

Mètodes numèrics per a la resolució de les equacions de Maxwell

Jaume Anguera Pros
Aurora Andújar Linares

PID_00175724



Els textos i imatges publicats en aquesta obra estan subjectes –llevat que s'indiqui el contrari– a una llicència de Reconeixement-NoComercial-SenseObraDerivada (BY-NC-ND) v.3.0 Espanya de Creative Commons. Podeu copiar-los, distribuir-los i transmetre'ls públicament sempre que en citeu l'autor i la font (FUOC. Fundació per a la Universitat Oberta de Catalunya), no en feu un ús comercial i no en feu obra derivada. La llicència completa es pot consultar a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/legalcode.ca>

Índex

Introducció	5
Objectius	6
1. Tècniques de resolució de les equacions de Maxwell	7
1.1. Tècniques en el domini freqüencial	8
1.2. Tècniques del domini temporal	9
2. Mètode de les diferències finites en el domini del temps (FDTD)	10
2.1. Característiques del mètode FDTD	11
2.1.1. Avantatges del mètode FDTD	12
2.1.2. Inconvenients del mètode FDTD	12
2.2. Aplicacions del mètode FDTD	13
2.3. Resolució de les equacions de Maxwell mitjançant l'FDTD	14
2.3.1. Les equacions de Maxwell	14
2.3.2. Algorisme de Yee	16
2.3.3. FDTD - 1D	29
2.3.4. FDTD - 2D	33
2.3.5. FDTD - 3D	37
2.4. Exemples de programes de simulació electromagnètica basats en l'FDTD	40
2.5. Exemples d'aplicació de l'FDTD	41
3. Mètode dels moments (MoM)	42
3.1. Potencial vector magnètic	42
3.2. Radiació d'una distribució de corrent	44
3.2.1. Formulació del problema del dipol	46
3.3. Derivació de l'equació integral d'Hàllen	50
3.4. La solució mitjançant el MoM	53
3.5. Exemple de MoM	56
3.6. Exemples d'aplicacions	56
Resum	58
Bibliografia	59

Introducció

Les equacions de Maxwell descriuen els fenòmens elèctrics i magnètics a escala macroscòpica. El que per a la mecànica clàssica significa les lleis de Newton ho són les equacions de Maxwell per als fenòmens elèctrics i magnètics.

Les lleis de l'electromagnetisme van ser enunciades per Gauss, Coulomb, Ampère i Faraday principalment. Aquestes lleis van ser recopilades per James Clerk Maxwell, qui va elaborar una teoria electromagnètica completa basant-se en les seves famoses equacions, les que actualment es coneixen com a *equacions de Maxwell* (1865).

Des que el 1870 Maxwell va postular el que avui coneixem com les equacions que porten el seu nom, hi ha hagut diverses tècniques per a resoldre-les mitjançant unes determinades condicions de contorn. Abans de la solució amb mètodes numèrics, el problema s'afrontava d'una manera analítica, cosa que només permetia resoldre situacions canòniques, és a dir, problemes amb geometries rectangulars, cilíndriques, esfèriques, etc., en què les equacions més les condicions de contorn presentaven una solució matemàtica senzilla. Per a problemes amb geometries més complicades, a fi d'obtenir resultats precisos, el problema es tracta d'una manera numèrica, cosa que només va ser possible amb l'arribada dels ordinadors.

En aquest mòdul primerament es fa una descripció breu dels mètodes numèrics per a la resolució de les equacions de Maxwell (apartat 1). A continuació es detallen dos mètodes de resolució de les equacions de Maxwell de manera numèrica: el mètode de les diferències finites en el domini del temps (FDTD) (apartat 2) i el mètode dels moments (MoM) (apartat 3). En el resum s'exposen les conclusions.

Objectius

Amb l'estudi d'aquest mòdul didàctic, assolireu els objectius següents:

- 1.** Conèixer els diversos mètodes numèrics per a la resolució de les equacions de Maxwell relacionats amb el disseny d'antenes i circuits de microones.
- 2.** Comprendre el mètode dels moments i el de les diferències finites en el domini del temps per a la resolució de les equacions de Maxwell.
- 3.** Saber la idoneïtat de cada mètode i les limitacions que té.
- 4.** Disposar de la base suficient per a dur a terme activitats professionals relacionades amb els mètodes numèrics.
- 5.** Aptituds per a dimensionar les necessitats d'una empresa en termes d'equips de programari de simulació electromagnètica.

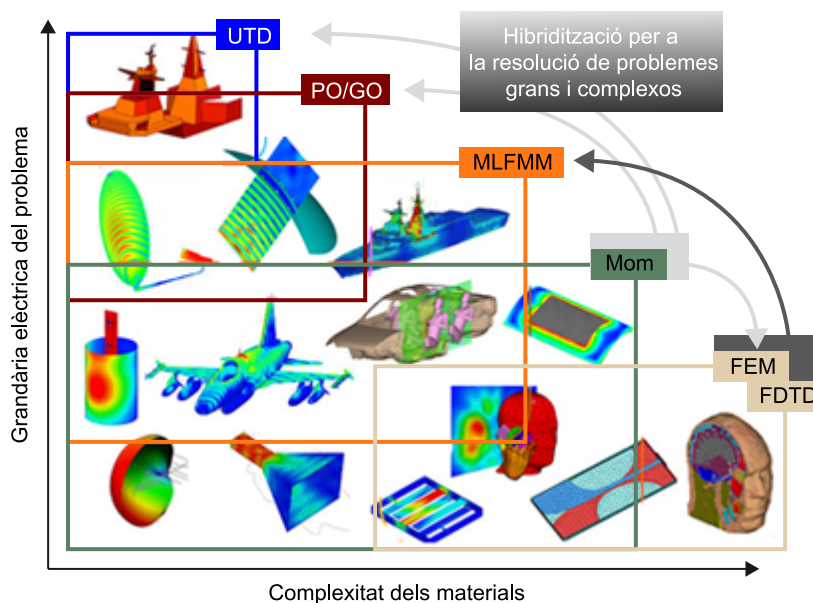
1. Tècniques de resolució de les equacions de Maxwell

L'anàlisi i la modelització de problemes electromagnètics és en alguns casos difícil de resoldre en entorns complexos en què interaccionen objectes d'una manera arbitrària.

La manera més general d'analitzar el problema de la pertorbació electromagnètica sobre un objecte qualsevol és mitjançant els models de dispersió (*scattering*). En aquests models es considera que l'objecte es troba en un medi dielèctric i hi incideix una ona electromagnètica. Els corrents i les càrregues induïts sobre l'objecte per l'ona incident generen al seu torn una ona dispersada.

Actualment, per a descriure el problema de la dispersió s'utilitzen diversos mètodes numèrics, com el mètode dels moments (MoM, *method of moments*), el mètode de les diferències finites en el domini del temps (FDTD, *finite difference time domain*) o el mètode dels elements finits (FEM, *finite element method*) (figura 1).

Figura 1. Classificació de diferents mètodes numèrics segons l'àmbit de treball en què s'apliquen



UTD: teoria uniforme de la difracció (*uniform theory of diffraction*); PO/GP: òptica física / òptica geomètrica (*physical optics / geometrical optics*); MLFMM: mètode multipol multinivell (*multi-level fast multi-pole method*); MoM: mètode dels moments (*method of moments*); FEM: mètode dels elements finits (*finite element method*); FDTD: mètode del domini temporal de les diferències finites (*finite difference time domain*). Font: empresa FEKO.

La discretització de l'espai que utilitzen els mètodes TLM (*Transmission Line Method*) o FDTD és molt flexible per a la modelització d'estructures generals amb formes arbitràries. Els inconvenients se centren en el fet que modelitzar la interacció d'objectes separats per regions de l'espai molt grans resulta en un increment del nombre de cel·les necessàries per a implementar el mètode, fet que augmenta els requisits de memòria i el temps de computació.

El mètode d'equació integral, o mètode IE, juntament amb el mètode dels moments, permet l'anàlisi de grans regions de l'espai amb una gran eficiència, ja que redueix la complexitat del problema. Per contra, el mètode IE requereix una anàlisi específica particular per a cada estructura, i això comporta una anàlisi prèvia per a estructures molt complexes.

La taula 1 resumeix de manera molt general les tècniques més conegudes per a la solució numèrica de les equacions de Maxwell.

Taula 1. Tècniques per a la solució numèrica de les equacions de Maxwell

Formulació	Domini temporal	Domini freqüencial
Diferencial	FDTD	FEM, FDFD
Integral	TD-EFIE	MoM

A manera de resum i com a ordre de magnitud: per a problemes en medis complexos (el cos humà, per exemple), el mètode FDTD és idoni. Per a problemes en medis basats en conductors, el MoM permet resoldre problemes elèctricament grans com ara antenes embarcades en avions, cotxes o vaixells. Quan el problema és elèctricament gran, es requereixen mètodes híbrids com l'UTD (figura 1).

1.1. Tècniques en el domini freqüencial

Els mètodes en el domini de la freqüència per a resoldre les equacions de Maxwell es basen a resoldre el problema tantes vegades com freqüències es requereixi analitzar. En general, aquest tipus de mètode deriva en una sèrie d'equacions lineals que resolen el sistema amb un esquema d'inversió de matrius, com ara el MoM.

Quan s'utilitzen mètodes en el domini freqüencial per a medis no homogenis i complexos com per exemple els òrgans del cos humà, apareixen dos problemes:

- Programar aquest tipus de medis complexos implica la derivació d'un grup d'equacions específiques per a aquest medi.
- Per a assolir un grau de precisió elevat es requereix una matriu de grans dimensions que s'ha d'invertir per a poder aplicar el mètode. Això comporta un alt grau de processament i memòria en l'ordinador.

1.2. Tècniques del domini temporal

Les tècniques del domini temporal com l'FDTD que es tracta en aquest mòdul, implementen el mètode de les diferències finites dependents del temps de les equacions de Maxwell.

Si es trien convenientment els punts en què s'avaluen els components dels camps en aquestes equacions, la solució del sistema d'equacions satisfà les condicions de contorn que involucren superfícies conductores ideals.

Aquest mètode és un cas particular del mètode de diferències finites, que és un mètode estàndard per a la resolució d'equacions en derivades parcials (EDP).

Aquest mètode té dos avantatges respecte dels mètodes basats en el domini de la freqüència:

- És senzill d'implementar amb medis complexos, ja que les característiques del dielèctric es poden assignar a cada punt de la malla.
- Permet obtenir informació en una gran amplada de banda mitjançant una simulació injectant un senyal temporal d'alt contingut espectral.

Com a inconvenients:

- Requereix mallar l'estructura i un cert volum al voltant d'ella.
- El temps d'execució del programa és elevat.

Amb la finalitat d'aprofitar els avantatges de cada mètode van aparèixer els mètodes híbrids, que combinen els avantatges dels mètodes FDTD i els dels mètodes integrals.

Lectura complementària

Sobre el mètode de les diferències finites dependents del temps de les equacions de Maxwell, podeu consultar l'obra següent:

A. Hoorfar; V. Jamnejad (2003). "Electromagnetic modeling and analysis of wireless communication antennas". *IEEE Microwave Magazine* (març, pàg. 51-67).

Vegeu també

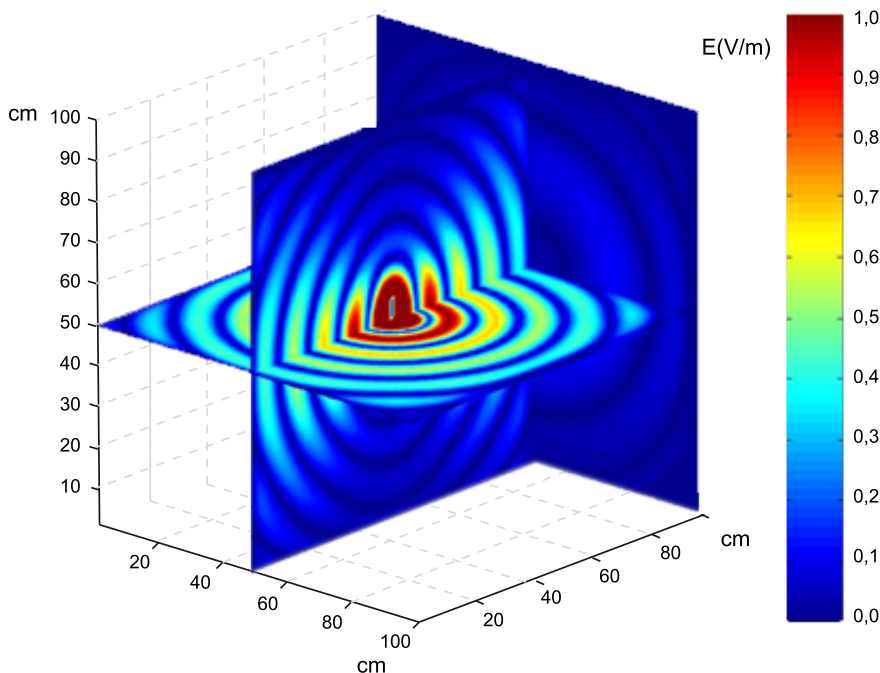
En l'apartat 2 d'aquest mòdul didàctic es tracta d'una manera més completa els avantatges i els inconvenients del mètode FDTD, a més de les diverses aplicacions que té.

