades elementales, los agentes que se sitúan en los vértices, y las conexiones o enlaces las posibilidades de interacción que representan. La estructura o forma del grafo viene determinada por la distribución de las conexiones de cada nodo, es decir, su grado. La forma de la distribución de grados permite reconocer distintos tipos de grafos. La topología de la red representa la descripción estadística del modelo.

En el caso de grafos representados por mallas o retículas regulares, todos los nodos tienen el mismo grado, salvo los nodos situados en el borde de la retícula. Una generalización de este tipo de red consiste en extender el modelo a un tipo de distribución de grados que se extiende desde el grado medio a los adyacentes definiendo una distribución binomial centrada en el valor medio. El prototipo de estas redes homogéneas es el modelo de grafo propuesto por [Erdős, & Rényi \(1959\)](#). Esta distribución binomial converge a una distribución de Poisson cuando el número de nodos aumenta. El modelo de grafo aleatorio no-correlacionado originalmente propuesto por Erdős y Rényi define este tipo de redes homogéneas. La distribución de grados responde a una distribución binomial para la que se verifica la expresión $k \approx Np$.

Otros modelos se han propuesto para simular de forma más realista la heterogeneidad de la distribución de grados en grafos aleatorios con una distribución arbitraria de grados. Los modelos de [Newman, & Watts \(1999\)](#), y [Watts, & Strogatz \(1998\)](#) introducen las redes denominadas de “pequeño mundo”, micro-mundos en los que la distancia entre agentes es pequeña y el coeficiente de agrupamiento alto. Watts y Strogatz presentaron este modelo como un modelo intermedio entre las redes representadas por retículas regulares y las redes aleatorias. Estas redes se caracterizan por tener unas características similares a las observadas en redes sociales reales. Consideraron dos parámetros para estudiar este tipo de redes, parámetros que luego se han generalizado para el estudio de otros tipos de redes: la longitud media de camino, $L_{(p)}$ y el coeficiente medio de agrupamiento $C_{(p)}$. La longitud media de camino se define como la media del número de enlaces mínimos entre cada par de vértices, y refleja la distancia media entre agentes. Si una conexión de un nodo i tiene k conexiones, existen a lo sumo $k(k-1)/2$ aristas entre sus vecinos, lo que ocurre cuando cada vecino del nodo i se conecta con cualquier otro. El coeficiente medio de agrupamiento es la fracción media de conexiones entre vecinos de cada nodo respecto al total posible de interconexiones, es decir, se correlaciona con el número de triángulos. Para las redes de “mundo pequeño” la distancia media entre agentes es relativamente pequeña y hay una gran cantidad de triángulos; los nodos vecinos de un nodo suelen estar a su vez conectados entre sí. Las redes de “mundo pequeño” se caracterizan por valores altos del parámetro de agrupamiento medio y valores bajos de longitud media de camino ([Castellano, et al., 2009](#))

Para simular la evolución y el crecimiento dinámico de una red, que gana o pierde nodos y conexiones, ha surgido otra serie de modelos. El modelo de Barabási-Albert forma una red a partir de un grafo totalmente interconectado, es decir, un grafo completo de m nodos, al que se le van añadiendo nodos de uno en uno. El proceso se detiene cuando la red alcanza el número deseado de nodos. Cada nuevo nodo selecciona m nodos en función de su grado, siendo más probable que se una a un nodo con un grado semejante. De esta manera, se configura un grafo cuya distribución de grados sigue una ley de potencia $P(k) \propto k^{-\gamma}$. Las redes de Barabási, & Albert (1999) presentan una distribución de grados que tiene a $\gamma = 3$ en el límite cuando el número de nodos tiende a infinito. En este tipo de redes el coeficiente de agrupamiento es bajo, del orden de $1/N$, siendo N el número de nodos final. La red tiene un grado promedio $\langle k \rangle = 2m$, que satisface la fórmula de distribución de grados. Los grafos cuya distribución de grados sigue una ley de potencias se consideran redes de escala-libre.

Existen diferencias substantivas entre el tipo de redes artificiales que se han empleado para modelar redes sociales, y las redes sociales en el mundo real. Las redes sociales reales muestran una correlación positiva de grados entre vértices adyacentes –lo que se denomina asortatividad– en tanto la mayor parte de las redes no sociales son disasortativas (Pastor-Satorras, Vázquez, & Vespignani, 2001; Newman, 2010). Las redes sociales presentan altos coeficientes de agrupamiento significativamente superiores a los que se obtienen en modelos de redes aleatorias de escala libre. De hecho, una limitación práctica de los modelos de redes formales es el rango de variabilidad posible en los coeficientes de agrupamiento, como luego se muestra en este trabajo.

Cuando se aplica un modelo formal al estudio de la dinámica social con una topología específica, aparecen otros fenómenos que tienen efectos no triviales en la dinámica de la red. Es importante considerar la topología de la red, cuando se aplican a modelos de dinámica social dado que pueden producirse efectos que resultan de la estructura de la red y no propiamente de la dinámica en sí. En redes con distribuciones heterogéneas de grados, la dinámica de los modelos con interacciones asimétricas en las que dos agentes interactúan con diferentes roles pueden verse afectados por el orden en que se seleccionan estos actores (Castellano, et al., 2009). En efecto, en una distribución de grados que satisface la ley de potencia, la selección aleatoria de un nodo de una red con distribución $P(k)$ y la selección aleatoria de uno de sus vecinos, este segundo nodo suele tener un grado mayor que el primero. La distribución de grados para el segundo nodo es $kP(k)/\langle k \rangle$, lo que tiene un impacto significativo en distribuciones de redes de escala libre. La simulación del proceso en interacciones ordenadas afecta, por tanto, a la aparición de efectos emergentes.

2.2.3. Aplicaciones de la simulación basada en agentes

El planteamiento clásico de la física es tratar de describir el comportamiento del sistema por medio de ecuaciones que se puedan resolver analítica o numéricamente. Sin embargo, se han desarrollado otras formas de análisis, en particular cuando se emplean simulaciones computacionales. En estas simulaciones se realizan por medio de una serie de reglas de interacción de naturaleza local –nivel microscópico– y la evolución del sistema se produce en unidades temporales discretas. Este tipo de simulación surge de la noción de autómata celular introducida por [von Neumann \(1966\)](#) y [Ulam \(1960\)](#) en 1940. Cada unidad se encuentra en un cierto estado de entre un conjunto de estados discretos posibles y cambia de un estado a otro dependiendo de la interacción con otras unidades de su entorno. La variable o variables que conforman un estado se modifican en interacción con los vecinos según reglas locales. Estos mismos modelos se han usado en la simulación de distintos fenómenos sociales tales como migraciones, la diseminación de enfermedades o la diseminación de la cultura. Los agentes interactúan directa o indirectamente con el entorno, que provee realimentación de los estados de los agentes vecinos. La interacción directa se produce en un momento temporal y está gobernada por reglas de interacción predeterminadas y la topología subyacente de la red. Modificando las reglas de la interacción y el número de estados posibles según las variables que resultan relevantes, se da lugar a distintos comportamientos a escala macroscópica en la evolución del sistema.

2.3. Simulación de procesos de formación de jerarquías

En el sistema social los individuos tienen, de ordinario, un rango o una posición social bien definida que viene esencialmente determinado por el papel que tienen en el seno de la comunidad. Inicialmente el papel que se asigna a los individuos representa la división técnica del trabajo, una distribución espontánea en la que las personas asumen un papel en parte conferido por otros en virtud de relaciones de confianza, y en parte asumido por el propio actor en cuanto identifica su posición en la comunidad por el tipo de bienes o servicios que presta. Así, al menos inicialmente, cada individuo asume un papel en virtud de un doble proceso de asignación o consenso social, y un acto de asentimiento o aquiescencia. La asunción de responsabilidad se traduce posteriormente en una mejora de la productividad individual y en una posición social según el significado que esa responsabilidad tenga para la comunidad. Así la división técnica del trabajo tiene finalmente consecuencias sociales de carácter estructural. De esta división técnica inicial puede, luego, en efecto, provenir una división social por la que un individuo adquiere frente a otros un mayor y/o mas fácil acceso a los recursos comunitarios, mas

probabilidades de reproducción, mayor respeto o consideración, y mas recompensas por parte de los miembros de la comunidad, sean actores individuales o corporativos.

Tiene importancia teórica y práctica estudiar cómo a partir de esa situación inicial que hace iguales a todos los hombres, como rezan la mayor parte de las constituciones políticas de los países democráticos del mundo, deviene una estructura social de naturaleza jerárquica en la que un escaso número de individuos ostenta una posición social que resulta predominante. El origen de esta estructura jerárquica en sociedades animales y humanas es una cuestión todavía abierta a pesar de haber sido objeto de estudio en las dos últimas décadas. El problema es entender por qué y cómo en una sociedad de individuos que inicialmente tienen una posición social idéntica emergen las desigualdades. Una cuestión teórica con fuertes implicaciones sociales es preguntarse cómo en un sistema que distribuyera la riqueza de forma igualitaria, en el que las personas tuvieran inicialmente igual acceso a los recursos, podría surgir una sociedad de individuos social y económicamente desiguales. Un enfoque simple atribuye las desigualdades sociales en las sociedades animales y humanas a la preexistencia de diferencias individuales, diferencias de peso o tamaño en los animales, o diferencias físicas o mas abstractas entre los seres humanos, como diferencias de talento, habilidad o carisma. Una mínima reflexión y numerosos datos empíricos muestran que en las sociedades animales y humanas la posición que ocupa un individuo en la comunidad no depende de estas características individuales, bien porque la posición que se ocupa puede perderse a manos de otro agente de la comunidad, por ejemplo, por procesos naturales que afectan al mantenimiento de la posición, bien porque la posición no puede establecerse sobre habilidades o condiciones individuales cuyo valor social cambia en el tiempo o tienen un valor social equivalente, o bien porque estas diferencias individuales carecen de valor si no son un objeto permanente de reconocimiento social. El establecimiento de relaciones de dominancia dependen estrictamente en las sociedades animales y humanas del papel crucial que juegan las interacciones sociales entre individuos. La hipótesis de que la formación de jerarquías sociales es un fenómeno de autoorganización social hace décadas comenzó a ser la hipótesis dominante ([Chase, 1974](#)). Las relaciones de dominación parecen estar, en efecto, determinadas por el resultado de las luchas que nacen de conflictos entre individuos, por el éxito o fracaso que estos individuos experimentan cuando compiten por la posición que ocupan los actores eventualmente dominantes ([Chase, 1974](#); [Theraulaz, Bonabeau & Deneubourg, 1995](#)). De acuerdo con esta hipótesis, aquellos individuos que experimentan la victoria tienen una mayor probabilidad de ganar las siguientes batallas si se comparan los efectos que produce sobre un individuo perder una batalla o experimentar fracaso.

2.3.1. El modelo de Bonabeau

El modelo de [Bonabeau, Theraulaz, & Deneubourg \(1995\)](#) es, quizás, la primera propuesta teórica para indagar en el efecto de formación de una jerarquía en una red social en la que todos los miembros del sistema parten exactamente de la misma condición, la condición social de ser iguales en derechos y deberes. Obviamente, a nivel real esta igualdad de origen es puramente teórica –y efectivamente retórica desde la perspectiva del derecho positivo– ya que las condiciones en que un individuo se integra en una comunidad vienen determinadas por la posición que viene a ocupar en un contexto social ya dado, el que obtiene por herencia de aquellos agentes que intervienen en su desarrollo. Bonabeau y colaboradores propusieron un modelo simple para explicar la aparición de jerarquías en una sociedad inicialmente igualitaria ([Bonabeau, Theraulaz, & Deneubourg, 1995](#)).

En el modelo propuesto por Bonabeau, los agentes ocupan posiciones de un tablero cuadrado bidimensional de dimension L . Cada celdilla puede contener un único agente y la densidad de agentes en el tablero es un parámetro libre que se controla. Cada agente escoge al azar una dirección, y se mueve en esa dirección a una casilla adyacente en cada iteración. Si la posición a la que quiere moverse está libre, la ocupa. Si la casilla en cuestión ya está ocupada por otro agente inicia una lucha para desalojarle de tal suerte que el ganador gana el derecho a ocupar esa casilla y desalojar de esa posición al agente que la ocupaba. Si el agente ganador es el agente que inició el ataque, los dos competidores intercambian sus posiciones cuando la lucha concluye; en caso contrario, mantienen sus posiciones originales.

La fuerza F de un agente crece a medida que aumenta el número de batallas que gana. Un agente i es mas fuerte que otro agente j si $F_i > F_j$. La lucha es un proceso estocástico, en el que el agente mas fuerte tiene mas probabilidad de ganar, pero no es forzoso que gane. La probabilidad Q_{ij} de que el agente i derrote al agente j viene expresada por la función de Fermi,

$$Q_{ij} = 1 / \{1 + \exp[-\eta(F_i - F_j)]\}, \quad (2.1)$$

donde η representa una especie de temperatura inversa que mide el nivel de aleatoriedad dinámica de la pelea; cuando $\eta \rightarrow \infty$ el agente mas fuerte gana siempre; cuando $\eta \rightarrow 0$, ambos agentes ganan con la misma probabilidad de $1/2$. Al agente que gana una batalla le aumenta su fuerza en una cierta cuantía, al agente que pierde le disminuye la suya. La función está sujeta a un proceso de relajación de fuerza de los agentes de tal manera que en una iteración se resta una fracción constante μ de la fuerza que en ese momento

tienen los agentes de la interacción. μ es un número fraccionario; la resta se produce al multiplicarse por la fuerza dado que $\mu < 1$.

En una sociedad igualitaria, todos los agentes tienen, inicialmente, la misma fuerza F . La dispersión en la distribución de la fuerza F representa la formación de un sistema de jerarquías que se refleja en la distribución de las probabilidades de ganar Q_{ij} . La varianza viene dada por la ecuación

$$\sigma = \langle Q_{ij}^2 \rangle - \langle Q_{ij} \rangle^2 \quad (2.2)$$

La medida σ puede usarse como medida de la desigualdad del sistema (Sousa, & Stauffer, 2000). Para una sociedad igualitaria $\sigma \approx 0$ mientras que para una sociedad jerárquica el valor de σ es estrictamente positivo. Si la fluctuación de σ da lugar a valores pequeños o próximos a 0, la sociedad es igualitaria, si la fluctuación de σ presenta valores grandes y positivos, la sociedad es jerárquica. Se observa una transición de fase cuando la probabilidad de ganar cambia como resultado de una varianza σ significativamente mayor de 0.

En el modelo de Bonabeau, Theraulaz, & Deneubourg (1995), los agentes se distribuyen aleatoriamente en una retícula y sus fuerzas se inicializan a 0. La densidad de población se expresa en la retícula como la proporción de posiciones ocupadas de todas las posiciones posibles. En cada iteración se producen n batallas, tantas como número de nodos tiene la red y un proceso de relajación que depende de μ . El resultado principal es que existe una densidad crítica $\rho_c(\eta, \mu)$ de agentes, tal que para $\rho < \rho_c(\eta, \mu)$ la sociedad es igualitaria, en tanto que por encima de esta densidad $\rho > \rho_c(\eta, \mu)$, se produce jerarquía. Esto se debe al efecto combinado de la competición y el proceso de relajación. A bajas densidades, las interacciones entre nodos son escasas y la dinámica está dominada por la relajación que mantiene los valores de fuerza cercanos a su valor inicial. Sin embargo, a densidades crecientes las diferencias de fuerza entre nodos crecen en el tiempo sin poder contrarrestarse por el efecto de la relajación y la desigualdad reaparece.

2.3.1.1. El modelo de solución de campo medio

El modelo de solución de campo medio define un procedimiento que obvia las correlaciones espaciales y considera únicamente el efecto de la densidad ρ sobre la probabilidad de que dos agentes se encuentren y peleen, en analogía con lo que sucede en el modelo original de Bonabeau que emplea una retícula bidimensional para expresar el proceso. La evolución de la fuerza F_i de un agente se calcula a partir de la ecuación,

$$\frac{dF_i}{dt} = H_i(F_j) = \mu F_i + \frac{\rho}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\sinh \eta(F_i - F_j)}{1 + \cosh \eta(F_i - F_j)}$$

donde N es el número de agentes. A partir de esta ecuación puede observarse que la fuerza media $\langle F \rangle$ decae exponencialmente hasta cero; los estados estacionarios se caracterizan por $\langle F \rangle = 0$. Para determinar la estabilidad de esta solución $F_i = 0$ para \forall_i , que se corresponde con una sociedad igualitaria, se calculan los autovalores de la matriz jacobiana. Cuando $\rho > \rho_c(\eta, \mu)$, la solución igualitaria es linealmente inestable, emergiendo entonces una jerarquía. Para $\eta < 2$, la transición a una jerarquía es discontinua, ya que se presenta un estado subcrítico de bifurcación o polaridad en $\rho_c(\eta, \mu)$. Este estado subcrítico representa un estado de la red de interacciones en donde convive un sistema jerarquizado y un sistema de agentes que mantienen relaciones igualitarias. [Castellano, et al. \(2009\)](#) dedican un breve y excelente análisis a este modelo de solución. El parámetro η es en la ecuación un parámetro libre que se fija arbitrariamente a conveniencia para obtener los resultados que se desean. Por otra parte, el parámetro μ , que refleja un factor de relajación en la fuerza de cada uno de los agentes es, asimismo, un parámetro libre que se fija arbitrariamente para identificar como una sociedad desigual retorna a un estado en el que los individuos tienen la misma fuerza, es decir, vuelven a ser iguales. De este modo, el proceso de formación de jerarquías depende de una variable que no refleja el proceso de jerarquización al ser independiente del número de batallas en que entran los agentes sociales. Esta decisión ha dado lugar a la crítica del modelo y ha originado cambios en nuevas implementaciones.

2.3.2. Críticas y modificaciones del modelo de Bonabeau

El reto de un modelo de simulación basado en agentes es encontrar un conjunto finito de ecuaciones matemáticas que describan fielmente los mecanismos que operan en una red, y los cambios que sufre en el tiempo como resultado de interacciones locales entre sus agentes. El modelo puede resolverse analíticamente empleando el modelo de solución de campo medio, sin embargo, los resultados que se obtienen no son una expresión realista de lo que sucede en redes sociales. El modelo presenta defectos formales y empíricos muy relevantes. La ecuación que expresa la evolución de la fuerza de un agente no contempla que, en el límite, el aumento indefinido del número de agentes llega a que la densidad tienda a cero. En una retícula bidimensional, la sociedad se distribuye en dos grupos de líderes y seguidores, lo que no es una expresión muy realista de lo que sucede en sociedades reales, donde rara vez se produce una partición de este tenor. Si la variación de la fuerza es mayor para un agente que pierde una batalla que para un

agente que la gana, el número de líderes disminuye rápidamente a medida que aumenta la asimetría entre la recompensa que obtiene el ganador y el castigo que obtiene el perdedor (Stauffer, & Sá Martins, 2003). El modelo de Bonabeau tiene el mérito de haber postulado un mecanismo para explicar como podría emerger una jerarquía en una sociedad de individuos inicialmente iguales, sin embargo, las notorias diferencias de sus predicciones en relación con la sociedad real son tales que, difícilmente, puede el modelo dar cuenta de lo que sucede en un sistema en el que, a medida que aumenta la densidad de población, emerge una sociedad mas compleja y mas desigual en la que conviven, sin conflicto, un reducido número de líderes y un amplio número de fieles seguidores. Debe, sin embargo, ser obvio, que en este estadio, encontrar una explicación formal completa a la emergencia de una sociedad desigual y jerarquizada queda, todavía, lejos.

La ruptura mas obvia con el modelo original de Bonabeau, Theraulaz, & Deneubourg (1995) es la que se refiere al empleo de una retícula bidimensional. El empleo de redes de escala libre generaliza el modelo a un tipo de redes donde cada agente mantiene simultáneamente múltiples interacciones. Se trata de un cambio simple y a la vez útil, que cambia substancialmente el comportamiento de la red. Sin embargo, la modificación mas relevante al modelo de Bonabeau fue introducida por Stauffer, & Sá Martins (2003) al substituir el parámetro libre η por la desviación estándar de la distribución de magnitudes de fuerza de los agentes que interactúan. El interés de esta substitución no procede de la substitución misma de aquel parámetro, sino del hecho de que la desviación puede reintroducirse dinámicamente en las sucesivas iteraciones que nacen de las batallas o luchas en que entran los agentes. Como se explica mas abajo, el algoritmo que se presenta introduce la desviación estándar σ con este propósito. De esta forma, se genera un mecanismo de realimentación por el que una sociedad se desarrolla como una sociedad jerarquizada a medida que aparecen líderes que ejercen relaciones de dominación sobre aquellos agentes con los que interactúan, en un proceso que no es transparente cuando se consideran las interacciones locales que tienen lugar. En otras palabras, este mecanismo permite que emerjan propiedades holísticas a partir de interacciones locales de los agentes sociales. Con esta modificación, la probabilidad de ganar es una variable dinámica que varía acorde con el estado de la sociedad en cada momento.

