Actividades prácticas

Antoni Cosculluela

PID_00198632

Universitat Oberta de Catalunya

Índice

1. Introducción

Para realizar una serie de ejercicios prácticos que pongan en juego los contenidos desarrollados en el presente material, se proponen unos enunciados que enmarcan unos casos generales, a partir de los cuales se desarrollarán actividades o ejercicios concretos sobre contenidos de los diferentes módulos tratados a lo largo de la asignatura.

Caso 1

Se han administrado dos formas paralelas de un mismo test de capacidad de atención, compuesto por seis ítems cada forma, a una muestra de diez sujetos. El rango de valores de las puntuaciones totales en el test va de 0 (mínima capacidad de atención) a 6 (máxima capacidad de atención). Se considera que un sujeto presenta una adecuada competencia en esta variable si obtiene una puntuación superior a dos puntos.

Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

Sujeto	x1	x2
1	3	2
2	5	5
3	0	2
4	6	5
5	1	0
6	3	3
7	4	2
8	5	6
9	2	3
10	1	3

x_1 y x_2 son las puntuaciones de los sujetos en estas dos formas paralelas.

Caso 2

Para evaluar el nivel de depresión de un sujeto, se ha construido un test formado por los seis ítems siguientes:

a) Me siento muy a menudo triste y desanimado.

b) Me considero una persona sin demasiados problemas.

c) No me siento decepcionado de mí mismo.

d) Creo que he fracasado más que cualquier persona normal.

e) Normalmente, no tengo problemas para dormir.

f) A menudo obtengo muchas satisfacciones con lo que hago.

Las respuestas (SÍ o NO) de los sujetos se codifican con un 0 o un 1 en función de si presentan una tendencia a la depresión o no. Así, la puntuación total en el test tiene un rango de valores que va de 0 (mínimo nivel de depresión) a 6 (máximo nivel de depresión). Este test se ha administrado a una muestra de 25 sujetos junto con el Inventario de depresión de Beck (BDI), que es un test ampliamente utilizado y contrastado para medir el grado de depresión y que consta de 21 ítems. El rango de puntuaciones en el BDI va de 0 (mínima depresión) a 21 (máxima depresión). Los resultados de las administraciones de estos dos tests, con las respuestas de los sujetos a los seis ítems del primer test, se presentan en la siguiente tabla:

	Test depresión							
Sujeto	**Ítem 1**	**Ítem 2**	**Ítem 3**	**Ítem 4**	**Ítem 5**	**Ítem 6**	**Total**	**BDI**
1	1	1	0	0	0	1	3	10
2	1	1	1	0	1	1	5	13
3	0	1	1	0	0	0	2	8
4	0	1	1	0	0	0	2	12
5	0	0	1	1	1	1	4	16
6	0	0	0	1	1	1	3	15
7	0	0	1	0	1	1	3	12
8	0	0	1	0	0	0	1	10
9	1	1	1	0	1	1	5	19
10	0	0	1	0	1	1	3	13
11	0	1	1	0	0	1	3	16
12	1	1	0	1	1	1	5	13
13	1	0	1	1	1	1	5	20
14	0	0	0	0	0	0	0	3
15	1	0	0	0	1	1	3	12
16	1	0	1	0	0	0	2	9

	Test depresión							
Sujeto	**Ítem 1**	**Ítem 2**	**Ítem 3**	**Ítem 4**	**Ítem 5**	**Ítem 6**	**Total**	**BDI**
17	1	1	1	1	1	1	6	15
18	0	1	0	0	1	1	3	12
19	1	1	1	1	1	1	6	16
20	0	1	1	0	1	1	4	18
21	0	1	1	0	1	1	4	13
22	0	0	0	0	1	0	1	5
23	0	1	1	0	1	1	4	16
24	0	1	1	0	0	1	3	10
25	0	0	0	0	1	0	1	8

Caso 3

Con el objetivo de evaluar el nivel de inteligencia general, se ha administrado un test de diez ítems a una muestra de 25 sujetos. Los ítems son de elección múltiple con cuatro alternativas de respuesta, de las cuales una es la correcta.

En la tabla siguiente se presentan las respuestas de los sujetos a este test, marcando con negrita las respuestas correctas de cada sujeto. Las alternativas de respuesta correctas de cada ítem se especifican en la última fila de la tabla, si bien se podrían deducir de las respuestas en negrita.

Sujeto	**Ítems**									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**A**	**C**	**D**	**A**	**B**	A	**B**	**D**	**A**	**D**
2	B	**C**	A	**A**	**B**	**C**	**B**	**D**	C	B
3	C	**C**	C	B	A	B	**B**	A	B	C
4	**A**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**B**	**D**	D	A
5	D	A	A	B	**B**	D	**B**	B	B	**D**
6	D	B	A	C	C	D	A	A	D	**D**
7	B	**C**	C	**A**	**B**	A	**B**	**D**	C	**D**
8	C	**C**	A	**A**	**B**	B	**B**	A	C	**D**
9	C	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**B**	**D**	**A**	C
10	B	**C**	A	C	D	A	C	C	D	**D**
11	B	D	C	D	A	D	**B**	B	B	A

*: Alternativa de respuesta correcta

Sujeto	**Ítems**									
12	**A**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**B**	B	C	C
13	C	**C**	C	B	**B**	B	**B**	**D**	B	A
14	D	**C**	**D**	**A**	**B**	B	**B**	**D**	C	**D**
15	B	**C**	B	C	A	D	**B**	C	D	B
16	**A**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**B**	**D**	B	**D**
17	D	**C**	A	**A**	**B**	A	**B**	**D**	**A**	**D**
18	D	A	A	D	**B**	D	**B**	A	**A**	A
19	B	**C**	**D**	**A**	**B**	B	**B**	**D**	**A**	**D**
20	B	**C**	A	**A**	**B**	D	**B**	B	C	C
21	C	**C**	C	D	C	B	**B**	**D**	**A**	**D**
22	C	D	C	B	D	A	A	C	**A**	**D**
23	C	**C**	**D**	**A**	**B**	A	**B**	**D**	**A**	B
24	**A**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**B**	**D**	B	**D**
25	B	**C**	**D**	**A**	**B**	B	**B**	**D**	C	A
*	A	C	D	A	B	C	B	D	A	D

*: Alternativa de respuesta correcta

2. Enunciados de los ejercicios sobre fiabilidad

Ejercicio 1. A partir del enunciado del caso 1, resolved las siguientes cuestiones:

1. Obtened el coeficiente de fiabilidad del test.

2. Calculad los siguientes indicadores de acuerdo entre las clasificaciones de las dos formas paralelas:

a) Coeficiente de Hambleton y Novick ($p_{H\text{-}N}$).

b) Coeficiente kappa (k).

c) Coeficiente de Livingston.

Ejercicio 2. Teniendo en cuenta la información y los datos del caso 2, contestad los apartados siguientes en referencia al test de depresión de seis ítems:

1. Obtened la consistencia interna (fiabilidad) del test utilizando el método de las dos mitades a partir de:

a) La fórmula de Spearman-Brown.

b) La fórmula de Rulon.

c) La fórmula de Guttman-Flanagan.

2. Obtened el coeficiente alfa de Cronbach utilizando las tres diferentes fórmulas para su cálculo, es decir, a partir de:

a) La varianza de los diferentes ítems.

b) La covarianza entre los ítems.

c) $r1$.

3. Determinad la significación estadística del coeficiente alfa calculado en el apartado anterior (nivel de confianza del 95%) y su intervalo de confianza.

4. Si el mismo test se administra a una muestra de 30 sujetos y se obtiene un coeficiente alfa de 0,70, ¿hay diferencias estadísticamente significativas entre este coeficiente α y el obtenido en la muestra de 25 sujetos de nuestro ejercicio? (nivel de confianza del 95%).

5. En una segunda administración del test a la misma muestra inicial de 25 sujetos se ha obtenido un coeficiente alfa de 0,64 y una correlación entre las puntuaciones de los sujetos en estas dos aplicaciones de 0,92. ¿Hay diferencias estadísticamente significativas entre los valores de los dos coeficientes alfa? (nivel de confianza del 95%).

6. Calculad el KR_{20} y el KR_{21} de Kuder-Richardson. Comparad los dos valores y razonad el porqué de su igualdad o diferencia.

7. Si añadiéramos tres ítems más al test, suponiendo que midieran el mismo constructo, ¿cuál sería su nueva fiabilidad?

8. ¿Cuántos ítems deberíamos añadir al test inicial para llegar a una fiabilidad de 0,70?