2. Mètode de les diferències finites en el domini del temps (FDTD)

El mètode FDTD és un dels mètodes de computació més utilitzat en electro-magnetisme, ja que les equacions de Maxwell es resolten directament en el domini de l'espai-temps per mitjà de diferències finites i increments de temps. Empra una aproximació de primer ordre de diferències finites de l'expressió diferencial de les equacions de Maxwell per a calcular el valor de la intensitat de camp en cada punt de l'espai per cada increment de temps sobre un domini específic de simulació.

El mètode va ser proposat originalment per Kane Yee el 1966 i entre els nombrosos avantatges que té cal destacar que permet resoldre problemes de gran complexitat d'una manera senzilla i la seva popularitat continua creixent a mesura que baixen els costos de computació per a implementar-lo.

Figura 2. Exemple de la tècnica FDTD-3D aplicat a un dipol de mitja longitud d'ona



S'illustra la intensitat del camp elèctric produït pel dipol disposat verticalment i excitat en la seva freqüència de ressonància. Encara que només es representin tres talls, l'FDTD ha necessitat mallar un volum, en aquest cas d'un metre cúbic, i el dipol era al centre d'aquest volum. La grandària de cada cel·la és d'1 cm, de manera que la grandària del cub és d'un milió de cel·les. Hi ha sis cubs, un per a cada component de \vec{E} i de \vec{H} , i per a cada Δt des de $t = 0$ fins a $t = N \cdot \Delta t$.
Font: Anguera (2002).

Lectures complementàries

Sobre el mètode de les diferències finites dependents del temps de les equacions de Maxwell, podeu consultar les obres següents:

A. Hoorfar; V. Jamnejad (2003). "Electromagnetic modeling and analysis of wireless communication antennas". *IEEE Microwave Magazine* (març, pàg. 51-67).

A. Elsherbeni; V. Demir (2009). *The finite-difference time-domain method for electromagnetics with Matlab simulations*. Scitech Publishing Inc.

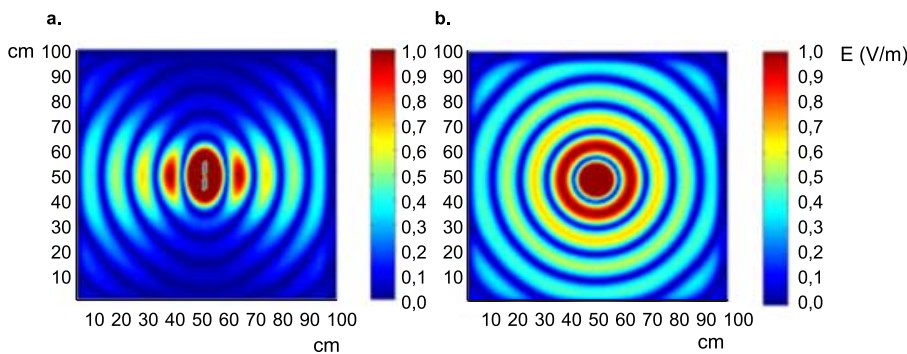
Lectura complementària

K. S. Yee (1966). "Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equations in isotropic media". *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* (vol. 14, núm. 8, pàg. 302-307).

L'FDTD serveix per a entendre d'una manera gràfica el fenomen de propagació de les ones electromagnètiques: com que és un mètode temporal permet crear una seqüència d'imatges de la pertorbació electromagnètica que s'uneixen i formen una pel·lícula que permet comprendre de manera més interactiva la propagació de les ones (figures 2 i 3), cosa que és interessant també per a finalitats acadèmiques.

L'objectiu primordial és mostrar la potència de l'FDTD com a eina de càlcul numèric i veure els tipus de problemes que pot tractar d'una manera eficient.

Figura 3. Vista lateral i superior de la tècnica FDTD-3D aplicat a un dipol de mitja longitud d'ona



a. S'observa el camp elèctric proper al dipol i el llunyà, que presenta la radiació màxima en el pla normal que divideix el dipol per la meitat; b. Camp elèctric en el pla horitzontal normal al dipol on s'observa el caràcter omnidireccional del dipol i que el camp decreix amb la distància. L'FDTD permet no solament capturar aquestes imatges sinó també fer-ho des del moment $t = 0$ en què s'inicia l'excitació de l'antena.
Font: Anguera (2002).

2.1. Característiques del mètode FDTD

Les característiques del mètode FDTD són les següents:

- El mètode resol les equacions de Maxwell mitjançant aproximacions de les derivades espacial-temporals.
- Permet disposar de manera senzilla d'una seqüència temporal del fenomen electromagnètic. Es disposa d'una percepció més física del problema de la que generalment s'obté mitjançant altres mètodes.
- Permet analitzar problemes d'incidència complexos que analíticament serien complicats, com per exemple perfils de formes arbitràries amb combinacions dielèctriques i magnètiques, amb materials de pèrdues i dispersius.
- L'FDTD és extremament general pel que fa a les geometries que pot utilitzar: conductors, dielèctrics, materials magnètics amb pèrdues, materials anisòtrops, teixits biològics, ferrites, i molts altres problemes que són molt difícils de resoldre amb altres mètodes però més assequibles per al mètode FDTD.
- L'FDTD pot proporcionar resultats en un ampli espectre de freqüències amb un sol càlcul utilitzant excitacions amb pulsacions de banda ampla

Lectura complementària

J. Anguera (2002). "Simulació electromagnètica mediante el método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo". *Ingeniería y Arquitectura* (núm. 23). Barcelona: La Salle, Universitat Ramon Llull.

i postprocessament mitjançant FFT (*fast Fourier transform*, ‘transformada ràpida de Fourier’).

- És un mètode d’ona completa, és a dir, no hi ha més aproximacions que la mateixa aproximació de les derivades espaciotemporals mitjançant diferències finites.
- L’algorisme estàndard de Yee té una precisió de segon ordre, és a dir, si la grandària del mallat es redueix a la meitat, l’error es redueix per quatre.

2.1.1. Avantatges del mètode FDTD

Els avantatges d’aquest mètode són els següents:

- És fàcil d’implementar computacionalment.
- Permet treballar amb medis complexos i elèctricament grans.
- Permet analitzar d’una manera compacta medis anisòtrops, no lineals i heterogenis com poden ser la interacció electromagnètica amb el cos humà, la propagació en fibres òptiques, metamaterials, etc.
- És un mètode de resolució iteratiu i no requereix una inversió matricial com sí que succeeix en els mètodes integrals com el mètode dels moments.
- Una sola simulació dóna resultats en un ampli domini de la freqüència. L’FDTD permet obtenir una resposta de banda ampla amb una sola simulació, ja que les fonts temporals es poden definir amb un alt contingut espectral, com és el cas de la pulsació gaussiana.
- És un mètode fàcil de paral·lelitzar; aquesta opció és especialment útil en problemes amb estructures complicades i elèctricament grans. De totes maneres, hi ha maquinari de càlcul que permet tractar problemes altament complexos amb ordinadors personals.

Vegeu també

Els metamaterials s’estudien en el mòdul “Metamaterials” d’aquesta assignatura.

2.1.2. Inconvenients del mètode FDTD

Entre els inconvenients principals hi ha els següents:

- S’ha d’analitzar l’entorn de l’estructura que interessa, cosa que augmenta de manera considerable la quantitat de memòria necessària i el temps de computació del mètode. Per exemple, si es vol simular una antena senzilla com un dipol lineal, s’ha de mallar un volum suficientment ampli que

Vegeu també

El mètode MoM s’estudia en l’apartat 4 d’aquest mòdul didàctic.

comprengui el dipol (figura 2). Amb altres mètodes, com el MoM, només cal mallar el conductor.

- El mètode requereix la definició d'una sèrie de condicions de contorn d'absorció (ABC, de l'anglès, *absortion boundary conditions*).
- Requereix la implementació de la font radiant i transformacions de camp proper a camp llunyà.
- Pel que fa a la precisió, no resol bé contorns curvilinis (es perd la precisió de segon ordre, però es pot solucionar mitjançant una aproximació esglanada) i pot aparèixer alguna dificultat per a resoldre petits detalls.
- Té un cost computacional alt, si bé a mesura que avança la tecnologia se salven fronteres.
- Requereix una malla ortogonal de tres dimensions en què aquestes estan condicionades als petits detalls de la geometria i l'increment de temps.
- Poden aparèixer errors que generalment són de caràcter dispersiu.
- L'error es pot acumular a mesura que l'ona es propaga pel medi.

2.2. Aplicacions del mètode FDTD

Entre les aplicacions electromagnètiques més comunes de l'FDTD, en destaquen les següents:

- Problemes de compatibilitat electromagnètica (EMC).
- Problemes de dispersió electromagnètica.
- Interacció electromagnètica amb el cos humà, com per exemple en les antenes de telefonia mòbil.
- Antenes *microstrip* sobre substrats PBG (*photonic band gap*, 'banda prohibida fotònica').
- Influència dels radoms sobre les antenes.
- Antenes sobre plans i substrats finits, com les antenes de terminals mòbils.
- Antenes actives (antenes amb components actius).
- Propagació en fibra òptica.

Vegeu també

La interacció electromagnètica amb el cos humà s'estudia en el mòdul "Tecnologia d'antenes per a terminals mòbils" d'aquesta assignatura.

- Anàlisi de circuits de microones (tant amb elements distribuïts com discrets).
- BioEM: models del cos humà; per a investigar l'efecte dels telèfons mòbils o de les línies d'alta tensió en el cos humà.

2.3. Resolució de les equacions de Maxwell mitjançant l'FDTD

Les equacions de Maxwell descriuen l'evolució en el temps i en l'espai dels camps \vec{E} i \vec{H} . Els diferents problemes s'especifiquen amb diferents condicions de vora o contorn que descriuen situacions físiques com la posició dels conductors en un circuit. Aquestes equacions descriuen els fenòmens electromagnètics macroscòpics.

Les equacions són tan generals i potents que, si resumíssim la física clàssica en vuit equacions, quatre d'elles serien les de Maxwell.

2.3.1. Les equacions de Maxwell

En un medi isòtrop, les equacions de Maxwell són les següents:

1) Llei d'Ampère-Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}_f(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \sigma(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon(\vec{r}) \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad 3.1$$

Estableix la relació entre els camps elèctric i magnètic en termes de corrents elèctrics. També assenyala la manera com un camp elèctric variable pot generar un camp magnètic, i en conseqüència, un corrent elèctric en un circuit.

2) Llei de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\mu(\vec{r}) \cdot \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad 3.2$$

Estableix que el camp elèctric induït per un camp magnètic variable és proporcional a la variació del camp magnètic en funció del temps.

Les equacions 3.1 i 3.2 són les equacions de Maxwell en el domini del temps, i són les bases de l'algorisme FDTD.

3) Llei de Gauss per al camp elèctric:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho_f(\vec{r}, t) \quad 3.3$$

L'equació 3.3 estableix que el flux elèctric total a través de qualsevol superfície és igual a la càrrega neta tancada per la superfície, cosa que implica que les línies de camp elèctric s'originen en càrregues positives i acaben en càrregues negatives (existeixen fonts i pous).

4) Llei de Gauss per al camp magnètic:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad 3.4$$

L'equació 3.4 implica que el flux magnètic a través d'una superfície tancada és zero, és a dir, el nombre de línies de camp magnètic que entren a la superfície és igual al nombre d'aquestes línies que en surten. Això significa que en la natura no existeixen monopols magnètics, només hi ha dipols magnètics i que les línies de camp magnètic són tancades.

Cada element d'aquestes expressions s'interpreta de la manera següent:

- $\vec{E}(\vec{r}, t)$ és el camp elèctric.
- $\vec{H}(\vec{r}, t)$ és el camp magnètic.
- $\vec{B}(\vec{r}, t)$ és la densitat de flux de camp magnètic.
- $\vec{D}(\vec{r}, t)$ és el desplaçament elèctric o la densitat de flux elèctric.
- $\vec{J}_f(\vec{r})$ és la densitat de corrent elèctric.
- $\rho_f(\vec{r})$ és la càrrega lliure que hi ha en un punt de l'espai.
- El vector $\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t)$ és el rotacional de \vec{H} .
- L'escalar $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$ és la divergència de \vec{B} .