El modelo de solución de campo medio se ha aplicado ignorando la distribución espacial de los nodos en la red social. Lacasa & Luque (2006) han demostrado, en este contexto, que existe una transición de fase desde una sociedad igualitaria para todas las densidades pero el efecto es muy sensible a las condiciones iniciales. Lacasa & Luque (2006) muestran que existe un punto fijo y estable para una sociedad igualitaria para cualquier densidad de una red social. Estos resultados de Lacasa & Luque (2006) no son compatibles con los resultados que se obtienen cuando se somete la red a la dinámica de un proceso de simulación de acuerdo con las ecuaciones arriba expuestas. La ejecución de un proceso de

simulación muestra que existe una transición de fase hacia un sistema jerárquico que no necesariamente es estable y fijo. Los puntos fijos de una sociedad igualitaria o jerárquica son eventualmente estables, y representan soluciones finales de un proceso dinámico dependiendo de las condiciones iniciales, pero no existen densidades críticas idénticas para cada modelo topológico de red. El modelo se ha simulado en retículas bidimensionales regulares (Stauffer, 2005), en grafos completos (Malarz, Stauffer, & Kulakowski, 2005), y en redes de escala libre (Gallos, 2005). El efecto de transición de fase se produce en cada caso, aunque en las redes de escala libre, la densidad crítica puede tender a cero en el límite cuando el número de agentes tiende a infinito. Tal como se ha advertido mas arriba, en una retícula o malla regular, el modelo produce una sociedad igualmente dividida en líderes y seguidores. Si la variación de la fuerza es mayor para un agente que pierde una batalla que para un agente que la gana, el número de líderes disminuye rapidamente a medida que aumenta la asimetría entre la recompensa que obtiene el ganador y el castigo que obtiene el perdedor (Stauffer, & Sá Martins, 2003).

Una variante del modelo de Bonabeau, Theraulaz, & Deneubourg (1995) adaptado a otros modelos topológicos de red es el introducido por Ben-Naim, & Redner (2005). Los agentes tienen una fuerza que se expresa en un valor entero, y las interacciones son siempre diádicas. La dinámica del proceso es determinista de tal modo que la fuerza del ganador aumenta en una unidad, excepto en el caso en que los dos agentes que interactúan tengan exactamente la misma fuerza, en cuyo caso, ambos avanzan. El modelo introduce un efecto de memoria, del tipo del empleado para el modelo Bonabeau, un efecto que interpreta como un proceso de decaimiento, que solo se aplica si la fuerza del individuo es positiva. Un parámetro libre r fija el equilibrio entre progreso y decaimiento. El principio del límite de campo medio puede aplicarse para obtener la solución al modelo. Castellano, et al. (2009) hacen una presentación suficientemente detallada de las propiedades características del modelo. Una versión posterior del mismo modelo, Ben-Naim, Vázquez, & Redner (2006) generaliza el modelo a modelos estocásticos que resultan ser una expresión mas fiel de la dinámica del proceso en el que el competidor mas fuerte en una interacción diádica gana con una probabilidad p . Este modelo genera un diagrama de fase mas realista y expresivo. En alguna región del espacio de parámetros aparece una clase de sociedad igualitaria en la que la distribución de fuerza de los agentes alcanza picos máximos y se mueve con una velocidad constante como una función de onda típica de un proceso de transmisión de información. El modelo se ha aplicado a la dinámica de las competiciones deportivas, y a juegos que implican un mayor número de actores (Ben-Naim, Kahng, & Kim, 2006). Este enfoque dinámico de naturaleza estocástica es el que inspira algunas de las decisiones de la implementación que se presenta en este trabajo.

Capítulo 3

Modelos de simulación

La implementación de un modelo de simulación basado en agentes requiere considerar distintos modelos de distribución estocástica en tanto que la forma de la distribución permite expresar de forma más o menos realista la realidad que se pretende simular. El modelo original de [Bonabeau, Theraulaz, & Deneubourg \(1995\)](#) empleaba una retícula bidimensional. Que las críticas al modelo enfatizaran que las interacciones múltiples entre agentes no pueden caracterizarse en términos de un espacio euclidiano condujo a otros autores a considerar modelos de redes de escala libre, y, en particular, el modelo de configuración. El estudio de las propiedades formales de los modelos de redes de escala libre y el examen de la adecuación empírica de sus aplicaciones es útil para determinar su alcance teórico y explicativo ([Clauset, Shalizi, & Newman, 2009](#)).

3.1. Modelos estocásticos de formación de jerarquías

En estadística, una función potencial es una relación funcional entre dos variables, en la que cambios relativos en una variable dan lugar a un cambio relativo proporcional en la otra variable con independencia de sus magnitudes iniciales, así resulta que una variable varía como potencia de la otra. El valor y de la función $f(x)$ es proporcional a alguna potencia de la variable de entrada x , y se expresa $y = f(x) = x^{-\gamma}$. Por ejemplo, si consideramos el área de un cuadrado en términos de la longitud de un lado, duplicar su longitud multiplica el área del cuadrado por cuatro. Si la función describe la probabilidad de ser mayor que x se denomina ley de distribución potencial o función de distribución acumulativa complementaria –CCDF por sus siglas en inglés– y se expresa por $P(> x) = x^{-\gamma}$. Si, por el contrario la ley potencial describe la probabilidad de ser exactamente igual a x se denomina función de densidad de probabilidad –CDF por sus siglas en inglés– y se expresa por $P(x) \leq x^{-\gamma}$. Las funciones potenciales describen sistemas en los que los

eventos de mayor magnitud son mas raros que los eventos de menor magnitud. Ambas funciones se relacionan por la ecuación,

$$\int_x^{+\infty} p(x)dx = P(> x)$$

La expresión integral supone que x es continua dado que $P(> x)$. En la práctica, como luego se ve por las propiedades de la distribución, x adopta valores enteros positivos. La ley de potencia expresa una función de magnitud monotónicamente decreciente. En una distribución gaussiana, la media es el promedio de una variable aleatoria y la varianza es una medida de cuanto difieren los casos de ese promedio. La razón de su universalidad no depende de algún tipo de causa subyacente. Puede aplicarse con éxito un tipo de distribución gaussiana a eventos que no están relacionados. La razón de la aparente universalidad de una distribución gaussiana es simplemente estadística, no deriva de algún tipo de causalidad común a distintos fenómenos. El teorema del límite central establece que la suma de variables aleatorias con una media y una varianza finitas siempre convergen a una distribución gaussiana. Si arbitrariamente se aumenta el número de casos y no se requiere que la varianza, o la media sean finitas, el teorema del límite central no predice una distribución gaussiana. Por el contrario, se observa una distribución que se asemeja a una función potencial a medida que aumenta x . En una distribución gaussiana el crecimiento o decrecimiento de la magnitud de x produce probabilidades cada vez menores, en tanto en una distribución generada por una función potencial la probabilidad decae mas lentamente, lo que justifica que las funciones de potencia representen fenómenos de cola ancha, de ahí que las funciones potenciales se denominen funciones de colas pesadas. Los eventos situados en las colas de la distribución son mas probables de lo que lo serían si se ajustaran a una distribución gaussiana.

La adecuación empírica de una función potencial con un exponente de escalamiento específico se obtiene a partir de una descripción de los procesos dinámicos que afectan a un fenómeno. En física, las transiciones de fase en termodinámica se relacionan con la aparición de distribuciones de potencia escalar de ciertas variables; los exponentes de esta distribución representan exponentes críticos del sistema. Sistemas distintos con los mismos exponentes críticos –es decir, que presentan tendencialmente los mismos exponentes críticos– comparten la misma dinámica fundamental a través de un proceso de normalización. El comportamiento del agua y del CO_2 en sus puntos de ebullición caen en la misma clase de universalidad porque tienen los mismos exponentes críticos. Todas las transiciones de fase de cualquier material pueden describirse en términos de un reducido conjunto de clases de universalidad. Los sistemas que presentan la misma

dinámica definen una clase o tipo de universalidad. El interés de estudiar estas funciones potenciales reside en relacionar las restricciones que operan en sistemas complejos e identificar los criterios que permiten describir relaciones de jerarquía en procesos estocásticos específicos. Un cierto número de ejemplos característicos son la ley de Pareto de distribución de renta, la autosemejanza de fractales, y las leyes de escalamiento en sistemas biológicos. Estos pocos ejemplos representan una pequeña muestra de las numerosas aplicaciones de las funciones potenciales en distintas áreas científicas, en física, en ciencia computacional, lingüística, neurociencia, sociología, economía, etc.

Matemáticamente, una ley potencial no puede ser una función de probabilidad. Cuando x se aproxima a 0, la distribución tiene un área infinita, de manera que debe establecerse un valor de x mínimo, x_{min} . Además, la distribución debe expresarse en términos de una función truncada tal que $p(x) = Cx^{-\alpha}$ para $x > x_{min}$. La constante C es un factor de normalización, un factor escalar que asegura que el área total es 1, tal como se requiere en una distribución de probabilidad. La constante C tiene la forma $c^{-\gamma}$. El exponente α debe ser mayor de 1. El exponente debe estar en el rango $2 \leq \alpha \leq 3$. La mayor parte de las funciones potenciales que describen fenómenos de la naturaleza tienen exponentes para los que la media está bien definida, pero la varianza no. La media de una ley de potencias es finita si $\gamma > 1$, y la varianza es finita si $\gamma > 2$. Una ley potencial $x^{-\gamma}$ tiene una media bien definida en $x \in [1, \infty]$ y varianza no finita si el exponente $\gamma \leq 2$, ya que la varianza es finita solo si $\gamma > 2$. Dado que para una distribución potencial en el rango $2 \leq \alpha \leq 3$, la media existe o es finita, pero la varianza no, la estadística tradicional no puede aplicarse a funciones de probabilidad que se expresan por una función potencial (Clauset, Shalizi, & Newman, 2009). Para muestras de tamaño finito, la media y la varianza para momentos divergentes nunca convergen, cuando se acumulan más datos, la función sigue creciendo. A menudo, estas distribuciones de probabilidad se denominan distribuciones de Pareto. La expresión se modifica para incluir un ruido o error aleatorio, de modo que la ecuación original se convierte en $y = x^{-\gamma} + \epsilon$. Bajo estas condiciones, la función de distribución para una variable continua x tiene la forma

$$p(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{x_{min}} \right) \left(\frac{x}{x_{min}} \right)^{-\alpha}$$

El primer término de este producto es la constante de normalización, el segundo es la expresión de la función potencial. Para un valor entero $\gamma = 3$ debe emplearse la constante de Apéry, ζ . Para un valor entero $\gamma = 2$ se emplea una normalización que emplea la constante π . La normalización es usualmente más compleja en funciones potenciales con exponentes no enteros, o en otras variantes de funciones potenciales.

La constante de normalización para un exponente arbitrario es la ζ de Riemann, es decir $C = \frac{1}{\zeta(\gamma)}$, para $\gamma = 2$ y $\gamma = 3$. Debe verificarse, en este caso, que $x > 0$, y que x tenga un valor entero positivo, es decir, el valor de x debe ser discreto. Esta normalización no puede aplicarse para valores de x continuos en el rango $x \in [1, +\infty)$. Para proceder, una función continua debe discretizarse.

La determinación de clases de universalidad es teórica y empíricamente importante en tanto se trata de modelar sistemas que tienen varianza infinita y posiblemente una media no bien definida. Los modelos de simulación multi-agente han optado por replicar las interacciones entre individuos, que tienen lugar en un sistema social, adoptando un modelo de red estocástica de escala libre. Una red de escala libre es un tipo de red cuya distribución de grados se corresponde con una función potencial, asintóticamente. Una fracción $P(k)$ de nodos de la red que tienen k conexiones con otros nodos se comportan de acuerdo con la función potencial

$$P(k) \propto k^{-\gamma}$$

siendo γ un parámetro en el rango $2 \leq \alpha \leq 3$. Este rango de γ no representa una condición matemática, sino empírica, al observarse experimentalmente en redes reales como los valores que mejor se ajustan a la descripción de los fenómenos a explicar. Muchas de las redes que se han empleado en el análisis de fenómenos sociales que emergen de la interacción entre agentes en un sistema social parecen presentar las propiedades de una red de escala libre con estos valores de γ . Se han propuesto los mecanismos de adjunción preferencial y ajuste para explicar las distribuciones de grados que se ajustan a una función potencial en redes reales. Estas son propiedades críticas que permiten generar distribuciones de grados que satisfacen una ley potencial (Lin, & Whitehead, 2015). En una red real parece existir un número reducido de nodos centrales o puertos que presentan un número mayor de conexiones a otros nodos de modo que la red en su conjunto presenta una distribución de grados que sigue una ley potencial. Después de referir una serie de redes biológicas y sociales que parecen satisfacer este criterio, Barabási y colaboradores (Barabási, & Albert, 1999) acuñaron el término de red de escala libre para referirse a este tipo de modelos de red cuya distribución de grados se corresponde con una función potencial.

El mecanismo de adjunción preferencial, introducido por Barabási, & Albert (1999), analíticamente por Dorogovtsev, & Mendes (2002) y formalmente por Bollobás, Rioridan, Spencer, Tusnányi (2001) justifica un hecho aparente, la mayor probabilidad de que un nodo se adjunte a aquel nodo que presenta un mayor número de conexiones. Este mecanismo, sin embargo, no siempre da lugar a redes de escala libre, y existen otros mecanismos que pueden explicar este fenómeno aparente. Faloutsos, Faloutsos, & Faloutsos (1999) sugieren que la disposición de algunos nodos a tener un mayor número

de conexiones proviene del modo en que se produce enrutamiento, de manera que los dispositivos de enrutamiento son la razón de que se cumpla este principio de adjunción preferencial. Internet no representaría, en este caso, un ejemplo realmente representativo de una red cuya distribución de grados responde a una función potencial. El mecanismo de ajuste expresa el hecho de que dos nodos se enlacen no como resultado de un proceso de asignación típicamente aleatorio sino con una probabilidad igual para todos los pares de vértices de acuerdo con algún tipo de propiedades intrínsecas. La Red Internacional de Comercio (World Trade Web) presenta una función de ajuste que se corresponde con el Producto Nacional Bruto de cada país describiendo lo que se ha denominado un grafo geométrico hiperbólico. Suponiendo que una red presente una geometría hiperbólica, puede definirse un tipo de redes espaciales que generan distribuciones de grado de escala libre. Estas distribuciones de grado reflejan una curvatura negativa y unas propiedades métricas propias de la geometría hiperbólica, de ahí el nombre (Caldarelli, et al., 2002). La característica más relevante de las redes de escala libre es la relativa comunalidad de vértices con un grado que excede significativamente del promedio. Los nodos de mayor número de grados se denominan puertos o núcleos y parecen jugar un papel significativo según qué dominios.

3.1.1. Propiedades de redes de escala libre

3.1.1.1. Invariancia escalar

Una propiedad de la ley potencial es su invariancia escalar. Dada una relación, el escalamiento del argumento por un factor constante determina solo un escalamiento proporcional de la función misma. El escalamiento por una constante multiplica la función potencial original por esa constante.

3.1.1.2. Resistencia a fallos

La invariancia escalar de una red de escala libre correlaciona con la resistencia de la red a fallos, es decir, la resistencia de la red a cambiar cuando se destruye un cierto número de nodos. Los núcleos o puertos de la red son a la vez la razón de las fortalezas y debilidades de las redes de escala libre. Esta propiedad se ha estudiado analíticamente utilizando la teoría de la filtración de Cohen, Erez, ben-Avraham, & Havlin, S. (2000, 2001) y Callaway, Newman, Strogatz, & Watts (2000). Cohen, & Havlin (2003) han probado que un amplio número de redes de escala libre presentan un umbral de filtración crítico $p_c = 0$. Eliminar aleatoriamente una fracción de nodos de una red no destruirá la red.

Esta propiedad difiere de los grafos de Erdős, & Rényi (1959) en los que se verifica $p_c = 1/\langle k \rangle$, siendo $\langle k \rangle$ la media de grados.

La propiedad de resistir fallos, no obstante, está en discusión, específicamente en redes que tratan de simular el flujo de recursos en redes financieras o económicas en donde la variable crítica es el capital disponible. Aún conformándose a una función potencial, la propiedad de resistencia a fallos no se cumple. Shore, Chu, & Bianchi (2013) han mostrado que un modelo de distribución de grados en términos de una red potencial presenta virtualmente mas posibilidades de conducir a una crisis catastrófica que un modelo que no se ajusta a una ley potencial. Shore, Chu, & Bianchi (2013) razonan que en un típico modelo de red aleatoria no se cumple necesariamente el principio de adjunción preferencial a menudo conocido como efecto Mateo, por el evangelista Mateo, el mas rico se vuelve mas rico. Shore, Chu, & Bianchi (2013) aplican su modelo para explicar la crisis económica de mayo de 2008.

3.1.1.3. Coeficiente de agrupamiento

Una propiedad característica de las redes de escala libre es la distribución del coeficiente de agrupamiento, que disminuye cuando el número de grados de nodos aumenta. Esta distribución de grados sigue una ley potencial. Los nodos con un reducido número de grados pertenecen a un subgrafo denso y se conectan a su vez con otros a través de sus núcleos. Se forman grupos o pequeñas comunidades que se conectan a su vez con un amplio número de comunidades por medio de nodos centrales que funcionan como núcleos o puertos, lo que se considera el mecanismo responsable del fenómeno de mundo pequeño. Las redes de escala libre mantienen sus propiedades constantes cuando se someten a ciertas transformaciones geométricas, por lo que se refiere a las correlaciones entre nodos según sus grados y a coeficientes de agrupamiento mas altos.

3.1.1.4. Distancia media entre vecinos

La distancia media entre dos vértices en una red representa una propiedad de las redes de escala libre. En la mayor parte de redes caóticas, como es el caso del modelo de red de mundo pequeño, esta distancia es muy pequeña en comparación con lo que sucede en una retícula bidimensional. Un grafo no correlacionado que sigue una distribución según una función potencial con un exponente en el rango $2 < \alpha < 3$ tiene un diámetro $\approx \ln \ln N$, donde N es el número de nodos de la red (Cohen, & Havlin, 2003). En la práctica el diámetro de una red de escala libre es constante.

3.1.2. Formación de jerarquías con funciones de potencia

El modelo de configuración expresa con naturalidad una red social en la que un número reducido de agentes mantienen un amplio número de interacciones con otros agentes a menudo de manera asimétrica, en tanto la mayor parte de los restantes agentes solo mantiene un escaso número de relaciones con otros y a menudo por mediación de aquellos. Sin embargo, el modelo de configuración no es una expresión perfecta de las propiedades que caracterizan típicamente una red social, el número de coaliciones en que entra un individuo apenas se expresa en el modelo, los índices de asortatividad resultan ser negativos en el modelo de configuración, y la red expresada resulta insensible a variables que resultan ser críticas en la comprensión de las relaciones sociales en que entran los individuos. En efecto, las condiciones en que se producen estas interacciones se ignoran en aras de una comprensión mas simple de un proceso ciertamente complejo. En las interacciones sociales, los sujetos no presentan únicamente preferencias ni interactúan con otros por relaciones de afinidad personal; los individuos interactúan con otros para obtener ciertos fines u objetivos. En este contexto, los problemas mas importantes son, probablemente, (1) identificar el tipo de distribución que mejor se ajusta a la distribución de la población y que afecta a las interacciones entre agentes, (2) determinar el impacto de la densidad de las interacciones en el espacio, (3) identificar y modelar las variables que determinan que tales interacciones se produzcan, y (4) determinar el impacto de la interacción en la conducta de los propios agentes.

La viabilidad de un modelo de simulación exige dar una respuesta tan natural como sea posible a estos problemas. En relación con el papel que juega el modelo de distribución estadística, la respuesta mas simple y también menos discutible es la que consiste en comparar distintos modelos de distribución que presenten la red social en su totalidad, es decir, ignorando la defección o pérdida de agentes, sea por exclusión o sea por otras causas naturales. En relación con el número de individuos que interactúan en un entorno acotado, la respuesta mas simple es replicar el efecto de la densidad de población que interactúa, una variable que ha permitido identificar propiedades emergentes de una red social, y describir cambios de fase en el comportamiento de la red en analogía con los modelos moleculares y atómicos conocidos de la física estadística. La variable de densidad es, ciertamente, una variable crítica y así se ha contemplado en las implementaciones de un modelo de jerarquías emergentes. La densidad no tiene efectos lineales sobre la conducta de los individuos ni en la estructura social.

