Activitats pràctiques

Antoni Cosculluela

PID_00198605

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

1. Introducció

Per a fer una sèrie d'exercicis pràctics que posin en joc els continguts desenvolupats en aquest material, es proposen uns enunciats que emmarquen uns casos generals, a partir del quals es desenvoluparan activitats o exercicis concrets sobre continguts dels diferents mòduls vistos al llarg de l'assignatura.

Cas 1

S'han administrat dues formes paral·leles d'un mateix test de capacitat d'atenció compost per sis ítems cada forma, a una mostra de deu subjectes. El rang de valors de les puntuacions totals en el test va de 0 (capacitat d'atenció mínima) a 6 (capacitat d'atenció màxima). Es considera que un subjecte presenta una competència adequada en aquesta variable si obté una puntuació superior a dos punts.

Els resultats obtinguts han estat els següents:

Subjecte	*x*1	*x*2
1	3	2
2	5	5
3	0	2
4	6	5
5	1	0
6	3	3
7	4	2
8	5	6
9	2	3
10	1	3

x_1 i x_2 són les puntuacions dels subjectes en aquestes dues formes paral·leles.

Cas 2

Per a avaluar el nivell de depressió d'un subjecte, s'ha construït un test format pels sis ítems següents:

a) Em sento molt sovint trist i desanimat.

b) Em considero una persona sense gaires problemes.

c) No em sento decebut de mi mateix.

d) Crec que he fracassat més que qualsevol persona normal.

e) Normalment no tinc problemes per a dormir.

f) Sovint obtinc força satisfaccions amb el que faig.

Les respostes (sí o no) dels subjectes es codifiquen amb un 0 o un 1 en funció de si presenten una tendència a la depressió o no. Així, la puntuació total en el test té un rang de valors que va de 0 (nivell de depressió mínim) a 6 (nivell de depressió màxim). Aquest test s'ha administrat a una mostra de vint-i-cinc subjectes, juntament amb l'inventari de depressió de Beck (BDI), que és un test àmpliament utilitzat i contrastat per a mesurar el grau de depressió i que consta de vint-i-un ítems. El rang de puntuacions en el BDI va de 0 (depressió mínima) a 21 (depressió màxima). Els resultats de les administracions d'aquests dos tests, amb les respostes dels subjectes als sis ítems del primer test, es presenten en la taula següent:

Test depressió								
Subjecte	**Ítem 1**	**Ítem 2**	**Ítem 3**	**Ítem 4**	**Ítem 5**	**Ítem 6**	**Total**	**BDI**
1	1	1	0	0	0	1	3	10
2	1	1	1	0	1	1	5	13
3	0	1	1	0	0	0	2	8
4	0	1	1	0	0	0	2	12
5	0	0	1	1	1	1	4	16
6	0	0	0	1	1	1	3	15
7	0	0	1	0	1	1	3	12
8	0	0	1	0	0	0	1	10
9	1	1	1	0	1	1	5	19
10	0	0	1	0	1	1	3	13
11	0	1	1	0	0	1	3	16
12	1	1	0	1	1	1	5	13
13	1	0	1	1	1	1	5	20
14	0	0	0	0	0	0	0	3
15	1	0	0	0	1	1	3	12
16	1	0	1	0	0	0	2	9

Test depressió								
Subjecte	**Ítem 1**	**Ítem 2**	**Ítem 3**	**Ítem 4**	**Ítem 5**	**Ítem 6**	**Total**	**BDI**
17	1	1	1	1	1	1	6	15
18	0	1	0	0	1	1	3	12
19	1	1	1	1	1	1	6	16
20	0	1	1	0	1	1	4	18
21	0	1	1	0	1	1	4	13
22	0	0	0	0	1	0	1	5
23	0	1	1	0	1	1	4	16
24	0	1	1	0	0	1	3	10
25	0	0	0	0	1	0	1	8

Cas 3

Amb l'objectiu d'avaluar el nivell d'intel·ligència general s'ha administrat un test de deu ítems a una mostra de vint-i-cinc subjectes. Els ítems són d'elecció múltiple amb quatre alternatives de resposta de les quals una és la correcta.

En la taula següent es presenten les respostes dels subjectes a aquest test, marcant amb negreta les respostes correctes de cada subjecte. Les alternatives de resposta correctes de cada ítem s'especifiquen en la darrera fila de la taula, si bé ja es podrien deduir de les respostes en negreta.

Subjecte	**Ítems**									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**A**	**C**	**D**	**A**	**B**	A	**B**	**D**	**A**	**D**
2	B	**C**	A	**A**	**B**	**C**	**B**	**D**	C	B
3	C	**C**	C	B	A	B	**B**	A	B	C
4	**A**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**B**	**D**	D	A
5	D	A	A	B	**B**	D	**B**	B	B	**D**
6	D	B	A	C	C	D	A	A	D	**D**
7	B	**C**	C	**A**	**B**	A	**B**	**D**	C	**D**
8	C	**C**	A	**A**	**B**	B	**B**	A	C	**D**
9	C	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**B**	**D**	**A**	C
10	B	**C**	A	C	D	A	C	C	D	**D**

* Alternativa de resposta correcta

Subjecte	**Ítems**									
11	B	D	C	D	A	D	**B**	B	B	A
12	**A**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**B**	B	C	C
13	C	**C**	C	B	**B**	B	**B**	**D**	B	A
14	D	**C**	**D**	**A**	**B**	B	**B**	**D**	C	**D**
15	B	**C**	B	C	A	D	**B**	C	D	B
16	**A**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**B**	**D**	B	**D**
17	D	**C**	A	**A**	**B**	A	**B**	**D**	**A**	**D**
18	D	A	A	D	**B**	D	**B**	A	**A**	A
19	B	**C**	**D**	**A**	**B**	B	**B**	**D**	**A**	**D**
20	B	**C**	A	**A**	**B**	D	**B**	B	C	C
21	C	**C**	C	D	C	B	**B**	**D**	**A**	**D**
22	C	D	C	B	D	A	A	C	**A**	**D**
23	C	**C**	**D**	**A**	**B**	A	**B**	**D**	**A**	B
24	**A**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**B**	**D**	B	**D**
25	B	**C**	**D**	**A**	**B**	B	**B**	**D**	C	A
*	A	C	D	A	B	C	B	D	A	D

* Alternativa de resposta correcta

2. Enunciats dels exercicis sobre fiabilitat

Exercici 1. A partir de l'enunciat del cas 1, resoleu les qüestions següents:

1. Obteniu el coeficient de fiabilitat del test.

2. Calculeu els indicadors següents d'acord entre les classificacions de les dues formes paral·leles:

a) Coeficient de Hambleton i Novick ($p_{H\text{-}N}$).

b) Coeficient kappa (k).

c) Coeficient de Livingston.

Exercici 2. Tenint en compte la informació i les dades del cas 2, contesteu els apartats següents en referència al test de depressió de sis ítems:

1. Obteniu la consistència interna (fiabilitat) del test utilitzant el mètode de les dues meitats a partir del següent:

a) La fórmula de Spearman Brown.

b) La fórmula de Rulon.

c) La fórmula de Gutman-Flanagan.

2. Obteniu el coeficient alfa (α) de Cronbach utilitzant les tres diferents fórmules per a calcular-lo, o sigui a partir del següent:

a) La variància dels diferents ítems.

b) La covariància entre els ítems.

c) $r1$.

3. Determineu la significació estadística del coeficient alfa calculat en l'apartat anterior (nivell de confiança del 95%), i el seu interval de confiança.

4. Si el mateix test s'administra a una mostra de trenta subjectes i s'obté un coeficient alfa de 0,70, hi ha diferències estadísticament significatives entre aquest coeficient alfa i l'obtingut en la mostra de vint-i-cinc subjectes del nostre exercici (nivell de confiança del 95%)?

5. En una segona administració del test a la mateixa mostra inicial de vint-i-cinc subjectes, s'ha obtingut un coeficient alfa de 0,64 i una correlació entre les puntuacions dels subjectes en aquestes dues aplicacions de 0,92. Hi ha diferències estadísticament significatives entre els valors dels dos coeficients alfa (nivell de confiança del 95%)?

6. Calculeu el KR_{20} i el KR_{21} de Kuder-Richardson. Compareu els dos valors i raoneu el perquè de la igualtat o la diferència.

7. Si afegíssim tres ítems més al test, suposant que mesuressin el mateix constructe, quina seria la seva nova fiabilitat?