També tenim que:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) \quad 3.5$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sigma(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad 3.6$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad 3.7$$

En què:

- $\epsilon(\vec{r})$ és la permitivitat elèctrica característica del medi en un punt de l'espai definit per \vec{r} . Si el medi és el buit: $\epsilon(\vec{r}) = \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m.
- $\mu(\vec{r})$ és la permeabilitat magnètica característica del medi en un punt de l'espai definit per \vec{r} . Si el medi és el buit: $\mu(\vec{r}) = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.
- $\sigma(\vec{r})$ és la conductivitat del medi en un punt de l'espai definit per \vec{r} .

Observeu que $\epsilon(\vec{r})$, $\mu(\vec{r})$ i $\sigma(\vec{r})$ són funcions de la posició. D'aquesta manera, si el medi resulta no homogeni no hi ha cap problema, ja que l'FDTD té en compte en cada posició de l'espai aquests valors particulars. Trobem un exemple d'aquesta situació en l'anàlisi de la radiació produïda per una antena integrada en el cos humà, com un marcapassos. El cos humà no és homogeni, atès que $\epsilon(\vec{r})$, $\mu(\vec{r})$ i $\sigma(\vec{r})$ no són constants ($\mu(\vec{r}) = \mu_0$ per al cos humà). Mitjançant l'FDTD no cal suposar que el medi sigui homogeni amb la finalitat de facilitar càlculs sinó que es pot tenir en compte el model real del medi en què es propaguen les ones electromagnètiques.

2.3.2. Algorisme de Yee

El 1966 Kane Yee va proposar un conjunt d'equacions en diferències finites per a resoldre les equacions de Maxwell. Aquest esquema es basa en el fet que els camps elèctrics i magnètics s'entrellacen en punts equidistants en una estructura de cub, anomenat el *cub de Yee*.

Malgrat la simplicitat i l'elegància de l'algorisme, no va tenir massa interès en l'època en què es va publicar. Això va ser així a causa de les limitacions tecnològiques d'aquella època per treballar amb uns ordinadors prou potents per a cobrir les necessitats de l'elevat cost computacional. Amb el temps, el cost computacional va baixar; per tant, l'interès pel mètode FDTD va començar a augmentar.

L'algorisme original de Yee és un algorisme de precisió de segon ordre tant en l'espai com en el temps.

Com a avantatges, cal destacar-ne la simplicitat i l'elegància.

Lectura complementària

Sobre l'algorisme de Yee, podeu consultar l'obra següent: K. S. Yee (1966). "Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equations in isotropic media". *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* (vol. 14, núm. 8, pàg. 302-307).

Com a inconvenients del mètode ens podem trobar amb els errors produïts per la dispersió numèrica, que seran petits si tenim un nombre suficient de cel·les en la malla per a la longitud d'ona. Taflove va ser dels primers a analitzar rigorosament aquests errors i també va ser el primer a presentar un criteri d'estabilitat per a l'algorisme de Yee.

L'esquema de la malla de Yee és un component clau de l'algorisme numèric i és molt simple i fàcil d'implementar; no obstant això, té alguns inconvenients: Treftan va trobar que el model en diferències finites és numèricament dispersiu, fins i tot per a medis no dispersius.

Malla de Yee

L'algorisme de Yee es basa en una malla en què es descriuen els components de camp elèctric i de camp magnètic per a obtenir les equacions actualitzades d'aquests camps presents en el problema a cada moment de temps.

Per a poder resoldre el mètode FDTD és necessària una discretització espai-temps dels camps elèctric i magnètic.

Discretització de l'espai

La discretització en l'espai depèn de la relació entre la grandària de la geometria del problema amb la longitud d'ona de treball, λ . Si s'analitzen objectes elèctricament grans, el domini de l'espai augmenta, i lògicament s'incrementa el temps computacional.

Per bé que l'FDTD es basa en una solució d'una malla, es tracta de la diferència principal respecte d'altres mètodes.

La **malla de Yee** es compon de compartiments rectangulars anomenats **cel·les**. Cadascuna de les arestes d'aquestes cel·les localitza un component del camp elèctric o magnètic i també especifica el tipus de material que representa. Una **geometria** es forma mitjançant l'assignació de diferents materials a diferents arestes de la malla.

Es tria aquesta forma rectangular perquè efectuar càlculs per a cada cel·la de la malla és realment ràpid i això permet obtenir aproximacions molt precises en la geometria física real.

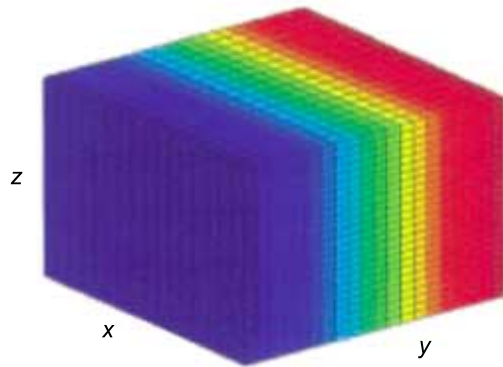
En la figura 4 es mostra un exemple d'un volum cúbic format per un conjunt de cubs de grandària més petita.

Lectura complementària

Sobre els inconvenients del mètode i la seva anàlisi, podeu consultar l'obra següent:

A. Hoorfar; V. Jamnejad (2003). "Electromagnetic modeling and analysis of wireless communication antennas". *IEEE Microwave Magazine* (març, pàg. 51-67).

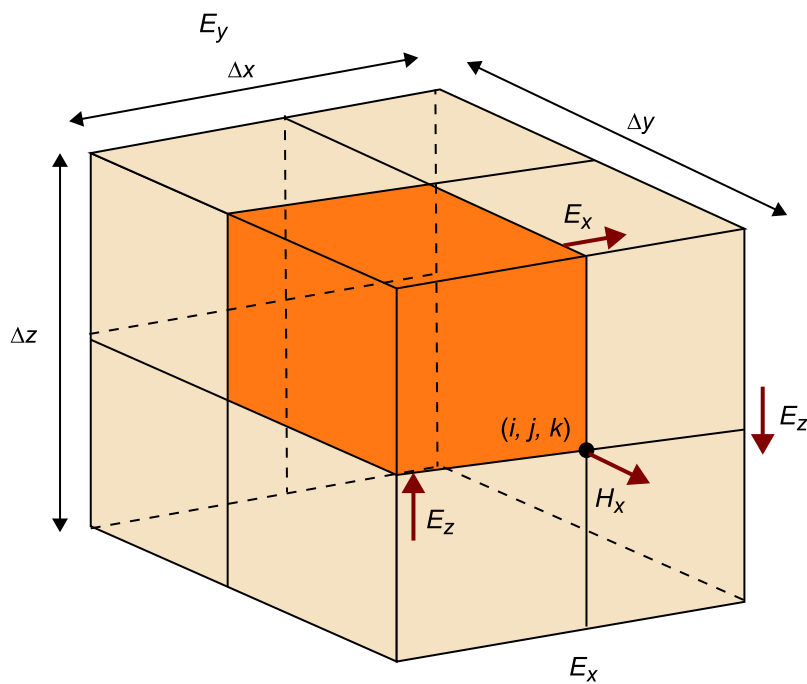
Figura 4. Discretització de l'espai en una malla de Yee composta per cel·les rectangulars



Cadascuna de les cel·les es caracteritza per increments espacials Δx , Δy i Δz . Els components \vec{E} i \vec{H} es distribueixen en l'espai en cada cel·la (figura 5).

Per a problemes en 3D, hi ha sis cubs, un per a cada component \vec{E} i \vec{H} , i per a cada instant determinat. El contingut dels cubs es va actualitzant en cada instant de temps.

Figura 5. Cel·la Yee composta per un cub rectangular de Δx , Δy i Δz

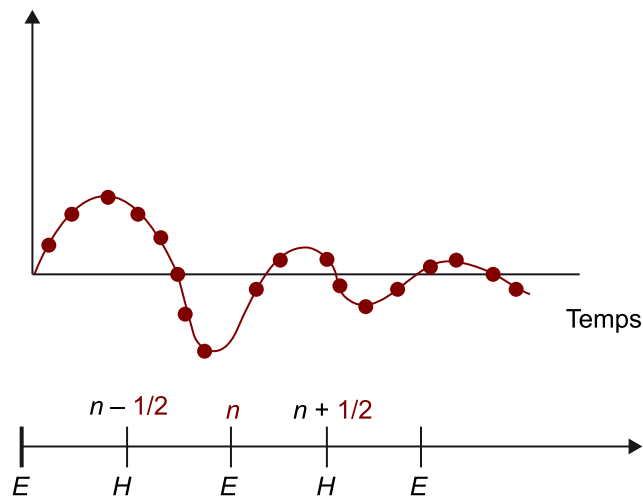


A primera vista, l'aproximació esglaonada que ofereix la malla de Yee en una geometria inclinada o curvilínia pot semblar molt grollera. Però cal recordar que la grandària de la malla és de $\lambda/10$ a $\lambda/30$, o fins i tot inferior. Així que, encara que l'aproximació de la malla pot semblar menys precisa que una malla suau produïda per altres mètodes, la desviació real de la malla de Yee respecte de la geometria és fins i tot inferior i utilitzarà molts elements petits de la malla que són molt ràpids de calcular i ocupen molt poca memòria en l'ordinador.

Discretització del temps

El temps es discretitza també en Δt i els camps \vec{E} i \vec{H} es distribueixen en el temps tal com es mostra en la figura 6.

Figura 6. Discretització del temps que s'aplica a \vec{E} i \vec{H}



Entre els tipus de malles de Yee que es poden trobar en l'aplicació del mètode FDTD hi ha els següents:

- Malles cartesianes: amb cel·les rectangulars. Són les que s'utilitzen normalment.
- Malles ortogonals: si el sistema es pot descriure més bé amb coordenades ortogonals, serà més apropiat desenvolupar un sistema d'equacions per a aquest sistema.
- Malles amb increments espacials variables al llarg de les diferents direccions de les coordenades.
- Malles de coordenades no ortogonals: els camps s'expressen en termes dels components de covariància (flux al llarg de la direcció coordenada), contravariància (flux al llarg d'una superfície de coordenades constants) i una formulació integral que s'utilitza per a actualitzar les equacions.

Resolució de l'algorisme de Yee

Un resum dels passos que es veuran a continuació són els següents:

- Presentació de les equacions de Maxwell en el domini temporal.
- Transformació d'equacions diferencials a equacions en diferències.

- Discretització en temps i espai.
- Obtenció dels camps elèctric i magnètic per a cada instant de temps.
- Unió de tots els instants de temps per a obtenir una pel·lícula en què es podrà observar que les ones electromagnètiques provinents d'una font es propaguen pel medi fins a arribar a un objecte o un altre medi on es reflecteixen o s'absorbeixen. Així s'obté una solució en què es pot observar l'evolució temporal dels camps.

Posteriorment es presenten les condicions d'absorció. Aquestes són necessàries per a evitar reflexions dels camps una vegada que arriben al límit del domini de simulació. Finalment s'analitza l'estabilitat del mètode.

1) Equacions de Maxwell dependents del temps

A partir de les lleis d'Ampère-Maxwell i Faraday, les equacions de Maxwell dependents del temps (equacions 3.8 i 3.9):

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \sigma(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon(\vec{r}) \cdot \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad 3.8$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu(\vec{r}) \cdot \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad 3.9$$

Que també es poden expressar com les equacions 3.10 i 3.11:

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon(\vec{r})} [\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) - \sigma(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)] \quad 3.10$$

$$\frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu(\vec{r})} \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \quad 3.11$$

Els components del vector de camp elèctric es mostren en les equacions 3.12 a 3.14:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad 3.12$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad 3.13$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad 3.14$$

I les de camp magnètic, amb les equacions 3.15 a 3.17:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad 3.15$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad 3.16$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad 3.17$$

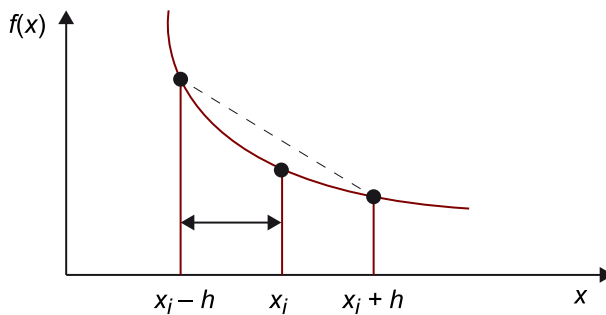
Aquestes sis equacions són la base de l'algorisme FDTD en 3D. Cal emfatitzar que $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, \epsilon, \mu, \sigma$ són funcions de (x, y, z) en el cas d'adoptar un sistema cartesià, que és el més habitual per a resoldre les equacions de Maxwell mitjançant el mètode FDTD. A més a més, els camps \vec{E} i \vec{H} dependran del temps una vegada s'iniciï l'excitació amb la font temporal que origina els camps inicials.