Las redes de escala libre no resultan únicamente del empleo de un proceso generativo probabilístico. Erdős, & Rényi (1959) estudiaron un modelo de desarrollo de grafos en que, en cada paso, se eligen aleatoriamente de modo uniforme dos nodos que se conectan con una arista. Las propiedades de este tipo de redes aleatorias resultan ser diferentes

de las propiedades de las redes de escala libre; se necesita, pues, un modelo de desarrollo o crecimiento de una red de escala libre en los términos que sugieren Erdős, & Rényi (1959) con su metodología para otro tipo de redes aleatorias. El crecimiento de la red, es decir, la adición de nuevos nodos, no es una condición necesaria para crear una red de escala libre (Dangalchev, 2004). Las redes estáticas también pueden presentar las propiedades de una red de escala libre (Caldarelli, et al., 2002). Un tipo de red de escala libre es la que se expresa en un modelo de red jerárquica que se modifica en el curso de un proceso temporal (Ravasz, & Barabási, 2003). Las funciones de potencia se han adoptado como expresión de los procesos de formación de jerarquías bajo una serie de procesos estocásticos específicos. Se han propuesto diferentes tipos de modelos que satisfacen las condiciones de ser redes de escala libre en tanto satisfacen las propiedades de la función potencial descrita. Estas funciones de potencia se han relacionado con la ley de Pareto, de manera que, a menudo, han venido a confundirse con ella. Sin embargo, pueden emplearse modelos generativos que luego vienen a expresarse en la expresión más aceptada de una red de escala libre de naturaleza jerárquica tal como sugiere Gallos (2005), el modelo de configuración. Hilbert (2013) a pesar de reconocer la fascinación y aplicabilidad de una función potencial, muestra que el progreso tecnológico y la difusión de tecnología que presenta un tipo de distribución de colas pesadas no se ajusta a las propiedades generativas de un mecanismo modelable en términos de una función potencial, al menos por lo que se refiere al supuesto de adjunción preferencial, autoorganización crítica, optimización y observación aleatoria, en tanto existe una correlación entre demanda de tecnología e impulso tecnológico en el mercado.

3.1.3. Formación de jerarquías con funciones no potenciales

Al fin de contrastar la potencia explicativa y la adecuación empírica de los modelos de red que implementan una función potencial se incluyen en este análisis redes aleatorias que no satisfacen los requerimientos de una función potencial. Dos modelos de red se incluyen en este análisis, aunque formalmente no constituyen una expresión de un modelo construido a partir de una función no potencial. El primer modelo se construye aleatoriamente a partir de una secuencia esperada de grados en los términos propuestos por Fan, & Lu (2002). En la presentación de resultados de la simulación este modelo de red con una secuencia esperada de grados aleatoriamente determinados se identifica bajo las siglas EX. El modelo no implementa una secuencia de grados que siempre responda a algún tipo de función no potencial; al conformarse la secuencia aleatoriamente no se excluye que pueda formarse una red que satisfaga una función potencial. El segundo modelo, que se presenta en los resultados como un modelo de red bajo las siglas UF, es un modelo en que aleatoriamente se conforma una secuencia de grados uniforme que en principio se

correspondería con un modelo real en el que todos los actores de una red social tuvieran aproximadamente el mismo número de conexiones a otros nodos de la red. La secuencia válida seleccionada se asigna a un modelo de configuración. Se fuerza de este modo la implementación de un algoritmo de configuración con una secuencia que no satisface una ley potencial.

Ambos modelos representan dos aplicaciones del algoritmo de competición que se implementa, en el que una serie aleatoria de grados define una red con una secuencia esperada de grados –el algoritmo EX– y un modelo en que la secuencia de grados es uniforme, dos condiciones límite, al objeto de testar si los efectos que se buscan aparecen únicamente cuando se satisfacen las condiciones de una función potencial en los términos expresados primero por el modelo de [Bonabeau, Theraulaz, & Deneubourg \(1995\)](#) y luego por los modelos de [Lacasa & Luque \(2006\)](#) y [Gallos \(2005\)](#). Se trata de testar, en modelos de redes de esta naturaleza, los mismos efectos que se presentan en el estudio del impacto que en un modelo de configuración tienen las variables de densidad y agrupamiento, como mas adelante se explica, en que emerja un cambio de fase entre una sociedad igualitaria y una sociedad jerarquizada . La primera de estas variables se refiere al impacto del aumento de la densidad de red, es decir, el aumento del porcentaje de agentes que interactúan, y la segunda al grado de agrupamiento que la red presenta conformando comunidades o coaliciones. En lugar de manipularse la formación de estas coaliciones por un algoritmo predeterminado a priori, el impacto del agrupamiento se examina empíricamente a partir de la formación de una red de nodos aleatoria en una secuencia aleatoria de grados, sea una secuencia esperada o una secuencia uniforme en este caso.

3.2. Modelos de aplicación del modelo de configuración

Existe una diversidad de algoritmos o funciones generadoras que permiten generar una red de escala libre a partir de una función de potencia. En virtud de las propiedades que una función de potencia satisface, es posible examinar empíricamente el impacto de variables a menudo olvidadas en el análisis de la conformación de una red jerárquica, particularmente, y en relación con el objeto de este trabajo, el cambio de fase que tiene lugar desde una sociedad igualitaria a una sociedad jerárquica. El cambio de fase se expresa en términos de la varianza de la distribución, tal como se define en la implementación del algoritmo de competición que se presenta, según el impacto que esa varianza tiene la densidad de interacción. Dos variables se presumen críticas en el proceso de formación jerárquica, el factor de densidad de red, y el factor o coeficiente de agrupamiento; se presume que ambas variables contribuyen a la conformación de una

red jerárquica que se expresa en un incremento consistente de la varianza. La variable de densidad de red se modela en los términos sugeridos por [Castellano, et al. \(2009\)](#), y [Gallos \(2005\)](#) cuando discuten el alcance de aplicar el modelo de configuración al modelo original de [Bonabeau, Theraulaz, & Deneubourg \(1995\)](#). El concepto de densidad se ha tratado en el capítulo anterior, en la página 12. Tal como se explica en relación con el modelo de Bonabeau en la página 32, la modificación más relevante al modelo de [Bonabeau, Theraulaz, & Deneubourg \(1995\)](#) fue introducida por [Stauffer, & Sá Martins \(2003\)](#) al substituir el parámetro libre η de la ecuación general por la desviación estándar de la distribución de magnitudes de fuerza de los agentes que interactúan. El algoritmo que se presenta introduce la desviación estándar σ con el propósito de determinar el cambio de fase que tiene lugar cuando aumenta la densidad de la red. De este modo, se genera un mecanismo de realimentación por el que una sociedad se desarrolla como una sociedad jerarquizada a medida que crece el número de interacciones locales, un proceso que finalmente se resuelve en ciertas propiedades holísticas que identifican la red como un sistema de red jerárquica. La segunda variable crítica que se considera por su posible impacto en la aparición de un efecto de cambio de fase es la preexistencia de coaliciones en la conformación de una red jerárquica, un concepto desarrollado en el mismo capítulo, en su página 18. Observemos que este efecto puede desaparecer a medida que aumenta el número de nodos de la red, ya que se produce un efecto de dilución de coaliciones. Fuera de este efecto de dilución, es razonable sospechar que el impacto de la densidad en el fenómeno de cambio de fase es distinto según el coeficiente de agrupamiento de la red. [Hadzibeganovica, Stauffer, & Han \(2015\)](#) han sugerido que el impacto de las diferencias de densidad entre sociedades altruistas y sociedades donde impera el etnocentrismo aumenta para aquellas cuando aumenta el número de conexiones subyacentes, y disminuye a medida que aumenta el tamaño de la población. Estos hallazgos de [Hadzibeganovica, Stauffer, & Han \(2015\)](#) sugieren que la aleatoriedad juega un papel importante en la aparición de relaciones de cooperación y contribuye a nuestra comprensión de los mecanismos que operan en la aparición de nuevas respuestas adaptativas. Extendiendo la noción de [Hadzibeganovica, Stauffer, & Han \(2015\)](#), puede asumirse en este trabajo, que una sociedad en la que existan coaliciones y comunidades fuertes serán menos proclives a configurarse como una sociedad fuertemente jerarquizada, al contrario que una sociedad en la que los lazos entre individuos en comunidades y coaliciones sean mínimos, débiles o incluso no existan. Es razonable sospechar que el control de un líder autoritario aumenta a medida que la sociedad esté menos vertebrada, una idea central tan propicia al análisis político y al análisis de la evolución y los procesos de organización social. La expresión empírica de este fenómeno, del papel que la existencia de comunidades fuertes y densas tiene en la aparición de un fenómeno de cambio de fase será una función típicamente oscilatoria en la que la sociedad alterna entre un estado de integración jerárquica y un estado de integración propio de una sociedad igualitaria cuando se manipula la densidad

de red. El mecanismo de relajación juega en este proceso un importante papel. Puede, sin embargo, suponerse que al contrario de lo que cabría esperar, la existencia de coaliciones internas de una sociedad igualitaria, podría ser la razón de que se configure una sociedad jerárquica. La simulación proveerá una respuesta a estas dos hipótesis alternativas.

El impacto de las variables de agrupamiento y de densidad puede estudiarse generando redes artificiales que verifiquen las propiedades de una red expresada por una función potencial. O puede estudiarse examinando la conformación de una red aleatoria que satisfice la condición de presentar los coeficientes de agrupamiento deseados. Manipular una red aleatoria para que contenga un número de triángulos o cuadrángulos representativos de la existencia de pequeñas comunidades o coaliciones presenta serias complicaciones técnicas en cuanto la manipulación del factor de agrupamiento viene limitado en una red de escala libre por las propiedades de una función potencial, tal y como se ha explicado mas arriba en relación con el coeficiente de agrupamiento. El coeficiente de agrupamiento es menor en redes de escala libre que en redes que no se conforman según una ley potencial. El coeficiente de agrupamiento expresa la densidad interna de una red aleatoria en cuanto conformada por coaliciones o comunidades. La caracterización y modelización de estas coaliciones excede los propósitos de este trabajo en tanto se requiere definir un algoritmo heurístico que resuelve en términos prácticos el problema de la partición. Aunque se han considerado algunos modelos en el epígrafe de la página 18, no existe un modelo aceptable y consolidado que permita formalizar el concepto, especialmente cuando se consideran las condiciones que eventualmente determinan que un grupo de agentes decida formar una coalición y cooperar entre sí en términos de los intercambios mutuamente ventajosos estudiados por la teoría de juegos, y las funciones de equilibrio de Pareto y Nash, que en último término determinan la estabilidad de una coalición. Así el examen del impacto de la existencia de coaliciones en una red compleja es una cuestión todavía mas difícil de lo que cabría anticipar. En una interacción interviene tanto el poder, el conocimiento y el prestigio de los agentes, como su capital, se exprese este capital en cualidades del agente, como sería su habilidad para imponer su conducta a otros, o su capacidad coercitiva –el tipo de recompensas o castigos que puede proporcionar en relación con la conducta afiliativa o competitiva que presentan los agentes con los que interactúa, o en relación con la defección en el seno de una coalición existente o en formación.

Efectivamente, el problema es que las acciones de un agente que forma parte de una coalición es medir el tipo de beneficios que reporta a un individuo formar parte de una coalición, cuando la competición al interior de esta coalición debe desaparecer a manos de la cooperación entre sus miembros. Parece razonable suponer que los individuos se abstienen de competir con aquellos agentes con los que comparten beneficios; una coalición solo debe presentar, idealmente, un tipo de acción que procura beneficios para

sus miembros. Para introducir este concepto de coalición deberíamos apelar a la teoría de juegos y evaluar qué tipo de creencias desarrollan los agentes miembros de una coalición y cómo perciben los beneficios de contribuir con sus acciones a la acción colectiva, lo que les exige evaluar la pérdida de autonomía y la maximización de utilidad relativa, es decir, la maximización de utilidad para cada miembro de la coalición en cuanto se asegura un rendimiento mayor a sus acciones cooperando con otros, en lugar de resolver sus necesidades por sí mismo. El concepto de coalición nos exigiría formalizar la información que manejan los miembros de la coalición y determinar las reglas que rigen el intercambio.

Frente a este tipo de problemas teóricos y metodológicos, la estrategia seguida en este trabajo es examinar empíricamente el comportamiento de un modelo de formación de jerarquías emergentes. Un enfoque empírico reduce el problema a considerar la evolución de la red social según presente índices o coeficientes mayores o menores de agrupamiento cuando concurre con la manipulación de la variable de densidad. En este enfoque empírico ignoramos la restricción que debe operar al interior de una coalición, la renuncia a competir de sus miembros, e ignoramos las reglas de reparto de beneficios que cada individuo, y las reglas que permiten a los agentes comparar que podrían obtener por sí mismos o cooperando con otros. La formación de jerarquías no resulta, necesariamente, de que existan coaliciones con carácter previo, o que la existencia de éstas supongan un obstáculo a la conformación de una sociedad jerárquica. El hecho de que las coaliciones representen subconjuntos disjuntos de una partición y que el conjunto de todas las coaliciones sean una partición exhaustiva del conjunto total son dos condiciones que difícilmente se ajustan a la realidad social ordinaria. Así a los problemas que se derivan de la formalización del concepto de coalición, a los problemas que se derivan de la definición de un algoritmo se suman ahora las reglas que operan en la interacción, y la evaluación de la utilidad de coordinar las acciones con otros, y la distribución del excedente. De ahí que en este trabajo, se estudie empíricamente qué sucede en una sociedad de iguales, es decir, qué sucede en una estructura social en la que los individuos tienen la misma posición social, y cómo evoluciona esta sociedad a una sociedad desigual, formalmente jerarquizada, y como afectan a esa evolución el factor de densidad de interacción y el factor de agrupamiento. En este análisis empírico puede asumirse que una sociedad de agentes iguales fuertemente vertebrada en coaliciones y comunidades es más resistente a la conformación de una sociedad jerárquica que una sociedad en la que no existen grupos que puedan oponerse a la desigualdad. O, por el contrario, que una sociedad internamente vertebrada por coaliciones, éstas se estructuran de tal medida que generan desigualdad. En términos prácticos, este enfoque implica comparar redes sociales fuertemente organizadas con redes sociales carentes de organización interna. En otras palabras, pueden compararse redes sociales de un alto índice o coeficiente de agrupamiento con redes sociales de un bajo índice o coeficiente de agrupamiento. Esta

simplificación permite idealmente examinar el impacto que la autoorganización de la red tiene sobre las variables que identifican al sistema en su totalidad, el impacto de las variables de densidad de red y de agrupamiento en la aparición de un efecto de cambio de fase.

Para ampliar el espectro de algoritmos que permiten generar típicamente un modelo de red, que responda a una ley potencial en términos del modelo de configuración, se han implementado algoritmos que generan una red que satisface las condiciones del modelo de configuración, etiquetados con las siglas AP –implementa una ley potencial con un exponente automático preasignado–, HH –implementa una ley potencial con el algoritmo Havel-Hakimi–, PL –implementa una ley potencial con un parámetro libre, un exponente entero igual a 2 o a 3 normalizado para satisfacer una distribución de probabilidad, y, PV –implementa una versión de la ley potencial de Pareto. Este conjunto de algoritmos determinan la distribución de grados que luego se integra en una red de escala libre expresada bajo un modelo de configuración en un grafo no orientado del que se eliminan enlaces múltiples y autobucles. En teoría todos estos algoritmos generadores de una distribución de grados deben comportarse de forma análoga, excepto por el hecho de que presenten coeficientes de agrupamiento altos o bajos, y el rango de variabilidad de tales coeficientes de agrupamiento sean diferentes para cada algoritmo. El coeficiente de agrupamiento no se manipula, por tanto, directamente. Por el contrario, el coeficiente de agrupamiento resulta de la selección de las redes que resultan aleatoriamente imponiendo la condición de que sea menor o mayor de un cierto umbral. De este modo, se obtienen redes con un índice alto o bajo de agrupamiento. El rango de variabilidad de los índices de agrupamiento es diferente para los distintos algoritmos, tal y como se observa en las gráficas que se presentan y se refleja en la tabla adjunta 3.1. Como se observa en esta tabla el rango de variabilidad es muy desigual para cada red, dadas las restricciones formales de cada algoritmo. Se ha verificado empíricamente, bajo la restricción de un proceso de búsqueda de profundidad limitada, que los índices de agrupamiento superiores al umbral máximo e inferiores al umbral mínimo no pueden generarse para cada red en el número de iteraciones permitido, tal como se refleja en la implementación del algoritmo. La tolerancia expresada en el rango de coeficientes de agrupamiento para un proceso de búsqueda de profundidad limitada varía extraordinariamente entre algoritmos generadores.

TABLA 3.1: Coeficientes de agrupamiento para funciones potenciales generadoras.

Modelo	Alto índice	Bajo índice
AP	0,31	0,03
HH	0,59	0,19
PL	0,22	0,01
PV	0,07	0,00

El algoritmo Havel-Hakimi (Hakimi, 1962), que se expresa en los modelos de red HH, sigue el desarrollo propuesto por Chartrand, & L. Lesniak (1996). El algoritmo es un generador determinista que incluye una familia de funciones de ajuste curvilíneas. Dada una secuencia de grados, el grafo que resulta es siempre el mismo. El algoritmo asegura que los nodos de mayor grado siempre están conectados a nodos con el mayor grado. En este contexto, el algoritmo representa un caso límite de un modelo típico de configuración. El algoritmo permite expresar un tipo de red de máxima conectividad entre nodos con un número afín de grados (Takao, 1995).

3.3. Implementación de un modelo de competición

El principal objetivo de este proyecto es analizar los procesos de conformación de una sociedad jerárquica a partir de una sociedad igualitaria, un proceso de cambio que se expresa como un aumento progresivo de la desigualdad medido por la varianza de la distribución, un tipo de fenómeno emergente que se ha identificado con un efecto de cambio de fase. En este proceso de cambio de fase se examina el impacto de dos variables, la variable de densidad de población interconectada, y la variable de agrupamiento, la tendencia de los agentes a constituirse en comunidades y coaliciones. El impacto de la topología de la red en el comportamiento del sistema se expresa en la manipulación de los algoritmos que se han descrito anteriormente. Definidos estos algoritmos se relaciona la topología de la red con la aparición de un efecto de cambio de fase y se observa si empíricamente tiene impacto la manipulación de la densidad de la red, y la disposición de los agentes a formar grupos o coaliciones. Con este fin se ha programado la aplicación que se adjunta con la versión de Python 2.7, lanzada en el entorno Spyder de la aplicación Anaconda que permite integrar los recursos de la librería Networkx.

La aplicación desarrollada incluye una serie de recursos y utilidades. Entre los recursos se incluyen funciones de construcción de un modelo de configuración, construcción de secuencias de grados, utilidades para la impresión de grafos, y utilidades para definir una métrica de la red, en particular, una métrica sobre triángulos, y una métrica para determinar la asortatividad, transitividad, centralidad, estructura arborea y agrupamiento promedio de la red. Aunque la ejecución del algoritmo implementado permite obtener estas medidas, solo la medida de agrupamiento promedio se toma en cuenta en el análisis posterior. La aplicación incluye una serie de utilidades de redes tales como cálculo de la matriz de adyacencia, determinación de componentes, direccionamiento de nodos, identificación de correspondencias nodos-vecinos, conversión de grafos, identificación del

grafo mayor de un grafo aleatorio, y funciones de impresión de histogramas. Otro conjunto de funciones se han programado para proceder al intercambio y reetiquetado de nodos.

El núcleo de la aplicación viene expresado por los modelos de red que se implementan, previamente descritos, y un bucle de ejecución idéntico para todos los modelos de red implementados. Respecto de los modelos de red implementados se incluyen redes que satisfacen una ley potencial, y redes que no representan la implementación de una ley potencial; entre los modelos que cumplen una ley potencial se incluyen: los modelos de red AP –implementa una ley potencial con un exponente automático preasignado–, HH –implementa una ley potencial con el algoritmo Havel-Hakimi–, PL –implementa una ley potencial con un parámetro libre, un exponente entero igual a 2 o a 3 normalizado para satisfacer una distribución de probabilidad, y, PV –implementa una versión de la ley potencial de Pareto; de los modelos que no satisfacen una ley potencial, se incluyen redes generadas por una secuencia esperada de grados, EX, y redes generadas por una secuencia uniforme de grados, al objeto de representar ejemplos de funciones que no satisfacen las propiedades de una función potencial. El bucle de ejecución sí requiere una descripción mas detallada en cuanto afecta al proceso de formación de jerarquías a partir de una sociedad inicialmente igualitaria. La aplicación presenta un menú que permite definir el número de nodos de la red y llamar a la función que implementa el modelo escogido y ejecutar el bucle de ejecución. El código fuente de la aplicación se adjunta con una descripción detallada y documentada de la función que se implementa en cada caso y a cada paso.