9. ¿Qué puntuación verdadera podemos estimar que tendrá el primer sujeto de la matriz de datos de nuestro caso 1? Obtened esta estimación con un nivel de confianza del 95%, a partir de:

a) La distribución normal de los errores.

b) El modelo de la regresión.

3. Enunciados de los ejercicios sobre validez

Ejercicio 1. A partir de los datos del caso 2, considerando las puntuaciones del BDI como un criterio para validar nuestro test de seis ítems, contestad a las siguientes cuestiones:

a) Calculad el coeficiente de validez del test.

b) ¿Cuál sería este coeficiente de validez si el test tuviera una fiabilidad perfecta (tened en cuenta la fiabilidad del test obtenida a partir del método de las dos mitades y la fórmula de Spearman-Brown calculada en el ejercicio 2 apartado 1a.)?

c) ¿Cuánto valdría el coeficiente de validez del test si le añadiéramos seis ítems más? Utilizad el mismo coeficiente de fiabilidad del apartado anterior.

d) ¿Entre qué puntuaciones en el criterio BDI podemos pronosticar que obtendrá un nuevo sujeto que tiene una puntuación de 4 puntos en nuestro test? (Construid el intervalo con un nivel de confianza del 95%).

e) Si suponemos que el diagnóstico ya contrastado de trastorno depresivo leve se sitúa en una puntuación superior a 15 en el BDI, y que nosotros queremos comprobar la validez de decisión de nuestro test de seis ítems, suponiendo que puntuaciones superiores a 3 serían las que detectarían este trastorno depresivo leve, calculad e interpretad:

I. El porcentaje de acuerdo entre los dos tests.

II. El coeficiente kappa.

III. La sensibilidad de nuestro test.

IV. La especificidad de nuestro test.

Ejercicio 2. Para validar la estructura interna de nuestro test, hemos realizado un análisis de componentes principales (ACP), que nos ha proporcionado la siguiente matriz de saturaciones factoriales, de donde se han extraído los dos componentes con valor propio superior a 1:

Matriz de componentes

	Componente	
	1	**2**
Ítem_1	,587	,023

	Componente	
	1	**2**
Ítem_2	,267	,793
Ítem_3	,085	,703
Ítem_4	,696	-,303
Ítem_5	,705	-,360
Ítem_6	,821	,219

A partir de estos datos, que presentan las saturaciones factoriales de cada uno de los seis ítems del test en los dos componentes extraídos, calculad las comunalidades de los ítems para cada componente y la conjunta para los dos componentes, el valor propio de cada componente, y la varianza explicada para cada componente y la conjunta de los dos componentes. Interpretad los resultados respecto a la estructura interna del test.

4. Enunciados de los ejercicios sobre transformación e interpretación de las puntuaciones

Ejercicio 1. Transformad las puntuaciones directas del test de depresión aplicado en el caso 2 a la muestra de 25 sujetos, en las siguientes puntuaciones:

a) Percentiles.

b) Puntuaciones estandarizadas.

c) Puntuaciones T.

d) Eneatipos.

e) Decatipos.

Ejercicio 2. En el caso 3 podemos considerar que la puntuación total de un sujeto en el test será igual al número de ítems a los que contesta correctamente. Por otro lado, también podemos considerar que, al ser un test de inteligencia, le podemos aplicar ciertas características de la escala Wechler Adult Intelligence Scale (WAIS).

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, transformad las puntuaciones directas de los tres primeros sujetos de la matriz de datos del caso 3 en percentiles y en coeficiente intelectual (CI).

5. Enunciados de los ejercicios sobre análisis de los ítems

Ejercicio 1. A partir de los datos del caso 3, calculad e interpretad los índices de dificultad y de discriminación de los tres primeros ítems del test. Para obtener los índices de discriminación considerad como grupo de alto rendimiento o alto nivel inteligencia a los sujetos que aciertan más de siete ítems y como bajo rendimiento o bajo nivel de inteligencia a los que aciertan menos de tres ítems. El tamaño de estos dos grupos no llega al 27 o 25% del total de los 25 sujetos, que es lo recomendado, pero están muy cercanos a estos porcentajes.

Ejercicio 2. Siguiendo con las consideraciones hechas en el ejercicio anterior, haced el análisis de los distractores de los tres primeros ítems.

6. Solucionario de los ejercicios sobre fiabilidad

Ejercicio 1.

1. En este caso, como tenemos las puntuaciones de una muestra de sujetos en las dos formas paralelas de un test, obtendremos su coeficiente de fiabilidad aplicando el método de las formas paralelas y, por lo tanto, hemos de calcular el coeficiente de correlación de Pearson entre las puntuaciones de los sujetos en estas dos formas.

La fórmula del coeficiente de correlación de Pearson es:

$$r_{xx'} = r_{x_1x_2} = \frac{n\sum x_1x_2 - \sum x_1 \sum x_2}{\sqrt{[n\sum x_1^2 - (\sum x_1)^2][n\sum x_2^2 - (\sum x_2)^2]}}$$

Así, para obtenerlo con los datos del ejercicio, hemos de realizar las siguientes operaciones:

Sujeto	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2
1	3	2	6	9	4
2	5	5	25	25	25
3	0	2	0	0	4
4	6	5	30	36	25
5	1	0	0	1	0
6	3	3	9	9	9
7	4	2	8	16	4
8	5	6	30	25	36
9	2	3	6	4	9
10	1	3	3	1	9
Σ	30	31	117	126	125

$$r_{xx'} = r_{x_1x_2} = \frac{(10 \times 117) - (30 \times 31)}{\sqrt{[(10 \times 126) - (30)^2][(10 \times 125) - (31)^2]}} = 0{,}744$$

El coeficiente de fiabilidad del test es de 0,744.

2. Para calcular los coeficientes de acuerdo con la clasificación de los sujetos en las dos formas paralelas de este test, debemos generar la siguiente tabla, a sabiendas de que un sujeto es competente si tiene una puntuación superior a 2:

Sujeto	x_1	x_2	Clasificación x_1	Clasificación x_2
1	3	2	Competente	No competente
2	5	5	Competente	Competente
3	0	2	No competente	No competente
4	6	5	Competente	Competente
5	1	0	No competente	No competente
6	3	3	Competente	Competente
7	4	2	Competente	No competente
8	5	6	Competente	Competente
9	2	3	No competente	Competente
10	1	3	No competente	Competente

Y a partir de estas clasificaciones construimos la tabla de contingencia:

		x_2		
		Competentes	**No competentes**	
x_1	**Competentes**	4	2	6
	No competentes	2	2	4
		6	4	10

a) Coeficiente de Hambleton y Novick ($p_{H\text{-}N}$)

La fórmula del coeficiente de Hambleton y Novich es:

$$p_{H\text{-}N} = p_c - p_a$$

Donde, p_c es la proporción de clasificaciones consistentes (6/10), y p_a la proporción de clasificaciones consistentes que se esperan por azar, y que se obtiene con la fórmula:

$$p_a = \sum \frac{n_{.j} \cdot n_{i.}}{N^2}$$

Donde n_j es el número de sujetos clasificados como competentes (o no competentes) para la forma x_1, n_i es el número de sujetos clasificados como competentes (o no competentes) para la forma x_2, y N es el número total de sujetos.

$$p_a = \sum \frac{n_{.j} \cdot n_{i.}}{N^2} = \frac{6 \cdot 6}{10^2} + \frac{4 \cdot 4}{10^2} = 0{,}52$$

$$p_{H\text{-}N} = p_c - p_a = 0{,}60 - 0{,}52 = 0{,}08$$

Podemos concluir que el acuerdo en las clasificaciones a partir de las dos formas paralelas del test solo consigue un 8% más que el acuerdo previsto por puro azar. Hay que añadir que este resultado tan pobre es, en buena parte, debido al escaso tamaño de la muestra.

b) Coeficiente kappa (*k*)

Para obtener el coeficiente k, aplicamos la siguiente fórmula:

$$k = \frac{p_c - p_a}{1 - p_a}$$

Donde p_c y p_a son, respectivamente, la proporción de sujetos clasificados de manera consistente y la que se esperaría por azar, tal como se ha definido antes.