2) Transformació d'equacions diferencials a equacions en diferències

Les derivades espaciotemporals que apareixen en les equacions de Maxwell (3.12 a 3.17) s'aproximen mitjançant el mètode de les diferències finites 3.18 (figura 7):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + \text{Error}(h^2) \quad 3.18$$

Figura 7. Representació de la derivada de la funció mitjançant diferències finites mitjançant diferències centrals



Així es converteixen les equacions diferencials a equacions en diferències, de manera que, generalitzant, s'obté (eq. 3.19, 3.20):

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial x} = \frac{F^n(i + \frac{1}{2}, j, k) - F^n(i - \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} \quad 3.19$$

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial t} = \frac{F^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - F^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t} \quad 3.20$$

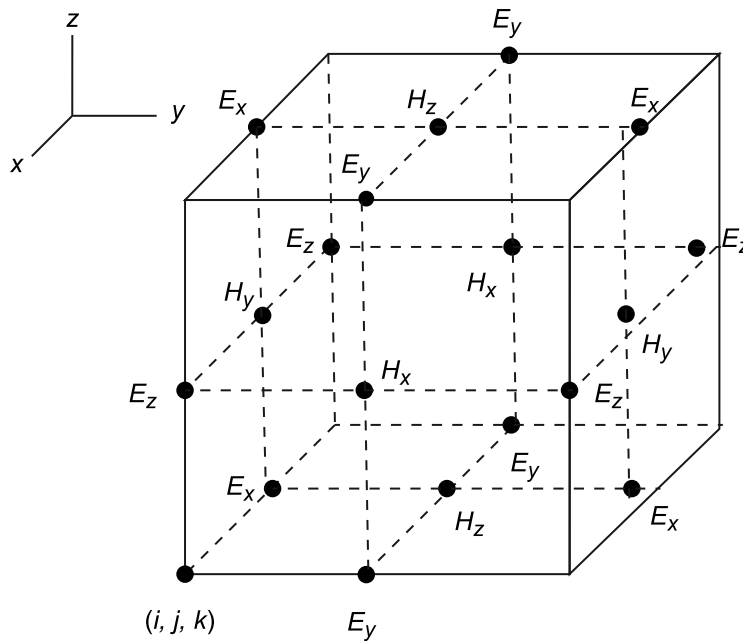
El mètode FDTD es basa a utilitzar les equacions 3.19 i 3.20 per a calcular les derivades dels camps electromagnètics en les equacions 3.12 a 3.17.

3) Discretització en espai i temps

Aplicant l'equació 3.1 s'actualitza el camp \vec{E} en cada instant de temps n , i amb l'equació 3.2 s'actualitza el camp magnètic \vec{H} en cada instant de temps $n + 1/2$.

Les malles utilitzades per a avaluar \vec{E} i \vec{H} en l'espai també estan esglaonades: el vèrtex d'un cub que pertany a una malla és al centre d'un cub que pertany a l'altra, com es mostra en la figura 8.

Figura 8. Cel·la de Yee



Els components del camp \vec{E} es troben en la meitat de les arestes, mentre que els components de \vec{H} són al centre de les cares.

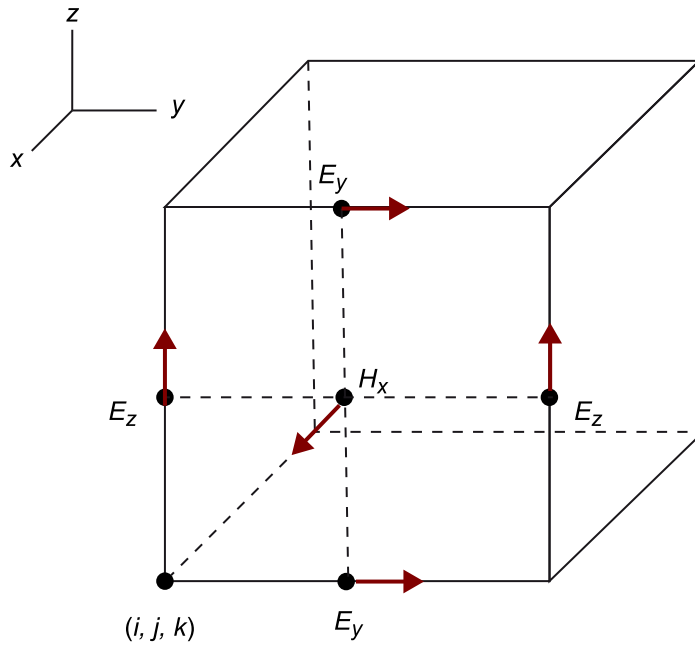
En aplicar aquest mètode a les equacions 3.12 a 3.17, s'obté un sistema d'equacions en diferències finites.

A partir de l'equació 3.15:

$$\begin{aligned} \frac{H_x^{n+1/2}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n-1/2}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \\ = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \end{aligned} \quad 3.21$$

En la figura 9 s'observa que els punts de la malla en què s'avaluen els camps E_y^n i E_z^n utilitzats en l'equació 3.15 per a calcular el camp $H_x^{n+1/2}$ al centre d'una cara de la cel·la perpendicular a l'eix x són els punts mitjans de les arestes que pertanyen a aquesta cara.

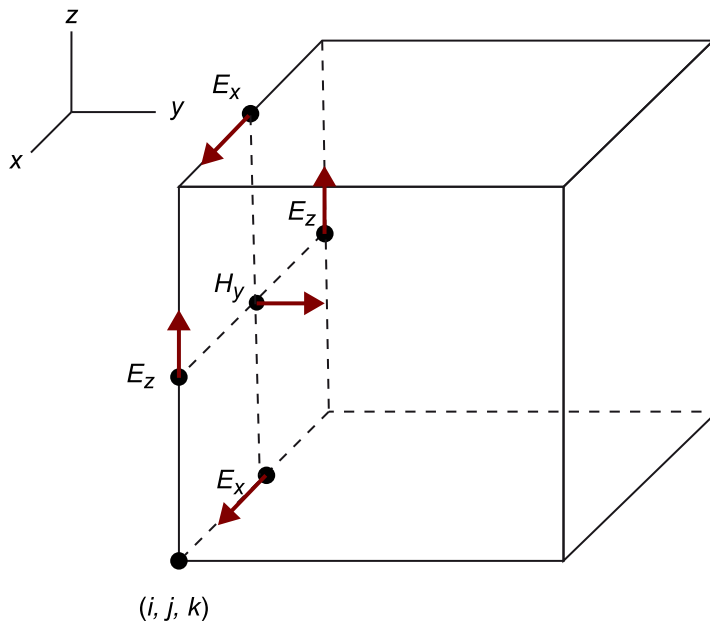
Figura 9. Nodes de la malla que s'utilitzen per a calcular el camp \vec{H} en l'equació 3.15



A partir de l'equació 3.16 (figura 10):

$$\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i+1, j, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta z} \right] \quad 3.22$$

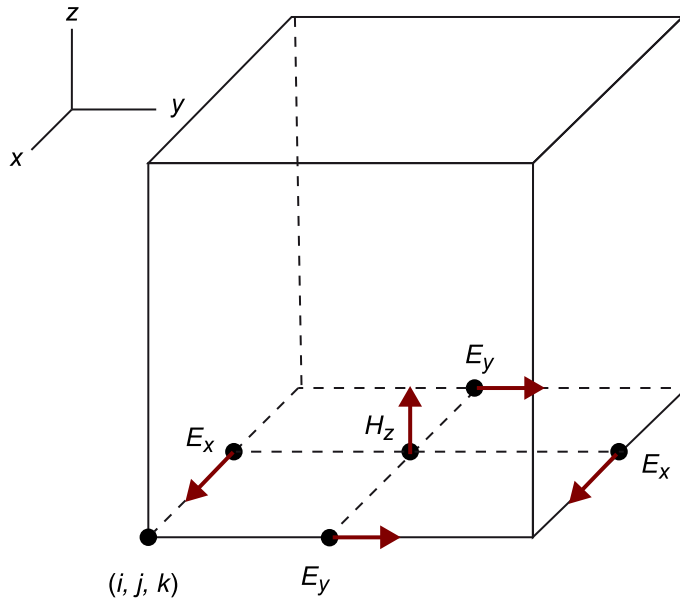
Figura 10. Nodes de la malla que s'utilitzen per a calcular el camp \vec{H} en l'equació 3.16



A partir de l'equació 3.17 (figura 11):

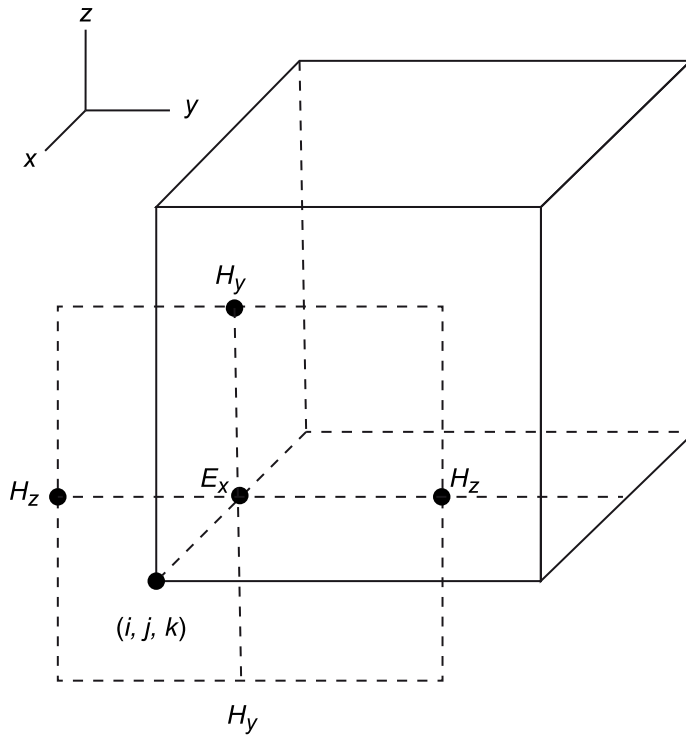
$$\begin{aligned} \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)-H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}{\Delta t} = \\ = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_x^n(i+\frac{1}{2},j+1,k)-E_x^n(i,j+\frac{1}{2},k)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i+1,j+\frac{1}{2},k)-E_y^n(i,j+\frac{1}{2},k)}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad 3.23$$

Figura 11. Nodes de la malla que s'utilitzen per a calcular el camp \vec{H} en l'equació 3.17



A partir de l'equació 3.12 (figura 12):

$$\begin{aligned} \frac{E_x^n(i+\frac{1}{2},jk)-E_x^{n-1}(i+\frac{1}{2},jk)}{\Delta t} = \\ = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)-H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},jk+\frac{1}{2})-H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},jk-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \right. \\ \left. - \sigma E_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k) \right] \end{aligned} \quad 3.24$$

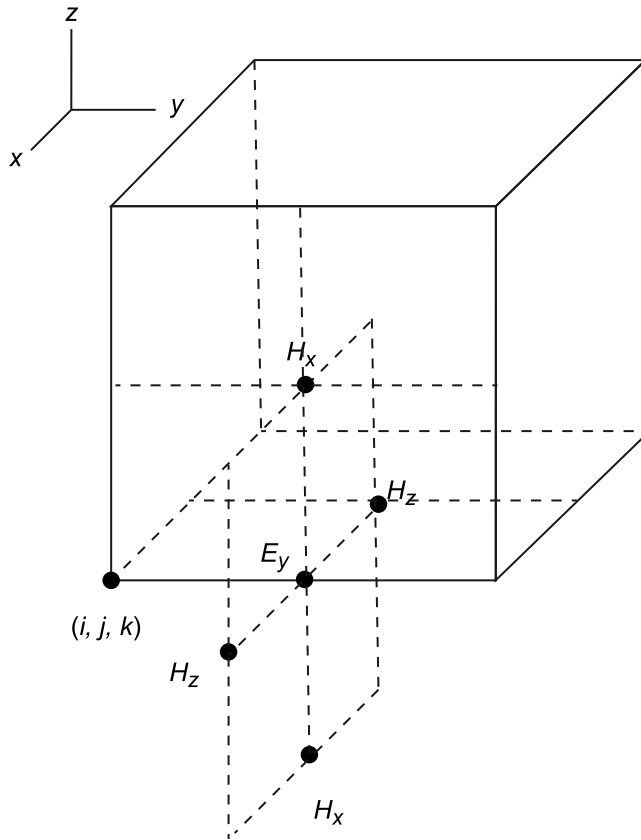
Figura 12. Nodes de la malla que s'utilitzen per a calcular el camp \vec{H} en l'equació 3.14

En aquest cas, els punts que s'utilitzen per a calcular E_x en un punt de la malla són els components de $H_y^{n-1/2}$ i $H_z^{n-1/2}$ que se situen en els punts mitjans dels costats d'un quadrat perpendicular a l'eix x el centre del qual és el punt en què es vol calcular E_x^n (figura 12).