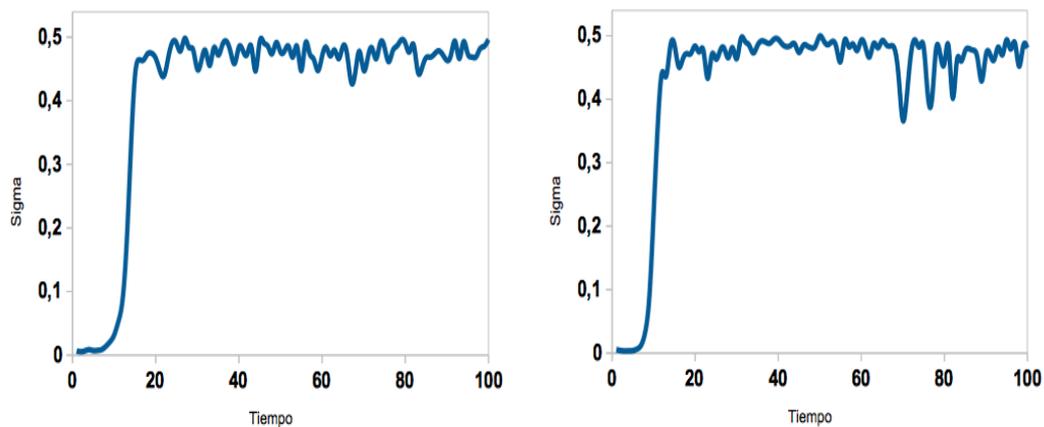


FIGURA 3.1: Modelo AP Alto agrupamiento (0.31): Panel A: 30%. Panel B: 60%.

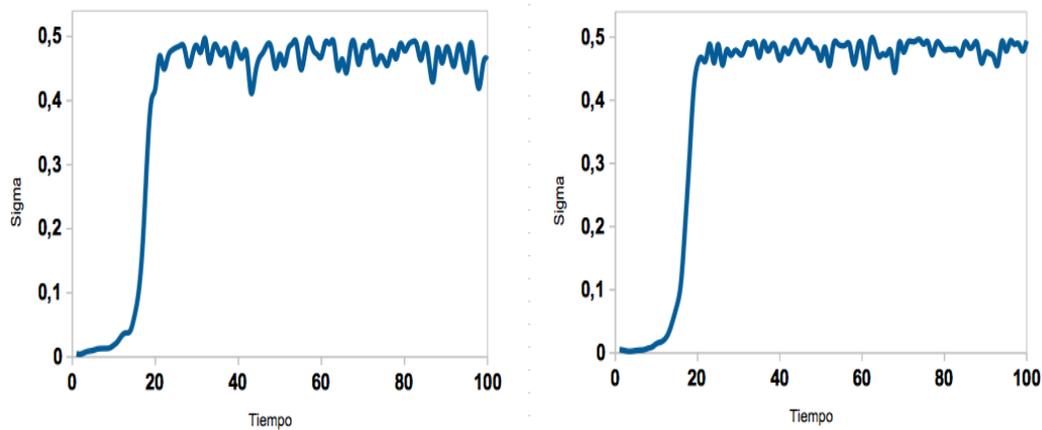


FIGURA 3.2: Modelo AP Bajo Agrupamiento (0.03): Panel A: 30 %. Panel B: 60 %.

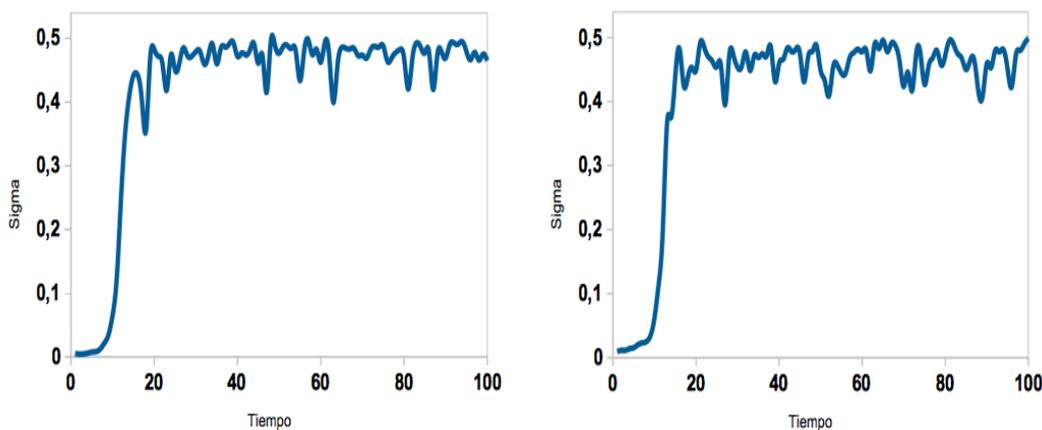


FIGURA 3.3: Modelo HH Alto agrupamiento (0.59): Panel A: 30 %. Panel B: 60 %.

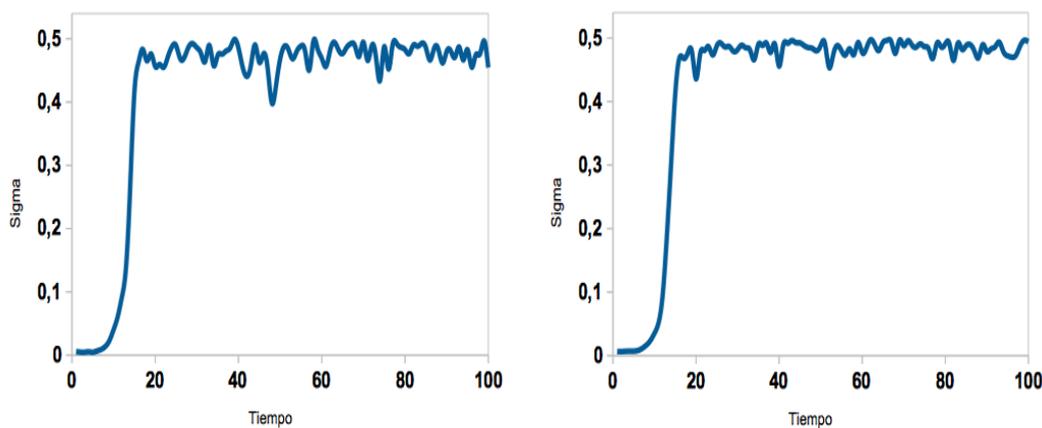


FIGURA 3.4: Modelo HH Bajo Agrupamiento (0.19): Panel A: 30 %. Panel B: 60 %.

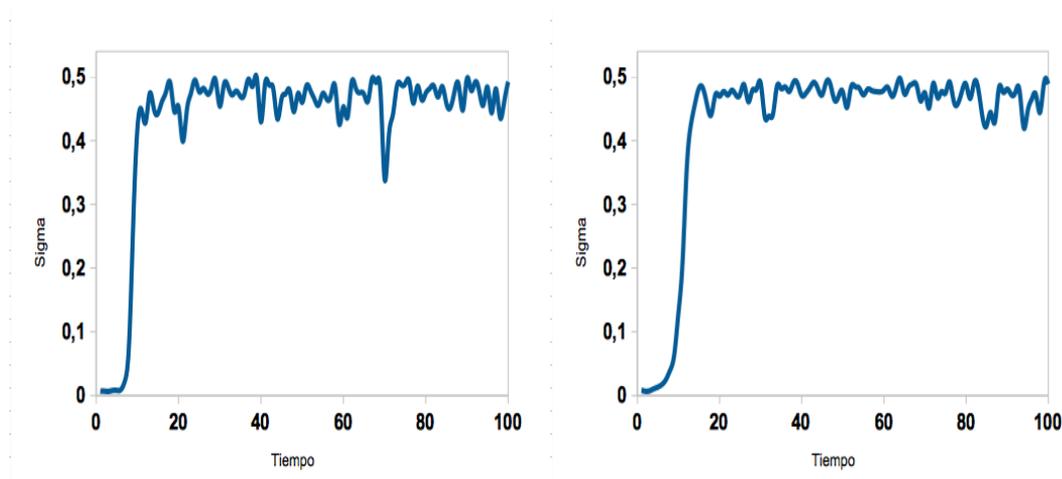


FIGURA 3.5: Modelo PL Alto agrupamiento (0.22): Panel A: 30 %. Panel B: 60 %.

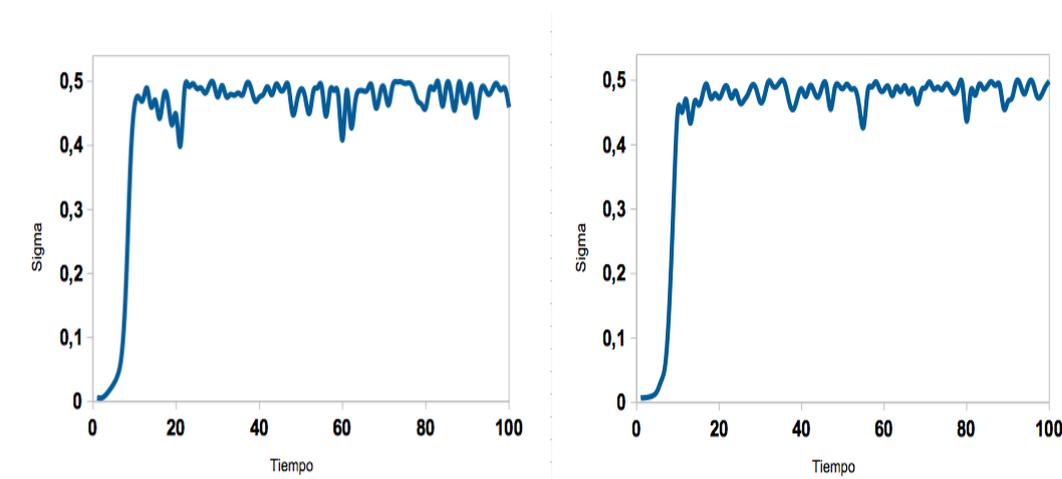


FIGURA 3.6: Modelo PL Bajo agrupamiento (0.01): Panel A: 30 %. Panel B: 60 %.

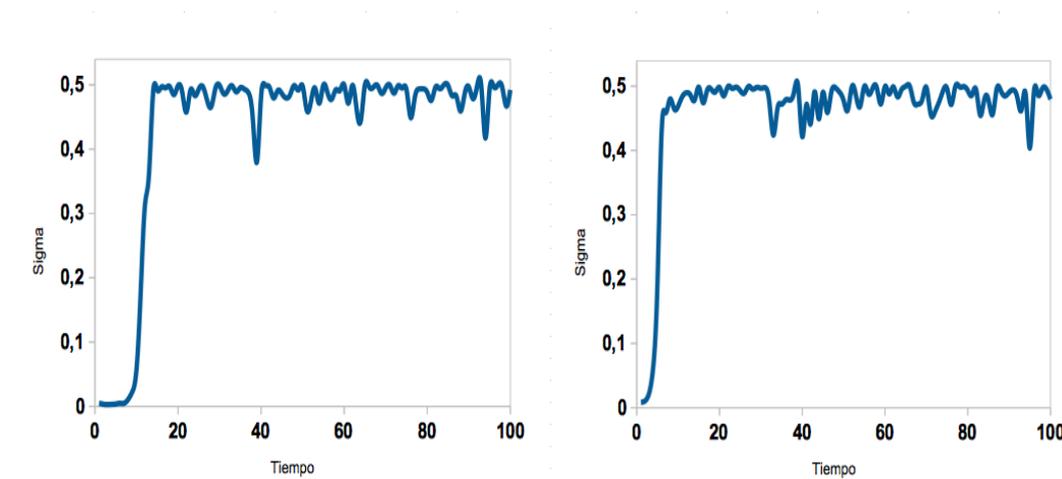


FIGURA 3.7: Modelo PV Alto agrupamiento (0.07): Panel A: 30 %. Panel B: 60 %.

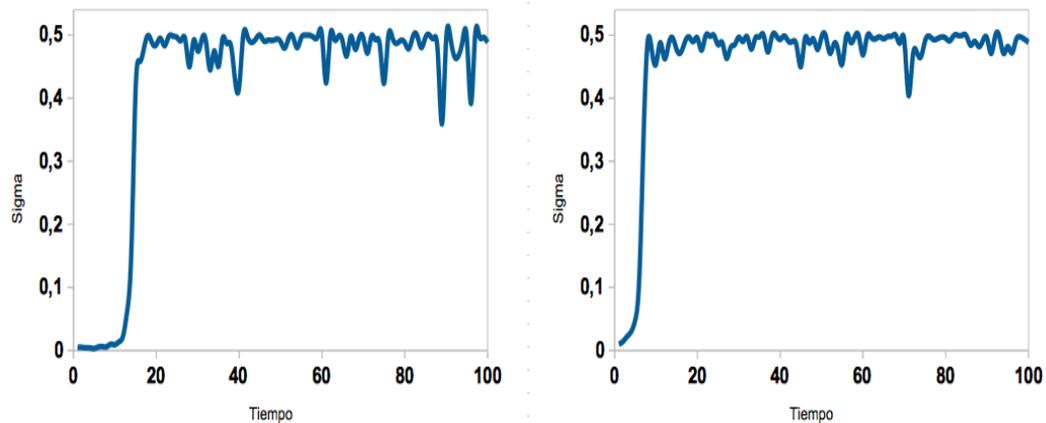


FIGURA 3.8: Modelo PV Bajo agrupamiento (0.00): Panel A: 30 %. Panel B: 60 %.

3.3.1. Estructura de un algoritmo de competición entre agentes

La rutina que ejecuta las funciones de red, una vez el usuario activa a partir del menú la ejecución de un modelo de red en particular, identifica, en primer término, la densidad de la red, es decir la fracción de nodos ocupados o densidad de conexiones de la población, simplificado como densidad de interacción en referencia a la existencia de un porcentaje de conexiones entre agentes relativo al total de conexiones posibles. La aplicación ejecuta consecutivamente todo el rango de variación de la densidad de red. Este parámetro inicial permite establecer las condiciones que se aplican originalmente a la ejecución del bucle temporal. El bucle temporal se ha definido en 100 unidades de tiempo. El número de ejecuciones, aunque predeterminado en el código, puede cambiarse. Al inicio de cada bucle temporal se actualiza la varianza obtenida en una ejecución anterior del bucle, e inicialmente se adopta, por defecto, como valor de varianza 0,01.

En el contexto de un bucle temporal, y tras la ejecución del algoritmo de competición que representa las interacciones que tienen lugar entre agentes, la rutina calcula y reemplaza el valor que representa la posición social de cada nodo por el producto del parámetro de relajación y por el valor de la posición social del nodo en cuestión. El parámetro de relajación identifica la variable que fuerza la igualación de las posiciones sociales de todos los nodos de la red. La noción de posición social simplifica el tipo de variables que afectan a la interacción entre agentes. Apela, en efecto, a una variable genérica que engloba cuantas características personales afectan a la interacción entre agentes humanos. La posición social es un instrumento de la acción en tanto la capacidad que tiene un agente depende estrictamente del reconocimiento que obtiene de quienes tratan con él, lo que se expresa en el reconocimiento social, en términos de este trabajo, su posición social. La noción de posición social representa, en particular, el mecanismo

por el que un agente, bajo ciertas condiciones de incertidumbre que no se consideran en esta implementación, compite con otro agente con el resultado de perder o ganar posición social, dando lugar, según los casos, a un intercambio de posiciones en la red. La topología de la red no cambia como resultado de las transformaciones que tienen lugar, ni respecto de la posición social de los actores ni respecto de la red de conexiones que asocia a un agente con otros. En efecto, el intercambio de posiciones en la red afecta a la posición de los nodos que se intercambian pero no a los enlaces que cada nodo hereda en función de este intercambio. Para hacer efectivo este cambio de posiciones, los nodos se reetiquetan funcionalmente mostrándose de este modo los cambios que han tenido lugar. Los nuevos valores de posición social se asignan de tal modo que en el siguiente paso temporal, el vector de posiciones sociales que identifica la posición social de cada nodo, queda actualizado.

Una vez que se ha actualizado el vector de posiciones sociales, se calcula la desviación σ la medida que identifica la variabilidad de posiciones sociales de la distribución y , por tanto, el grado de desigualdad que se ha producido en la red como consecuencia de la interacción local de los agentes que aleatoriamente compiten entre sí. El cálculo de la varianza se obtiene a partir de la ecuación 2.2, que substituye el parámetro η de la ecuación de Fermi 2.1 descrita en la página 32. El algoritmo introduce la varianza σ con el propósito de determinar el cambio de fase que tiene lugar cuando aumenta la densidad de la red. De este modo, se genera un mecanismo de realimentación por el que una sociedad se desarrolla como una sociedad jerarquizada a medida que crece el número de interacciones locales, un proceso que finalmente se resuelve en ciertas propiedades holísticas que identifican la red como un sistema de red jerárquica. La magnitud de la varianza representa un mecanismo de realimentación que se reintroduce en la próxima ejecución del bucle temporal. En cada bucle temporal se inicializa el vector de nodos de ganancias y pérdidas, para proceder a un nuevo cálculo.

El algoritmo de competición propiamente dicho está representado por el bucle de batallas o rondas de ataque, que representa las interacciones entre los agentes en un proceso de ejecución. El número de nodos lo decide el usuario. En la simulación que se presenta se han adoptado 100 nodos. Esta magnitud puede cambiar para todos los modelos aunque el tiempo de ejecución aumenta exponencialmente con un número de nodos mayor. Dado que el impacto de las variables críticas puede obtenerse con una red de 100 nodos, no se aportan simulaciones con un número mayor. Aleatoriamente, la rutina decide el nodo atacante y decide a cuál de sus vecinos ataca. En este bucle de ejecución se dan tantas batallas como nodos tiene la red, de tal manera que de forma aleatoria todos los nodos compitan, en promedio, al menos una vez en cada bucle. La competición determina que se compare la posición social del nodo atacante y la posición social del nodo atacado, resolviéndose la victoria o la derrota según cual de las dos magnitudes resulte mayor.

La probabilidad de ganar viene dada por la ecuación de Fermi 2.1. El atacante que gana la batalla suma 1 a su posición social, el atacante que la pierde resta 1 de su posición social. De forma análoga, el atacado puede ganar o perder, de manera que cambia su posición social según los casos. El intercambio de posiciones tiene lugar si el atacante gana, si, por el contrario, pierde mantiene su posición en la red pero pierde valor en el atributo de posición social a manos del atacado que gana. El algoritmo replica el modelo de Bonabeau, Theraulaz, & Deneubourg (1995) en cuanto el atacante puede atacar una posición no ocupada de la matriz que representa la red en su totalidad, para lo que se ha determinado previamente si la posición que ataca está vacía u ocupada, lo que se representa por la posición social del nodo atacado. Las interacciones entre agentes dan lugar a una actualización de su posición social y a un intercambio de posiciones de red, que origina, un reetiquetado de nodos que permite seguir el proceso de cambio que tiene lugar. La red resultante se copia en la siguiente ejecución. El algoritmo expresa la evolución de la red de manera que a medida que aumentan las interacciones entre los agentes se produce una reorganización de la red social que se identifica por los cambios de posición social local de sus agentes, el intercambio de posiciones en la red, y en el conjunto de la distribución, por la varianza σ . El algoritmo incorpora rutinas para el seguimiento del proceso de ejecución que se han inactivado, y rutinas activas que documentan los resultados del proceso de ejecución. Los resultados generados se tratan después para construir los gráficos que permiten mostrar las transiciones de fase según la densidad.

En cuanto al impacto del coeficiente de agrupamiento, cada modelo de red incluye una condición que permite seleccionar de las redes aleatorias que eventualmente se generan, aquella que satisface el criterio de tener un coeficiente de agrupamiento superior a un umbral máximo o inferior a un umbral mínimo, arbitrariamente establecido en correspondencia con las propiedades formales de la red, de tal modo que se generen redes aleatorias con alto y bajo nivel de agrupamiento. Las gráficas de resultados para densidades del 30 % y del 60 % por magnitud de la varianza σ y tiempo, se presentan para coeficientes altos y bajos de agrupamiento para los modelos que implementan una función potencial o función de Pareto, el modelo AP, en las figuras 3.1 y 3.2, el modelo HH, en las figuras 3.3 y 3.4, el modelo PL, en las figuras 3.5 y 3.6, y el modelo PV, en las figuras 3.7 y 3.8.