8. Quants ítems hauríem d'afegir al test inicial per a arribar a una fiabilitat de 0,70?

9. Quina puntuació veritable podem estimar que tindrà el primer subjecte de la matriu de dades del nostre cas 1? Obteniu aquesta estimació amb un nivell de confiança del 95%, a partir del següent:

a) La distribució normal dels errors.

b) El model de la regressió.

3. Enunciats dels exercicis sobre validesa

Exercici 1. A partir de les dades del cas 2, considerant les puntuacions del BDI com un criteri per a validar el nostre test de sis ítems, contesteu les qüestions següents:

a) Calculeu el coeficient de validesa del test.

b) Quin seria aquest coeficient de validesa si el test tingués una fiabilitat perfecta (tingueu en compte la fiabilitat del test obtinguda a partir del mètode de les dues meitats i la fórmula de Spearman Brown calculada en l'exercici 2, apartat 1.a)?

c) Quan valdria el coeficient de validesa del test si hi afegíssim sis ítems més? Utilitzeu el mateix coeficient de fiabilitat de l'apartat anterior.

d) Entre quines puntuacions en el criteri (BDI) podem pronosticar que obtindrà la puntuació un nou subjecte que té 4 punts en el nostre test? Construïu l'interval amb un nivell de confiança del 95%.

e) Si suposem que el diagnòstic ja contrastat de trastorn depressiu lleu se situa en una puntuació superior a 15 en el BDI, i nosaltres volem comprovar la validesa de la decisió del nostre test de sis ítems, suposant que puntuacions superiors a 3 són les que detectarien aquest trastorn depressiu lleu, calculeu i interpreteu:

I. El percentatge d'acord entre els dos tests.

II. El coeficient kappa.

III. La sensibilitat del nostre test.

IV. L'especificitat del nostre test.

Exercici 2. Per tal de validar l'estructura interna del nostre test, hem fet una anàlisi de components principals (ACP) que ens ha proporcionat la matriu següent de saturacions factorials, en què s'han extret els dos components amb valor propi superior a 1:

Matriu de components

	Component	
	1	2
Ítem_1	,587	,023

Component		
	1	2
Ítem_2	,267	,793
Ítem_3	,085	,703
Ítem_4	,696	–,303
Ítem_5	,705	–,360
Ítem_6	,821	,219

A partir d'aquestes dades que presenten les saturacions factorials de cada un dels sis ítems del test en els dos components extrets, calculeu les comunalitats dels ítems per a cada component i la conjunta per als dos components, el valor propi de cada component, i la variància explicada per a cada component i la conjunta dels dos components. Interpreteu els resultats respecte a l'estructura interna del test.

4. Enunciats dels exercicis sobre transformació i interpretació de les puntuacions

Exercici 1. Transformeu les puntuacions directes del test de depressió aplicat en el cas 2 a la mostra de vint-i-cinc subjectes, en les puntuacions següents:

a) Percentils.

b) Puntuacions estandarditzades.

c) Puntuacions *T*.

d) Enneatipus.

e) Decatipus.

Exercici 2. En el cas 3 podem considerar que la puntuació total d'un subjecte en el test serà igual al nombre d'ítems que contesta correctament. D'altra banda, també podem considerar que, en ser un test d'intel·ligència, hi podem aplicar certes característiques de l'escala de Wechler per a adults o *Wechler adult intelligence scale* (WAIS).

Tenint en compte les consideracions anteriors, transformeu les puntuacions directes dels tres primers subjectes de la matriu de dades del cas 3 en percentils i en quocient intel·lectual (QI).

5. Enunciats dels exercicis sobre anàlisi dels ítems

Exercici 1. A partir de les dades del cas 3, calculeu i interpreteu els índexs de dificultat i de discriminació dels tres primers ítems del test. Per tal d'obtenir els índexs de discriminació considereu com a grup d'alt rendiment o alt nivell d'intel·ligència els subjectes que encerten més de set ítems, i de baix rendiment o baix nivell d'intel·ligència els que encerten menys de tres ítems. La grandària d'aquests dos grups no arriba al 27% o 25% del total dels vint-i-cinc subjectes, que és el recomanat, però són molt a prop d'aquests percentatges.

Exercici 2. Seguint amb les consideracions fetes en l'exercici anterior, feu l'anàlisi dels distractors del tres primers ítems.

6. Solucionari dels exercicis sobre fiabilitat

Exercici 1

1. En aquest cas, com que tenim les puntuacions d'una mostra de subjectes en les dues formes paral·leles d'un test, obtindrem el coeficient de fiabilitat aplicant el mètode de les formes paral·leles, i per tant hem de calcular el coeficient de correlació de Pearson entre les puntuacions dels subjectes en aquestes dues formes.

La fórmula del coeficient de correlació de Pearson és:

$$r_{xx'} = r_{x_1x_2} = \frac{n\sum x_1x_2 - \sum x_1 \sum x_2}{\sqrt{[n\sum x_1^2 - (\sum x_1)^2][n\sum x_2^2 - (\sum x_2)^2]}}$$

Així, per a obtenir-lo amb les dades de l'exercici, hem d'efectuar les operacions següents:

Subjecte	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2
1	3	2	6	9	4
2	5	5	25	25	25
3	0	2	0	0	4
4	6	5	30	36	25
5	1	0	0	1	0
6	3	3	9	9	9
7	4	2	8	16	4
8	5	6	30	25	36
9	2	3	6	4	9
10	1	3	3	1	9
Σ	30	31	117	126	125

$$r_{xx'} = r_{x_1x_2} = \frac{(10 \times 117) - (30 \times 31)}{\sqrt{[(10 \times 126) - (30)^2][(10 \times 125) - (31)^2]}} = 0{,}744$$

El coeficient de fiabilitat del test és de 0,744.

2. Per a calcular els coeficients d'acord en la classificació dels subjectes en les dues formes paral·leles d'aquest test, hem de generar la taula següent sabent que un subjecte és competent si té una puntuació superior a 2:

Subjecte	x_1	x_2	Classificació x_1	Classificació x_2
1	3	2	Competent	No competent
2	5	5	Competent	Competent
3	0	2	No competent	No competent
4	6	5	Competent	Competent
5	1	0	No competent	No competent
6	3	3	Competent	Competent
7	4	2	Competent	No competent
8	5	6	Competent	Competent
9	2	3	No competent	Competent
10	1	3	No competent	Competent

I a partir d'aquestes classificacions construïm la taula de contingència:

		x_2		
		Competents	**No competents**	
x_1	**Competents**	4	2	6
	No competents	2	2	4
		6	4	10

a) Coeficient de Hambleton i Novick ($p_{H\text{-}N}$)

La fórmula del coeficient de Hambleton i Novich és:

$$p_{H\text{-}N} = p_c - p_a$$

En què, p_c és la proporció de classificacions consistents (6/10), i p_a la proporció de classificacions consistents que s'esperen per atzar i que s'obté amb la fórmula:

$$p_a = \sum \frac{n_{.j} \cdot n_{i.}}{N^2}$$

En què $n_{.j}$ és el nombre de subjectes classificats com a competents (o no competents) per la forma x_1, $n_{i.}$ és el nombre de subjectes classificats com a competents (o no competents) per la forma x_2, i N és el nombre total de subjectes.

$$p_a = \sum \frac{n_{.j} \cdot n_{i.}}{N^2} = \frac{6 \cdot 6}{10^2} + \frac{4 \cdot 4}{10^2} = 0{,}52$$

$$p_{H\text{-}N} = p_c - p_a = 0{,}60 - 0{,}52 = 0{,}08$$

Podem concloure que l'acord en les classificacions a partir de les dues formes paral·leles del test només aconsegueix un 8% més que l'acord previst per pur atzar. Cal afegir que aquest resultat tan pobre és, en bona part, degut a l'escassa grandària de la mostra.

b) Coeficient kappa (*k*)

Per obtenir el coeficient k, apliquem la fórmula següent:

$$k = \frac{p_c - p_a}{1 - p_a}$$

En què p_c i p_a són respectivament la proporció de subjectes classificats de manera consistent i la que s'esperaria per atzar tal com s'ha definit abans.