A partir de l'equació 3.13 (figura 13):

$$\begin{aligned}
 & \frac{E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) - E_y^{n-1}(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \\
 & = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta x} - \right. \\
 & \left. - \sigma E_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) \right] \quad 3.25
 \end{aligned}$$

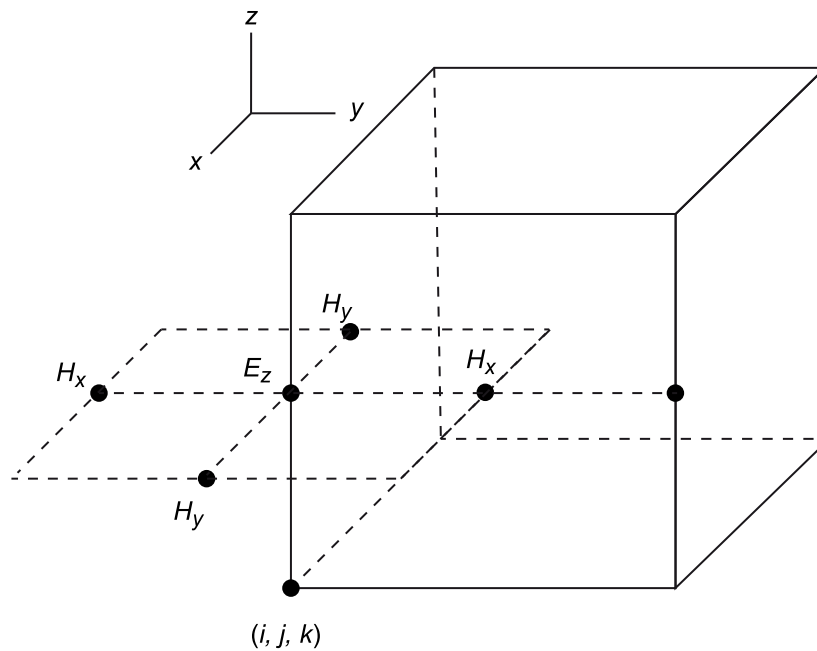
Figura 13. Nodes de la malla que s'utilitzen per a calcular el camp \vec{H} en l'equació 3.13.



I, finalment, a partir de l'equació 3.14 (figura 14):

$$\begin{aligned} & \frac{E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^{n-1}(i, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta t} = \\ & = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\Delta y} - \right. \\ & \left. - \sigma E_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) \right] \end{aligned} \tag{3.26}$$

Figura 14. Nodes de la malla que s'utilitzen per a calcular el camp \vec{H} en l'equació 3.12



El conjunt d'equacions que s'obté és implícit, i els càlculs per a trobar els valors dels camps en els punts de la malla són molt senzills (sumes i restes), cosa que en facilita la implementació; si les equacions es resolguessin amb diferències centrades en una malla "normal", s'obtindria un sistema d'equacions explícit.

4) Obtenció dels camps elèctric i magnètic i solució en temps real

Les condicions inicials són $\vec{E} = \vec{H} = 0$ i des de $t = \Delta t$ a $N \cdot \Delta t$ s'apliquen les fonts, i es resol H_x, H_y, H_z i E_x, E_y, E_z per a cadascuna de les cel·les. Les fonts poden ser harmòniques o amb un contingut espectral elevat, depenent del problema. Per exemple, si s'està interessat a calcular la impedància d'entrada en funció de la freqüència, el senyal ha de contenir un ampli conjunt de freqüències. Si, per contra, es vol calcular la taxa d'absorció específica, o SAR (*specific absorption rate*), no cal guardar informació de \vec{E} i \vec{H} en un gran ventall de freqüències sinó tan sols en les freqüències que interessa. Això minimitza la informació obtinguda; en cas contrari, els resultats ocupen una quantitat ingent d'espai de memòria d'ordinador ja que s'emmagatzemen els camps \vec{E} i \vec{H} (6 hipermatrïus) per a tots els punts del mallat i per a tots els instants de temps.

Vegeu també

El càlcul de la SAR s'estudia en el mòdul "Tecnologia d'antena per a terminals mòbils" d'aquesta assignatura.

El resultat és el conjunt de components de camp \vec{E} i \vec{H} en funció del temps per a cadascun dels punts del mallat. A partir d'aquesta informació es pot extreure tota la informació necessària, com per exemple distribució de corrent sobre una antena, impedància d'entrada, diagrames de radiació, o camp proper, entre d'altres.

5) Condicions d'absorció del contorn

Per tal d'obtenir un càlcul finit del mètode FDTD, el nombre de punts de la malla de Yee ha de tenir uns límits. Aquests límits són imposats per *condicions d'absorció del contorn*, o *absorbing boundary conditions* (ABC).

D'aquesta manera es poden modelitzar problemes de regions obertes, que simulen un entorn infinit en un entorn finit. Aquest mecanisme consisteix a evitar que l'ona es reflecteixi una vegada arriba al límit del domini. Per a un altre tipus de problemes com per exemple ones guiades, no seran necessàries les ABC, atès que el domini està embolcallat en un PEC (*perfect electric conductor*).

Les ABC tractaran d'envoltar el contorn del problema amb un medi sense reflexions, com per exemple la situació que s'esdevé en una simulació a l'espai lliure. En aquest cas, el contorn s'ha de comportar com un punt de no-retorn, és a dir, l'energia que traspassi aquest punt no ha de retornar a la finestra de càlcul.

Seria un error forçar el camp elèctric del contorn de la simulació a zero. En aquest cas, la condició de contorn és un conductor perfecte, cosa que porta a una reflexió total, que és el contrari del que es pretén.

Un mètode més eficient consisteix a aplicar una capa de material absorbent al llarg del contorn. Això reduirà la reflexió, però no és del tot efectiu ja que qualsevol discontinuïtat en la interfície entre materials donarà com a resultat un coeficient de reflexió no nul. Això es pot millorar si s'aplica un increment gradual de l'absorció en els contorns de la finestra de càlcul de manera que no hi hagi canvis en la impedància de l'ona, amb la qual cosa no es provoquen reflexions.

La majoria de les ABC es poden agrupar en els dos tipus següents:

- ABC d'equacions d'ones diferencials: generalment s'obtenen per factorització de l'equació d'ona i permeten una solució que només permeti ones de sortida.
- ABC material: són les que utilitzen materials absorbents. Es construeixen de manera que els camps s'atenuen en propagar-se en el medi absorbent. Una condició d'absorció molt intuïtiva consisteix a envoltar el medi amb un material absorbent com el d'una cambra anecoica. Aquest tipus d'ABC no dona un nivell suficient de reflexió en el contorn, ja que la impedància característica del material es fa coincidir amb la impedància de l'espai lliure només en la incidència normal.

Lectura complementària

Sobre les condicions d'absorció de contorn, podeu consultar l'obra següent:

A. Hoorfar; V. Jamnejad (2003). "Electromagnetic modeling and analysis of wireless communication antennas". *IEEE Microwave Magazine* (març, pàg. 51-67).

Un altre tipus d'ABC és la denominada PML (*perfectly matched layer*), que consisteix en un material fictici que envolta el domini de computació amb una adaptació perfecta independentment de l'angle d'incidència (Berenger, 1994, 1996).

6) Criteri d'estabilitat

La malla de Yee ha de tenir una grandària que permeti que els camps electromagnètics no canviïn d'una manera substancial d'un node a un altre de la malla. Això significa que per a tenir resultats significatius (és a dir, precisos i estables) la dimensió de la malla ha de ser una fracció de la longitud d'ona λ . En general es recomana un mallat amb un pas inferior a $\lambda/10$.

Per assegurar l'estabilitat de l'algorisme, Δt s'obté aplicant el criteri de Courant (1967), que estableix la condició 3.27:

$$\frac{c \cdot \Delta t}{L} < 1 \quad 3.27$$

En què:

- c : és la velocitat de l'ona electromagnètica en el medi.
- L : és una mesura lineal de l'element, com l'amplada de la cel·la o la llargada.
- Δt : és l'interval de temps.

El criteri d'estabilitat de Courant generalitzat per a tres dimensions es representa mitjançant l'equació 3.28:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad 3.28$$

Una vegada triada la malla, la condició anterior 3.28 imposa una restricció per a l'interval de temps Δt .

En general s'utilitza com a criteri $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$, de manera que el criteri d'estabilitat es redueix a l'equació 3.29:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{c\sqrt{3}} \quad 3.29$$

2.3.3. FDTD - 1D

A continuació es mostra la solució del mètode FDTD en una sola dimensió.

Lectura complementària

J. P. Berenger (1994). "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves". *Journal of computational physics* (vol. 114, núm. 2, pàg. 185-200, octubre).

Lectura complementària

R. Courant; K. Friedrichs; H. Lewy (1967). "On the partial Difference Equations of Mathematical Physics". *Journal of Research and Development* (vol. 11, núm. 2, pàg. 215-234).

1) Equacions de camp elèctric i magnètic a partir de les equacions de Maxwell

Sense perdre generalitat, si els components del camp elèctric i magnètic són E_x i H_y , s'obtenen les equacions següents a partir de les equacions de Maxwell. A partir de les equacions 3.12 a 3.17, s'obtenen les equacions particularitzades per a una sola dimensió:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad 3.30$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad 3.31$$

Si particularitzem les equacions en diferències finites per a la propagació en el sentit z (s'ha substituït per k en aquestes equacions), s'obtenen les equacions 3.32 i 3.33:

$$\frac{E_x^n(k) - E_x^{n-1}(k)}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon} \left[-\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(k+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \sigma E_x^{n-\frac{1}{2}}(k) \right] \quad 3.32$$

$$\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(k+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left[-\frac{E_x^n(k+1) - E_x^n(k)}{\Delta z} \right] \quad 3.33$$

Els camps \vec{E} i \vec{H} s'entrellacen en temps i espai, és a dir, els valors del camp \vec{H} es localitzen entre els valors del camp \vec{E} , i anàlogament, $n + 1/2$ i $n - 1/2$ indiquen que l'instant de temps és una mica després o una mica abans de n , respectivament.

Les equacions 3.32 i 3.33 es poden reagrupar per a obtenir un algorisme iteratiu:

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(k) = \left(\frac{\epsilon(k)}{\epsilon(k) + \Delta t \sigma(k)} \right) E_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{\Delta t}{(\epsilon(k) + \Delta t \sigma(k)) \cdot \Delta x} \left[H_y^n(k+\frac{1}{2}) - H_y^n(k-\frac{1}{2}) \right] \quad 3.34$$

$$H_y^{n+1}(k+\frac{1}{2}) = H_y^n(k+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu \cdot \Delta x} \left[E_x^{n+\frac{1}{2}}(k+1) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(k) \right] \quad 3.35$$

Aquestes equacions són molt semblants perquè ϵ_0 i μ_0 es diferencien en alguns ordres de magnitud; per tant, E_x i H_y també diferiran en alguns ordres de magnitud. Això es pot evitar fent el canvi de variables 3.36, i d'aquesta manera es minimitzen errors numèrics:

$$\vec{E} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E \quad 3.36$$

I si substituïm en les equacions, s'obtenen les equacions 3.37 i 3.38:

$$\bar{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k) = \left(\frac{\epsilon(k)}{\epsilon(k) + \Delta t \sigma(k)} \right) \bar{E}_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{\Delta t}{(\epsilon(k) + \Delta t \sigma(k)) \cdot \Delta x} \left[H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2}) \right] \quad 3.37$$

$$H_y^{n+1}(k + \frac{1}{2}) = H_y^n(k + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \left[\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \bar{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k+1) - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \bar{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k) \right] \quad 3.38$$

Com a exemple, si es considera un medi com l'aire, en què la conductivitat és pràcticament nul·la, les equacions 3.37 i 3.38 se simplifiquen en les equacions 3.39 i 3.40:

$$\bar{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k) = \bar{E}_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2}) \right] \quad 3.39$$

$$H_y^{n+1}(k + \frac{1}{2}) = H_y^n(k + \frac{1}{2}) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k+1) - \bar{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k) \right] \quad 3.40$$