3.3.2. Resultados de la aplicación bajo el modelo de configuración

Las gráficas mas relevantes que resultan de la simulación de la interacción en modelos multi-agente son, sin duda, las que permiten determinar el impacto de la densidad de red en la variabilidad de la distribución. Estas gráficas representan, por consiguiente, el

proceso por el que emerge una sociedad jerárquica a partir de una sociedad originalmente igualitaria. Estas gráficas relacionan magnitudes de varianza σ con magnitudes de densidad en el rango 0% – 60% y representan los resultados obtenidos para los distintos modelos que implementan una función potencial en términos de modelo de configuración. Las figuras 3.9 representan los resultados obtenidos para el modelo AP; las figuras 3.10, los resultados obtenidos para el modelo HH; las figuras 3.11 representan los resultados obtenidos para el modelo PL; y, las figuras 3.12 representan los resultados obtenidos para el modelo PV. Todas las figuras presentan datos para alto y bajo coeficientes de agrupamiento para cada modelo.

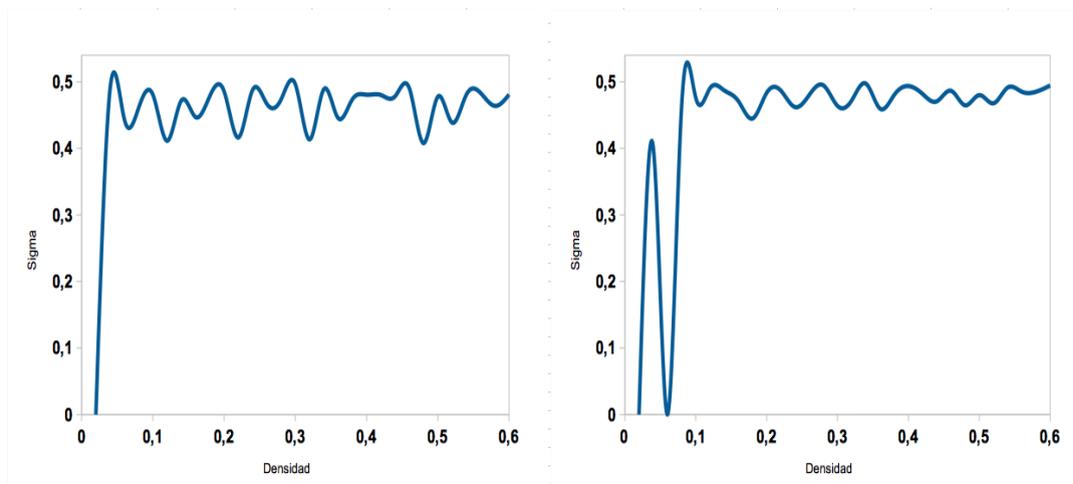


FIGURA 3.9: Modelo AP: Panel A: Alto agrupamiento. Panel B: Bajo agrupamiento.

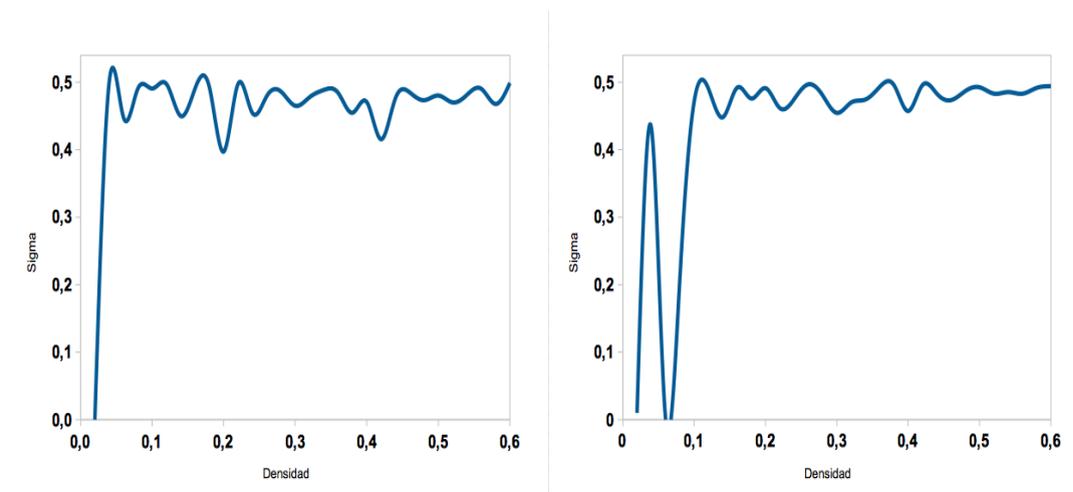


FIGURA 3.10: Modelo HH: Panel A: Alto agrupamiento. Panel B: Bajo agrupamiento.

De la simple observación de estas gráficas se deduce que las transiciones de fase de cada modelo varían según el coeficiente de agrupamiento, de tal modo que para el mismo rango de densidades, las redes con bajos coeficientes de agrupamiento presentan una oscilación aleatoria inicial que revela que la preexistencia de coaliciones afecta a la expresión de

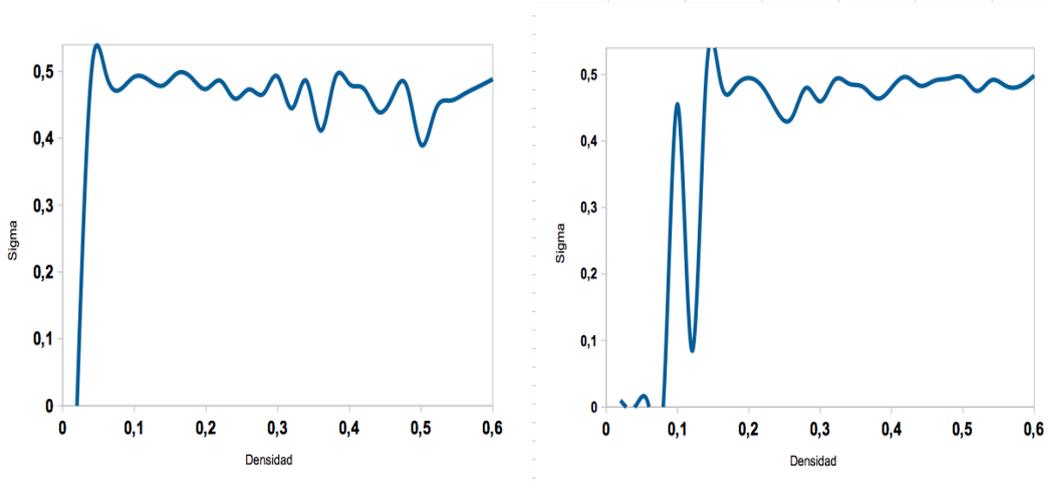


FIGURA 3.11: Modelo PL: Panel A: Alto agrupamiento. Panel B: Bajo agrupamiento.

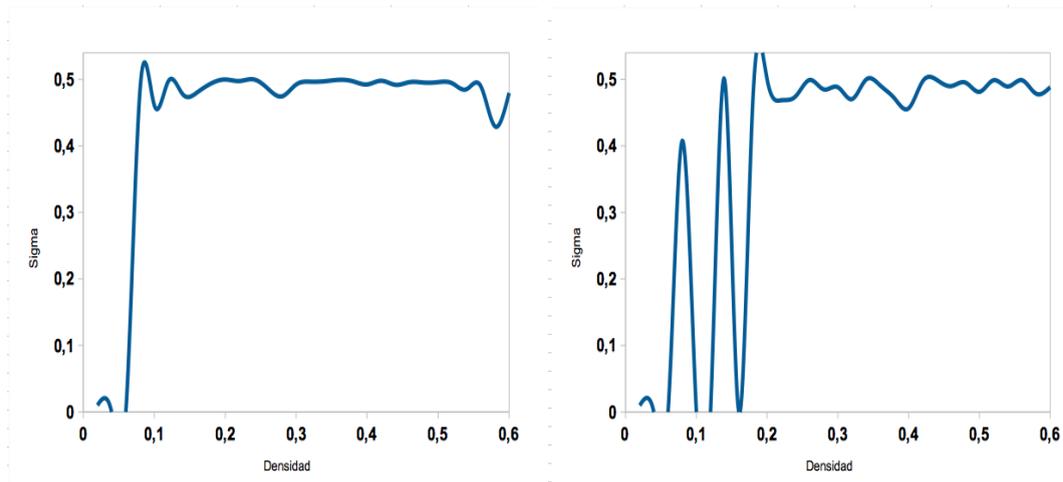


FIGURA 3.12: Modelo PV: Panel A: Alto agrupamiento. Panel B: Bajo agrupamiento.

un efecto de transición de fase. Por el contrario, para el mismo rango de densidades, las redes con altos coeficientes de agrupamiento presentan un efecto temprano de cambio de fase, lo que presumiblemente muestra que la existencia previa de coaliciones puede afectar a la formación de una sociedad jerarquizada. Frente a la hipótesis inicial de que una sociedad internamente organizada en comunidades pudiera resistir el desarrollo de una sociedad desigual, esta simulación demuestra que una sociedad inicialmente igualitaria con bajos niveles de agrupamiento resiste mas eficientemente, al menos, en el contexto del parámetro μ de relajación empleado, la formación de una sociedad desigual. En el desarrollo de las sociedades humanas es razonable suponer que la desagregación de los agentes individuales puede ser, en términos de un sistema constitucional del tipo del sugerido por [Buchanan \(1999\)](#), una expresión mejor de una sociedad igualitaria. La cuestión es que finalmente se impone una sociedad jerárquica a medida que aumenta el número de agentes que interactúan. La existencia de coaliciones previas representa un

tipo de red densa, de manera que facilita la aparición de una estructura jerárquica. Es obvio, que esta especulación debe examinarse en detalle. Esta simulación proporciona evidencia de que la emergencia de una sociedad desigual puede precisamente provenir de la existencia de grupos previos a la constitución de un orden social. Se corrobora fehacientemente que la variable de agrupamiento de los agentes tiene un impacto diferencial en la formación de una sociedad jerárquica. Podría suponerse que la existencia de coaliciones, tribus, sectas, asociaciones mafiosas, grupos de interés y grupos de presión, puede ser un mecanismo por el que venga a reforzarse y producirse desigualdad. Es evidente que tales grupos constituyen una reserva de capital para sus miembros, y la formación de un mercado de intercambio cerrado que genera estereotipias de comportamiento respecto de otros, y facilita la apropiación del excedente social. Constituiría una contribución adicional a este proyecto, el desarrollo de una serie de criterios de medida que permitiera comparar los distintos modelos en tanto el rango de variabilidad aceptable para cada modelo varía. Que estos criterios de medida no se aporten en este trabajo, no disminuye el valor de la evidencia obtenida, primero, transiciones de fase equivalentes para cuatro tipos de modelos generadores de redes que implementan una función potencial que se configura bajo el modelo de configuración, y, segundo, efectos consistentes del coeficiente de agrupamiento en la aparición de efectos tempranos o tardíos de cambio de fase dependientes de la manipulación de la densidad.

3.3.3. Resultados de la aplicación en modelos de función no potencial

Una cuestión crítica nace de preguntarse si la densidad de las interacciones tiene un impacto para cualquier topología de red con independencia de si la distribución de grados de la red responde a una función potencial. Con este propósito se compara el comportamiento de una red con una distribución esperada de grados, que no necesariamente resulte en una distribución que imite una función de Pareto. Este modelo está representado por el modelo EX que implementa una red con una distribución esperada de grados. En primer término se presentan los resultados gráficos que describen los efectos en el tiempo de la varianza σ , para altos y bajos coeficientes de agrupamiento. Las figuras 3.13 y 3.14 representan el impacto de esta decisión. Las figuras 3.15 muestran los resultados obtenidos para el modelo EX que relacionan densidad de interacciones y variabilidad σ . Tal como puede observarse directamente de las gráficas no es posible reconocer una transición de fase con una distribución esperada de grados. La densidad no tiene un impacto reconocible en la varianza. Las figuras 3.15 presentan un comportamiento oscilatorio de tal modo que es posible afirmar que las propiedades generadas por un modelo de función potencial, la estructura de la red que esta función configura, no

tiene un impacto neutral en la aparición de transiciones de fase. Se dan múltiples transiciones de fase que el tiempo no parece, esencialmente, consolidar, tal como expresan las figuras 3.15.

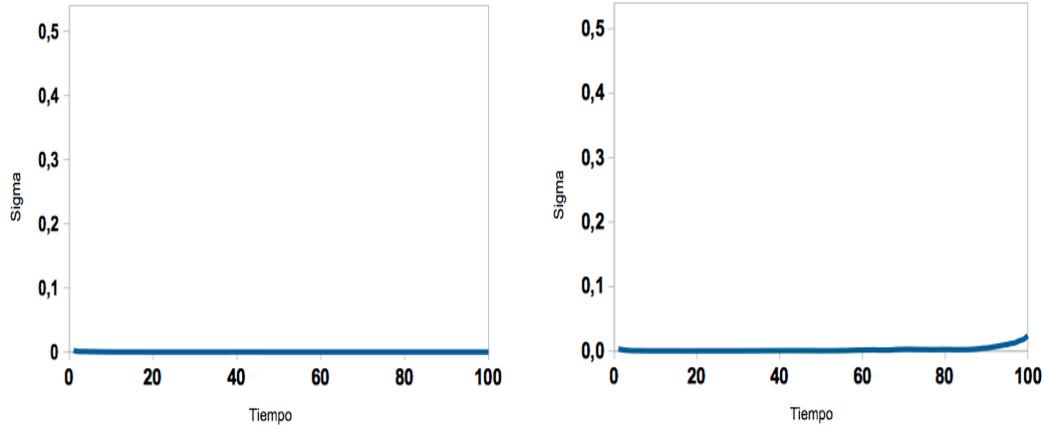


FIGURA 3.13: Modelo EX Alto agrupamiento (1.00): Panel A: 30 %. Panel B: 60 %.

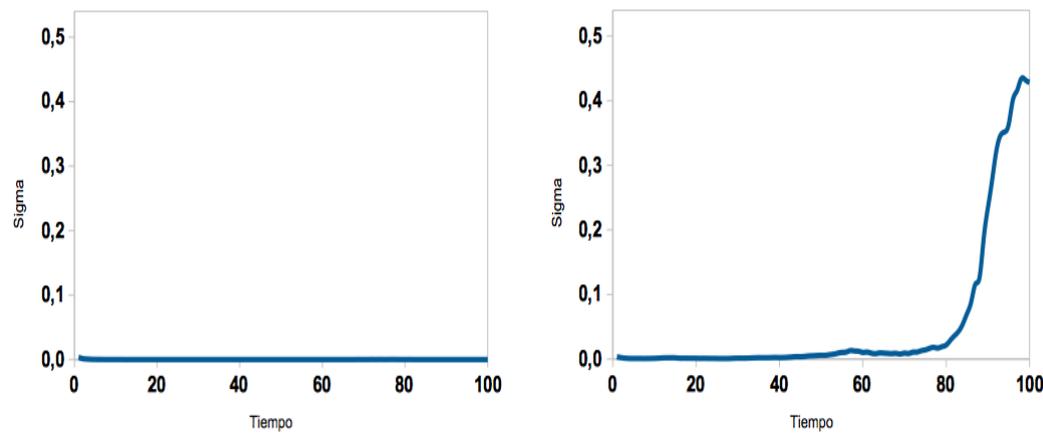


FIGURA 3.14: Modelo EX Bajo Agrupamiento (0.60): Panel A: 30 %. Panel B: 60 %.

A la vista de las gráficas obtenidas con un modelo de distribución esperada de grados, podría sostenerse que el impacto de la variable de densidad sobre la variabilidad de la distribución depende estrictamente del empleo de una función potencial. Para corroborar si, efectivamente, la relación entre variabilidad o desigualdad medida por la varianza σ , y la variable de densidad de interacciones se presenta o es específica de un modelo de distribución de Pareto, se ha estudiado el mismo efecto con una función de distribución de grados uniforme. Las figuras 3.16 presentan únicamente los resultados que se obtienen para dos parámetros de densidad del 30 % y el 60 % como se corresponde con el hecho de que una red con una distribución uniforme de grados no presente un rango de agrupamiento diferente para distintas ejecuciones del algoritmo. De estas gráficas es fácil

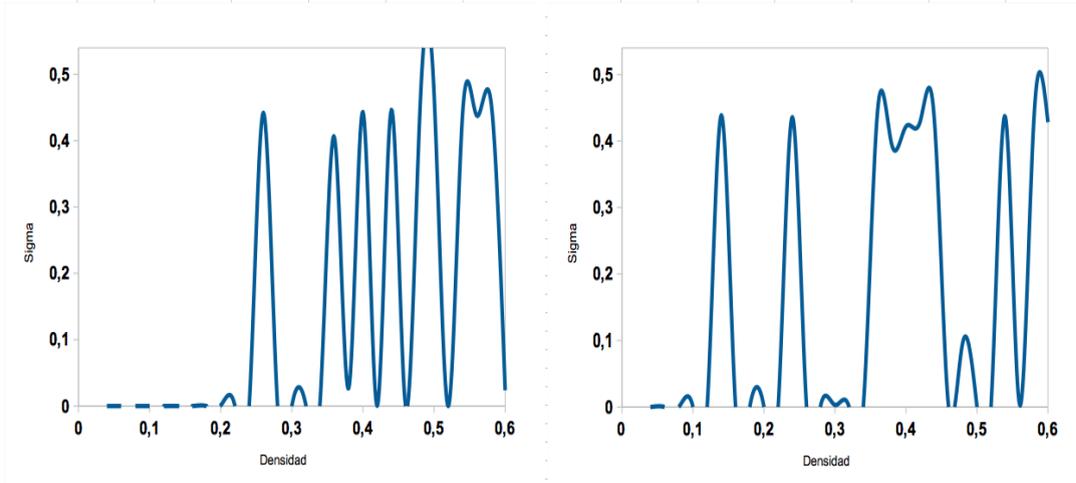


FIGURA 3.15: Modelo EX: Panel A: Alto agrupamiento. Panel B: Bajo agrupamiento.

deducir que existe una transición de fase equivalente para ambos niveles de densidad de consolidación temporal tardía, al menos si se compara con anteriores gráficas. Este dato ilustra que, tal vez, el impacto que tiene la densidad en la varianza es consistente y similar para cualquier densidad y se consolida en el tiempo con independencia de que la red presente una distribución de grados uniforme, como es el caso.

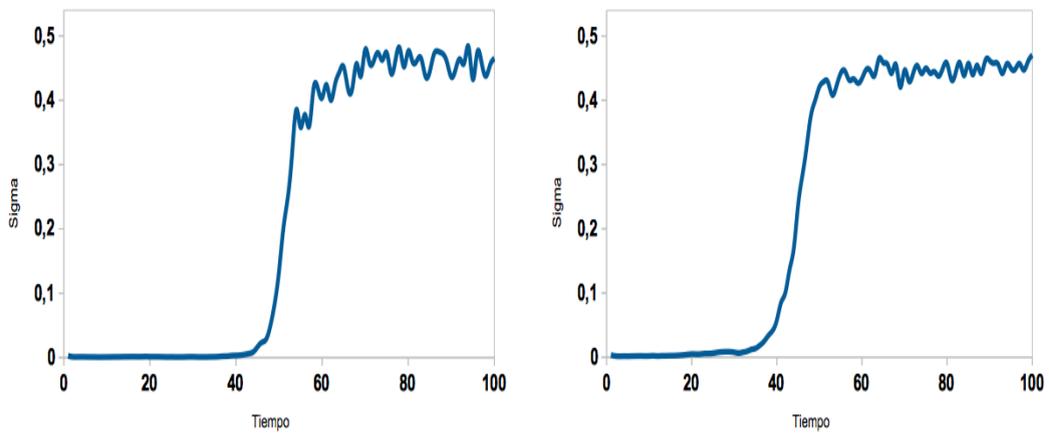


FIGURA 3.16: Modelo UF Alto agrupamiento (0.48): Panel A: 30%. Panel B: 60%.

Capítulo 4

Conclusión

La motivación inicial del proyecto fue examinar la evolución de un sistema social que partiendo de una sociedad igualitaria organizada en torno a agentes con iguales derechos y posición social se torna en el tiempo, en función de la densidad de las interacciones locales, en una sociedad desigual, y eventualmente jerárquica. La lógica del proyecto deriva de la importancia del concepto de red para simular el tipo de interacciones que tienen lugar en las redes neurales que soportan la cognición, y contribuir de este modo al modelado del cerebro humano. Al resultar opacos los procesos que llevan a un proceso de distribución de las neuronas en el cerebro humano en el fenómeno conocido como migración neuronal –que ocurre esencialmente con las neuronas piramidales de la corteza asociativa–, el estudio de cómo se conforma una sociedad jerarquizada puede tratarse como un magnífico y representativo modelo del cerebro. Obviamente, esta ambición no ha sido, sin embargo, el objeto del proyecto, sino únicamente, podría decirse, su secreta motivación. La complejidad del fenómeno, el que se produce como resultado de las interacciones locales entre agentes que se encuentra en la evolución de una sociedad a un tipo de estructura social jerárquica, no permitía albergar objetivos que no fueran esencialmente modestos. El trabajo que se presenta es una muestra de lo logrado, y señala también el camino para trabajos mas ambiciosos.