Per al nostre cas:

$$k = \frac{p_c - p_a}{1 - p_a} = \frac{0{,}60 - 0{,}52}{1 - 0{,}52} = 0{,}17$$

També en aquest cas, igual que en l'apartat anterior, el coeficient k de 0,17 indica una consistència molt pobre en la classificació, en bona part deguda als pocs subjectes de la mostra.

c) Coeficient de Livingston

El coeficient de Livingston l'obtenim a partir de l'expressió següent:

$$K^2_{xx'} = \frac{r_{xx'} S_x S_{x'} + (\bar{x}_x - C)(\bar{x}_{x'} - C)}{\sqrt{[S_x^2 + (\bar{x}_x - C)^2]\,[S_{x'}^2 + (\bar{x}_{x'} - C)^2]}}$$

En què:

r_{xx} és el coeficient de fiabilitat a partir del procediment de formes paral·leles o test-retests.

S_x i $S_{x'}$ corresponen respectivament a la desviació típica del test en la primera i segona administració o en cada una de les formes paral·leles del test.

$\bar{x}_x$ i $\bar{x}_{x'}$ corresponen respectivament a la mitjana del test en la primera i segona administració o en cada una de les formes paral·leles del test.

C és el punt de tall.

S_x^2 i $S_{x'}^2$ corresponen respectivament a la variància del test en la primera i segona administració o en cada una de les formes paral·leles del test.

Per al nostre cas, aquests valors són:

$$r_{xx} = 0{,}744$$

$$S_x = 1{,}9$$

$$S_{x'} = 1{,}7$$

$$\bar{x}_x = 3$$

$$\bar{x}_{x'} = 3{,}1$$

$$C = 2$$

$$S_x^2 = 3{,}6$$

$$S_{x'}^2 = 2{,}89$$

I el coeficient de Livingston serà:

$$K_{xx'}^2 = \frac{r_{xx}S_xS_{x'} + (\bar{x}_x - C)(\bar{x}_{x'} - C)}{\sqrt{[S_x^2 + (\bar{x}_x - C)^2]\,[S_{x'}^2 + (\bar{x}_{x'} - C)^2]}} = \frac{0{,}744 \cdot 1{,}9 \cdot 1{,}7 + (3-2)(3{,}1-2)}{\sqrt{[3{,}6 + (3-2)]\,[2{,}89 + (3{,}1-2)]}} = 0{,}82$$

El coeficient de Livingston ens proporciona un valor de 0,82, que es pot considerar com una consistència adequada en les classificacions de les dues formes paral·leles.

Exercici 2

1.

a) Fórmula de Spearman-Brown

Obtenim la consistència interna o fiabilitat del test utilitzant el mètode de les dues meitats, a partir de la fórmula de Spearman-Brown, seguint aquests passos:

En primer lloc calculem, per a cada subjecte, el sumatori dels ítems parells i el dels ítems imparells:

Subjecte	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6	Parells	Imparells
1	1	1	0	0	0	1	2	1
2	1	1	1	0	1	1	2	3
3	0	1	1	0	0	0	1	1
4	0	1	1	0	0	0	1	1
5	0	0	1	1	1	1	2	2
6	0	0	0	1	1	1	2	1
7	0	0	1	0	1	1	1	2
8	0	0	1	0	0	0	0	1
9	1	1	1	0	1	1	2	3
10	0	0	1	0	1	1	1	2
11	0	1	1	0	0	1	2	1
12	1	1	0	1	1	1	3	2
13	1	0	1	1	1	1	2	3
14	0	0	0	0	0	0	0	0
15	1	0	0	0	1	1	1	2
16	1	0	1	0	0	0	0	2
17	1	1	1	1	1	1	3	3
18	0	1	0	0	1	1	2	1
19	1	1	1	1	1	1	3	3
20	0	1	1	0	1	1	2	2
21	0	1	1	0	1	1	2	2
22	0	0	0	0	1	0	0	1
23	0	1	1	0	1	1	2	2
24	0	1	1	0	0	1	2	1
25	0	0	0	0	1	0	0	1

En segon lloc apliquem la fórmula del coeficient de correlació de Pearson entre el sumatori dels ítems parells i el dels imparells, i n'obtenim un coeficient de correlació igual a 0,547 $\left(r_{pi}=0{,}547\right)$.

En tercer lloc apliquem la fórmula de Spearman-Brown per obtenir el coeficient de fiabilitat del test:

$$r_{xx'}=\frac{2r_{pi}}{1+r_{pi}}=\frac{2\times 0{,}547}{1+0{,}547}=0{,}707$$

El coeficient de fiabilitat o consistència interna del test aplicant la fórmula de Spearman-Brown és de 0,707.

b) Fórmula de Rulon

Com sabem, la fórmula de Rulon és:

$$r_{xx'}=1-\frac{S_d^2}{S_x^2}$$

En què:

S_d^2: variància de les diferències entre les puntuacions dels subjectes en les dues meitats del test.

S_x^2: variància de les puntuacions totals dels subjectes en el test.

Per tant, necessitem les puntuacions totals dels subjectes en el test, les seves puntuacions en els ítems parells i en el senars, i calcularem les diferències entre aquestes puntuacions (*D*).

Subjecte	Total	Parells	Imparells	*D*
1	3	2	1	1
2	5	2	3	–1
3	2	1	1	0
4	2	1	1	0
5	4	2	2	0
6	3	2	1	1
7	3	1	2	–1
8	1	0	1	–1
9	5	2	3	–1
10	3	1	2	–1

Subjecte	Total	Parells	Imparells	*D*
11	3	2	1	1
12	5	3	2	1
13	5	2	3	–1
14	0	0	0	0
15	3	1	2	–1
16	2	0	2	–2
17	6	3	3	0
18	3	2	1	1
19	6	3	3	0
20	4	2	2	0
21	4	2	2	0
22	1	0	1	–1
23	4	2	2	0
24	3	2	1	1
25	1	0	1	–1

Amb aquestes dades, calcularem les variàncies d'aquestes diferències i de la puntuació total.

Per exemple, en el cas de les puntuacions de diferència, aquesta variància serà igual a:

$$S_d^2 = \frac{\sum \left(D - \overline{D}\right)^2}{n}$$

Sabent que la mitjana de les puntuacions de diferència és igual a –0,20, obtindrem la variància amb les dades següents:

D	$D - \overline{D}$	$\left(D - \overline{D}\right)^2$
1	1,2	1,44
–1	–0,8	0,64
0	0,2	0,04
0	0,2	0,04
0	0,2	0,04
1	1,2	1,44
–1	–0,8	0,64

D	$D-\overline{D}$	$(D-\overline{D})^2$
–1	–0,8	0,64
–1	–0,8	0,64
–1	–0,8	0,64
1	1,2	1,44
1	1,2	1,44
–1	–0,8	0,64
0	0,2	0,04
–1	–0,8	0,64
–2	–1,8	3,24
0	0,2	0,04
1	1,2	1,44
0	0,2	0,04
0	0,2	0,04
0	0,2	0,04
–1	–0,8	0,64
0	0,2	0,04
1	1,2	1,44
–1	–0,8	0,64
	Σ	18

I, per tant, la variància de les diferències serà:

$$S_d^2 = \frac{\sum (D-\overline{D})^2}{n} = \frac{18}{25} = 0,72$$

Aplicant la mateixa fórmula a les puntuacions totals, obtindrem una variància de 2,4224.

Amb aquestes dades ja podem calcular el coeficient de fiabilitat a partir de la fórmula de Rulon:

$$r_{xx'} = 1 - \frac{S_d^2}{S_x^2} = 1 - \frac{0,72}{2,4224} = 0,703$$

El coeficient de fiabilitat o consistència interna del test aplicant la fórmula de Rulon és de 0,703.

c) Fórmula de Gutman-Flanagan

La fórmula de Gutman-Flanagan calcula el coeficient de fiabilitat d'un test a partir de les variàncies dels ítems parells i imparells, i de la puntuació total. La seva expressió és:

$$r_{xx'} = 2\left(1 - \frac{S_p^2 + S_i^2}{S_x^2}\right)$$

En què:

S_p^2: variància de les puntuacions dels subjectes en els ítems parells del test.

S_i^2: variància de les puntuacions dels subjectes en els ítems imparells del test.

S_x^2: variància de les puntuacions totals dels subjectes en el test.

Per al nostre exercici, calcularem les variàncies anteriors, i obtindrem els resultats següents:

$$S_p^2 = 0{,}8890$$

$$S_i^2 = 0{,}6816$$

$$S_x^2 = 2{,}4224$$

I la fórmula de Gutman-Flanagan ens proporciona el resultat següent:

$$r_{xx'} = 2\left(1 - \frac{S_p^2 + S_i^2}{S_x^2}\right) = 2\left(1 - \frac{0{,}8896 + 0{,}6816}{2{,}4224}\right) = 0{,}703$$

El coeficient de fiabilitat o consistència interna del test aplicant la fórmula de Gutman-Flanagan és de 0,703.