2) Condicions d'estabilitat i precisió

S'ha de tenir en compte que l'estabilitat i la precisió imposen restriccions sobre Δx i Δt :

- Precisió: Δx ha de ser més petit que la mínima longitud d'ona d'interès.
- Estabilitat: els intervals de temps Δt han de ser prou petits perquè els valors de camp puguin afectar només els components més propers durant un interval de temps. Per a satisfer aquest criteri d'estabilitat s'ha de complir l'equació 3.41:

$$\frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x} < 1 \Rightarrow \Delta t < \frac{\Delta x}{c} \quad 3.41$$

El criteri que s'utilitza és el següent (equació 3.42):

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2 \cdot c_0} \quad 3.42$$

Si apliquem la condició de l'equació 3.42 s'obtenen les equacions 3.43 i 3.44:

$$\begin{aligned} \bar{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k) &= \bar{E}_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{1}{2c_0} \left[H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2}) \right] = \\ &= \bar{E}_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{1}{2c_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \left[H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2}) \right] = \\ &= \bar{E}_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \left[H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2}) \right] \end{aligned} \quad 3.43$$

$$\begin{aligned}
H_y^{n+1}\left(k + \frac{1}{2}\right) &= H_y^n\left(k + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{1}{2c_0} \left[\tilde{E}_y^{n+\frac{1}{2}}(k+1) - \tilde{E}_x^n(k) \right] = \\
&= H_y^n\left(k + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \left[\tilde{E}_y^{n+\frac{1}{2}}(k+1) - \tilde{E}_x^n(k) \right]
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Com a exemple d'això, si es considera el medi com l'espai lliure, el terme $\epsilon_R\mu_R = \epsilon\mu/\epsilon_0\mu_0 = 1$, i les equacions són 3.45 i 3.46:

$$\tilde{E}_x^{n+\frac{1}{2}}(k) = \tilde{E}_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{1}{2} \left[H_y^n\left(k + \frac{1}{2}\right) - H_y^n\left(k - \frac{1}{2}\right) \right] \tag{3.45}$$

$$H_y^{n+1}\left(k + \frac{1}{2}\right) = H_y^n\left(k + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \left[\tilde{E}_y^{n+\frac{1}{2}}(k+1) - \tilde{E}_x^n(k) \right] \tag{3.46}$$

3) Condicions de contorn

S'han de tenir en compte les condicions de contorn per a poder definir el medi en què es durà a terme la simulació. Com que és en una sola dimensió, les condicions de contorn se simplifiquen molt respecte de 2D i 3D. L'espai es divideix en x increments espacials en els quals es defineix el tipus de medi que representen, tant si es tracta del medi lliure com d'algun tipus de dielèctric.

4) Implementació numèrica

Reescrivim les equacions en notació per a ser programada computacionalment, i resulten les equacions 3.47 a 3.50.

Espai lliure:

$$ex[k] = ex[k] + 0,5 \cdot (hy[k-1] - hy[k]) \tag{3.47}$$

$$hy[k] = hy[k] + 0,5 \cdot (ex[k] - ex[k+1]) \tag{3.48}$$

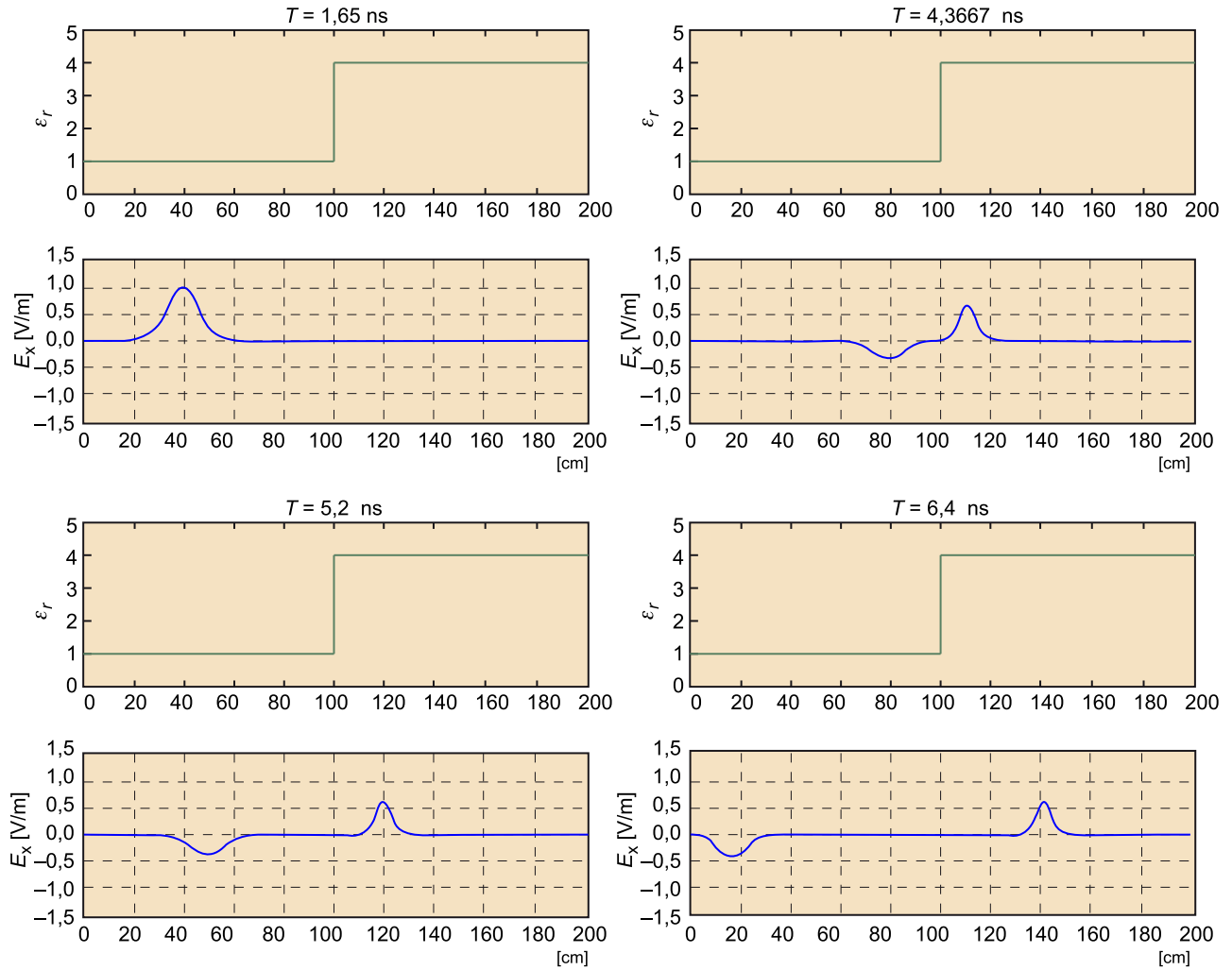
En un medi dielèctric amb ϵ_r i μ_r :

$$ex[k] = ex[k] + \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_r[k] \cdot \mu_r[k]}} \cdot (hy[k-1] - hy[k]) \tag{3.49}$$

$$hy[k] = hy[k] + \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_r[k] \cdot \mu_r[k]}} \cdot (ex[k] - ex[k+1]) \tag{3.50}$$

Es mostra un exemple d'aplicació d'aquestes equacions FDTD-1D en la figura 15, en què s'il·lustra la incidència d'una pulsació gaussiana que viatja per l'espai lliure cap a un medi dielèctric caracteritzat per $\epsilon_r = 4$.

Figura 15. Exemple FDTD-1D



Ona plana que es propaga per l'espai lliure i que incideix en un medi a $z = 100$ cm amb una $\epsilon_r = 4$. S'observa que hi ha una pulsació reflectida que experimenta un canvi de signe, i una pulsació transmesa cap al segon medi que viatja d'una manera més lenta.

2.3.4. FDTD - 2D

A continuació es mostra la solució del mètode FDTD en dues dimensions. Per a aquest cas no hi ha variació en la geometria i en la distribució de camps en una de les dimensions.

A partir de les equacions 3.12 a 3.17, considerant el problema independent de z , s'obtenen les equacions particularitzades per a dues dimensions:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad 3.51$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad 3.52$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad 3.53$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \sigma E_x \right) \quad 3.54$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad 3.55$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad 3.56$$

$$\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2})}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)}{\Delta y} \right] \quad 3.57$$

$$\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - E_z^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \quad 3.58$$

$$\begin{aligned} \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta t} &= \\ &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j+1) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad 3.59$$

$$\begin{aligned} \frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j) - E_x^{n-1}(i+\frac{1}{2}, j)}{\Delta t} &= \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} - \sigma E_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) \right] \end{aligned} \quad 3.60$$

$$\frac{E_y^n(i, j+\frac{1}{2}) - E_y^{n-1}(i, j+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} - \sigma E_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) \right] \quad 3.61$$

$$\begin{aligned} \frac{E_z^n(i, j) - E_z^{n-1}(i, j)}{\Delta t} &= \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} - \sigma E_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j) \right] \end{aligned} \quad 3.62$$

En les equacions que hem presentat abans s'aplica la normalització del camp elèctric segons l'equació 3.36, i es poden reagrupar per a obtenir un algorisme iteratiu:

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)}{\Delta y} \right] \quad 3.63$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - E_z^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \quad 3.64$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) = H_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right) - E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta y} - \frac{E_y^n\left(i+1, j+\frac{1}{2}\right) - E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \right] \quad 3.65$$

$$E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) = E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j\right) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} - \sigma E_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) \right] \quad 3.66$$

$$E_y^{n+1}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) = -E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} - \sigma E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) \right] \quad 3.67$$

$$E_z^{n+1}(i, j) = E_z^n(i, j) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} - \sigma E_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j) \right] \quad 3.68$$

A manera d'exemple, si no es té en compte la conductivitat, com pot ser en el cas d'una ona que es propaga en l'espai lliure, les equacions dels camps magnètic i elèctric se simplifiquen i queden com les equacions 3.69 a 3.74:

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) = H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)}{\Delta y} \right] \quad 3.69$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) = H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - E_z^n\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \right] \quad 3.70$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) = H_z^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+1\right) - E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta y} - \frac{E_y^n\left(i+1, j+\frac{1}{2}\right) - E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \right] \quad 3.71$$

$$E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) = E_x^n\left(i+\frac{1}{2}, j\right) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right] \quad 3.72$$

$$E_y^{n+1}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) = -E_y^n\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \right] \quad 3.73$$

$$E_z^{n+1}(i, j) = E_z^n(i, j) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad 3.74$$

1) Condicions d'estabilitat i precisió

El criteri d'estabilitat que s'ha d'aplicar es defineix en l'equació 3.75:

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{\frac{1}{\mu \epsilon}} \quad 3.75$$

Si operem i apliquem aquest criteri, a més de la normalització sobre les equacions anteriors, s'obtenen les equacions 3.77 a 3.82:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad 3.76$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - \frac{\Delta \tau}{Z} \left[\frac{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)}{\Delta y} \right] \quad 3.77$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) + \frac{\Delta \tau}{Z} \left[\frac{E_z^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - E_z^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \quad 3.78$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) + \frac{\Delta \tau}{Z} \left[\frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+1) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \quad 3.79$$

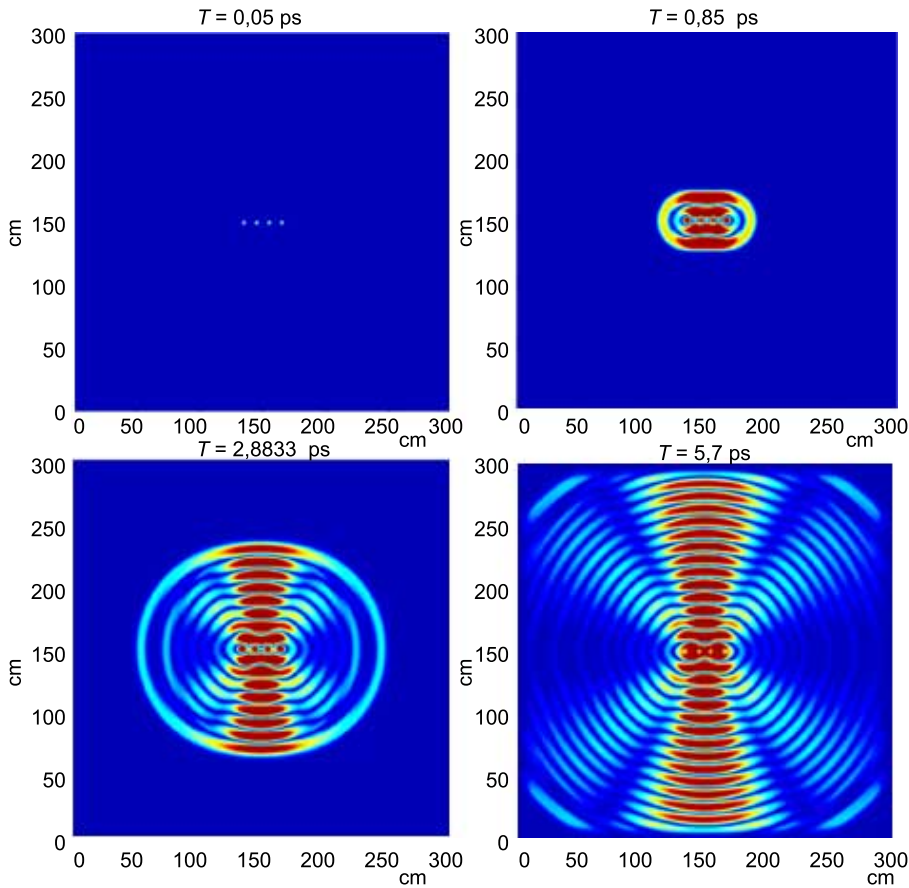
$$E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j) = E_x^n(i+\frac{1}{2}, j) + \Delta \tau \cdot Z \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad 3.80$$

$$E_y^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}) = E_y^n(i, j+\frac{1}{2}) - \Delta \tau \cdot Z \left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \quad 3.81$$

$$E_z^{n+1}(i, j) = E_z^n(i, j) + \Delta \tau \cdot Z \left[\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad 3.82$$

En la figura 16 s'il·lustra un exemple d'FDTD-2D aplicat a l'anàlisi d'una agrupació de quatre fonts puntuals espaiades mitja longitud d'ona i amb la mateixa fase. Es pot observar que el camp lluny de l'agrupació és el que s'obté mitjançant els mètodes d'agrupacions d'antenes a partir de la transformació de l'excitació.