En el marco de un Trabajo Final de Master en el área de Teoría de Grafos y sus Aplicaciones del grupo de investigación en Matemática Discreta, se presenta un trabajo, a juicio de su autor, relevante y apasionante. Se ha implementado un algoritmo competitivo por el que una serie de agentes o actores compite por las posiciones sociales que otros ocupan que representan ventajas de posición. Como señalara [Castellano, et al. \(2009\)](#) es mas probable que en una red el nodo atacado en un proceso de competición tenga un número mayor de grados que el nodo atacante en virtud del principio de adjunción preferencial, de ahí que las interacciones tengan impacto en la conformación de una red

jerárquica construido en términos de un modelo de configuración. Una competición desigual determina que los actores sociales intercambien posiciones con otros que, sin tener impacto en la topología o estructura de la red, afectan a sus acciones futuras. En el curso de un proceso que tiene lugar bajo condiciones de incertidumbre, los sujetos que ganan la competición se posicionan en la red con mas frecuencia en aquellos nodos que disponían de un mayor número de conexiones o enlaces, de tal manera que, con el tiempo, llega a consolidarse una situación en que ciertos actores mejoran su capital inicial y otros, los que pierden en el curso de esa competición, pierden parte de su capital. El resultado de la competición viene representado por el aumento de la varianza de la distribución por el que un conjunto de agentes dispone de un mayor capital, mientras otros lo mantienen o lo ven disminuido. Tal como se ha explicado en los capítulos anteriores, la expresión de ese capital se expresa en el concepto de posición social, que identifica los recursos que un agente tiene cuando decide competir por la posición social de otro.

La descripción del modelo de [Bonabeau, Theraulaz, & Deneubourg \(1995\)](#) permitió estudiar el primer modelo propuesto para explicar la conformación de un sistema social jerarquizado. Con ocasión de su presentación, se presentaron las anomalías, problemas y críticas formuladas contra este modelo, y las implementaciones alternativas del modelo modificando parámetros de la red propuesta por Bonabeau o alterando su estructura matricial. Los cambios propuestos y los algoritmos que los desarrollan mostraron que una variable crítica en la observación de una transición de fase, de una sociedad esencialmente igualitaria a una sociedad desigual y jerárquica ocurre cuando aumenta la densidad de la red, el número de interacciones en que entran sus agentes. En este trabajo se ha presentado evidencia de que la implementación de una función potencial en un modelo de configuración satisface a la vez los requerimientos del modelo original de [Bonabeau, Theraulaz, & Deneubourg \(1995\)](#) y lo extiende e implementa en distintos tipos de redes aleatorias todas las cuales expresan la misma función potencial. Sin embargo, el modelo generador de la estructura de la red no resulta ser por completo indiferente. Incluso aunque en todos las versiones del modelo de configuración, con independencia de la función generadora de la distribución de grados, puede observarse una transición de fase de una sociedad igualitaria a una sociedad jerárquica en función de la densidad de la red, el momento en que se presenta esta transición de fase es bien distinta cuando se considera el impacto de la variable de agrupamiento, es decir, el fenómeno social por el que los individuos se agrupan u organizan en grupos, o coaliciones. El trabajo que se presenta justifica la relevancia de la variable densidad de interacción en la aparición de un efecto de transición de fase, y aporta evidencia del efecto de transición de fase bajo distintos modelos de red y evidencia del impacto que puede tener la existencia previa de coaliciones en una sociedad inicialmente igualitaria. Así pues, el proyecto ha aportado novedad al estado de la cuestión, implementando una rutina de competición entre agentes

que emplea una medida dinámica de varianza, y ha presentado evidencia del impacto de la densidad de interacción en el efecto de transición de fase. Este hallazgo replica y extiende los resultados obtenidos en buena parte de la bibliografía que se cita. Constituye una aportación original mostrar que el efecto holístico que nace de las interacciones locales entre agentes no se comporta igual cuando se examinan las diferencias empíricas entre redes de altos y bajos coeficientes de agrupamiento. De una parte, se obtienen efectos análogos con cualquiera de las implementaciones de un modelo de configuración, con independencia de la función generadora de red que se utilice, pero de otra, las redes de bajo coeficiente de agrupamiento presentan, frente a redes preorganizadas en coaliciones, un comportamiento oscilatorio y un valor de densidad crítica posterior o tardío en comparación. La transición de fase en redes con coeficientes relativamente bajos de agrupamiento presentan transiciones de fase más tardías que las redes con coeficientes relativamente altos de agrupamiento. El hallazgo, novedoso en la literatura científica en la teoría y la ciencia de redes muestra la extraordinaria importancia que la existencia de coaliciones tiene en la conformación de una sociedad jerárquica, tanto más notorio el hallazgo por cuanto se trata de una derivación empírica de un modelo de simulación de interacciones que no ha examinado la existencia de esas coaliciones en términos formales, de acuerdo con un modelo de interacciones explicable en términos de la teoría de juegos, sino empíricamente.

Como siempre ocurre en cualquier proyecto, las ambiciones iniciales se moderan a medida que el autor o autores del proyecto mejoran su conocimiento del tipo de problemas que deben afrontar, y el tipo de problemas que es posible resolver. No existen algoritmos deterministas eficientes para resolver en qué coaliciones puede entrar un agente. En general, un agente entra en una coalición cuando examina los beneficios de la interacción y decide cambiar de coalición cuando percibe beneficios en el cambio. Este proceso de formación de coaliciones no ocurre considerando todas las opciones de coaliciones posibles. Por el contrario, cada agente determina con quién coaligarse en función de con qué agentes interactúa, y evalúa de acuerdo con la información disponible qué agentes podrían representar mejor la condición de socios. Para definir estas coaliciones es preciso el desarrollo de un algoritmo heurístico según el cual es posible formar una coalición no trivial que proporciona beneficios a todos sus miembros y que es estable, en el sentido de que no sobrevive amenazada por la presión de coaliciones externas y otros agentes candidatos a ser miembros. Se presentaron en el segundo capítulo de este trabajo las dificultades que representa el análisis del proceso de formación de coaliciones, y se explicó entonces que el problema de la formación de coaliciones es un problema *NP*, un problema que solo puede ser resuelto en tiempo polinomial por una máquina de Turing no determinista. En otros términos solo una función aleatoria puede dar lugar a una solución óptima en un tiempo eventualmente finito. El hecho, sin embargo, no es

que no pueda ofrecerse una estructura social de coaliciones que en conjunto representen una partición exhaustiva del sistema social; también se requiere considerar un criterio independiente para determinar cuán eficiente es una coalición frente a otras, es decir, determinar si es o no óptima, y esta es precisamente la propiedad que caracteriza a problemas NP , esa decisión inequívoca no es posible, a menos que se consideren particiones que no maximizan la modularidad. Ocurre, además, que el supuesto de un tipo de partición exhaustiva en coaliciones de un sistema social, y el supuesto de que todas las coaliciones deben ser disjuntas, es empíricamente inadecuado.

Para sortear las dificultades que representa afrontar un problema inicialmente intratable que requiere el desarrollo de un algoritmo heurístico, se adoptó la decisión de considerar la fragmentación de una sociedad en coaliciones empíricamente, es decir, considerando el agrupamiento espontáneo que se produce en la generación de una red aleatoria. El resultado representa una aportación al debate, de una parte se confirma el fenómeno de transición de fase de una sociedad igualitaria a una sociedad jerárquica, un efecto modulado por el impacto de la variable densidad de red en la varianza de la distribución que identifica como varía el capital entre agentes en el curso del tiempo, y de otra se aporta evidencia de que el aumento de la desigualdad ocurre en virtud de las relaciones que contraen los individuos al interior de comunidades, grupos o coaliciones en tanto estas coaliciones pueden expresarse en términos de una métrica de redes común, como es el caso de los coeficientes de agrupamiento que expresan el número de triángulos y de cuadrángulos que existen en la red, es decir, el número de coaliciones de tres o cuatro agentes que interactúan entre sí. El impacto del coeficiente de agrupamiento en una red es coherente con las observaciones de [Newman \(2009\)](#).

Otras aportaciones de este trabajo no son, en absoluto, marginales o despreciables. El empleo de una red con una distribución esperada de grados no genera en modo alguno transiciones de fase del tipo de las que se observan en redes que implementan la función de Pareto, mostrando que el valor explicativo del efecto de transición de fase es una propiedad no accidental del empleo de un modelo de configuración que implementa una función potencial. Sin embargo, se aporta en este trabajo una evidencia, todavía débil y parcial, de que una distribución de grados uniforme también genera transiciones de fase análogas al de un modelo de configuración, semejantes para distintas magnitudes de densidad de interacción. La observación permitiría cuestionar las propiedades de los modelos que implementan una función potencial, un resultado crítico para el tipo de propiedades que las redes de escala libre se supone presentan. En su lugar, ya se aportó evidencia reciente que confirma que tales propiedades no siempre se verifican.

Una limitación esencial de la implementación del algoritmo de competición presentado en este trabajo deriva de la velocidad de proceso de la computadora utilizada y de los

propios recursos empleados, incluido el empleo de las librerías Networkx y el lenguaje de programación y la versión empleada de Python. Estas limitaciones afectan a la ejecución del algoritmo, practicamente desarrollado desde cero, excepto por el intensivo uso de la librería Networkx. Sin embargo, es notorio que esta librería, practicamente un proyecto individual que ha exigido un trabajo de implementación y documentación extraordinario, presenta importantes carencias. No existen recursos que satisfagan todas las necesidades, pero ejercicios desarrollados con el mismo modelo en Mathematica nos ha permitido resolver parcialmente las limitaciones que hemos afrontado. Queda el reto de construir un modelo mas eficiente y completo de simulación de una red social de agentes iguales o no jerarquizados que vienen, como resultado de sus interacciones, a formar parte de una sociedad jerárquica.

Apéndices

Apéndice A

Código fuente de la aplicación

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Sun Jan 9 20:25:05 2017
@author: jsainz
"""
from __future__ import division
import sys
import networkx as nx
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import itertools
import random
import curses
import warnings
import numpy as np
import networkx.utils
from networkx.algorithms.shortest_paths \
    import single_source_shortest_path_length as sp_length
from networkx.algorithms.assortativity.mixing import degree_mixing_matrix
from networkx.utils import powerlaw_sequence
from networkx.utils import uniform_sequence

warnings.filterwarnings("ignore", category=UserWarning, module="matplotlib")
with warnings.catch_warnings(): warnings.simplefilter("ignore")

##### Rutinas #####
```

```

def create_degree_sequence(nodes, sfunction, max_tries=500, **kwds):
    #Grado minimo 1 y maximo nodos-1;
    n = int(nodes)
    tries, max_deg, is_valid_seq = 0, n-1, False
    while tries < max_tries:
        trialseq=sfunction(n,**kwds)
        # redondeo a enteros en el rango [1,max_deg]
        seq=[min(max_deg, max( int(round(s)),1 )) for s in trialseq]

        is_valid_seq = nx.is_valid_degree_sequence(seq)
        avg_deg = float(sum(seq))/len(seq)
        print ("Grados promedio: ", avg_deg)

        if is_valid_seq: return seq #Devuelve secuencia si es valida
        tries+=1
    raise nx.NetworkXError(\
        "Superado el numero (%d) maximo para una secuencia valida"%max_tries)

def configuration_model(deg_sequence,create_using=None,seed=None):

    if not sum(deg_sequence)%2 ==0:
        raise networkx.NetworkXError('Invalid degree sequence')

    if create_using is None:
        create_using = networkx.MultiGraph()
    elif create_using.is_directed():
        raise networkx.NetworkXError("Directed Graph not supported")

    #seed = None
    if not seed is None: random.seed(seed) #seed for random number generation

    # start with empty N-node graph
    N=len(deg_sequence)

    # allow multiedges and selfloops
    G=networkx.empty_graph(N,create_using)

    if N==0 or max(deg_sequence)==0: # done if no edges

```

```

        return G

    # build stublist, a list of available degree-repeated stubs
    # e.g. for deg_sequence=[3,2,1,1,1]
    # initially, stublist=[1,1,1,2,2,3,4,5]
    # i.e., node 1 has degree=3 and is repeated 3 times, etc.
    stublist=[]
    for n in G:
        for i in range(deg_sequence[n]):
            stublist.append(n)

    # shuffle stublist and assign pairs by removing 2 elements at a time
    random.shuffle(stublist)
    while stublist:
        n1 = stublist.pop()
        n2 = stublist.pop()
        G.add_edge(n1,n2)

    G.name="configuration_model %d nodes %d edges"%(G.order(),G.size())
    return G

def printer(G): #imprime el grafo
    sys.stdout.flush()
    #print("Aristas:", G.edges())
    #sys.stdout.flush()
    #print("Secuencia de grados:", G.degree())
    #sys.stdout.flush()
    #print('Tipo de grafo: ',type(G))
    pos = nx.spring_layout(G)
    nx.draw_networkx_labels(G,pos)
    nx.draw(G, pos, with_labels=False)
    plt.savefig(G.name + ".png") #guarda un grafo .png
    #plt.show() #presenta un grafo .png

def measures(G): #imprime el grafo
    G = G.to_undirected()
    #print("Centralidad: " centrality(G))
    print("Metricas: %d" %sumMetric(G))
    print("Numero de triangulos: %d" %round(countTriangles(G)/3))

```

```

print("Densidad: %3.2f" %density(G))
print("Asortatividad: %3.2f" %assortativity(G))
#if not nx.is_directed(G):
print("Transitivity: %3.2f" %transitivity(G)) #no multigrafo
print("Conglomerado promedio: %3.2f" %averageClustering(G)) #no multigrafo
return averageClustering(G)

##### Utilidades de redes #####

def adjacency(G):
    return nx.adjacency_matrix(G)

def nodesConnected(G, u, v):
    return u in G.neighbors(v)

def fetchNodes(G, node, seen = None):
    if seen == None:
        seen = set([node])
    for neighbor in G.neighbors(node):
        print(neighbor)
        if neighbor not in seen:
            seen.add(neighbor)
            fetchNodes(G, neighbor, seen)
    return seen

#fetch_connected_nodes(assembly, starting_node).

def connected_component_subgraphs(G, copy=True):
    for c in connected_components(G):
        if copy:
            yield G.subgraph(c).copy()
        else:
            yield G.subgraph(c)

def connected_components(G):
    #Generate connected components.
    seen={}
    for v in G:
        if v not in seen:
            c = sp_length(G, v)

```

```

        yield list(c)
        seen.update(c)

def initSequence(G): #selecciona al azar la serie de nodos iniciales
    source=[] #secuencia de nodos origen
    while len(source) < len(G):
        x = random.randint(0,len(G)-1)
        if x not in source:
            source.append(x)
    print("Secuencia origen: ", source, len(source))
    return source

def matchSeries(G, source):
    y = [] #secuencia de nodos destino
    sys.stdout.flush()
    for i in xrange(len(source)):
        target = [] #lista vacia de nodos destino
        for j in xrange(len(G)):
            path = nx.single_source_shortest_path(G,source[i])
            #print path[j], len(path[j])
            if len(path[j]) == 2:
                target.append(path[j][1]) #registra nodos-destinos posibles
        y.append(target)
        sys.stdout.flush()
        print("Nodo: {}, origen: {}, destino: {}".format(i, source[i], target))
    matching=dict(zip(source, y))
    #sys.stdout.flush()
    #print("Lista: ", matching)
    #sys.stdout.flush()
    #print("Origenes: ", source)
    #sys.stdout.flush()
    #print("Destinos: ", y)
    return matching, y

def majorGraph(G):
    #graphs = list(nx.connected_component_subgraphs(G))
    G = max(nx.connected_component_subgraphs(G), key=len)
    #Convierte un multigrafo en un grafo simple
    G=nx.Graph(G) #elimina aristas repetidas

```

```

G.remove_edges_from(G.selfloop_edges()) #elimina autoenlaces
remove = [node for node,degree in G.degree().items() if degree < 1]
G.remove_nodes_from(remove)

pos = nx.spring_layout(G)
nx.draw_networkx_labels(G,pos)
nx.draw(G, pos, with_labels=False)
plt.axis('off')
nx.draw_networkx_nodes(G,pos,node_size=160)
nx.draw_networkx_edges(G,pos,alpha=1)
plt.savefig(G.name+"Max.png")
plt.show()

def drawHistogram(G):
    G.name="GVh%d-%d"%(G.order(),G.size())
    degree_sequence=sorted(nx.degree(G).values(),reverse=True)
    dmax=max(degree_sequence)
    plt.hist(degree_sequence,bins=dmax)
    plt.title("Histograma de grados")
    plt.ylabel("Frecuencia")
    plt.xlabel("Grados")
    plt.savefig(G.name+"H.png")
    plt.show()

def setAttributes(H):
    #Asignacion inicial: set_node_attributes(H, 'name','value')
    nx.set_node_attributes(H, 'status', 1)
    a = nx.get_node_attributes(H,'status')
    sys.stdout.flush()
    print("status: ",a.items())
    return H

def relabel_nodes(G, mapping, copy): #Reetiqueta nodos del grafo
    if not hasattr(mapping,"__getitem__"):
        m = dict((n, mapping(n)) for n in G)
    else: m = mapping
    if copy: return nx._relabel_copy(G, m)
    else: return nx._relabel_inplace(G, m)

```

```

def swapNodes(H,base,n,m): #intercambiar nodos
    for i in xrange(H.order()):
        if (i != n) and (i !=m): base.append(i) #copia no intercambiables
        elif i==n: base.append(m) #destino
        else: base.append(n) #origen
    return base

#bucle de ejecucion de rondas de ataque para una secuencia aleatoria dada,
#paso virtual aleatorio de un nodo a otro adyacente con herencia de grado
def nodeLoop(H,counter,source,matching,target,module):
    origin = []; i = counter; y = target
    row = source[i] #recorre nodo por nodo e intercambia los nodos
    yRank = random.randint(0,len(y[i])-1); col = y[i][yRank]
    mRank = len(matching[col])
    mRank = random.randint(0, mRank-1); #print(mRank)
    sys.stdout.flush()
    print("Origen {}:Posicion {} -> Destino {}".format(row, yRank, col))
    sys.stdout.flush()
    print("Destino: {}, serie: {}, caso: {}".format\
        (col,matching[col],matching[col][mRank]))
    origin = swapNodes(H,origin,row,col) #intercambia nodos

    if i % module == 0: #dibuja un grafo cada n periodos
        mapping=dict(zip(H.nodes(),source))
        R=nx.relabelNodes(H,mapping, True)
        R.name="GVs%d-%d-%d"%(i,R.order(),R.size())
        printer(R)
        measures(H) #Metricas aplicables a un grafo generico

    return origin #nodos reetiquetados que heredan las mismas aristas

##### Metrica de redes #####

def sMetric(G): #suma de productos deg(u)*deg(v) por arista de G
    #Devuelve el real s que indica la s-metric de un grafo.
    # Lun Li, David Alderson, John C. Doyle, and Walter Willinger,
    # Towards a Theory of Scale-Free Graphs: Definition, Properties, and
    # Implications (Extended Version), 2005.
    # http://arxiv.org/abs/cond-mat/0501169

```

```

    sys.stdout.flush()
    return sum([G.degree(u)*G.degree(v) for (u,v) in G.edges_iter()])

def wedgeIterator(G):
    for node in G.nodes_iter():
        neighbors = G.neighbors(node)
        for pair in itertools.combinations(neighbors, 2):
            yield (node, pair)

def countTriangles(G):
    n = 0
    sys.stdout.flush()
    for wedge in wedgeIterator(G):
        if G.has_edge(wedge[1][0], wedge[1][1]) or G.has_edge(wedge[1][1], \
            wedge[1][0]):
            n += 1
    return n

def density(G):
    sys.stdout.flush()
    n = G.number_of_nodes()
    m = G.number_of_edges()
    if m==0 or n <= 1: density = 0.0
    else:
        if G.is_directed(): density = m/float(n*(n-1))
        else: density = m*2.0/float(n*(n-1))
    return density

def assortCoefficient(M):
    if M.sum() != 1.0:
        M=M/float(M.sum())
    nx,ny=M.shape # nx=ny
    x=np.arange(nx)
    y=np.arange(ny)
    a=M.sum(axis=0)
    b=M.sum(axis=1)
    vara=(a*x**2).sum()-((a*x).sum())**2
    varb=(b*x**2).sum()-((b*x).sum())**2
    xy=np.outer(x,y)

```