2.

a) Coeficient alfa de Cronbach a partir de la variància dels diferents ítems

Per obtenir el coeficient alfa a partir de les variàncies dels diferents ítems, aplicarem la fórmula següent:

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left[1-\frac{\sum_{j=1}^{n} S_j^2}{S_x^2}\right]$$

En què:

n = nombre d'ítems del test.

$\sum_{j=1}^{n} S_j^2$: sumatori de les variàncies dels n ítems.

$S_x^2 =$: variància de les puntuacions totals en el test.

Per tant, hem de calcular les variàncies de cada ítem i de les puntuacions totals en el test que ja hem calculat anteriorment.

	Ítem 1	**Ítem 2**	**Ítem 3**	**Ítem 4**	**Ítem 5**	**Ítem 6**
Variàncies $\left(s_j^2\right)$	0,2304	0,2464	0,2176	0,1824	0,2176	0,2016

I aplicant-ho a la fórmula del coeficient alfa:

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left[1-\frac{\sum_{j=1}^{n} S_j^2}{S_x^2}\right] = \frac{6}{5}\left(1-\frac{0,2304+0,2464+0,2176+0,1824+0,2176+0,2016}{2,4224}\right) = 0,558$$

El coeficient alfa del test és de 0,558.

b) Coeficient alfa de Cronbach a partir de la covariància entre els ítems

La fórmula per a obtenir el coeficient alfa a partir de les covariàncies entre els ítems és:

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left[\frac{\sum\sum_{j \neq k}^{n} \operatorname{cov}(j,k)}{S_x^2}\right]$$

En què:

n = nombre d'ítems del test.

$\sum\sum \text{cov}(j,k) =$: sumatori de les covariàncies dels *n* ítems.

$S_x^2 =$: variància de les puntuacions en el test.

Com ja sabem, la covariància entre dues variables és igual a:

$$\text{cov}_{xy} = \frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$$

Aquesta fórmula, aplicada a la covariància entre l'ítem 1 (*x*) i l'ítem 2 (*y*), ens donarà:

Ítem 1: *x*	**Ítem 2:** *y*	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
1	1	0,64	0,44	0,2816
1	1	0,64	0,44	0,2816
0	1	–0,36	0,44	–0,1584
0	1	–0,36	0,44	–0,1584
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
1	1	0,64	0,44	0,2816
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
0	1	–0,36	0,44	–0,1584
1	1	0,64	0,44	0,2816
1	0	0,64	–0,56	–0,3584
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
1	0	0,64	–0,56	–0,3584
1	0	0,64	–0,56	–0,3584
1	1	0,64	0,44	0,2816
0	1	–0,36	0,44	–0,1584
1	1	0,64	0,44	0,2816
0	1	–0,36	0,44	–0,1584
0	1	–0,36	0,44	–0,1584
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
0	1	–0,36	0,44	–0,1584

Ítem 1: x	Ítem 2: y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
0	1	–0,36	0,44	–0,1584
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
$\bar{x}=0{,}36$	$\bar{y}=0{,}56$		Σ	0,96

$$\text{cov}_{xy}=\frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}=\frac{0{,}96}{25}=0{,}0384$$

Aplicant la mateixa fórmula a la resta de covariàncies, tenim la matriu de covariàncies següent:

	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6
Ítem 1		0,0384	–0,0048	0,0736	0,0352	0,0608
Ítem 2	0,0384		0,0592	–0,0144	–0,0208	0,0768
Ítem 3	-0,0048	0,0592		–0,0032	–0,0224	0,0304
Ítem 4	0,0736	–0,0144	–0,0032		0,0768	0,0672
Ítem 5	0,0352	-0,0208	–0,0224	0,0768		0,1104
Ítem 6	0,0608	0,0768	0,0304	0,0672	0,1104	

I el sumatori d'aquestes covariàncies serà igual a:

$$\sum\sum\text{cov}(j,k)=0{,}0384-0{,}0048+0{,}0736+\ldots\ldots+0{,}0768+0{,}0672+0{,}1104=1{,}264$$

mentre que la variància de les puntuacions totals (S_x^2) ja sabem que és igual a 2,4224.

Per tant:

$$\alpha=\frac{n}{n-1}\left[\frac{\sum\sum_{j\neq k}^{n}\text{cov}(j,k)}{S_x^2}\right]=\frac{6}{5}\left(\frac{1{,}1264}{2{,}4224}\right)=0{,}558$$

El coeficient alfa del test és de 0,558, com ja hem vist en l'apartat anterior.

c) Coeficient alfa de Cronbach a partir de r_1

La fórmula del coeficient alfa també es pot expressar en funció del quocient entre la mitjana de les covariàncies i la mitjana de les variàncies dels diferents ítems del test. Aquest quocient, que designen com a r_1, constitueix una estimació de la fiabilitat de cada ítem. En aquest sentit, la fórmula del coeficient alfa a partir de r_1 és una aplicació de la correcció de Spearman-Brown, que hem comentat per al cas de les dues meitats, a partir de l'estimació de la fiabilitat de cada ítem, tenint en compte que si tenim *n* ítems és com si haguéssim allargat *n* cops l'ítem inicial.

La fórmula del coeficient alfa a partir de r_1 és la següent:

$$\alpha = \frac{n(r_1)}{1+(n-1)r_1}$$

En què r_1 és el quocient entre la mitjana de les covariàncies i la mitjana de les variàncies dels diferents ítems del test, i *n* és el nombre d'ítems del test.

Per al nostre exercici, la mitjana de les covariàncies és 1,1264/30, mentre que la mitjana de les variàncies és 1,296/6.

Per tant,

$$r_1 = \frac{1{,}1264/30}{1{,}296/6} = 0{,}1738$$

I el valor d'alfa:

$$\alpha = \frac{n(r_1)}{1+(n-1)r_1} = \frac{6 \times 0{,}1738}{1+(5 \times 0{,}1738)} = 0{,}558$$

Com podem observar, i com no podia ser d'una altra manera, és exactament igual al valor obtingut en els dos apartats anteriors.

3. Significació estadística del coeficient alfa calculat en l'apartat anterior i determinació del seu interval de confiança

Per a comprovar la significació estadística d'un coeficient alfa, hem de seguir una sèrie de passos:

- Plantejament de la hipòtesi nul·la i l'alternativa:
  – Hipòtesi nul·la: $\alpha = 0$

  – Hipòtesi alternativa: $\alpha \neq 0$

- Càlcul de l'estadístic de contrast:

  $$F = \frac{1-\alpha}{1-\hat{\alpha}} = \frac{1-0}{1-0{,}558} = 2{,}262$$

  que es distribueix segons una *F* de Snedecor amb $(N-1)$ i $(N-1)(n-1)$ graus de llibertat, essent:
  – *N*: nombre de subjectes.

– n: nombre d'ítems.

– α : valor d'alfa en la població.

– $\hat{\alpha}$: valor d'alfa calculat en la mostra.

- Valors crítics de la distribució F de Snedecor amb 24 (N – 1) i 120 **((** N **– 1) (** n **– 1))** graus de llibertat, per a un nivell de confiança del 95% i contrast bilateral són:

  $F_{0,975(24,120)} \approx 1,76$ i $F_{0,025(24,120)} \approx 0,50$[1]

[(1)]**Nota**

$$F_{0,025(24,120)} = \frac{1}{F_{0,975(120,24)}} \approx \frac{1}{2,02} = 0,50$$

Com que el valor de l'estadístic de contrast obtingut (2,262) es troba fora de l'interval comprès entre els valors crítics 1,76 i 0,50, podem rebutjar la hipòtesi nul·la i podem concloure que, a partir de les nostres dades i amb un nivell de confiança del 95%, tenim evidència suficient per a determinar que el valor del coeficient alfa en la població no és de 0, i per tant aquest coeficient és estadísticament significatiu.