Para nuestro caso:

$$k = \frac{p_c - p_a}{1 - p_a} = \frac{0{,}60 - 0{,}52}{1 - 0{,}52} = 0{,}17$$

También en este caso, igual que en el apartado anterior, el coeficiente K de 0,17 indica una muy pobre consistencia en la clasificación, en buena parte debida a los pocos sujetos de la muestra.

c) Coeficiente de Livingston

El coeficiente de Livingston lo obtenemos a partir de la siguiente expresión:

$$K^2_{xx'} = \frac{r_{xx'} S_x S_{x'} + (\bar{x}_x - C)(\bar{x}_{x'} - C)}{\sqrt{[S_x^2 + (\bar{x}_x - C)^2]\,[S_{x'}^2 + (\bar{x}_{x'} - C)^2]}}$$

Donde:

r_{xx}: Coeficiente de fiabilidad a partir del procedimiento de formas paralelas o test-retest.

S_x y $S_{x'}$: Corresponden, respectivamente, a la desviación típica del test en la primera y segunda administración o en cada una de las formas paralelas del test.

$\bar{x}_x$ y $\bar{x}_{x'}$: Corresponden, respectivamente, a la media del test en la primera y segunda administración o en cada una de las formas paralelas del test.

C: Es el punto de corte.

S_x^2 y $S_{x'}^2$: Corresponden, respectivamente, a la varianza del test en la primera y segunda administración o en cada una de las formas paralelas del test.

Para nuestro caso, estos valores son:

$$r_{xx} = 0{,}744$$

$$S_x = 1{,}9$$

$$S_{x'} = 1{,}7$$

$$K_{xx'}^2 = \frac{r_{xx}S_xS_{x'} + (\bar{x}_x - C)(\bar{x}_{x'} - C)}{\sqrt{[S_x^2 + (\bar{x}_x - C)^2]\,[S_{x'}^2 + (\bar{x}_{x'} - C)^2]}} = \frac{0{,}744 \cdot 1{,}9 \cdot 1{,}7 + (3-2)(3{,}1-2)}{\sqrt{[3{,}6 + (3-2)]\,[2{,}89 + (3{,}1-2)]}} = 0{,}82$$

El coeficiente de Livingston nos proporciona un valor de 0,82, que se puede considerar como una adecuada consistencia en las clasificaciones de las dos formas paralelas.

Ejercicio 2.

1.

a) Fórmula de Spearman-Brown

Obtenemos la consistencia interna o fiabilidad del test utilizando el método de las dos mitades, a partir de la fórmula de Spearman-Brown, siguiendo los siguientes pasos:

En primer lugar calculamos, para cada sujeto, su sumatorio de los ítems pares y el de los ítems impares:

Sujeto	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6	Pares	Impares
1	1	1	0	0	0	1	2	1
2	1	1	1	0	1	1	2	3
3	0	1	1	0	0	0	1	1

Sujeto	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6	Pares	Impares
4	0	1	1	0	0	0	1	1
5	0	0	1	1	1	1	2	2
6	0	0	0	1	1	1	2	1
7	0	0	1	0	1	1	1	2
8	0	0	1	0	0	0	0	1
9	1	1	1	0	1	1	2	3
10	0	0	1	0	1	1	1	2
11	0	1	1	0	0	1	2	1
12	1	1	0	1	1	1	3	2
13	1	0	1	1	1	1	2	3
14	0	0	0	0	0	0	0	0
15	1	0	0	0	1	1	1	2
16	1	0	1	0	0	0	0	2
17	1	1	1	1	1	1	3	3
18	0	1	0	0	1	1	2	1
19	1	1	1	1	1	1	3	3
20	0	1	1	0	1	1	2	2
21	0	1	1	0	1	1	2	2
22	0	0	0	0	1	0	0	1
23	0	1	1	0	1	1	2	2
24	0	1	1	0	0	1	2	1
25	0	0	0	0	1	0	0	1

En segundo lugar, aplicamos la fórmula del coeficiente de correlación de Pearson entre el sumatorio de los ítems pares y el de los impares y obtenemos un coeficiente de correlación igual a 0,547 $\left(r_{pi}=0{,}547\right)$.

En tercer lugar, aplicamos la fórmula de Spearman-Brown para obtener el coeficiente de fiabilidad del test:

$$r_{xx'}=\frac{2r_{pi}}{1+r_{pi}}=\frac{2\times 0{,}547}{1+0{,}547}=0{,}707$$

El coeficiente de fiabilidad o consistencia interna del test, aplicando la fórmula de Spearman-Brown, es de 0,707.

b) Fórmula de Rulon

Como sabemos, la fórmula de Rulon es:

$$r_{xx'} = 1 - \frac{S_d^2}{S_x^2}$$

Donde:

S_d^2: Varianza de las diferencias entre las puntuaciones de los sujetos en las dos mitades del test.

S_x^2: Varianza de las puntuaciones totales de los sujetos en el test.

Por lo tanto, necesitamos las puntuaciones totales de los sujetos en el test, sus puntuaciones en los ítems pares y en los impares, y calcularemos las diferencias entre estas puntuaciones (*D*).

Sujeto	Total	Pares	Impares	*D*
1	3	2	1	1
2	5	2	3	–1
3	2	1	1	0
4	2	1	1	0
5	4	2	2	0
6	3	2	1	1
7	3	1	2	–1
8	1	0	1	–1
9	5	2	3	–1
10	3	1	2	–1
11	3	2	1	1
12	5	3	2	1
13	5	2	3	–1
14	0	0	0	0
15	3	1	2	–1
16	2	0	2	–2
17	6	3	3	0
18	3	2	1	1
19	6	3	3	0

Sujeto	Total	Pares	Impares	*D*
20	4	2	2	0
21	4	2	2	0
22	1	0	1	–1
23	4	2	2	0
24	3	2	1	1
25	1	0	1	–1

Con estos datos, calcularemos las varianzas de estas diferencias y de la puntuación total.

Por ejemplo, en el caso de las puntuaciones de diferencia, esta varianza será igual a:

$$S_d^2 = \frac{\sum (D - \overline{D})^2}{n}$$

Sabiendo que la media de las puntuaciones de diferencia es igual a –0,20, obtendremos su varianza con los datos siguientes:

D	$D - \overline{D}$	$(D - \overline{D})^2$
1	1,2	1,44
-1	-0,8	0,64
0	0,2	0,04
0	0,2	0,04
0	0,2	0,04
1	1,2	1,44
-1	-0,8	0,64
-1	-0,8	0,64
-1	-0,8	0,64
-1	-0,8	0,64
1	1,2	1,44
1	1,2	1,44
-1	-0,8	0,64
0	0,2	0,04
-1	-0,8	0,64
-2	-1,8	3,24

D	$D-\overline{D}$	$(D-\overline{D})^2$
0	0,2	0,04
1	1,2	1,44
0	0,2	0,04
0	0,2	0,04
0	0,2	0,04
-1	-0,8	0,64
0	0,2	0,04
1	1,2	1,44
-1	-0,8	0,64
	Σ	18

Y por consiguiente, la varianza de las diferencias será:

$$S_d^2 = \frac{\sum (D-\overline{D})^2}{n} = \frac{18}{25} = 0{,}72$$

Aplicando la misma fórmula a las puntuaciones totales, obtendremos una varianza de 2,4224.

Con estos datos ya podemos calcular el coeficiente de fiabilidad a partir de la fórmula de Rulon:

$$r_{xx'} = 1 - \frac{S_d^2}{S_x^2} = 1 - \frac{0{,}72}{2{,}4224} = 0{,}703$$

El coeficiente de fiabilidad o consistencia interna del test, aplicando la fórmula de Rulon, es de 0,703.

c) Fórmula de Guttman-Flanagan

La fórmula de Guttman-Flanagan calcula el coeficiente de fiabilidad de un test a partir de las varianzas de los ítems pares e impares y de la puntuación total. Su expresión es:

$$r_{xx'} = 2\left(1 - \frac{S_p^2 + S_i^2}{S_x^2}\right)$$

Donde:

S_p^2: Varianza de las puntuaciones de los sujetos en los ítems pares del test.

S_i^2: Varianza de las puntuaciones de los sujetos en los ítems impares del test.

S_x^2: Varianza de las puntuaciones totales de los sujetos en el test.

Para nuestro ejercicio, calcularemos las varianzas anteriores y obtendremos los siguientes resultados:

$$S_p^2 = 0{,}8890$$

$$S_i^2 = 0{,}6816$$

$$S_x^2 = 2{,}4224$$

Y la fórmula de Guttman-Flanagan nos proporciona el siguiente resultado:

$$r_{xx'} = 2\left(1 - \frac{S_p^2 + S_i^2}{S_x^2}\right) = 2\left(1 - \frac{0{,}8896 + 0{,}6816}{2{,}4224}\right) = 0{,}703$$

El coeficiente de fiabilidad o consistencia interna del test, aplicando la fórmula de Guttman-Flanagan, es de 0,703.