```

    ab=np.outer(a,b)
    return (xy*(M-ab)).sum()/np.sqrt(vara*varb)

def assortativity(G, x='out', y='in', weight=None, nodes=None):
    #Correlacion de grados de cada nodo con cada nodo conectado
    # Compute degree assortativity of graph.
    # M. E. J. Newman, Mixing patterns in networks,
    # Physical Review E, 67 026126, 2003
    # Foster, J.G., Foster, D.V., Grassberger, P. & Paczuski, M.
    # Edge direction and the structure of networks, PNAS 107, 10815-20 (2010).
    sys.stdout.flush()
    M = degree_mixing_matrix(G, x=x, y=y, nodes=nodes, weight=weight)
    return assortCoefficient(M)

def transitivity(G): #No definida para multigrafos
    sys.stdout.flush()
    return nx.transitivity(G)

def trianglesDegreeIter(G, nodes=None):
    nodes_nbrs = ((n, G[n]) for n in G.nbunch_iter(nodes))
    for v, v_nbrs in nodes_nbrs:
        vs = set(v_nbrs) - {v}
        ntriangles = sum(len(vs & (set(G[w]) - {w})) for w in vs)
        yield (v, len(vs), ntriangles)

def clustering(G, nodes=None, weight=None):
    # Generalizations of the clustering coefficient to weighted
    # complex networks by J. Saramaki, M. Kivela, J.-P. Onnela,
    # K. Kaski, and J. Kertesz, Physical Review E, 75 027105 (2007).
    # http://jponnela.com/web_documents/a9.pdf
    tdIter = trianglesDegreeIter(G, nodes)
    cluster = {v: 0 if t == 0 else t / (d * (d - 1)) for v, d, t in tdIter}
    if nodes in G: # Return the value of the sole entry in the dictionary.
        return cluster[nodes]
    return cluster

def averageClustering(G, nodes=None, weight=None, count_zeros=True):
    #  $C = \frac{1}{n} \sum_{v \in G} c_v$ ,
    sys.stdout.flush()

```

```

    c = clustering(G, nodes, weight=weight).values()
    if not count_zeros:
        c = [v for v in c if v > 0]
    return sum(c) / len(c)

def centrality(G):
    index = []
    index.append(nx.degree_centrality(G))
    index.append(nx.closeness_centrality(G))
    index.append(nx.betweenness_centrality(G))
    #index.append(nx.eigenvector_centrality(G)) #no converge
    index.append(nx.pagerank(G))

    for node in G.nodes_iter():
        sys.stdout.flush()
        measures = ("\t\t").join(map(lambda f: str(f[node]), index))
        print "%s: %s" % (node, measures)

def is_tree(G):
    if nx.number_of_nodes(G) != nx.number_of_edges(G) + 1:
        return False
    return nx.is_connected(G)

##### Bucle de ejecucion #####

def mainLoop(n, G, p, name):
    #Define la matriz de adyacencia; Se genera un grafo de nodos reordenados
    H=nx.Graph(adjacency(G)) #matriz de adyacencia de un grafo simple
    H.name="GVr%d-%d"%(H.order(),H.size())
    sys.stdout.flush()
    #print("Grafo maximo reenumerado:", H.degree())

    #printer(H) #Dibuja el grafo
    #sys.stdout.flush()
    avgCluster = measures(H) #Metricas aplicables al grafo
    #print("Cluster:", avgCluster)

    #Densidad p: Fraccion de nodos ocupados = Densidad de poblacion
    v = H.order(); nNodes = round(p*v)

```

```
vInit = range(v)
for i in range(0, v): vInit[i] = 'x'
sys.stdout.flush()
print("p, v, vNodes, x: ", p, v, nNodes)

x = random.sample(range(v-1),int(nNodes))
#print("Ocupados: ", x)
oState = vInit
for i in range(0, v):
    sys.stdout.flush()
    if i in x: oState[i] = 1
    else: oState[i] = 'x'
#print("PreAtaque: ", oState) #Estado x - Ocupado 1

sigma = 0.01;
data = []

#Bucle temporal = 100; bucle de batallas = numero de nodos
for time in range(0,100):
    #print("Sigma, Status del bucle: ", sigma, oState)

    #Inicio del bucle de n batallas, siendo n = numero de nodos
    #Registro acumulativo de la probabilidad del ganador
    winVector = []

    for battles in range(0,int(n)):

        y = random.choice(x) #eleccion de nodo atacante de un conjunto
        sys.stdout.flush()
        #print("nodo atacante: ", y)

        neighbors = []
        for neighbor in H.neighbors(y): #eleccion de vecino a atacar
            neighbors.append(neighbor)

        aN = np.asarray(neighbors)
        #print("vecinos: ", neighbors)
        z = random.choice(aN)
```

```

sys.stdout.flush()
#print("nodo atacado: ", z)

sequence=H.degree().values() #
source=[] #secuencia original de n nodos del grafo H
for i in range(0, len(sequence)): source.append(i)
#print("H source: ", source)
#Htest=nx.adjacency_matrix(H) #matriz de adyacencia n
#print("H: ", Htest.todense())
#matching, target = matchSeries(H, source) #nodos-destinos
#source = initSequence(H) #si aleatoriza secuencia original
#print("Secuencia origen: ", source, len(source))

#Competicion atacante-atacado: intercambio de status entre nodos
yWin = False
if oState[z] != 'x':
    win, v = [],[]
    winProb = 1/(1 + math.exp(sigma*(oState[z]-oState[y])))
    #Registra la probabilidad del ganador
    winVector.append(winProb)

    win.append(1-winProb); win.append(winProb)
    v.append(int(0)); v.append(int(1))
    aWin = np.asarray(win); aV = np.asarray(v)
    score = np.random.choice(aV,1,True,aWin)
    #print("y, z, aV, aWin, Score: ", y, z, aV, aWin, score[0])

    #si gana el atacante suma 1, si pierde el atacante descuenta

    if score[0] == 0: #el atacante y pierde; el atacado z gana
        oState[y] = oState[y]-1; oState[z] = oState[z]+1
    else: #score[0] == 1; el atacante y gana; el atacado z pierde
        yWin = True
        oState[y] = oState[y]+1; oState[z] = oState[z]-1
else: #oState[z] == 'x':
    media = source[z] #Intercambio de nodos y reetiquetado
    source[z] = source[y]
    source[y] = media
    #print("R source: ", source)

```

```

        mapping=dict(zip(H.nodes(),source))
        R=nx.relabel_nodes(H,mapping, True)
        H = R.copy()

if yWin:
    media = oState[z] #Intercambio de status entre nodos
    oState[z] = oState[y]
    oState[y] = media

    media = source[z] #Intercambio de nodos y reetiquetado
    source[z] = source[y]
    source[y] = media
    #print("R source: ", source)
    mapping=dict(zip(H.nodes(),source))
    R=nx.relabel_nodes(H,mapping, True)

    #Rtest=nx.adjacency_matrix(R) #matriz de adyacencia n+1
    #print("R: ", Rtest.todense())
    #matching, target = matchSeries(R, source) #nodos-destinos

    #R.name="GVs%d-%d-%d"%(i,R.order(),R.size()) #Dibuja grafo
    #printer(R) #Imprime el grafo
    #avgCluster = measures(R) #Metricas aplicables a un grafo

    H = R.copy() #el grafo se copia en H para nueva ejecucion
    #Htest=nx.adjacency_matrix(H) #matriz de adyacencia n+1
    #print("nH: ", Htest.todense())

#sys.stdout.flush()
#print("PostAtaque: ", oState) #Estado x - Ocupado 1

xP = []
for i in range(0,len(oState)):
    if oState[i] != 'x':
        xP.append(i)
x = np.asarray(xP)
sys.stdout.flush()
#print("Ocupados: ", x)
#Fin del bucle de batallas

```

```

#Calcula y reemplaza el estatus de cada nodo por 0.9*estatus
n0State = [] #Tasa de decaimiento de estatus de nodos = 0.9
for i in range(0,len(oState)):
    if oState[i] != 'x': n0State.append(oState[i]*0.9)
    else: n0State.append(oState[i])
oState = n0State
#oState = np.asarray(n0State)
#print("Vector Status: ")
#for i in range(0,len(oState)): print(oState[i])

#Calcula la desviacion Sigma = ( $\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2$ )**(1/2)
q = np.asarray(winVector)
#print("Vector de probabilidad: ", q)
#print len(q)
qSquareSum, qSquareMean = 0, 0
for i in range(0,len(q)): #Suma y media cuadraticas
    qSquareSum = qSquareSum + q[i]**2
    qSquareMean = qSquareMean + q[i]
if len(q) > 1:
    qSquareSum = qSquareSum/len(q)
    qSquareMean = (qSquareMean/len(q))**2
    sigma = (qSquareSum - qSquareMean)**(0.5)
#else: sigma = 0.01
sys.stdout.flush()
print("t, d, sigma: ", time, p, sigma)
data.append([float(p), float(avgCluster), int(time), float(sigma)])
#Fin del bucle temporal

#R = H.copy()
#R.name="R%s-%d-%d-%d"%(name,i,R.order(),R.size()) #Dibuja grafo
#printer(R) #Imprime el grafo

#for i in range(0, time): print("%s\r:" % data[i])

f = open('d' + name + str(p) + '.txt', 'w+')
for item in data: f.write('%s\r\n' % item)
f.close()

```

```
##### Modelos de redes #####
```

```
def assignPower(n): #powerLaw distribution pre-established
    if int(n) > 30: "Se requiere n >= 30 para la densidad inicial 0.02"
    ok = False
    sys.stdout.flush()
    z=nx.utils.create_degree_sequence(int(n),powerlaw_sequence)
    while not ok:
        if nx.is_valid_degree_sequence(z): ok = True;
        else: z=nx.utils.create_degree_sequence(int(n),powerlaw_sequence)
    G=nx.configuration_model(z)
    G=nx.Graph(G) #elimina aristas repetidas
    G.remove_edges_from(G.selfloop_edges()) #elimina autoenlaces
    remove = [node for node,degree in G.degree().items() if degree < 1]
    G.remove_nodes_from(remove)

    G = max(nx.connected_component_subgraphs(G), key=len) #Toma el mayor
    G.name="AP%d-%d"%(G.order(),G.size())
    #printer(G)
    name = "AP"
    #pRange = np.arange(0.02,0.62,0.02)
    #p = np.asarray(pRange)
    #for i in range(0, len(p)):
    #    mainLoop(n, G, p[i], name)

    avgCluster = measures(G) #Metricas aplicables a un grafo generico
    if avgCluster > 0.30: #Choose clustering criterion here <>
        pRange = np.arange(0.02,0.62,0.02)
        p = np.asarray(pRange)
        for i in range(0, len(p)):
            mainLoop(n, G, p[i], name)
    else:
        assignPower(n)

def expected(m): #expected_degree_graph(w, create_using=None, seed=None)
    # Fan Chung & L. Lu, Connected components in random graphs with given
    # expected degree sequences, Ann. Combinatorics, 6, pp. 125-145, 2002.

    print("Fixed number of nodes: 100")
```

```

if int(m) > 3: "Se requiere m >= 3 para la densidad inicial 0.02"
n = 100
create_using = None #default Graph
w = [int(m) for i in range(int(n))] #w: list
n = len(w)
if create_using is not None and create_using.is_directed():
    raise networkx.NetworkXError("Unicamente grafos no dirigidos")
G=networkx.empty_graph(n,create_using)

if n==0 or max(w)==0: return G #devuelve un grafo vacio

rho = 1.0 / float(sum(w)) # Vol(G)
for i in xrange(n):
    if (w[i])**2 > sum(w):
        raise networkx.NetworkXError(\
            "El grado cuadratico de un nodo i, debe ser <= suma "\
            "de grados w[%d] = %f, sum(w) = %f" % (i,w[i],sum(w)))
seed = None
if not seed is None: random.seed(seed) #seed for random n generation
for u in xrange(n):
    for v in xrange(u,n):
        if random.random() < w[u]*w[v]*rho:
            G.add_edge(u,v)

G.name="EX%d-%d"%(G.order(),G.size())
#printer(G)
name = "EX"
#pRange = np.arange(0.02,0.62,0.02)
#p = np.asarray(pRange)
#for i in range(0, len(p)):
#    mainLoop(n, G, p[i], name)

#Not applicable because of the degree distribution
avgCluster = measures(G) #Metricas aplicables a un grafo generico
if avgCluster > 0.6: #Choose clustering criterion here <>
    pRange = np.arange(0.02,0.62,0.02)
    p = np.asarray(pRange)
    for i in range(0, len(p)):
        mainLoop(n, G, p[i], name)

```

```

else:
    expected(n)

def havelHakimi(n): #havelHakimi(deg_sequence,create_using=None)
    #G.Chartrand & L. Lesniak, "Graphs and Digraphs", \
    Chapman and Hall/CRC, 1996.
    #Devuelve un grafo para una secuencia dada
    if int(n) > 30: "Se requiere n >= 30 para la densidad inicial 0.02"
    deg_sequence=nx.utils.create_degree_sequence(int(n),powerlaw_sequence)
    create_using=None
    if not nx.is_valid_degree_sequence(deg_sequence):
        raise networkx.NetworkXError('Invalid degree sequence')
    if create_using is not None:
        if create_using.is_directed():
            raise networkx.NetworkXError("Directed Graph not supported")
        if create_using.is_multigraph():
            raise networkx.NetworkXError("Havel-Hakimi requires simple graph")

    N=len(deg_sequence)
    G=networkx.empty_graph(N,create_using)

    if N==0 or max(deg_sequence)==0: return G #devuelve G si = 0

    stublist=[ [deg_sequence[k],k] for k in G] #lista [stubs,name]

    while stublist: # Now connect the stubs
        stublist.sort()
        if stublist[0][0]<0: # took too many off some vertex
            return False # should not happen if deg_seq is valid

        (freestubs,source) = stublist.pop() # the node with the most stubs
        if freestubs==0: break # the rest must also be 0 --Done!
        if freestubs > len(stublist): # Trouble--can't make that many edges
            return False # should not happen if deg_seq is valid

        # attach edges to biggest nodes
        for stubtarget in stublist[-freestubs:]:
            G.add_edge(source, stubtarget[1])
            stubtarget[0] -= 1 # updating stublist on the fly

```

```

G = max(nx.connected_component_subgraphs(G), key=len) #Toma el mayor
G.name="HH%d-%d"%(G.order(),G.size())
#printer(G)
name = "HH"
#pRange = np.arange(0.02,0.62,0.02)
#p = np.asarray(pRange)
#for i in range(0, len(p)):
#    mainLoop(n, G, p[i], name)

avgCluster = measures(G) #Metricas aplicables a un grafo generico
if avgCluster > 0.5: #Choose clustering criterion here <>
    pRange = np.arange(0.02,0.62,0.02)
    p = np.asarray(pRange)
    for i in range(0, len(p)):
        mainLoop(n, G, p[i], name)
else:
    havelHakimi(n)

def pareto(n):
    if int(n) > 30: "Se requiere n >= 30 para la densidad inicial 0.02"
    ok = False
    sys.stdout.flush()
    z = [random.paretovariate(2.0) for i in range(int(n))]
    sequence = map(float,z)
    z = [int(i) for i in sequence]
    while not ok:
        if nx.is_valid_degree_sequence(z): ok = True;
        else:
            z = [random.paretovariate(2.0) for i in range(int(n))]
            sequence = map(float,z)
            z = [int(i) for i in sequence]

G=nx.configuration_model(z)
G=nx.Graph(G) #elimina aristas repetidas
G.remove_edges_from(G.selfloop_edges()) #elimina autoenlaces
remove = [node for node,degree in G.degree().items() if degree < 1]
G.remove_nodes_from(remove)

```

```

G = max(nx.connected_component_subgraphs(G), key=len) #Toma el mayor
G.name="PV%d-%d" %(G.order(),G.size())
#printer(G)
name = "PV"
#pRange = np.arange(0.04,0.62,0.02)
#p = np.asarray(pRange)
#for i in range(0, len(p)):
#    mainLoop(n, G, p[i], name)

avgCluster = measures(G) #Metricas aplicables a un grafo generico
if avgCluster < 0.01: #Choose clustering criterion here <>
    pRange = np.arange(0.02,0.62,0.02)
    p = np.asarray(pRange)
    for i in range(0, len(p)):
        mainLoop(n, G, p[i], name)
else:
    pareto(n)

def powerLaw(n):

def sequencer(n):
    i, w = [], []
    total = 0
    #Apery = 1.20205690315959428539
    for j in range(1, int(n)):
        sys.stdout.flush()
        w.append(6/((math.pi**2)*(j**2)))
        #w.append(1/(Apery*(j**3))) #constante de Apery
        #print("Probabilidades: ", i, i/((math.pi**2)/6))
        i.append(j)
    aW = np.asarray(w)
    aI = np.asarray(i)

    for i in range(0, int(n-1)):
        aW[i] = aW[i]
        total = total + aW[i]
    #print(aW, total, 1-total) #matriz de probabilidad, total, resto
    aW[0]= aW[0]+(1-total) #se suma el resto hasta probabilidad 1

```

```

    return np.random.choice(aI,n,True,aW)

if int(n) > 30: "Se requiere n >= 30 para la densidad inicial 0.02"
ok = False
sequencer(int(n))

sequence = map(int,sequencer(int(n)))
while not ok:
    if nx.is_valid_degree_sequence(sequence): ok = True;
    else: sequence = map(int,sequencer(int(n)))
#print ("Secuencia natural: ", sequence)

G=nx.configuration_model(sequence) #configuration model
sys.stdout.flush()
#print type(G) #Comprobar que es un multigrafo
#print("Secuencia de grados de multigrafo:", G.degree())

#Descomentar para identificar un multigrafo
#G.name="GVm%d-%d"%(G.order(),G.size())
#printer(G)
#drawHistogram(G)
#majorGraph(G)

#Convierte un multigrafo en un grafo simple
G=nx.Graph(G) #elimina aristas repetidas
G.remove_edges_from(G.selfloop_edges()) #elimina autoenlaces
remove = [node for node,degree in G.degree().items() if degree < 1]
G.remove_nodes_from(remove)
sys.stdout.flush()
#print type(G) #Comprobar que es un grafo simple
#print("Secuencia de grados de grafo:", G.degree())

G = max(nx.connected_component_subgraphs(G), key=len) #Toma el mayor
#G.name="GV%d-%d"%(G.order(),G.size())
#drawHistogram(G) #descomentar para visualizar histograma de frecuencia
sys.stdout.flush()
#print("Secuencia de grados de grafo maximo:", G.degree())
name = "PL"
#pRange = np.arange(0.02,0.62,0.02)

```

```

#p = np.asarray(pRange)
#for i in range(0, len(p)):
#    mainLoop(n, G, p[i], name)

avgCluster = measures(G) #Metricas aplicables a un grafo generico
if avgCluster < 0.01: #Choose clustering criterion here <>
    pRange = np.arange(0.02,0.62,0.02)
    p = np.asarray(pRange)
    for i in range(0, len(p)):
        mainLoop(n, G, p[i], name)
else:
    powerLaw(n)

def uniform(n): #distribucion uniforme (random.uniform(0, int(n))

    if int(n) > 30: "Se requiere n >= 30 para la densidad inicial 0.02"
    ok = False
    sys.stdout.flush()
    z=nx.utils.create_degree_sequence(int(n),uniform_sequence)
    while not ok:
        if nx.is_valid_degree_sequence(z): ok = True;
        else: z=nx.utils.create_degree_sequence(int(n),uniform_sequence)
    G=nx.configuration_model(z)
    G=nx.Graph(G) #elimina aristas repetidas
    G.remove_edges_from(G.selfloop_edges()) #elimina autoenlaces
    remove = [node for node,degree in G.degree().items() if degree < 1]
    G.remove_nodes_from(remove)

    G = max(nx.connected_component_subgraphs(G), key=len) #Toma el mayor
    G.name="UF%d-%d" %(G.order(),G.size())
    #printer(G)
    name = "UF"

    pRange = np.arange(0.02,0.62,0.02)
    p = np.asarray(pRange)
    for i in range(0, len(p)):
        mainLoop(n, G, p[i], name)

#Not applicable because of the distribution, it produces around 0.5

```

```

#avgCluster = measures(G) #Metricas aplicables a un grafo generico
#if avgCluster < 0.01: #Choose clustering criterion here <>
#   pRange = np.arange(0.02,0.62,0.02)
#   p = np.asarray(pRange)
#   for i in range(0, len(p)):
#       mainLoop(n, G, p[i], name)
#else:
#   uniform(n)