Per a construir l'interval confidencial d'aquest coeficient alfa, només cal substituir, en la fórmula de l'estadístic de contrast, els valors crítics de la distribució F i aïllar els valors de α:

$$\frac{1-\alpha}{1-0,558} \leq 1,76$$

$$\alpha \geq 1-1,76(1-0,558) = 0,22$$

$$\frac{1-\alpha}{1-0,558} \geq 0,50$$

$$\alpha \leq 1-0,50(1-0,558) = 0,78$$

Per tant, podem afirmar que amb un nivell de confiança del 95%, els valors del coeficient alfa en la població estaran compresos entre 0,22 i 0,78.

4. Contrast de dos coeficients en mostres independents

Per a saber si la diferència entre dos coeficients alfa obtinguts en mostres diferents de subjectes són iguals o no, hem d'aplicar un contrast per a dos coeficients en mostres independents. Per aplicar aquest contrast seguirem una sèrie de passos:

- Plantejament de les hipòtesis nul·la i alternativa

– Hipòtesi nul·la: $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$

– Hipòtesi alternativa: $\hat{\alpha}_1 \neq \hat{\alpha}_2$

- Càlcul de l'estadístic de contrast:

$$w = \frac{1-\hat{\alpha}_1}{1-\hat{\alpha}_2} = \frac{1-0{,}558}{1-0{,}70} = 1{,}47$$

que es distribueix segons una F de Snedecor amb (N_1 – 1) i (N_2 – 1) graus de llibertat, essent N_1 i N_2 les grandàries de les dues mostres.

- Valors crítics de la distribució F de Snedecor amb 24 (N_1 – 1) i 29 (N_2 – 1) graus de llibertat, per a un nivell de confiança del 95% i contrast bilateral són:
$F_{0,975(24,29)} = 2{,}15$ i $F_{0,025(24,29)} = 0{,}45$

Com que el valor de l'estadístic de contrast obtingut (1,47) cau dins de l'interval comprès entre els valors crítics (0,45 – 2,15), no tenim prou evidències per a rebutjar la hipòtesi nul·la, i per tant hem de concloure que la diferència entre els dos coeficients no és estadísticament significativa.

5. Contrast per a dos coeficients en mostres dependents

Com que hem administrat el mateix test dues vegades al mateix grup de subjectes, per a determinar si entre tots dos coeficients alfa obtinguts hi ha o no diferències estadísticament significatives, aplicarem un contrast per a dos coeficients en mostres dependents. Els passos a seguir són aquests:

- Hipòtesi nul·la: $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$

- Hipòtesi alternativa: $\hat{\alpha}_1 \neq \hat{\alpha}_2$

- Càlcul de l'estadístic de contrast:

$$t = \frac{(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2)\sqrt{N-2}}{\sqrt{4(1-\hat{\alpha}_1)(1-\hat{\alpha}_2)(1-r_{12})}} = \frac{(0{,}558-0{,}64)\sqrt{25-2}}{\sqrt{4(1-0{,}558)(1-0{,}64)(1-0{,}92)}} = -1{,}74$$

que es distribueix segons una t de Student amb N – 2 graus de llibertat, essent N el nombre de subjectes de la mostra.

- Valors crítics de la distribució t de Student amb 23 (N – 2) graus de llibertat, per a un nivell de confiança del 95% i contrast bilateral són:

$$t_{0,975(23)} = 2{,}069 \text{ i } t_{0,025(23)} = -2{,}069$$

Com que l'estadístic de contrast obtingut (–1,74) queda dins de l'interval entre els valors crítics (–2,069 – 2,069), acceptem la hipòtesi nul·la i podem concloure que, amb un nivell de confiança del 95%, la diferència entre els dos coeficients alfa no és estadísticament significativa.

6. Càlcul del KR_{20} i el KR_{21} de Kuder-Richardson i comparació dels dos valors

La fórmula del KR_{20} simplement substitueix, en la del coeficient alfa de Cronbach, el sumatori de les variàncies dels ítems pel sumatori dels productes p_j per q_j, essent (p_j) la proporció de subjectes que encerten l'ítem o tenen un 1 en aquest ítem i (q_j) la proporció de subjectes que no l'encerten o tenen un 0. Així, per exemple en el primer ítem, hi ha nou subjectes amb una puntuació d'1, i setze amb una puntuació de 0. Per tant, p_j serà 9/25 (0,36), i q_j 16/25 (0,64).

La fórmula del KR_{20} és la següent:

$$KR_{20} = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}{S_x^2}\right)$$

I els productes p_j per q_j seran:

	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6
p	0,36	0,56	0,68	0,24	0,68	0,72
q	0,64	0,44	0,32	0,76	0,32	0,28
*p***q*	0,2304	0,2464	0,2176	0,1824	0,2176	0,2016

Per tant,

$$KR_{20} = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}{S_x^2}\right] = \frac{6}{5}\left(1 - \frac{0{,}2304 + 0{,}2464 + 0{,}2176 + 0{,}1824 + 0{,}2176 + 0{,}2016}{2{,}4224}\right) = 0{,}558$$

El coeficient alfa calculat amb la fórmula del KR_{20} ens dóna un valor de 0,558.

L'aplicació de la fórmula del KR_{21} per al nostre exercici ens dóna el resultat següent:

$$KR_{21} = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\bar{X} - \bar{X}^2 / n}{S_x^2}\right) = \frac{6}{5}\left(1 - \frac{3{,}24 - 3{,}24^2 / 6}{2{,}4224}\right) = 0{,}462$$

essent $\overline{X}$ la mitjana de les puntuacions totals dels vint-i-cinc subjectes de la mostra en el test. Aquesta mitjana és de 3,24.

Com podem observar, el valor del KR_{21} és inferior al del KR_{20}, essent aquest darrer igual al valor del coeficient alfa de Cronbach. Aquesta diferència és deguda al fet que no tots els ítems tenen la mateixa proporció d'uns i de zeros, o sigui que els valors de p_j i q_j no són iguals en tots els ítems i, per tant, l'aplicació de la fórmula KR_{21} per a aquest cas és inapropiada i no ens dóna un valor adequat per a estimar el coeficient alfa.

7. Per a determinar quina serà la nova fiabilitat del test si afegíssim tres ítems més, haurem d'aplicar la fórmula de Spearman Brown:

$$R_{xx} = \frac{k\, r_{xx}}{1+(k-1)r_{xx}}$$

En què:

R_{xx} és el nou coeficient de fiabilitat del test allargat.

r_{xx} és el coeficient de fiabilitat del test original.

k és el nombre de vegades que s'allarga o s'escurça el test. D'aquesta manera k estarà determinat pel quocient entre el nombre d'ítems finals (n_f) del test dividit pel nombre d'ítems inicials (n_i) del test:

$$k = \frac{n_f}{n_i} = \frac{\textit{Ítems finals}}{\textit{Ítems inicials}} = \frac{9}{6} = 1{,}5$$

Així, la nova fiabilitat serà:

$$R_{xx} = \frac{k\, r_{xx}}{1+(k-1)r_{xx}} = \frac{1{,}5 \times 0{,}558}{1+(1{,}5-1)0{,}558} = 0{,}65$$

Per tant, si afegíssim tres ítems més al test, suposant que mesuressin el mateix constructe, la seva nova fiabilitat seria de 0,65.

8. Si volem saber quants ítems hauríem d'afegir al test inicial per a arribar a una fiabilitat de 0,70, hem d'aïllar k de la fórmula de Spearman-Brown:

$$k = \frac{R_{xx}(1-r_{xx})}{r_{xx}(1-R_{xx})} = \frac{0{,}70.(1-0{,}558)}{0{,}558.(1-0{,}70)} = 1{,}85$$

I, per tant, el nombre d'ítems que cal afegir serà $(k \cdot \textit{Ítems inicials}) - \textit{Ítems inicials}\ (1{,}85 \cdot 6) - 6 = 5{,}1.$

Si volem que el test tingui una fiabilitat de 0,70 hem d'afegir sis ítems als sis inicials.

9. Per a estimar la puntuació veritable que tindrà el primer subjecte de la matriu de dades del nostre exercici, que ha obtingut una puntuació total en el test de 3, amb un nivell de confiança del 95%, podem utilitzar dos procediments:

a) La distribució normal dels errors:

Els passos que s'han de seguir en aquest cas seran:

- Calcular l'error típic de mesura (S_e):

$$S_e = S_X\sqrt{1-r_{xx}} = 1{,}5564\sqrt{1-0{,}558} = 1{,}03$$

  en què S_x és la desviació típica de les puntuacions del test i r_{xx} és el coeficient alfa obtingut.

- Cercar el valor $Z_{\alpha/2}$ que per al nivell de confiança del 95% segons les taules de la distribució normal és d'1,96.