Figura 16. Exemple d'FDTD-2D



Quatre fonts isòtropes separades $\lambda/2$ que radien en fase. S'observa que el màxim de radiació apareix en direcció perpendicular a l'eix de l'agrupació i els lòbuls secundaris.

Lectura complementària

Sobre aquest exemple d'FDTD-2D, podeu consultar l'obra següent:
J. Anguera (2002). "Simulació electromagnètica mediante el método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo". *Ingeniería y Arquitectura* (núm. 23). Barcelona: La Salle, Universitat Ramon Llull.

2.3.5. FDTD - 3D

Per a trobar la solució FDTD en tres dimensions, es resolen les equacions de Maxwell per a un sistema de coordenades cartesià. A partir de les equacions 3.12 a 3.17 i aplicant la normalització, s'obtenen les equacions particularitzades per a tres dimensions (equacions 3.83 a 3.88).

Equacions per al camp magnètic:

$$\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_y^n(i,j+\frac{1}{2},k+1) - E_y^n(i,j+\frac{1}{2},k)}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i,j+1,k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i,j,k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \tag{3.83}$$

$$\begin{aligned} & \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \\ & = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_x^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad 3.84$$

$$\begin{aligned} & \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \\ & = \frac{1}{\mu} \left[\frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad 3.85$$

Equacions per al camp elèctric:

$$\begin{aligned} & \frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k) - E_x^{n-1}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t} = \\ & = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \right. \\ & \left. - \sigma E_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) \right] \end{aligned} \quad 3.86$$

$$\begin{aligned} & \frac{E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k) - E_y^{n-1}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} = \\ & = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} - \right. \\ & \left. - \sigma E_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) \right] \end{aligned} \quad 3.87$$

$$\begin{aligned} & \frac{E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2}) - E_z^{n-1}(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta t} = \\ & = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k-1)}{\Delta z} - \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} - \right. \\ & \left. - \sigma E_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k+\frac{1}{2}) \right] \end{aligned} \quad 3.88$$

En els casos en què la conductivitat sigui nul·la, les equacions 3.83 a 3.88 se simplifiquen en les equacions 3.89 a 3.94:

$$\begin{aligned} & H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) + \\ & + \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} - \frac{E_z^n(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \end{aligned} \quad 3.89$$

$$\begin{aligned}
H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) &= H_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_z^n(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_x^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta z} \right]
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}
H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) &= H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\mu} \left[\frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} - \frac{E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right]
\end{aligned} \tag{3.91}$$

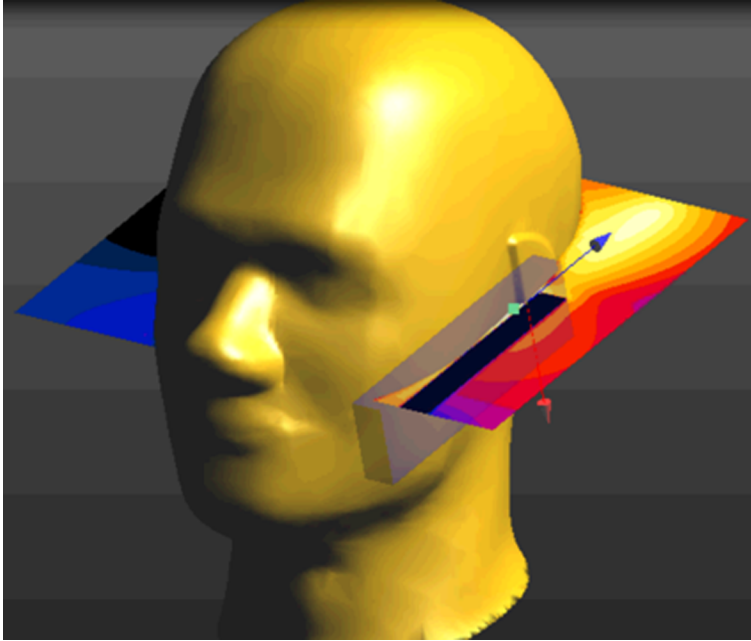
$$\begin{aligned}
E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k) &= E_x^{n-1}(i+\frac{1}{2}, j, k) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[\frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} - \frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \right. \\
&\left. - \sigma E_x^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) \right]
\end{aligned} \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned}
E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k) &= E_y^{n-1}(i, j+\frac{1}{2}, k) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[\frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta x} - \right. \\
&\left. - \sigma E_y^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) \right]
\end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned}
E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2}) &= E_z^{n-1}(i, j, k+\frac{1}{2}) + \\
&+ \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[\frac{H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})}{\Delta x} - \frac{H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{\Delta y} - \right. \\
&\left. - \sigma E_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k+\frac{1}{2}) \right]
\end{aligned} \tag{3.94}$$

En la figura 17 s'il·lustra la potència del mètode FDTD-3D per a problemes complexos com el d'una antena de telefonia mòbil que radia en presència d'un model de cap (*phantom-head*).

Figura 17. Exemple d'FDTD-3D. Model obtingut amb el simulador Semcad



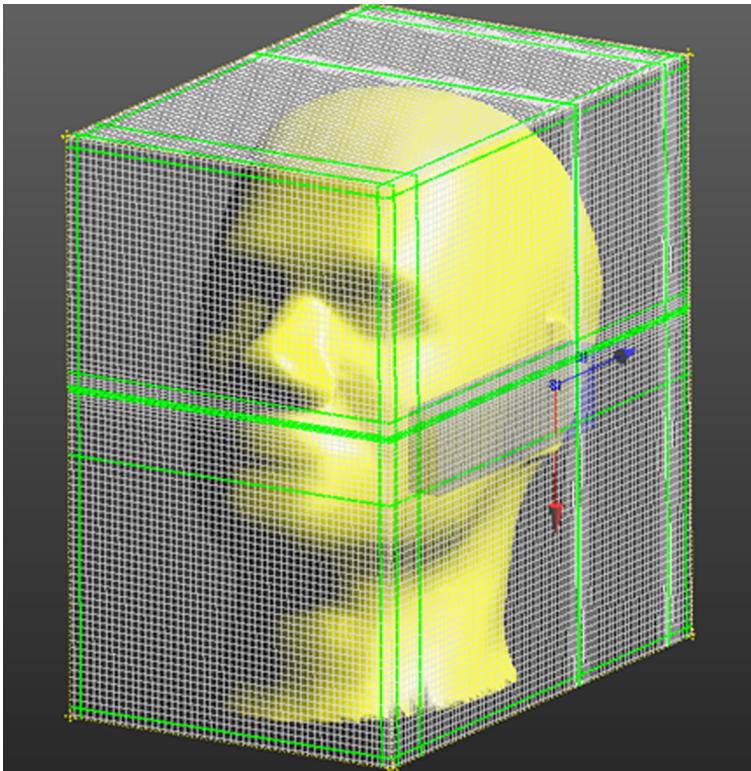
Simulació dels camps produïts per una antena de telefonia mòbil en presència d'un *phantom-head*.

Vegeu també

Els *phantom-head* s'estudien en el mòdul "Tecnologia d'antenes per a terminals mòbils" d'aquesta assignatura.

2.4. Exemples de programes de simulació electromagnètica basats en l'FDTD

Un exemple de codi electromagnètic basat en l'FDTD és el programa Semcad (figura 18).

Figura 18. Discretització d'un problema format per un cap *phantom* i una antena per a telèfon mòbil

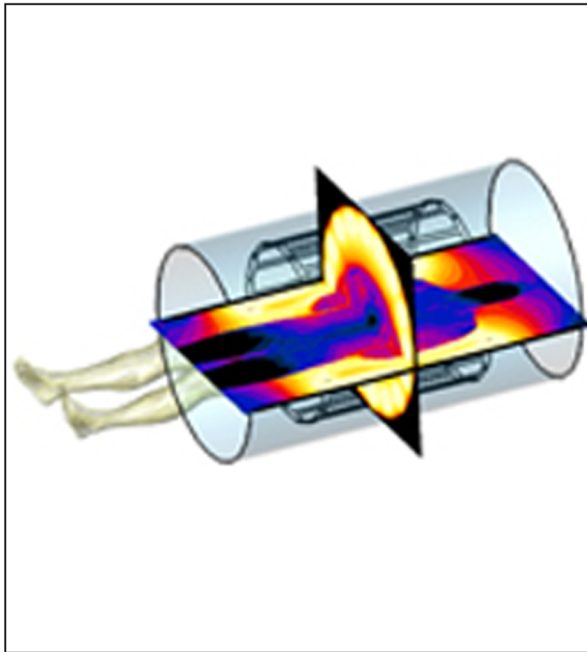
El problema té entorn d'un milió de cel·les i requereix mallar un cub que envolti el cap i el telèfon, més un espai de guarda.

2.5. Exemples d'aplicació de l'FDTD

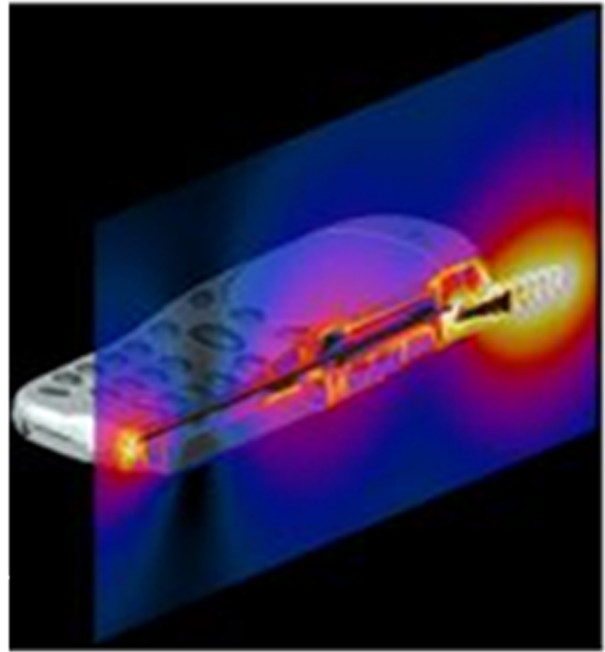
En la figura 19 es mostren alguns exemples en què el mètode FDTD és útil.

Figura 19. Exemples d'aplicació del mètode FDTD

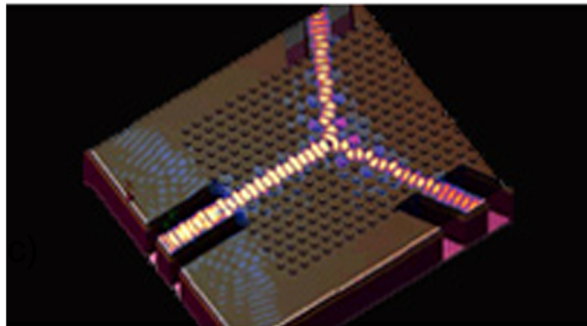
a.