##### Rutinas de menu #####

def getParam(promptString):
    screen.clear()
    screen.border(0)
    screen.addstr(2, 2, promptString)
    screen.refresh()
    input = screen.getstr(4, 4, 60)
    return input

def menu():
    x = 0
    while x != ord('7'):
        #screen = curses.initscr()
        screen.clear()
        screen.border(0)
        screen.addstr(2, 2, "Models: Choose a sequence:")
        screen.addstr(3, 2, "Reminder: n >= 30; m >= 3")
        screen.addstr(4, 4, "1: (AP)AssignPower")
        screen.addstr(5, 4, "2: (EX)Expected")
        screen.addstr(6, 4, "3: (HH)Havel-Hakimi")
        screen.addstr(7, 4, "4: (PV)Pareto ")
        screen.addstr(8, 4, "5: (PL)PowerLaw")
        screen.addstr(9, 4, "6: (UN)Uniform")
        screen.addstr(10, 4, "7: Quit \n")
        screen.refresh()

        x = screen.getch()

    if x == ord('1'):

```

```
        n = getParam("Parameter N")
        curses.endwin()
        assignPower(n)

    if x == ord('2'):
        w = getParam("Parameter W")
        curses.endwin()
        expected(w)

    if x == ord('3'):
        n = getParam("Parameter N")
        curses.endwin()
        havelHakimi(n)

    if x == ord('4'):
        n = getParam("Parameter N")
        curses.endwin()
        pareto(n)

    if x == ord('5'):
        n = getParam("Parameter N")
        curses.endwin()
        powerLaw(n)

    if x == ord('6'):
        n = getParam("Parameter N")
        curses.endwin()
        uniform(n)

screen = curses.initscr()
test = menu()
curses.endwin()
```

Bibliografía

- Albert, R., & Barabási A.L (2002) Statistical Mechanics of Complex Networks. *Phys. Rev. Lett*, 74: 47-97.
- Asch, S.E. (1956). Studies of independence and conformity. A minority of one against a unanimous majority (<http://psycnet.apa.org/journals/mon/70/9/1/>). *Psychological Monographs*, 70(9), 1-70.
- Axelrod, R. (1997a). Advancing the Art of Simulation in the Social Sciences. En Conte R, Hegselmann, R. & Terna, P. (Eds.) *Simulating Social Phenomena, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 456, 21–40. Berlin: Springer-Verlag.
- Axelrod, R. (1997b). *The complexity of cooperation: Agent based models of competition and collaboration*. Princeton NJ: Princeton University Press.
- Axelrod, R. (1997c). The dissemination of culture. A model with local convergence and global polarization. *The Journal of Conflict Resolution*, 41, 2, 203-226. Sage Publications. <http://www.jstor.org/stable/174371>.
- Axelrod, R. (2003). Advancing the art of simulation in the social sciences. *Japanese Journal for Management Information System*, 12(3), 1-19.
- Axelrod, R. (2007). Simulation in social sciences. In Rennard, J., editor, *Handbook of Research on Nature-inspired Computing for Economics and Management*. IGI Global.
- Axelrod, R., & Tesfatsion, L. (2006). A Guide for Newcomers to Agent-Based Modeling in the Social Sciences. *Handbook of computational economics*, 2, 1647-1659. Elsevier.
- Axtell, R. (2000). Why agents? On the varied motivations for agent computing in the social sciences. En Macal, C. M. & Sallach, D. (eds.), *Proceedings of the Workshop on Agent Simulation: Applications, Models, and Tools*, 3-24. Argonne, IL: Argonne National Laboratory.
- Barabási, A.-L., & Albert, R. (1999). Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, 286, 5439, 509-512. DOI: 10.1126/science.286.5439.509.

- Ben-Naim, E., & Redner, S. (2005). Dynamics of social diversity. *Journal of Statistical Mechanics*, L11002.
- Ben-Naim, E., Vázquez, F., & Redner, S. (2006). Parity and predictability of competitions. *Journal of Quantitative Analysis in Sports*, 2, 4, 1-12.
- Ben-Naim, E., Kahng, B., & Kim, JS. (2006). Dynamics of multi-player games. *Journal of Statistical Mechanics*, P07001. IOP Publishing.
- Bolt, E.M., & ben-Avraham, D. (2005). What is Special about Diffusion in Scale-Free Networks?. *New J. Phys.*, 7, 26.
- Bollobás, B., Riordan, O., Spencer, J., Tusnády, G. (2001). The degree sequence of a scale-free random graph process. *Random Structures and Algorithms*, 18, (3): 279-290. doi:10.1002/rsa.1009. MR 1824277.
- Bonabeau, E., Theraulaz, G., & Deneubourg, J.L. (1995). Phase diagram of a model of self-organizing hierarchies. *Physica A*, 217, 373-392.
- Bonabeau, E., Theraulaz G. & Deneubourg, J.-L. (1998). Fixed Response Thresholds and the Regulation of Division of Labor in Insect Societies. *Bulletin of Mathematical Biology*, 60, 753-807 Article No. bu980041
- Bonabeau, E., Theraulaz G., & Deneubourg, JL. (1999) Dominance Orders in Animal Societies: The Self-organization Hypothesis Revisited. *Bulletin of Mathematical Biology*, 61: 727-757.
- Buchanan, J. (1999). *The Logical Foundations of Constitutional Liberty*, 1, Liberty Fund, Indianapolis, 1999, p. 314.
- Caldarelli, G. et al. (2002). Scale-free networks from varying vertex intrinsic fitness. *Phys. Rev. Lett.*, 89, 258702. doi:10.1103/physrevlett.89.258702. PMID 12484927.
- Callaway, D.S., Newman, M.E.J., Strogatz, S.H., & Watts, D.J. (2000). Network Robustness and Fragility: Percolation on Random Graphs. *Physical Review Letters*, 85, 5468-71. arXiv:cond-mat/0007300. Bibcode:2000PhRvL..85.5468C. doi:10.1103/PhysRevLett.85.5468. PMID 11136023.
- Camazine, S., Deneubourg, J-L., Franks, N.R., Sneyd, J., Theraulaz, G., & Bonabeau, E. (2001). *Self-Organization in Biological Systems*. Princeton Studies in Complexity.
- Castellano, C., Fortunato, S., & Loreto, V. (2009). Statistical physics of social dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 81, 591-646. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.591.
- Coleman, J.S., Menzel, H., & Katz, E. (1966). *Medical Innovations: A Diffusion Study*. Bobbs Merrill.

- Coleman, J.S. (1961). *The Adolescent Society*. Free Press.
- Coleman, J.S. (1988). Social capital in the creation of human capital. *American Journal of Sociology*, 94(S1):S95-S120.
- Coleman, J.S. (1990). *Foundations of Social Theory*. Harvard University Press, 1990.
- Cohen, R., Erez, K., ben-Avraham, D.; Havlin, S. (2000). Resilience of the Internet to Random Breakdowns. *Physical Review Letters*, 85, 4626-8. arXiv:cond-mat/0007048. Bibcode:2000PhRvL..85.4626C. doi:10.1103/PhysRevLett.85.4626. PMID 11082612.
- Cohen, R., Erez, K., ben-Avraham, D., & Havlin, S. (2001). Breakdown of the Internet under Intentional Attack. *Physical Review Letters*, 86, 3682-5. arXiv:cond-mat/0010251. Bibcode:2001PhRvL..86.3682C. doi:10.1103/PhysRevLett.86.3682. PMID 11328053.
- Cohen, R. & Havlin, S. (2003). "Scale-Free Networks Are Ultrasmall". *Physical Review Letters*, 90, (5): 058701. doi:10.1103/PhysRevLett.90.058701. PMID 12633404.
- Chase, I. (1974). Models of hierarchy formation in animal societies. *Systems Research and Behavioral Science*, 19, 6, 374-382. DOI: 10.1002/bs.3830190604.
- Clauset, A., Shalizi, C.R., & Newman, M.E.J. (2009). Power-law distributions in empirical data. *arXiv:0706.1062v1 [physics.data-an]*.
- Chartrand, G. & Lesniak, L. (1996). *Graphs and Digraphs*. Chapman and Hall/CRC.
- Dangalchev, C. (2004). Generation models for scale-free networks. *Physica A*, 338, 659-671. doi:10.1016/j.physa.2004.01.056.
- Dorogovtsev, S.N., & Mendes, J.F.F. (2002). Evolution of networks. *Advances in Physics*, 51, 1079-1187. cond-mat/0409465.
- Edmonds, B. & Hales, D. (2005). Computational simulation as theoretical experiment. *Journal of Mathematical Sociology*, 29(3), pp. 209-232.
- Edmonds, B., Moss, S. & Davidsson, P. (2001). The Use of Models - making MABS actually work. En, *Multi-Agent-Based Simulation, Lecture Notes in Artificial Intelligence 1979*, 15-32. Berlin: Springer-Verlag.
- Epstein, J. M. & Axtell, R. L. (1996): *Growing Artificial Societies: Social Science from the Bottom Up*. The MIT Press.
- Erdős, P., & Rényi, A.(1959). On Random Graphs. I. *Publicationes Mathematicae*, 6: 290-297.

- Faloutsos, M., Faloutsos, P., Faloutsos, C. (1999). "On power-law relationships of the internet topology". *Comp. Comm. Rev.*, 29, 251-262. doi:10.1145/316194.316229.
- Fan, Ch. & Lu, L.(2002). Connected components in random graphs with given expected degree sequences, *Ann. Combinatorics*, 6, 125-145.
- Festinger, L. (1950a). Informal social communication. *Psychological Review*, 57(5), 271-282.
- Festinger, L. (1950b). Psychological Statistics. *Psychometrika*, 15(2), 209-213.
- Festinger, L. (1951). Architecture and group membership. *Journal of Social Issues*, 7(1-2), 152-163.
- Gallos, L.K. (2005). Self-organizing social hierarchies on scale-free networks. *International Journal of Modern Physics C*, 16, 8, 1329-1336.
- Granovetter, M. (1974). *Getting A Job: A Study of Contacts and Careers*. Cambridge. Mass: Harvard University. ISBN 978-0-674-35416-6.
- Granovetter, M. (1978). Threshold Models of Collective Behavior. *American Journal of Sociology*, 83(6), 1420-1443. doi:10.1086/226707. JSTOR 2778111.
- Granovetter, M. (1983). The Strength of Weak Ties: A Network Theory Revisited. *Sociological Theory*, 1, 201-233. doi:10.2307/202051. JSTOR 202051. Reimpreso en Marsden, Peter V.; Lin, Nan, eds. (1982). *Social Structure and Network Analysis*. Sage. ISBN 978-0-8039-1888-7.
- Granovetter, M. (1985). Economic Action and Social Structure: The Problem of Embeddedness. *American Journal of Sociology*, 91 (3), 481-510. doi:10.1086/228311. JSTOR 2780199.
- Granovetter, M. (2005). The Impact of Social Structure on Economic Outcomes. *Journal of Economic Perspectives*, 19, 33-50. doi:10.1257/0895330053147958.
- Gros, C. (2015). Complex and Adaptive Dynamical Systems: A Primer. En Gross, C. *Elements of Cognitive Systems Theory*, 321-361- Springer International Publishing. Doi 10.1007/978-3-319-16265-2-10
- Hadzibeganovica, T., Stauffer, D., & Han, X-P(2015). Randomness in the evolution of cooperation. *Behavioural Processes*, 113, 86-93.
- Hakimi, S.L. (1962). On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph. *SIAM J. Appl. Math*, 10.

- Hemelrijk, C. K. (1999). An individual-orientated model of the emergence of despotic and egalitarian societies. *Proceedings of the Royal Society B*, 266, 361-369.
- Hewitt, C.(1970). PLANNER: A Language for Manipulating Models and Proving Theorems in a Robot dspace.mit.edu .
- Hilbert, M. (2013), Scale-free power-laws as interaction between progress and diffusion. *Complexity*. doi: 10.1002/cplx.21485
- Holland, J. H. (1998): *Emergence. From chaos to order*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Izquierdo, L.R., Galán Ordax, J.M, Santos, J.I., del Olmo Martínez, R. (2008). Modelado de sistemas complejos mediante simulación basada en agentes y mediante dinámica de sistemas. *Empiria. Revista de Metodología de Ciencias Sociales*, 16, 85–112. DOI: <http://dx.doi.org/10.5944/empiria.16.2008.1391>.
- Jameson, KA, Appleby, MC, & Freeman LC. (1999). Finding an appropriate order for a hierarchy based on probabilistic dominance. *Animal Behavior*, 57(5):991-998.
- Johnson, P. E. (1999). Simulation modeling in political science. *American Behavioral Scientist* 42(10), 1509–1530.
- Johnson, S. (2001). *Emergence: the connected lives of ants, brains, cities, and software*. New York: Scribner.
- Klusck, M., & Gerber, A. (2002). *Dynamic Coalition Formation among Rational Agents*. May-June. 1094-7167/02. IEEE
- Lacasa, L., & Luque, B. (2006). Bonabeau hierarchy models revisited. *Physica A*, 366, 472-484. doi:10.1016/j.physa.2005.10.046
- Landau, H.G. (1951). On dominance relations and the structure of animal societies: I. Effect of inherent characteristics. *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, 13, 1, 1-19
- Lin, Z. & Whitehead, J. (2015). Why Power Laws?: An Explanation from Fine-grained Code Changes. *Proceedings of the 12th Working Conference on Mining Software Repositories*, Florence, Italy, IEEE Press.
- Malarz, K, Stauffer, D., & Kulakowski, K. (2005). Bonabeau model on a fully connected graph. *European Physics Journal B (Modern Problems in Complexity)*, 50, preprint: physics/0502118.
- Malthus, T. R. (1798). *An essay on the principle of population*. Oxford World's Classics reprint: xxix Chronology.

- Marr, D. (1982). *Vision: A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information*. New York: Freeman.
- Marx, K. (1857:1998). *Elementos fundamentales para la crítica de la economía política*. Mexico: Siglo XXI. ISBN: 9789682303555
- Mattar, M.G., Cole, M.W., Thompson-Schill, S.L., & Bassett, D.S. (2015). A Functional Cartography of Cognitive Systems. *PLoS Comput Biol*, 11(12): e1004533. doi:10.1371/journal.pcbi.1004533
- McClelland, J.L., Botvinick, M.M., Noelle, D.C, Plaut, D.C, Rogers, T.T., Seidenberg, M.S., & Smith, L.B. (2010). Approaches to cognitive modeling. Letting structure emerge: connectionist and dynamical systems approaches to cognition. *Trends in Cognitive Sciences*, 14, 348-356.
- Milgram, S. (1967). The small-world problem. *Psychology Today*, 2, 60-67.
- Milgram, S., Bickman, L., & Berkowitz, L.(1969). Note on the drawing power of crowds of different size. *Journal of Personality and Social Psychology*, 13(2):79-82.
- Newman, M.E.J. (2009). Random graphs with clustering. *Phys. Rev. Lett.*, 103, 058701. DOI: 10.1103/PhysRevLett.103.058701.
- Newman, M.E.J. (2010). *Networks: An Introduction*. Oxford University Press.
- Newman, M.E.J., & Watts, D.J. (1999). Scaling and percolation in the small-world network model. *Physical Review E*, 60, 7332. doi.org/10.1103/PhysRevE.60.7332.
- Noëlle-Neumann, E. (1977). *La espiral del silencio. Opinión pública: nuestra piel social*. Barcelona: Paidós.
- Nohria, N., Eccles, R., eds. (1992). *Problems of Explanation in Economic Sociology. Networks and Organizations: Structure, Form, and Action*. Boston, Mass: Harvard Business School. ISBN 978-0-87584-324-7.
- Nisan, N., Roughgarden, T., Tardos, E. & Vazirani, V. V., (Eds) (2007). *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, New York, NY, USA.
- Onnela, J.P., Saramaki, J., Hyvonen, J., Szabo, G., Lazer, D., Kaski, K., Kertesz, J. & Barabasi, A.L. (2007). Structure and tie strengths in mobile communication networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 104(18), 7332–7336. arXiv:physics/0610104. Bibcode:2007PNAS..104.7332O. doi:10.1073/pnas.0610245104. PMC 1863470. PMID 17456605
- Pastor-Satorras, R., Vázquez, A., & Vespignani, A. (2001). Dynamical and correlation properties of the Internet. *Phys. Rev. Lett.*, 87, 258701.

- Pastor-Satorras, R., & Vespignani, A. (2004) *Evolution and Structure of the Internet*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Procaccia, A.D., & Rosenschein, J.S. (2016). *The Communication Complexity of Coalition Formation among Autonomous Agents*. AAMAS'06 May 8-12 2006, Hakodate, Hokkaido, Japan. ACM 1-59593-303-4/06/0005.
- Rahwan, T., Michalak, T., Elkind, E., Faliszewski, P., Sroka, J., Wooldridge, M., & Jennings, N.R. (2011). Constrained Coalition Formation. *Proceedings of the Twenty-Fifth AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 719-725.
- Rahwan, T., Michalak, T.P., Wooldridge, M., & Jennings, N.R. (2015). Coalition structure generation: A survey. *Artificial Intelligence*, 229, 139-174.
- Ramón y Cajal, S. (2006). *Trabajos escogidos. Estudios sobre la degeneración y regeneración del sistema nervioso*. Antoni Bosch Editor. ISBN 978-84-95348-26-5.
- Ray, D. & Vohra, R. (2015). Coalition formation. En *Handbook of game theory*, 240-326. Elsevier. [dx.doi.org/10.1016/B978-0-444-53766-9.00005-7](https://doi.org/10.1016/B978-0-444-53766-9.00005-7)
- Ravasz, E. & Barabási (2003). "Hierarchical organization in complex networks". *Phys. Rev. E*, 67, 026112. [doi:10.1103/physreve.67.026112](https://doi.org/10.1103/physreve.67.026112).
- Sander, Th. & Lowney, K. (2006). *Social Capital Building Toolkit Version 1.2, 1 Saguario Seminar: Civic Engagement in America*. John F. Kennedy School of Government, Harvard University.
- Schelling, T. C. (1971). Dynamic Models of Segregation. *Journal of Mathematical Sociology*, 1(2), pp. 143–186.
- Schulze, C. & Stauffer, D. (2004). Phase diagram in Bonabeau social hierarchy model with individually different abilities. *Adv. Complex Syst.* 7, 289-297.
- Shehory, O. & Kraus, S. (1998) Methods for task allocation via agent coalition formation. *Artificial Intelligence*, 101: 1-2, 165-200.
- Shore, J., Chu, C.J., & Bianchi, M.T. (2013). Power laws and fragility in flow networks. *Social Networks*, [http://dx.doi.org/10.1016/j.socnet.2013.01.005](https://doi.org/10.1016/j.socnet.2013.01.005)
- Squazzoni, F. (2008): The Micro-Macro Link in Social Simulation. *Sociologica*, 1, [doi: 10.2383/26578](https://doi.org/10.2383/26578).
- Sousa, A.O., & Stauffer, D. (2000). Reinvestigation of self-organizing social hierarchies. *Int. J. Mod. Phys. C*, 11, 1063.

- Stauffer, D. (2000). Phase transition in hierarchy model of Bonabeau et al. *Int. J. Mod. Phys. C*, 14, 237.
- Stauffer, D. (2005). Sociophysics Simulations IV: Hierarchies of Bonabeau et al. 8th Granada Seminar, *AIP Conf.Proc. Physics and Society* (physics.soc-ph). DOI: 10.1063/1.2008593
- Stauffer, D., & Sá Martins, J.S. (2003). Asymmetry in the hierarchy model of Bonabeau et al. *Advances Complex Systems*, 6, 559.
- Schweitzer, F. (2003). *Brownian Agents and Active Particles. Collective Dynamics in the Natural and Social Sciences.* Springer Series in Synergetics.
- Takao, A. (1995). An $O(n \log \log n)$ Time algorithm for Constructing a Graph of Maximum Connectivity with Prescribed degrees. *Journal of Computer and System Sciences*, 51, 503-510.
- Theraulaz, G., Bonabeau, E., Deneubourg, J.L. (1995) Self-organization of Hierarchies in Animal Societies: The Case of the Primitively Eusocial wasp *Polistes dominulus* Christ. *Journal of Theoretical Biology*, 174: 313-323.
- Torsun, I. S. (1995). *Foundations of Intelligent Knowledge-based Systems.* New York: Academic Press.
- Ulam, S. (1960). *A Collection of Mathematical Problems.* New York: Interscience Publishers.
- Vernon, D. (2014). *Artificial cognitive systems: a primer.* Cambridge, Mass. M.I.T. press.
- von Neumann, J. (1966). *Theory of Self-Reproducing Automata.* John von Neumann. Arthur W. Burks, Editor. University of Illinois Press.
- von Neumann, J. & Morgenstern, O. (2004). *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, Princeton
- Watts, D., & Strogatz, S. (1998). Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, 393, 440-442.
- Zhang, G., Jiang, J., Su, Z., Qi, M. & Fang, H. (2010). Searching for overlapping coalitions in multiple virtual organizations. *Information Sciences*, 180, 3140-3156