- Calcular l'error màxim de mesura ($E_{màx}$):

$$E_{màx} = Z_{\alpha/2} \cdot S_e = 1{,}96 \cdot 1{,}03 \approx 2$$

- Calcular l'interval de confiança de la puntuació veritable del subjecte a partir de l'expressió següent:

$$IC = X \pm E_{màx} = 3 \pm 2$$

$$1 \leq V \leq 5$$

La puntuació veritable del primer subjecte de la matriu de dades, que ha obtingut una puntuació total de 3 en el test, amb un nivell de confiança del 95% i aplicant la distribució normal dels errors, estarà compresa entre 1 i 5 punts.

b) El model de la regressió:

Si utilitzem el model de la regressió per a obtenir aquest interval de confiança, seguirem aquests altres passos:

- Calculem la puntuació veritable estimada segons el model de la regressió:

$$V' = r_{xx}(X - \overline{X}) + \overline{X}$$

  En què:
  V' és la puntuació veritable pronosticada.
  r_{xx} és el coeficient de fiabilitat del test.
  X és la puntuació empírica obtinguda pel subjecte.
  $\overline{X}$ és la mitjana de les puntuacions del test, que en el nostre cas és de 3,24.

$$V' = 0{,}558 \cdot (3 - 3{,}24) + 3{,}24 = 3{,}10$$

- Obtenim l'error típic d'estimació:

$$S_{vx} = S_x\sqrt{1 - r_{xx}}\sqrt{r_{xx}} = S_e\sqrt{r_{xx}} = 1{,}03\sqrt{0{,}558} = 0{,}77$$

En què:

S_x és la desviació típica de les puntuacions del test.

r_{xx} és el coeficient de fiabilitat del test.

S_e és l'error típic de mesura.

- Calculem l'error màxim:

$$E_{màx} = 1{,}96 \cdot 0{,}77 = 1{,}51$$

- Obtenim l'interval de confiança:

$$V' \pm E_{màx}$$

$$3{,}10 \pm 1{,}51$$

$$1{,}59 \leq V \leq 4{,}61$$

Aplicant el model de la regressió, la puntuació veritable del primer subjecte de la matriu de dades, amb un nivell de confiança del 95%, estarà compresa entre 1,59 i 4,61.

7. Solucionari dels exercicis sobre validesa

Exercici 1

a) Per a obtenir el coeficient de validesa del test, hem de calcular el coeficient de correlació de Pearson entre les puntuacions dels subjectes en el test i en el criteri (BDI). Per tant, aplicarem la fórmula següent:

$$r_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

En què x són les puntuacions dels subjectes en el test de sis ítems i y les seves puntuacions en el criteri (BDI).

Amb les nostres dades, aquest coeficient de fiabilitat és igual a 0,80.

De fet, en aquest cas també ens podríem plantejar utilitzar el coeficient de correlació de Spearman, ja que el nostre test, en tenir tan pocs ítems (només sis), es podria argumentar que la seva escala de mesura és ordinal i no d'interval o raó com requereix el coeficient de correlació de Pearson. El valor del coeficient de correlació de Spearman per a les nostres dades és de 0,82, que com veiem no és gaire diferent del de Pearson. De totes maneres, per als propers apartats continuarem operant amb el valor del coeficient de validesa de 0,80.

b) Per a obtenir el coeficient de validesa del test, suposant que aquest tingués una fiabilitat perfecta, aplicaríem la fórmula d'atenuació per a aquest cas:

$$r_{v_x y} = \frac{r_{xy}}{\sqrt{r_{xx'}}}$$

Per tant, per al nostre exemple, el coeficient de validesa inicial del test és 0,80, i el seu coeficient de fiabilitat (calculat en els exercicis de fiabilitat amb el mètode de les dues meitats i la fórmula de Spearman-Brown) és de 0,707.

Per tant:

$$r_{v_x y} = \frac{r_{xy}}{\sqrt{r_{xx'}}} = \frac{0,80}{\sqrt{0,707}} = 0,95$$

El coeficient de validesa del test suposant-hi una fiabilitat perfecta seria de 0,95.

c) Si afegim sis ítems més al test, en podrem calcular la nova fiabilitat amb l'expressió següent:

$$r_{Xy} = \frac{r_{xy}\sqrt{n}}{\sqrt{1+(n-1)r_{xx'}}}$$

En què:

r_{xy} és el valor inicial del coeficient de validesa del test.

$r_{xx'}$ és el coeficient de fiabilitat del test.

n és el nombre de cops que s'allarga el test.

Si allarguem el test amb sis ítems més del sis inicials, n serà igual a 2, ja que en dupliquem la longitud.

Per tant, el nou coeficient de fiabilitat serà:

$$r_{Xy} = \frac{r_{xy}\sqrt{n}}{\sqrt{1+(n-1)r_{xx'}}} = \frac{0{,}80\sqrt{2}}{\sqrt{1+0{,}80}} = 0{,}84$$

d) En primer lloc, per a determinar la puntuació que podem pronosticar que tindrà en el criteri (BDI) un subjecte que ha obtingut 4 punts en el nostre test (x = 4), aplicarem el model de la regressió. L'equació de la recta de regressió serà:

$$y' = a + bx$$

En què b és el pendent de la recta i a la intersecció o ordenada en l'origen.

El pendent (b) i la intersecció (a) els podem calcular a partir de les fórmules següents:

$$b = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x} = 0{,}80 \times \frac{4{,}050}{1{,}556} = 2{,}08$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 12{,}56 - (3{,}24 \cdot 2{,}08) = 5{,}82$$

I, per tant, tenim que $y' = a + bx$ = 5,82 + (2,08 × 4) = 14,14.

Ara podem construir l'interval de confiança a partir de l'expressió següent:

$$IC_{1-\alpha} \rightarrow y' \pm t_{n-1;\alpha/2} \cdot s_{y-y'}$$

En què $t_{n-1,\alpha/2}$ és el valor de la t de Student amb n – 1 graus de llibertat i el nivell de confiança determinat, i $S_{y-y'}$ és l'error típic d'estimació.

En el nostre exercici, t = 2,064 i $s_{y-y'} = s_y\sqrt{1-r_{xy}^2} = 4{,}050\sqrt{1-0{,}80^2} = 2{,}43$.

Així,

$$IC_{1-\alpha} \to y' \pm t_{n-1;\alpha/2} \cdot s_{y-y'} = 14{,}14 \pm 2{,}064 \cdot 2{,}43 = [9{,}12 \quad 19{,}15]$$

Podem concloure que, a un subjecte que ha obtingut 4 punts en el nostre test, li podem pronosticar que tindrà entre 9 i 19 punts (arrodonint) en el BDI, amb un nivell de confiança del 95%.

e) Per a analitzar la validesa de decisió del nostre test, hem de construir la taula de contingència, a partir de la classificació dels subjectes entre els diagnosticats o no de trastorn depressiu lleu pel BDI i pel nostre test, en funció dels punts de tall de l'enunciat, en funció de les seves puntuacions directes del cas 2 en les dues proves.

Aquesta taula és la següent:

		BDI		**Total**
		No trastorn	**Sí trastorn**	
Test	No trastorn	14	1	15
	Sí trastorn	4	6	10
	Total	18	7	25

A partir d'aquesta taula podem obtenir:

- El percentatge d'acord entre els dos tests (P_c):

$$P_c = \frac{14+6}{25} = 0{,}80$$

  Que podem interpretar com un nivell d'acord força elevat (80%).

- El coeficient kappa (k):

$$k = \frac{20-13{,}6}{25-13{,}6} = 0{,}56$$

  Que podem interpretar com una relació acceptable entre les dues classificacions.

- La sensibilitat del nostre test:

$$Sensibilitat = \frac{Diagnosticats\ pel\ nostre\ test}{Total\ diagnosticats\,(\mathrm{BDI})} = \frac{6}{7} = 0{,}86$$

Que representa un 86% de diagnòstics correctes.

- L'especificitat del nostre test:

$$Especificitat = \frac{No\ diagnosticats\ pel\ nostre\ test}{Total\ no\ diagnosticats\,(\mathrm{BDI})} = \frac{14}{18} = 0{,}78$$

Que s'interpreta com un 76% d'encert en la detecció del no trastorn.