2.

a) Coeficiente alfa de Cronbach a partir de la varianza de los diferentes ítems

Para obtener el coeficiente α a partir de las varianzas de los diferentes ítems, aplicaremos la siguiente fórmula:

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} S_j^2}{S_x^2}\right]$$

Donde:

n = Número de ítems del test.

$\sum_{j=1}^{n} S_j^2$ = Sumatorio de las varianzas de los n ítems.

$S_x^2 =$ = Varianza de las puntuaciones totales en el test.

Por lo tanto, hemos de calcular las varianzas de cada ítem y de las puntuaciones totales en el test que ya hemos calculado anteriormente.

	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6
Varianzas (s_j^2)	0,2304	0,2464	0,2176	0,1824	0,2176	0,2016

Y aplicándolo a la fórmula del coeficiente α:

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} S_j^2}{S_x^2}\right] = \frac{6}{5}\left(1 - \frac{0{,}2304+0{,}2464+0{,}2176+0{,}1824+0{,}2176+0{,}2016}{2{,}4224}\right) = 0{,}558$$

El coeficiente α del test es de 0,558.

b) Coeficiente alfa de Cronbach a partir de la covarianza entre los ítems

La fórmula para obtener el coeficiente alfa a partir de las covarianzas entre los ítems es:

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left[\frac{\sum\sum_{j \neq k}^{n} \mathrm{cov}(j,k)}{S_x^2}\right]$$

Donde:

n = Número de ítems del test.

$\sum\sum \mathrm{cov}(j,k) =$ = Sumatorio de las covarianzas de los n ítems.

$S_x^2 =$ = Varianza de las puntuaciones en el test.

Como bien sabemos, la covarianza entre dos variables es igual a:

$$\mathrm{cov}_{xy} = \frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}$$

Esta fórmula, aplicada a la covarianza entre el ítem 1 (x) y el ítem 2 (y), nos dará:

Ítem 1: x	Ítem 2: y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
1	1	0,64	0,44	0,2816

Ítem 1: *x*	Ítem 2: *y*	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
1	1	0,64	0,44	0,2816
0	1	–0,36	0,44	–0,1584
0	1	–0,36	0,44	–0,1584
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
1	1	0,64	0,44	0,2816
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
0	1	–0,36	0,44	–0,1584
1	1	0,64	0,44	0,2816
1	0	0,64	–0,56	–0,3584
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
1	0	0,64	–0,56	–0,3584
1	0	0,64	–0,56	–0,3584
1	1	0,64	0,44	0,2816
0	1	–0,36	0,44	–0,1584
1	1	0,64	0,44	0,2816
0	1	–0,36	0,44	–0,1584
0	1	–0,36	0,44	–0,1584
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
0	1	–0,36	0,44	–0,1584
0	1	–0,36	0,44	–0,1584
0	0	–0,36	–0,56	0,2016
$\bar{x}=0{,}36$	$\bar{y}=0{,}56$		Σ	0,96

$$\mathrm{cov}_{xy}=\frac{(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n}=\frac{0{,}96}{25}=0{,}0384$$

Aplicando la misma fórmula al resto de las covarianzas, tenemos la siguiente matriz de covarianzas:

	Ítem 1	**Ítem 2**	**Ítem 3**	**Ítem 4**	**Ítem 5**	**Ítem 6**
Ítem 1		0,0384	–0,0048	0,0736	0,0352	0,0608

	Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6
Ítem 2	0,0384		0,0592	–0,0144	–0,0208	0,0768
Ítem 3	–0,0048	0,0592		–0,0032	–0,0224	0,0304
Ítem 4	0,0736	–0,0144	–0,0032		0,0768	0,0672
Ítem 5	0,0352	–0,0208	–0,0224	0,0768		0,1104
Ítem 6	0,0608	0,0768	0,0304	0,0672	0,1104	

Y el sumatorio de estas covarianzas será igual a:

$$\sum\sum \mathrm{cov}(j,k) = 0{,}0384 - 0{,}0048 + 0{,}0736 + \ldots\ldots. + 0{,}0768 + 0{,}0672 + 0{,}1104 = 1{,}264$$

Mientras que la varianza de las puntuaciones totales (S_x^2) ya sabemos que es igual a 2,4224.

Por lo tanto:

$$\alpha = \frac{n}{n-1}\left[\frac{\sum\sum_{j\neq k}^{n} \mathrm{cov}(j,k)}{S_x^2}\right] = \frac{6}{5}\left(\frac{1{,}1264}{2{,}4224}\right) = 0{,}558$$

El coeficiente α del test es de 0,558, como ya habíamos visto en el apartado anterior.

c) Coeficiente alfa de Cronbach a partir de r_1

La fórmula del coeficiente α también se puede expresar en función del cociente entre la media de las covarianzas y la media de las varianzas de los diferentes ítems del test. Este cociente, que designamos como r_1, constituye una estimación de la fiabilidad de cada ítem. En este sentido, la fórmula del coeficiente α a partir de r_1 es una aplicación de la corrección de Spearman-Brown, que hemos comentado por el caso de las dos mitades, a partir de la estimación de la fiabilidad de cada ítem, teniendo en cuenta que si tenemos *n* ítems, es como si hubiéramos alargado *n* veces el ítem inicial.

La fórmula del coeficiente α a partir de r_1 es la siguiente:

$$\alpha = \frac{n(r_1)}{1 + (n-1)r_1}$$

Donde r_1 es el cociente entre la media de las covarianzas y la media de las varianzas de los diferentes ítems del test, y *n* es el número de ítems del test.

Para nuestro ejercicio, la media de las covarianzas es 1,1264/30, mientras que la media de las varianzas es 1,296/6.

Por lo tanto,

$$r_1 = \frac{1{,}1264/30}{1{,}296/6} = 0{,}1738$$

Y el valor de α:

$$\alpha = \frac{n(r_1)}{1+(n-1)r_1} = \frac{6\times 0{,}1738}{1+(5\times 0{,}1738)} = 0{,}558$$

Como podemos observar, y como no podía ser de otro modo, es exactamente igual al valor obtenido en los dos apartados anteriores.

3. Significación estadística del coeficiente alfa calculado en el apartado anterior y determinación de su intervalo de confianza

Para comprobar la significación estadística de un coeficiente alfa hemos de seguir los pasos siguientes:

- Planteamiento de la hipótesis nula y la alternativa:
  - Hipótesis nula: $\alpha = 0$
  - Hipótesis alternativa: $\alpha \neq 0$

- Cálculo del estadístico de contraste:

$$F = \frac{1-\alpha}{1-\hat{\alpha}} = \frac{1-0}{1-0{,}558} = 2{,}262$$

  Que se distribuye según una *F* de Snedecor con (*N* – 1) y (*N* – 1) (*n* – 1) grados de libertad, siendo:
  - *N*: Número de sujetos.
  - *n*: Número de ítems.
  - α: Valor de alfa en la población.
  - $\hat{\alpha}$: Valor de alfa calculado en la muestra.

- Valores críticos de la distribución *F* de Snedecor con 24 (*N*-1) y 120 ((*N*-1) (*n*-1)) grados de libertad, para un nivel de confianza del 95% y contraste bilateral son:

$$F_{0,975(24,120)} \approx 1{,}76 \text{ y } F_{0,025(24,120)} \approx 0{,}50$$[1]

(1)**Nota**

$$F_{0,025(24,120)} = \frac{1}{F_{0,975(120,24)}} \approx \frac{1}{2{,}02} = 0{,}50$$

Como el valor del estadístico de contraste obtenido (2,262) se encuentra fuera del intervalo comprendido entre los valores críticos (1,76 y 0,50), podemos rechazar la hipótesis nula y podemos concluir que, a partir de nuestros datos y con un nivel de confianza del 95%, tenemos evidencia suficiente para determinar que el valor del coeficiente alfa en la población no es de cero y, por lo tanto, este coeficiente es estadísticamente significativo.

Para construir el intervalo confidencial de este coeficiente alfa, solo hay que sustituir, en la fórmula del estadístico de contraste, los valores críticos de la distribución *F* y aislar los valores de α:

$$\frac{1-\alpha}{1-0{,}558} \leq 1{,}76$$

$$\alpha \geq 1-1{,}76(1-0{,}558)=0{,}22$$

$$\frac{1-\alpha}{1-0{,}558} \geq 0{,}50$$

$$\alpha \leq 1-0{,}50(1-0{,}558)=0{,}78$$

Por lo tanto, podemos afirmar que, con un nivel de confianza del 95%, los valores del coeficiente alfa en la población estarán comprendidos entre 0,22 y 0,78.