Exercici 2

Per obtenir les comunalitats dels diferents ítems en cada un dels dos components extrets, n'elevem al quadrat les saturacions factorials. La suma de les dues comunalitats en proporcionarà el valor de la comunalitat conjunta. El valor propi de cada component serà la suma de les comunalitats dels sis ítems, i la variància explicada per a cada un d'ells serà el percentatge que representa el valor propi respecte al total dels sis ítems. Així, tindrem la taula següent:

	Component		Comunalitats		
	1	2	C1	C2	Conjunta
Ítem 1	,587	,023	0,345	0,001	0,345
Ítem 2	,267	,793	0,071	0,629	0,700
Ítem 3	,085	,703	0,007	0,494	0,501
Ítem 4	,696	-,303	0,484	0,092	0,576
Ítem 5	,705	-,360	0,497	0,130	0,627
Ítem 6	,821	,219	0,674	0,048	0,722
Valor propi			2,079	1,393	3,472
Variància explicada			34,643	23,216	57,859

C1 és el component 1 i C2 el component 2.

La comunalitat de l'ítem 1 en el component 1 és igual a $0{,}587^2$ o sigui 0,345, i així per a la resta. La variància explicada pel primer component és igual al seu valor propi (2,079) dividit per 6 (nombre d'ítems) i multiplicat per 100:

Variància explicada C1 = $\frac{2{,}079}{6} \times 100 = 34{,}643.$

La interpretació dels resultats d'aquest ACP aniria en la direcció de considerar el test amb una estructura interna bidimensional (mesuraria dues dimensions), ja que els diferents ítems presenten saturacions factorials elevades (superiors a 0,30) amb algun dels dos factors extrets. Així, els ítems 1, 4, 5 i 6 estarien relacionats amb el component 1, mentre que els ítems 2 i 3 estarien relacionats amb el component 2. El primer component explica el 34,643% de la variabilitat total dels sis ítems, mentre que el segon explica un percentatge del 23,216. Els dos components extrets conjuntament expliquen quasi un 58% de la variabilitat total.

8. Solucionari dels exercicis sobre transformació i interpretació de les puntuacions

Exercici 1

En primer lloc, per a fer qualsevol transformació de les puntuacions directes (X) hem de construir la taula de freqüències amb les freqüències absolutes (f_i) per a cada una de les puntuacions en el test. Aquestes freqüències absolutes seran el recompte del nombre de subjectes que han obtingut una puntuació determinada:

X	f_i
0	1
1	3
2	3
3	8
4	4
5	4
6	2

a) Percentils

Per a obtenir els percentils necessitem calcular les freqüències acumulades (f_a), els percentatges (P_i) i els percentatges acumulats (P_a):

X	f_i	f_a	P_i	P_a
0	1	1	4	4
1	3	4	12	16
2	3	7	12	28
3	8	15	32	60
4	4	19	16	76
5	4	23	16	92
6	2	25	8	100

A partir d'aquestes dades, per obtenir els percentils (P_c) apliquem la fórmula:

$$P_c = \frac{f_a + 0{,}5f_i}{N} \times 100$$

En què f_a és la freqüència acumulada prèvia a la puntuació directa de la qual es vol calcular el percentil, f_i la freqüència absoluta en la qual es troba la puntuació directa, i N el nombre de persones que constitueixen la mostra.

Així, per a la puntuació directa de 0, el percentil serà:

$$P_c = \frac{0 + (0{,}5 \cdot 1)}{25} \times 100 = 2$$

Per a la puntuació d'1:

$$P_c = \frac{1 + (0{,}5 \cdot 3)}{25} \times 100 = 10$$

Per a la puntuació de 2:

$$P_c = \frac{4 + (0{,}5 \cdot 3)}{25} \times 100 = 22$$

Per a la puntuació de 3:

$$P_c = \frac{7 + (0{,}5 \cdot 8)}{25} \times 100 = 44$$

Per a la puntuació de 4:

$$P_c = \frac{15 + (0{,}5 \cdot 4)}{25} \times 100 = 68$$

Per a la puntuació de 5:

$$P_c = \frac{19 + (0{,}5 \cdot 4)}{25} \times 100 = 84$$

Per a la puntuació de 6:

$$P_c = \frac{23 + (0{,}5 \cdot 2)}{25} \times 100 = 96$$

X	f_i	P_c
0	1	2
1	3	10
2	3	22
3	8	44

X	f_i	P_c
4	4	68
5	4	84
6	2	96

b) Puntuacions estandarditzades

La fórmula de les puntuacions estandarditzades és:

$$Z_x = \frac{X - \overline{X}}{S_x}$$

En què X és la puntuació directa, $\overline{X}$ la mitjana de la mostra, i S_x la desviació típica. Per tant, hem d'obtenir la mitjana $(\overline{X} = 3{,}24)$ i la desviació típica (S_x = 1,56) de la distribució de dades, i aplicar la fórmula per a cada puntuació directa.

Per exemple, per a la puntuació de 0, la puntuació estandarditzada serà:

$$Z_x = \frac{X - \overline{X}}{S_x} = \frac{0 - 3{,}24}{1{,}56} = -2{,}08$$

Aplicant la fórmula a totes les puntuacions obtindrem:

X	Z_x
0	–2,08
1	–1,44
2	–0,79
3	–0,15
4	0,49
5	1,13
6	1,77

c) Puntuacions *T*

A partir de les puntuacions estandarditzades podem obtenir fàcilment les puntuacions T de McCall a partir de la transformació següent:

$$T = 50 + 10\ Z_x$$

En el nostre cas, per a una puntuació directa de 0, la puntuació T serà 50 + (10 × –2,08) = 29,2, que arrodonim a l'enter més proper (29), ja que les puntuacions T no tenen decimals.

Per a les altres puntuacions tindrem:

X	Z_x	T
0	–2,08	29
1	–1,44	36
2	–0,79	42
3	–0,15	48
4	0,49	55
5	1,13	61
6	1,77	68

d) Enneatipus (*E*)

Per als enneatipus, primer hem de calcular les puntuacions estandarditzades normalitzades (Z_n), transformant els percentils en les puntuacions estandarditzades que sota la taula de la distribució normal tenen associada una proporció igual al percentil dividit per 100. Per exemple, al percentil 2, que en les nostres dades correspon a la puntuació directa de 0, correspon una puntuació estandarditzada normalitzada de –2,05, que és la puntuació z de la distribució normal associada a una proporció de 0,02 (percentil dividit per 100).

Un cop tenim la Z_n, per obtenir l'enneatipus simplement apliquem la transformació $E = 5 + 2\ Z_n$, que per a la puntuació de 0 ens donarà $E = 5 + (2 – 2{,}05) = 0{,}9$), que arrodonim a l'enter més proper (1), ja que els enneatipus tampoc tenen decimals.

Per a les altres puntuacions obtindrem:

X	P_c	Z_n	E
0	2	–2,05	1
1	10	–1,28	2
2	22	–0,77	3
3	44	–0,15	5
4	68	0,47	6
5	84	0,99	7

X	***P_c***	***Z_n***	***E***
6	96	1,75	9

e) Decatipus (*D*)

Els decatipus també són puntuacions normalitzades derivades que s'obtenen de les puntuacions estandarditzades normalitzades a partir de la transformació següent: $D = 5{,}5 + 2\ Z_n$, que per la puntuació de 0 ens donarà $D = 5{,}5 + (2 - 2{,}05) = 1{,}4$, que arrodonim a l'enter més proper (1) per la mateixa raó de l'apartat anterior.

Per a les altres puntuacions obtindrem:

X	***Pc***	***Zn***	***D***
0	2	–2,05	1
1	10	–1,28	3
2	22	–0,77	4
3	44	–0,15	5
4	68	0,47	6
5	84	0,99	7
6	96	1,75	9

Exercici 2

Per calcular els percentils corresponents a les puntuacions directes, seguim els passos que veurem a continuació.

En primer lloc, obtenim la puntuació directa dels tres primers subjectes de la matriu de dades sumant el nombre d'ítems que cada un d'ells contesta correctament.

Així, per al primer subjecte la puntuació directa és de 9, per al segon de 6, i per al tercer de 2.

En segon lloc, obtenim la taula de freqüències absolutes (f_i) i de freqüències acumulades (f_a) de totes les puntuacions (*X*) obtingudes pels vint-i-cinc subjectes, fent el recompte del nombre de subjectes que obtenen cada una de les puntuacions.