4. Contraste de dos coeficientes en muestras independientes

Para comparar si la diferencia entre dos coeficientes alfa obtenidos en muestras diferentes de sujetos son iguales o no, hemos de aplicar un contraste para dos coeficientes en muestras independientes. Para aplicar este contraste seguiremos los siguientes pasos:

- Planteamiento de las hipótesis nula y alternativa
  - Hipótesis nula: $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$
  - Hipótesis alternativa: $\hat{\alpha}_1 \neq \hat{\alpha}_2$
- Cálculo del estadístico de contraste:

$$w=\frac{1-\hat{\alpha}_1}{1-\hat{\alpha}_2}=\frac{1-0{,}558}{1-0{,}70}=1{,}47$$

  Que se distribuye según una *F* de Snedecor con (N_1 – 1) y (N_2 – 1) grados de libertad, siendo N_1 y N_2 los tamaños de las dos muestras.

- Valores críticos de la distribución *F* de Snedecor con 24 (N_1 – 1) y 29 (N_2 – 1) grados de libertad, para un nivel de confianza del 95% y contraste bilateral son:

$F_{0,975(24,29)} = 2{,}15$ y $F_{0,025(24,29)} = 0{,}45$

Como el valor del estadístico de contraste obtenido (1,47) cae dentro del intervalo comprendido entre los valores críticos (0,45 – 2,15), no tenemos suficientes evidencias para rechazar la hipótesis nula y, por lo tanto, hemos de concluir que la diferencia entre los dos coeficientes no es estadísticamente significativa.

5. Contraste para dos coeficientes en muestras dependientes

Como hemos administrado el mismo test en dos ocasiones al mismo grupo de sujetos, para determinar si entre los dos coeficientes alfa obtenidos hay o no diferencias estadísticamente significativas, aplicaremos un contraste para dos coeficientes en muestras dependientes. Los pasos que hay que seguir son los siguientes:

- Hipótesis nula: $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$

- Hipótesis alternativa: $\hat{\alpha}_1 \neq \hat{\alpha}_2$

- Cálculo del estadístico de contraste:

$$t = \frac{(\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2)\sqrt{N-2}}{\sqrt{4(1-\hat{\alpha}_1)(1-\hat{\alpha}_2)(1-r_{12})}} = \frac{(0{,}558 - 0{,}64)\sqrt{25-2}}{\sqrt{4(1-0{,}558)(1-0{,}64)(1-0{,}92)}} = -1{,}74$$

  Que se distribuye según una t de Student con N – 2 grados de libertad, siendo N el número de sujetos de la muestra.

- Valores críticos de la distribución t de Student con 23 (N – 2) grados de libertad, para un nivel de confianza del 95% y contraste bilateral son:

$$t_{0,975(23)} = 2{,}069 \text{ y } t_{0,025(23)} = -2{,}069$$

Como el estadístico de contraste obtenido (–1,74) queda dentro del intervalo entre los valores críticos (–2,069–2,069), aceptamos la hipótesis nula y podemos concluir que, con un nivel de confianza del 95%, la diferencia entre los dos coeficientes alfa no es estadísticamente significativa.

6. Cálculo del KR_{20} y el KR_{21} de Kuder-Richardson y comparación de los dos valores

La fórmula del KR_{20} simplemente sustituye, en la del coeficiente α de Cronbach, el sumatorio de las varianzas de los ítems por el sumatorio de los productos p_j por q_j, siendo (p_j) la proporción de sujetos que aciertan el ítem o tienen un 1 en este ítem y (q_j) la proporción de sujetos que no lo aciertan o tienen un 0. Así, por ejemplo en el primer ítem hay nueve sujetos con una puntuación de 1 y dieciséis con una puntuación de 0. Por lo tanto, p_j será 9/25 (0,36) y q_j 16/25 (0,64).

La fórmula del KR_{20} es la siguiente:

$$KR_{20} = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}{S_x^2}\right)$$

Y los productos p_j para q_j serán:

	Ítem 1	**Ítem 2**	**Ítem 3**	**Ítem 4**	**Ítem 5**	**Ítem 6**
p	0,36	0,56	0,68	0,24	0,68	0,72
q	0,64	0,44	0,32	0,76	0,32	0,28
*p*q*	0,2304	0,2464	0,2176	0,1824	0,2176	0,2016

Por lo tanto,

$$KR_{20} = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}{S_x^2}\right] = \frac{6}{5}\left(1 - \frac{0{,}2304 + 0{,}2464 + 0{,}2176 + 0{,}1824 + 0{,}2176 + 0{,}2016}{2{,}4224}\right) = 0{,}558$$

El coeficiente alfa calculado con la fórmula del KR_{20} nos da un valor de 0,558.

La aplicación de la fórmula del KR_{21} para nuestro ejercicio nos da el siguiente resultado:

$$KR_{21} = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\overline{X} - \overline{X}^2/n}{S_x^2}\right) = \frac{6}{5}\left(1 - \frac{3{,}24 - 3{,}24^2/6}{2{,}4224}\right) = 0{,}462$$

Siendo $\overline{X}$ la media de las puntuaciones totales de los 25 sujetos de la muestra en el test. Esta media es de 3,24.

Como podemos observar, el valor del KR_{21} es inferior al del KR_{20}, siendo este último igual al valor del coeficiente alfa de Cronbach. Esta diferencia se debe a que no todos los ítems tienen la misma proporción de unos y de ceros, es decir, que el valor de p_j y q_j no es igual en todos los ítems, y por lo tanto, la aplicación de la fórmula KR_{21} para este caso es inapropiada y no nos da un valor adecuado para estimar el coeficiente alfa.

7. Para determinar cuál será la nueva fiabilidad del test si añadiéramos tres ítems más, tendremos que aplicar la fórmula de Spearman-Brown:

$$R_{xx} = \frac{k\, r_{xx}}{1 + (k-1) r_{xx}}$$

Donde:

R_{xx}: Es el nuevo coeficiente de fiabilidad del test alargado.

r_{xx}: Es el coeficiente de fiabilidad del test original.

k: Es el número de veces que se alarga o se acorta el test. De este modo, k vendrá dado por el cociente entre el número de ítems finales (n_f) del test dividido por el número de ítems iniciales (n_i) del test:

$$k = \frac{n_f}{n_i} = \frac{\acute{I}tems\ finales}{\acute{I}tems\ iniciales} = \frac{9}{6} = 1{,}5$$

Así, la nueva fiabilidad será:

$$R_{xx} = \frac{k\, r_{xx}}{1 + (k-1) r_{xx}} = \frac{1{,}5 \times 0{,}558}{1 + (1{,}5 - 1)0{,}558} = 0{,}65$$

Por lo tanto, si añadiéramos tres ítems más al test, suponiendo que midieran el mismo constructo, su nueva fiabilidad sería de 0,65.

8. Si queremos saber cuántos ítems deberíamos añadir al test inicial para llegar a una fiabilidad de 0,70, tenemos que aislar k de la fórmula de Spearman-Brown:

$$k = \frac{R_{xx}(1 - r_{xx})}{r_{xx}(1 - R_{xx})} = \frac{0{,}70.(1 - 0{,}558)}{0{,}558.(1 - 0{,}70)} = 1{,}85$$

Y por lo tanto, el número de ítems que hay que añadir será $(k \cdot \acute{I}tems\ iniciales) - \acute{I}tems\ iniciales\ (1{,}85 \cdot 6) - 6 = 5{,}1$.

Si queremos que los tests tenga una fiabilidad de 0,70, hemos de añadir seis ítems a los seis iniciales.

9. Para estimar la puntuación verdadera que tendrá el primer sujeto de la matriz de datos de nuestro ejercicio, que ha obtenido una puntuación total en el test de 3, con un nivel de confianza del 95%, podemos utilizar dos procedimientos:

a) La distribución normal de los errores:

Los pasos que seguir en este caso serán:

- Calcular el error típico de medida (S_e):

$$S_e = S_x\sqrt{1-r_{xx}} = 1{,}5564\sqrt{1-0{,}558} = 1{,}03$$

  Donde S_x es la desviación típica de las puntuaciones del test y r_{xx} es el coeficiente alfa obtenido.

- Buscar el valor $Z_{\alpha/2}$, que por el nivel de confianza del 95% según las tablas de la distribución normal es de 1,96.

- Calcular el error máximo de medida ($E_{máx}$):

$$E_{máx} = Z_{\alpha/2} \cdot S_e = 1{,}96 \cdot 1{,}03 \approx 2$$

- Calcular el intervalo de confianza de la puntuación verdadera del sujeto a partir de la expresión siguiente:

$$IC = X \pm E_{máx} = 3 \pm 2$$

$$1 \leq V \leq 5$$

La puntuación verdadera del primer sujeto de la matriz de datos, que ha obtenido una puntuación total de 3 en el test, con un nivel de confianza del 95% y aplicando la distribución normal de los errores, estará comprendida entre 1 y 5 puntos.

b) El modelo de la regresión:

Si utilizamos el modelo de la regresión para obtener este intervalo de confianza, seguiremos estos otros pasos:

- Calculamos la puntuación verdadera estimada según el modelo de la regresión:

$$V' = r_{xx}(X-\overline{X})+\overline{X}$$

  Donde:
  V': Es la puntuación verdadera pronosticada.
  r_{xx}: Es el coeficiente de fiabilidad del test.
  X: Es la puntuación empírica obtenida por el sujeto.
  $\overline{X}$ es la media de las puntuaciones del test, que en nuestro caso es de 3,24.

$$V' = 0{,}558 \cdot (3-3{,}24)+3{,}24 = 3{,}10$$

- Obtenemos el error típico de estimación:

$$S_{vx} = S_x\sqrt{1-r_{xx}}\sqrt{r_{xx}} = S_e\sqrt{r_{xx}} = 1{,}03\sqrt{0{,}558} = 0{,}77$$

  Donde:
  S_x: Es la desviación típica de las puntuaciones del test.

r_{xx}: Es el coeficiente de fiabilidad del test.
S_e: Es el error típico de medida.

- Calculamos el error máximo:

$$E_{máx} = 1{,}96 \cdot 0{,}77 = 1{,}51$$

- Obtenemos el intervalo de confianza:

$$V' \pm E_{máx}$$

$$3{,}10 \pm 1{,}51$$

$$1{,}59 \leq V \leq 4{,}61$$

Aplicando el modelo de la regresión, la puntuación verdadera del primer sujeto de la matriz de datos, con un nivel de confianza del 95%, estará comprendida entre 1,59 y 4,61.

7. Solucionario de los ejercicios sobre validez

Ejercicio 1.

a) Para obtener el coeficiente de validez del test, hemos de calcular el coeficiente de correlación de Pearson entre las puntuaciones de los sujetos en el test y en el criterio BDI. Aplicaremos, por lo tanto, la siguiente fórmula:

$$r_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

Donde x son las puntuaciones de los sujetos en el test de seis ítems e y sus puntuaciones en el criterio BDI.

Con nuestros datos este coeficiente de fiabilidad es igual a 0,80.

De hecho, en este caso también nos podríamos plantear utilizar el coeficiente de correlación de Spearman, puesto que en nuestro test, al tener tan pocos ítems (solo seis), se podría argumentar que su escala de medida es ordinal y no de intervalo o razón, como requiere el coeficiente de correlación de Pearson. El valor del coeficiente de correlación de Spearman para nuestros datos es de 0,82, que, como vemos, no es muy diferente del de Pearson. De todos modos, para los próximos apartados seguiremos operando con el valor del coeficiente de validez de 0,80.

b) Para obtener el coeficiente de validez del test, suponiendo que este tuviera una fiabilidad perfecta, aplicaremos la fórmula de atenuación para este caso:

$$r_{v_x y} = \frac{r_{xy}}{\sqrt{r_{xx'}}}$$

Por lo tanto, para nuestro ejemplo el coeficiente de validez inicial del test es 0,80 y su coeficiente de fiabilidad (calculado en los ejercicios de fiabilidad con el método de las dos mitades y la fórmula de Spearman-Brown) es de 0,707.

Por lo tanto:

$$r_{v_x y} = \frac{r_{xy}}{\sqrt{r_{xx'}}} = \frac{0,80}{\sqrt{0,707}} = 0,95$$

El coeficiente de validez del test suponiéndole una fiabilidad perfecta sería de 0,95.

c) Si añadimos seis ítems más al test, podremos calcular su nueva fiabilidad con la expresión siguiente:

$$r_{Xy} = \frac{r_{xy}\sqrt{n}}{\sqrt{1+(n-1)r_{xx'}}}$$

Donde:

r_{xy}: Es el valor inicial del coeficiente de validez del test.

$r_{xx'}$: Es el coeficiente de fiabilidad del test.

n: Es el número de veces que se alarga el test.

Si alargamos el test con seis ítems más de los seis iniciales, n será igual a 2, puesto que duplicamos su longitud.

Por lo tanto, el nuevo coeficiente de fiabilidad será:

$$r_{Xy} = \frac{r_{xy}\sqrt{n}}{\sqrt{1+(n-1)r_{xx'}}} = \frac{0{,}80\sqrt{2}}{\sqrt{1+0{,}80}} = 0{,}84$$

d) En primer lugar, para determinar la puntuación que podemos pronosticar que tendrá en el criterio BDI un sujeto que ha obtenido cuatro puntos en nuestro test ($x = 4$), aplicaremos el modelo de la regresión. La ecuación de la recta de regresión será:

$$y' = a + b\,\mathrm{x}$$

Donde b es la pendiente de la recta y a la intersección u ordenada en el origen.

La pendiente (b) y la intersección (a) las podemos calcular a partir de las siguientes fórmulas:

$$b = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x} = 0{,}80 \cdot \frac{4{,}050}{1{,}556} = 2{,}08$$

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x} = 12{,}56 - (3{,}24 \cdot 2{,}08) = 5{,}82$$

Y, por lo tanto, tenemos que: $y' = a + bx = 5{,}82 + (2{,}08 \cdot 4) = 14{,}14$.

Ahora podemos construir el intervalo de confianza a partir de la expresión siguiente:

$$IC_{1-\alpha} \rightarrow y' \pm t_{n-1;\alpha/2} \cdot s_{y-y'}$$

Donde $t_{n\text{-}1,\alpha/2}$ es el valor de la t de Student con n-1 grados de libertad y el nivel de confianza determinado, y $S_{y\text{-}y'}$ es el error típico de estimación.

En nuestro ejercicio, t = 2,064 y $s_{y-y'} = s_y\sqrt{1 - r_{xy}^2} = 4{,}050\sqrt{1 - 0{,}80^2} = 2{,}43$.

Así,

$$IC_{1-\alpha} \rightarrow y' \pm t_{n-1;\alpha/2} \cdot s_{y-y'} = 14{,}14 \pm 2{,}064 \cdot 2{,}43 = [9{,}12 \quad 19{,}15]$$

Podemos concluir que a un sujeto que ha obtenido cuatro puntos en nuestro test, le podemos pronosticar que tendrá entre nueve y diecinueve puntos (redondeando) en el BDI, con un nivel de confianza del 95%.

e) Para analizar la validez de decisión de nuestro test, hemos de construir la tabla de contingencia, a partir de la clasificación de los sujetos entre aquellos diagnosticados o no de trastorno depresivo leve por el BDI y para nuestro test, en función de los puntos de corte del enunciado, en función de sus puntuaciones directas del caso 2 en las dos pruebas.

Esta tabla es la siguiente:

		BDI		**Total**
		No trastorno	**Sí trastorno**	
Test	No trastorno	14	1	15
	Sí trastorno	4	6	10
	Total	18	7	25

A partir de esta tabla podemos obtener:

- El porcentaje de acuerdo entre los dos tests (P_c):

$$P_c = \frac{14+6}{25} = 0{,}80$$

  Que podemos interpretar como un nivel de acuerdo bastante elevado (80%).

- El coeficiente kappa (k):

$$k = \frac{20 - 13{,}6}{25 - 13{,}6} = 0{,}56$$

Que podemos interpretar como una aceptable relación entre las dos clasificaciones.

- La sensibilidad de nuestro test:

$$Sensibilidad = \frac{Diagnosticados\ por\ nuestro\ test}{Total\ diagnosticados\ (\mathrm{BDI})} = \frac{6}{7} = 0{,}86$$

Que representa un 86% de diagnósticos correctos.

- La especificidad de nuestro test:

$$Especificidad = \frac{No\ diagnosticados\ por\ nuestro\ test}{Total\ no\ diagnosticados\ (\mathrm{BDI})} = \frac{14}{18} = 0{,}78$$

Que se interpreta como un 76% de acierto en la detección del no trastorno.