X	***f_i***	***f_a***
1	2	2

X	f_i	f_a
2	4	6
3	2	8
4	2	10
5	2	12
6	3	15
7	4	19
8	3	22
9	3	25

En tercer lloc, apliquem la fórmula dels percentils per a les puntuacions dels tres primers subjectes:

- Primer subjecte:

$$X = 9 \; P_c = \frac{f_a + 0{,}5 f_i}{N} \times 100 = \frac{22 + (0{,}5 \cdot 3)}{25} \times 100 = 94$$

- Segon subjecte:

$$X = 6 \; P_c = \frac{f_a + 0{,}5 f_i}{N} \times 100 = \frac{12 + (0{,}5 \cdot 3)}{25} \times 100 = 54$$

- Tercer subjecte:

$$X = 2 \; P_c = \frac{f_a + 0{,}5 f_i}{N} \times 100 = \frac{2 + (0{,}5 \cdot 4)}{25} \times 100 = 16$$

D'altra banda, per a transformar les puntuacions directes en QI, hem d'obtenir, en primer lloc, la puntuació estandarditzada *z* i, en segon lloc, transformar aquesta puntuació *z* en QI.

La fórmula de la puntuació *z* és:

$$Z_x = \frac{X - \overline{X}}{S_x}$$

I requereix el càlcul previ de la mitjana i la desviació típica. En aquest exemple, la mitjana de les puntuacions dels vint-i-cinc subjectes és de 5,24, i la desviació típica de 2,61.

Així, les puntuacions estandarditzades dels tres primers subjectes seran:

- Primer subjecte:

$$X = 9 \; Z_x = \frac{X - \overline{X}}{S_x} = \frac{9 - 5{,}24}{2{,}61} = 1{,}44$$

- Segon subjecte:

$$X = 6 \; Z_x = \frac{X - \overline{X}}{S_x} = \frac{6 - 5{,}24}{2{,}61} = 0{,}29$$

- Tercer subjecte:

$$X = 2 \; Z_x = \frac{X - \overline{X}}{S_x} = \frac{2 - 5{,}24}{2{,}61} = -1{,}24$$

Amb aquestes puntuacions ja podem obtenir els valors dels quocients intel·lectuals (QI) dels tres subjectes. La transformació en QI segueix aquesta expressió:

$$\text{QI} = 100 + (z \times 10)$$

- Primer subjecte: QI = 100 + (1,44 × 10) ≈ 114 (arrodonint a l'enter més proper)

- Segon subjecte: QI = 100 + (0,29 × 10) ≈ 103

- Tercer subjecte: QI = 100 + (–1,24 × 10) ≈ 88

Podem resumir aquestes transformacions en la taula següent:

Subjecte	**Puntuació directa**	**Percentil**	**QI**
1	9	94	114
2	6	54	103
3	2	16	88

9. Solucionari dels exercicis sobre anàlisi dels ítems

Exercici 1

Per a obtenir els índexs de dificultat (ID) i de discriminació (IDr) de cada ítem podem construir les taules següents, que resumeixen les respostes dels vint-i-cinc subjectes a cada un d'aquests tres ítems:

Ítem 1:

	Alternatives de resposta			
Grup de rendiment	A*	B	C	D
Alt	4	1	1	0
Mitjà	1	4	4	4
Baix	0	3	2	1

* Alternativa correcta

- Índex de dificultat:

$$ID = \frac{A - \frac{E}{K-1}}{N} = \frac{5 - \frac{20}{3}}{25} = -0{,}07$$

  En què A és el nombre de subjectes que encerten l'ítem (en l'ítem 1 són 5), E el nombre de subjectes que no l'encerten (20), K el nombre d'alternatives de resposta de l'ítem (4), i N el nombre total de subjectes que responen a l'ítem (25).

- Índex de discriminació:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{4}{6} - \frac{0}{6} = 0{,}67$$

  En què P_a és la proporció de subjectes del grup d'alt rendiment que encerten l'ítem (per a l'ítem 1 són 4 de 6), i Pb és la proporció de subjectes del grup de baix rendiment que encerten l'ítem (0 de 6).

En funció d'aquests valors, podem considerar que l'ítem 1 és un ítem amb una dificultat molt elevada i amb una alta capacitat de discriminació.

Ítem 2:

	Alternatives de resposta			
Grup de rendiment	A	B	C*	D

* Alternativa correcta

	Alternatives de resposta			
Alt	0	0	6	0
Mitjà	2	0	11	0
Baix	0	1	3	2

* Alternativa correcta

- Índex de dificultat:

$$ID = \frac{A - \frac{E}{K-1}}{N} = \frac{20 - \frac{5}{3}}{25} = 0,73$$

- Índex de discriminació:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{6}{6} - \frac{3}{6} = 0,50$$

Interpreten aquests valors en el sentit de considerar l'ítem 2 com un ítem fàcil i amb una alta discriminació.

Ítem 3:

	Alternatives de resposta			
Grup de rendiment	A	B	C	D*
Alt	0	0	0	6
Mitjà	6	0	3	4
Baix	2	1	3	0

* Alternativa correcta

- Índex de dificultat:

$$ID = \frac{A - \frac{E}{K-1}}{N} = \frac{10 - \frac{15}{3}}{25} = 0,20$$

- Índex de discriminació:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{6}{6} - \frac{0}{6} = 1$$

Podem interpretar aquests valors en el sentit de considerar l'ítem 3 com un ítem força difícil i amb una altíssima capacitat de discriminació.

Exercici 2

Per a fer l'anàlisi dels distractors de cada un dels tres primers ítems, podem aprofitar la taula confeccionada en l'exercici anterior i calcular els índexs de discriminació de cada una de les alternatives de respostes incorrectes:

Ítem 1:

	Alternatives de resposta			
Grup de rendiment	A*	B	C	D
Alt	4	1	1	0
Mitjà	1	4	4	4
Baix	0	3	2	1

* Alternativa correcta

- Índex de discriminació de l'alternativa *B*:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{1}{6} - \frac{3}{6} = -0{,}33$$

- Índex de discriminació de l'alternativa *C*:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{1}{6} - \frac{2}{6} = -0{,}17$$

- Índex de discriminació de l'alternativa *D*:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{0}{6} - \frac{1}{6} = -0{,}17$$

Com podem observar, els tres índexs són negatius, la qual cosa s'interpreta com que les tres alternatives de resposta presenten una discriminació adequada com a distractors. També cal comentar que l'ítem 1 és un ítem força difícil, i en conseqüència hi ha una proporció elevada de subjectes que escullen respostes incorrectes. Observant aquestes respostes incorrectes, també podem concloure que les tres alternatives són adequades, ja que no hi ha grans diferències quant al nombre de subjectes que escullen cada alternativa. Així, l'alternativa *B* és escollida per vuit dels vint-i-cinc subjectes, la *C* per set, i la *D* per cinc.

Ítem 2:

	Alternatives de resposta			
Grup de rendiment	A	B	C*	D
Alt	0	0	6	0
Mitjà	2	0	11	0
Baix	0	1	3	2

* Alternativa correcta

- Índex de discriminació de l'alternativa *A*:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{0}{6} - \frac{0}{6} = 0$$

- Índex de discriminació de l'alternativa *B*:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{0}{6} - \frac{1}{6} = -0{,}17$$

- Índex de discriminació de l'alternativa *D*:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{0}{6} - \frac{2}{6} = -0{,}33$$

En aquest cas, dos dels índexs de discriminació són negatius, i l'altre és igual a 0. També podem interpretar que les tres alternatives de resposta presenten una discriminació adequada com a distractors. De totes maneres, cal considerar que l'ítem té una dificultat molt baixa i, per tant, les alternatives incorrectes són escollides per molt pocs subjectes.

Ítem 3:

	Alternatives de resposta			
Grup de rendiment	A	B	C	D*
Alt	0	0	0	6
Mitjà	6	0	3	4
Baix	2	1	3	0

* Alternativa correcta

- Índex de discriminació de l'alternativa *A*:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{0}{6} - \frac{2}{6} = -0{,}33$$

- Índex de discriminació de l'alternativa *B*:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{0}{6} - \frac{1}{6} = -0{,}17$$

- Índex de discriminació de l'alternativa *C*:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{0}{6} - \frac{3}{6} = -0{,}50$$

Els tres índexs de discriminació són adequats pel que fa a les característiques requerides als distractors. De totes maneres, cal considerar que l'alternativa *B* s'hauria de revisar, ja que només és escollida per un subjecte i, per tant, podem considerar que és massa evident que no és correcta.