Ejercicio 2.

Para obtener las comunalidades de los diferentes ítems en cada uno de los dos componentes extraídos, elevamos al cuadrado sus saturaciones factoriales. La suma de las dos comunalidades proporcionará el valor de la comunalidad conjunta. El valor propio de cada componente será la suma de las comunalidades de los seis ítems, y la varianza explicada por cada uno de ellos será el porcentaje que representa el valor propio respecto al total de los seis ítems. Así, tendremos la siguiente tabla:

	Componente		**Comunalidades**		
	1	**2**	**C1**	**C2**	**Conjunta**
Ítem 1	,587	,023	0,345	0,001	0,345
Ítem 2	,267	,793	0,071	0,629	0,700
Ítem 3	,085	,703	0,007	0,494	0,501
Ítem 4	,696	-,303	0,484	0,092	0,576
Ítem 5	,705	-,360	0,497	0,130	0,627
Ítem 6	,821	,219	0,674	0,048	0,722
Valor propio			2,079	1,393	3,472
Varianza explicada			34,643	23,216	57,859

C1 es el componente 1 y C2 el componente 2.

La comunalidad del ítem 1 en el componente 1 es igual a $0{,}587^2$, es decir, 0,345, y así para el resto. La varianza explicada para el primer componente es igual a su valor propio (2,079) dividido por seis (número de ítems) y multiplicado por cien:

Varianza explicada C1 = $\frac{2{,}079}{6} \times 100 = 34{,}643.$

La interpretación de los resultados de este ACP iría en la dirección de considerar el test con una estructura interna bidimensional (mediría dos dimensiones), puesto que los diferentes ítems presentan saturaciones factoriales elevadas (superiores a 0,30) con alguno de los dos factores extraídos. Así, los ítems 1, 4, 5 y 6 estarían relacionados con el componente 1, mientras que los ítems 2 y 3 estarían relacionados con el componente 2. El primer componente explica el 34,643% de la variabilidad total de los seis ítems, mientras que el segundo explica un porcentaje del 23,216. Los dos componentes extraídos conjuntamente explican casi un 58% de la variabilidad total.

8. Solucionario de los ejercicios sobre transformación e interpretación de las puntuaciones

Ejercicio 1.

En primer lugar, para hacer cualquier transformación de las puntuaciones directas (X), hemos de construir la tabla de frecuencias con las frecuencias absolutas (f_i) para cada una de las puntuaciones en el test. Estas frecuencias absolutas serán el recuento del número de sujetos que han obtenido una puntuación determinada:

X	f_i
0	1
1	3
2	3
3	8
4	4
5	4
6	2

a) Percentiles

Para obtener los percentiles necesitamos calcular las frecuencias acumuladas (f_a), los porcentajes (P_i) y los porcentajes acumulados (P_a):

X	f_i	f_a	P_i	P_a
0	1	1	4	4
1	3	4	12	16
2	3	7	12	28
3	8	15	32	60
4	4	19	16	76
5	4	23	16	92
6	2	25	8	100

A partir de estos datos, para obtener los percentiles (P_c) aplicamos la fórmula:

$$P_c = \frac{f_a + 0{,}5 f_i}{N} \times 100$$

Donde f_a es la frecuencia acumulada previa a la puntuación directa de la que se quiere calcular el percentil, f_i la frecuencia absoluta en la que se encuentra la puntuación directa y N el número de personas que constituyen la muestra.

Así, para la puntuación directa de 0, el percentil será:

$$P_c = \frac{0 + (0{,}5 \cdot 1)}{25} \times 100 = 2$$

Para la puntuación de 1:

$$P_c = \frac{1 + (0{,}5 \cdot 3)}{25} \times 100 = 10$$

Para la puntuación de 2:

$$P_c = \frac{4 + (0{,}5 \cdot 3)}{25} \times 100 = 22$$

Para la puntuación de 3:

$$P_c = \frac{7 + (0{,}5 \cdot 8)}{25} \times 100 = 44$$

Para la puntuación de 4:

$$P_c = \frac{15 + (0{,}5 \cdot 4)}{25} \times 100 = 68$$

Para la puntuación de 5:

$$P_c = \frac{19 + (0{,}5 \cdot 4)}{25} \times 100 = 84$$

Para la puntuación de 6:

$$P_c = \frac{23 + (0{,}5 \cdot 2)}{25} \times 100 = 96$$

X	f_i	P_c
0	1	2
1	3	10
2	3	22
3	8	44

X	***f_i***	***P_c***
4	4	68
5	4	84
6	2	96

b) Puntuaciones estandarizadas

La fórmula de las puntuaciones estandarizadas es:

$$Z_x = \frac{X - \overline{X}}{S_x}$$

Donde X es la puntuación directa, $\overline{X}$ la media de la muestra y S_x la desviación típica. Por consiguiente, hemos de obtener la media $(\overline{X} = 3{,}24)$ y la desviación típica (S_x = 1,56) de la distribución de datos y aplicar la fórmula para cada puntuación directa.

Por ejemplo, para la puntuación de 0, la puntuación estandarizada será:

$$Z_x = \frac{X - \overline{X}}{S_x} = \frac{0 - 3{,}24}{1{,}56} = -2{,}08$$

Aplicando la fórmula a todas las puntuaciones obtendremos:

X	***Z_x***
0	-2,08
1	-1,44
2	-0,79
3	-0,15
4	0,49
5	1,13
6	1,77

c) Puntuaciones *T*

A partir de las puntuaciones estandarizadas podemos obtener fácilmente las puntuaciones T de McCall a partir de la siguiente transformación:

$$T = 50 + 10\ Z_x$$

En nuestro caso, para una puntuación directa de 0, la puntuación T será 50 + (10 × -2,08) = 29,2; que redondeamos al entero más cercano (29) puesto que las puntuaciones T no tienen decimales.

Para las otras puntuaciones tendremos:

X	Z_x	***T***
0	-2,08	29
1	-1,44	36
2	-0,79	42
3	-0,15	48
4	0,49	55
5	1,13	61
6	1,77	68

d) Eneatipos (*E*)

Para obtener los eneatipos, primero debemos calcular las puntuaciones estandarizadas normalizadas (Z_n), transformando los percentiles en aquellas puntuaciones estandarizadas que, bajo la tabla de la distribución normal, tienen asociada una proporción igual al percentil dividido por cien. Por ejemplo, al percentil 2, que corresponde en nuestros datos a la puntuación directa de 0, le corresponde una puntuación estandarizada normalizada de -2,05, que es la puntuación z de la distribución normal asociada a una proporción de 0,02 (percentil dividido por cien).

Una vez tenemos la Z_n, para obtener el eneatipo simplemente aplicamos la transformación $E = 5 + 2\ Z_n$, que para la puntuación de 0 nos dará E = 5 + (2 x -2,05) = 0,9, que redondeamos al entero más cercano (1) puesto que los eneatipos tampoco tienen decimales.

Para las otras puntuaciones obtendremos:

X	P_c	Z_N	***E***
0	2	-2,05	1
1	10	-1,28	2
2	22	-0,77	3
3	44	-0,15	5
4	68	0,47	6
5	84	0,99	7

X	***P_c***	***Z_N***	***E***
6	96	1,75	9

e) Decatipos (*D*)

Los decatipos también son puntuaciones normalizadas derivadas que se obtienen de las puntuaciones estandarizadas normalizadas a partir de la siguiente transformación: $D = 5{,}5 + 2\ Z_n$, que para la puntuación de 0 nos dará: $D = 5{,}5 + (2 \text{ x } -2{,}05) = 1{,}4$, que redondeamos al entero más cercano (1) por la misma razón del apartado anterior.

Para las otras puntuaciones obtendremos:

X	***Pc***	***Zn***	***D***
0	2	-2,05	1
1	10	-1,28	3
2	22	-0,77	4
3	44	-0,15	5
4	68	0,47	6
5	84	0,99	7
6	96	1,75	9

Ejercicio 2.

Para calcular los percentiles correspondientes a las puntuaciones directas, seguimos los pasos que veremos a continuación.

En primer lugar, obtenemos la puntuación directa de los tres primeros sujetos de la matriz de datos sumando el número de ítems a los que cada uno de ellos contestará correctamente.

Así, para el primer sujeto su puntuación directa es de 9, para el segundo de 6 y para el tercero de 2.

En segundo lugar, obtenemos la tabla de frecuencias absolutas (f_i) y de frecuencias acumuladas (f_a) de todas las puntuaciones (X) obtenidas por los 25 sujetos, haciendo el recuento del número de sujetos que obtienen cada una de las puntuaciones.

X	***f_i***	***f_a***
1	2	2

X	f_i	f_a
2	4	6
3	2	8
4	2	10
5	2	12
6	3	15
7	4	19
8	3	22
9	3	25

En tercer lugar, aplicamos la fórmula de los percentiles para las puntuaciones de los tres primeros sujetos:

- Primer sujeto:

$$X = 9 \; P_c = \frac{f_a + 0{,}5 f_i}{N} \times 100 = \frac{22 + (0{,}5 \cdot 3)}{25} \times 100 = 94$$

- Segundo sujeto:

$$X = 6 \; P_c = \frac{f_a + 0{,}5 f_i}{N} \times 100 = \frac{12 + (0{,}5 \cdot 3)}{25} \times 100 = 54$$

- Tercer sujeto:

$$X = 2 \; P_c = \frac{f_a + 0{,}5 f_i}{N} \times 100 = \frac{2 + (0{,}5 \cdot 4)}{25} \times 100 = 16$$

Por otro lado, para transformar las puntuaciones directas en CI, hemos de obtener, en primer lugar, la puntuación estandarizada z y, en segundo lugar, transformar esta puntuación z en CI.

La fórmula de la puntuación z es:

$$Z_x = \frac{X - \overline{X}}{S_x}$$

Y requiere el cálculo previo de la media y la desviación típica. En este ejemplo, la media de las puntuaciones de los 25 sujetos es de 5,24 y la desviación típica de 2,61.

Así, las puntuaciones estandarizadas de los tres primeros sujetos serán:

- Primer sujeto:

$$X = 9 \; Z_x = \frac{X - \overline{X}}{S_x} = \frac{9 - 5{,}24}{2{,}61} = 1{,}44$$

- Segundo sujeto:

$$X = 6\ Z_x = \frac{X - \overline{X}}{S_x} = \frac{6 - 5{,}24}{2{,}61} = 0{,}29$$

- Tercer sujeto:

$$X = 2\ Z_x = \frac{X - \overline{X}}{S_x} = \frac{2 - 5{,}24}{2{,}61} = -1{,}24$$

Con estas puntuaciones ya podemos obtener los valores de los coeficientes de inteligencia (CI) de los tres sujetos. La transformación en CI sigue la siguiente expresión:

$$CI = 100 + (z \times 10)$$

- Primer sujeto: CI = 100 + (1,44 × 10) ≈ 114 (redondeando al entero más cercano)

- Segundo sujeto: CI = 100 + (0,29 × 10) ≈ 103

- Tercer sujeto: CI = 100 + (-1,24 × 10) ≈ 88

Podemos resumir estas transformaciones en la siguiente tabla:

Sujeto	**Puntuación directa**	**Percentil**	**CI**
1	9	94	114
2	6	54	103
3	2	16	88

9. Solucionario de los ejercicios sobre análisis de los ítems

Ejercicio 1.

Para obtener los índices de dificultad (ID) y de discriminación (IDr) de cada ítem podemos construir las siguientes tablas, que resumen las respuestas de los 25 sujetos a cada uno de estos tres ítems:

Ítem 1:

	Alternativas de respuesta			
Grupo de rendimiento	A*	B	C	D
Alto	4	1	1	0
Medio	1	4	4	4
Bajo	0	3	2	1

* Alternativa correcta

- Índice de dificultad:

$$ID = \frac{A - \frac{E}{K-1}}{N} = \frac{5 - \frac{20}{3}}{25} = -0{,}07$$

  Donde A es el número de sujetos que aciertan el ítem (en el ítem 1 son 5), E el número de sujetos que no lo aciertan (20), K el número de alternativas de respuesta del ítem (4) y N el número total de sujetos que responden el ítem (25).

- Índice de discriminación:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{4}{6} - \frac{0}{6} = 0{,}67$$

  Donde P_a es la proporción de sujetos del grupo de alto rendimiento que aciertan el ítem (para el ítem 1 son 4 de 6), y P_b es la proporción de sujetos del grupo de bajo rendimiento que aciertan el ítem (0 de 6).

En función de estos valores podemos considerar que el ítem 1 es un ítem con una dificultad muy elevada y con una alta capacidad de discriminación.

Ítem 2:

	Alternativas de respuesta			
Grupo de rendimiento	A	B	C*	D
Alto	0	0	6	0
Medio	2	0	11	0
Bajo	0	1	3	2

* Alternativa correcta

- Índice de dificultad:

$$ID = \frac{A - \frac{E}{K-1}}{N} = \frac{20 - \frac{5}{3}}{25} = 0{,}73$$

- Índice de discriminación:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{6}{6} - \frac{3}{6} = 0{,}50$$

Interpretamos estos valores en el sentido de considerar el ítem 2 como un ítem fácil y con una alta discriminación.

Ítem 3:

	Alternativas de respuesta			
Grupo de rendimiento	A	B	C	D*
Alto	0	0	0	6
Medio	6	0	3	4
Bajo	2	1	3	0

* Alternativa correcta

- Índice de dificultad:

$$ID = \frac{A - \frac{E}{K-1}}{N} = \frac{10 - \frac{15}{3}}{25} = 0{,}20$$

- Índice de discriminación:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{6}{6} - \frac{0}{6} = 1$$

Podemos interpretar estos valores en el sentido de considerar el ítem 3 como un ítem bastante difícil y con una altísima capacidad de discriminación.

Ejercicio 2.

Para realizar el análisis de los distractores de cada uno de los tres primeros ítems, podemos aprovechar la tabla confeccionada en el ejercicio anterior y calcular los índices de discriminación de cada una de las alternativas de respuestas incorrectas:

Ítem 1:

	Alternatives de resposta			
Grupo de rendimiento	A*	B	C	D
Alto	4	1	1	0
Medio	1	4	4	4
Bajo	0	3	2	1

* Alternativa correcta

- Índice de discriminación de la alternativa B:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{1}{6} - \frac{3}{6} = -0{,}33$$

- Índice de discriminación de la alternativa C:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{1}{6} - \frac{2}{6} = -0{,}17$$

- Índice de discriminación de la alternativa D:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{0}{6} - \frac{1}{6} = -0{,}17$$

Como podemos observar, los tres índices son negativos, lo que se interpreta como que las tres alternativas de respuesta presentan una discriminación adecuada como distractores. Cabe comentar también que el ítem 1 es un ítem bastante difícil y, en consecuencia, hay una elevada proporción de sujetos que eligen respuestas incorrectas. Observando estas respuestas incorrectas, podemos concluir también que las tres alternativas son adecuadas, puesto que no hay grandes diferencias en cuanto al número de sujetos que eligen cada alternativa. Así, la alternativa B es elegida por 8 de los 25 sujetos, la C por 7 y la D por 5.

Ítem 2:

	Alternativas de respuesta			
Grupo de rendimiento	A	B	C*	D
Alto	0	0	6	0
Medio	2	0	11	0
Bajo	0	1	3	2

* Alternativa correcta

- Índice de discriminación de la alternativa A:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{0}{6} - \frac{0}{6} = 0$$

- Índice de discriminación de la alternativa B:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{0}{6} - \frac{1}{6} = -0,17$$

- Índice de discriminación de la alternativa D:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{0}{6} - \frac{2}{6} = -0,33$$

En este caso, dos de los índices de discriminación son negativos y el otro es igual a cero. También podemos interpretar que las tres alternativas de respuesta presentan una discriminación adecuada como distractores. De todos modos, hay que considerar que el ítem tiene una muy baja dificultad y, por lo tanto, las alternativas incorrectas son elegidas por muy pocos sujetos.

Ítem 3:

	Alternativas de respuesta			
Grupo de rendimiento	A	B	C	D*
Alto	0	0	0	6
Medio	6	0	3	4
Bajo	2	1	3	0

* Alternativa correcta

- Índice de discriminación de la alternativa A:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{0}{6} - \frac{2}{6} = -0,33$$

- Índice de discriminación de la alternativa B:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{0}{6} - \frac{1}{6} = -0,17$$

- Índice de discriminación de la alternativa C:

$$IDr = Pa - Pb = \frac{0}{6} - \frac{3}{6} = -0,50$$

Los tres índices de discriminación son adecuados en cuanto a las características requeridas a los distractores. De todos modos, hay que considerar que la alternativa B se debería revisar, puesto que solo es elegida por un sujeto y, por lo tanto, podemos considerar que es demasiado evidente que no es correcta.