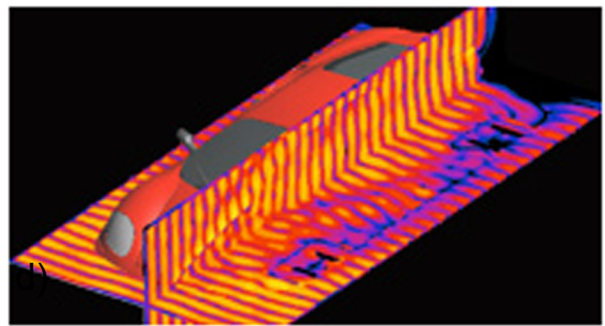
b.



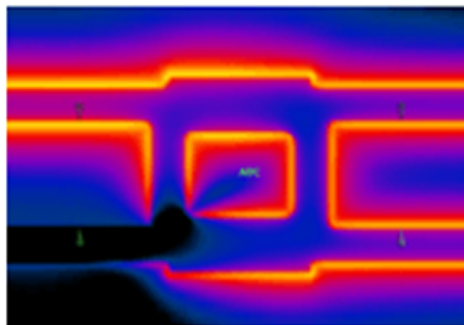
c.



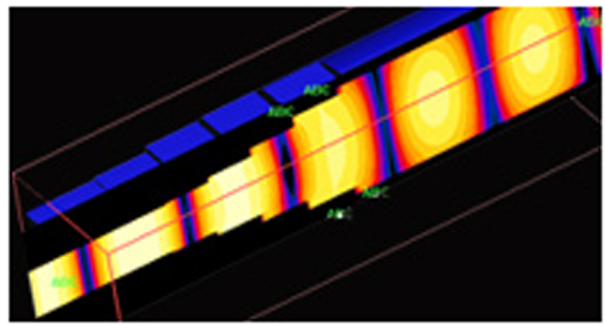
d.



e.



f.



a. Simulació de ressonància magnètica; b. Radiació d'antenes de telefonia mòbil en presència de cos humà; c. Aplicacions de circuits òptics; d. EMC/EMI; e. Circuits de microones; f. Guies d'ona.
Font: Semcad.

3. Mètode dels moments (MoM)

Mostrarem l'aplicació del MoM per a efectuar el càlcul del corrent sobre una antena de fil. A partir del corrent sobre el dipol és possible trobar, entre altres paràmetres d'antena, la impedància d'entrada i els camps radiats a partir de les equacions de radiació.

A partir d'aquest exemple particular, es tindran les bases suficients per a entendre problemes més grans i complexos, com per exemple antenes amb dues dimensions i antenes embarcades en estructures.

Es considerarà el corrent sobre la superfície d'un dipol alimentat en el punt central, i la impedància d'entrada serà la impedància que es podria mesurar en els terminals d'entrada en aquest punt central.

Per començar, es repassaran les equacions fonamentals que caracteritzen el model electromagnètic macroscòpic: les equacions de Maxwell. En aquest model es considerarà que no hi ha fonts de naturalesa magnètica. A partir d'aquestes equacions i d'aquesta consideració es derivarà el potencial vector \vec{A} de la manera habitual per produir les equacions necessàries que permetran trobar numèricament els corrents sobre la superfície.

S'introduirà una forma simple del MoM, anomenada *collocation*. Finalment, se solucionarà l'equació matricial resultant per a trobar una aproximació numèrica de la intensitat sobre la superfície i de la impedància d'entrada del dipol.

3.1. Potencial vector magnètic

La quarta equació de Maxwell, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ permet definir \vec{B} en funció d'un potencial vector mitjançant l'equació 3.95:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad 3.95$$

Ja que si la divergència d'un vector és 0, significa que aquest vector es pot definir com el rotacional d'un potencial vector.

De les equacions de Maxwell i de 3.95 tenim que:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + j\omega\vec{A}) = 0 \quad 3.96$$

Lectura complementària

Sobre el MoM, podeu consultar l'obra següent:

R. F. Harrington (1993). "Field computations by moment methods". *IEEE Press*, Piscataway (NJ).

En l'expressió 3.96, el vector combinat $\vec{E} + j\omega\vec{A}$ té un rotacional igual a zero. Recordant la propietat "si un vector o combinació de vectors és irrotacional (rotacional = 0), aquest vector o combinació de vectors es pot definir com la divergència d'un escalar", observem que aquesta combinació de vectors és per tant un vector irrotacional i pot ser escrit com el gradient d'un escalar:

$$\vec{E} + j\omega\vec{A} = -\vec{\nabla}\Phi \quad 3.97$$

O el que és el mateix:

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \vec{\nabla}\Phi \quad 3.98$$

El signe de Φ ha estat escollit per a ser consistent amb la definició d'un potencial estàtic obtingut per a $\omega = 0$. Com que:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi \quad 3.99$$

A continuació, si es calcula el rotacional de \vec{B} , i aplicant una de les identitats vectorials, s'obté l'expressió següent:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \cdot \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad 3.100$$

Com es pot observar, l'expressió $\mu(\vec{\nabla} \times \vec{H})$ es pot relacionar amb el corrent i amb el camp elèctric a partir de les equacions de Maxwell, i s'obté l'equació següent:

$$\mu \cdot \vec{J} + j\omega\mu\epsilon \cdot \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad 3.101$$

Substituïm en 3.101 l'equació 3.98 i s'obté el desenvolupament següent:

$$\mu \cdot \vec{J} + j\omega\mu\epsilon \cdot (-j\omega\vec{A} - \vec{\nabla}\Phi) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad 3.102$$

$$\mu \cdot \vec{J} + j\omega\mu\epsilon \cdot (-j\omega\vec{A}) - j\omega\mu\epsilon \cdot \vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad 3.103$$

$$\mu \cdot \vec{J} + \omega^2\mu\epsilon \cdot \vec{A} - j\omega\mu\epsilon \cdot \vec{\nabla}\Phi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad 3.104$$

$$\mu \cdot \vec{J} + \vec{A} \cdot (\omega^2\mu\epsilon + \nabla^2) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + j\omega\mu\epsilon \cdot \vec{\nabla}\Phi \quad 3.105$$

Sabent que $k = \omega\sqrt{\mu \cdot \epsilon}$, s'obté:

$$\vec{A} \cdot (k^2 + \nabla^2) = -\mu \cdot \vec{J} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + j\omega\mu\epsilon \cdot \Phi \quad 3.106$$

Per a definir l'escalar Φ , s'utilitza la condició de Lorentz:

$$\Phi = -\frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad 3.107$$

Substituïm l'equació 3.107 en 3.105 i 3.106 i s'obtenen els resultats següents:

$$-(k^2 + \nabla^2) \cdot \vec{A} = \mu \cdot \vec{J} \quad 3.108$$

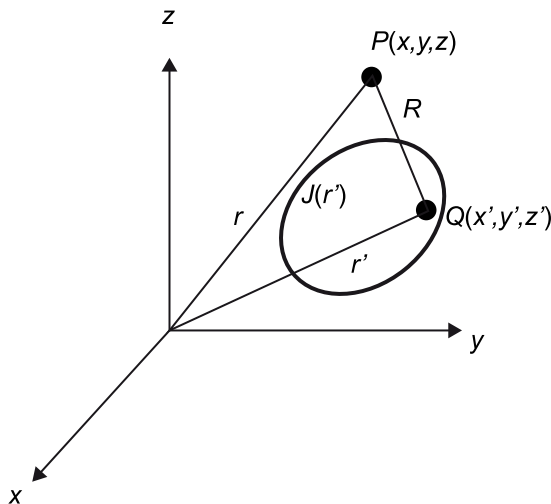
$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \cdot \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \cdot [k^2\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})] \quad 3.109$$

Les equacions 3.108 i 3.109 són el punt de partida per a determinar el camp elèctric \vec{E} produït per una distribució de volum de densitat de corrent \vec{J} . La solució de l'equació 3.108 retorna el potencial vector \vec{A} . Després, el potencial vector \vec{A} pot ser substituït en 3.109 per obtenir el camp elèctric \vec{E} .

3.2. Radiació d'una distribució de corrent

Considerem una distribució volumètrica de corrent $\vec{J}(\vec{r}')$ radiant cap a l'espai lliure, com es mostra en la figura 20. El potencial vector $\vec{A}(\vec{r})$ i el camp elèctric $\vec{E}(\vec{r})$ s'observen des del punt $P(x, y, z)$. El punt $Q(x', y', z')$ és un punt qualsevol dins la distribució de corrent que actua com a font.

Figura 20. Distribució de corrent $J(r')$, punt font $Q(x', y', z')$, i punt d'observació de camp $P(x, y, z)$



La notació que s'utilitza és la següent: $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x, y, z)$, $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x, y, z)$ i $\vec{J}(\vec{r}') = \vec{J}(x', y', z')$, en què les coordenades primades es refereixen al domini de la font.

Lectura complementària

Sobre la condició de Lorentz, podeu consultar l'obra següent:

J. Anguera; A. Pérez (2008).
Teoria d'antenes (ISBN:
978-84-935665-4-8).

La solució de l'equació 3.108 per a un corrent que radia en l'espai lliure és ben coneguda:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int_V \frac{\mu \cdot \vec{J}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v})}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dV' \quad 3.110$$

Si les fonts tenen una dependència temporal harmònica, la solució és la següent:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left[e^{j\omega t} \int_V \frac{\mu \cdot \vec{J}(\vec{r}') \cdot e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dV' \right] \quad 3.111$$

Amb la notació habitual de fasors, i d'ara endavant:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu \cdot \int_V \vec{J}(\vec{r}') \cdot G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot dV' \quad 3.112$$

On:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad 3.113$$

$$R = \sqrt{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]} \quad 3.114$$

Si substituïm 3.112 en 3.111, s'obté l'equació 3.115 per al camp elèctric:

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (k^2 + \vec{\nabla}\vec{\nabla}) \int_V \vec{J}(\vec{r}') \cdot G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot dV' \quad 3.115$$

Per continuar, es considerarà que només hi ha densitats de corrent dirigides en z , és a dir, $\vec{J}(\vec{r}') = \hat{z}J(\vec{r}') = \hat{z}J(z')$, ja que és el que succeeix en el cas d'una antena dipol de radi molt més petit que la longitud. Seguint aquesta consideració:

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (k^2 + \vec{\nabla}\vec{\nabla}) \cdot \hat{z} \cdot \int_V J(\vec{r}') \cdot G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot dV' \quad 3.116$$

A més a més, el component del camp elèctric que resultarà més útil és el component \hat{z} , per la qual cosa només s'utilitzarà aquesta component de l'equació 3.116. Per a això, es multipliquen tots dos costats de l'equació 3.116 pel vector unitari \hat{z} , i s'obté el següent:

$$E_z(r) = \frac{1}{j\omega\epsilon} (k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \cdot \int_V J_z(r') \cdot G(r, r') \cdot dV' \quad 3.117$$

Lectura complementària

Els detalls de la solució de l'equació 3.108 es poden consultar en l'obra següent:

C. A. Balanis (1997). *Antenna theory: Analysis and design* (2a. ed.). John Wiley.

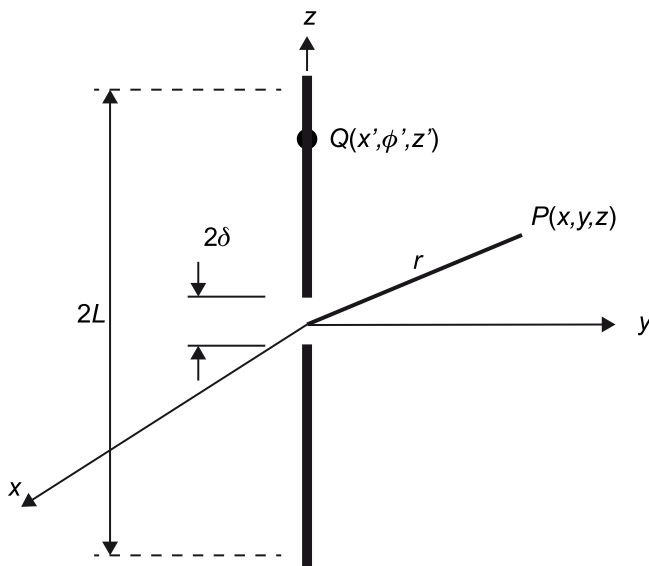
Aquesta equació 3.117 és el punt de partida per a l'anàlisi del dipol amb alimentació al centre.

3.2.1. Formulació del problema del dipol

Es considera un dipol amb alimentació central de longitud $2L$ (figura 21). El dipol té una separació entre borns d'entrada d'alimentació de 2δ . El dipol té una secció circular de radi a . L'excitació del dipol és generada per una font de tensió injectada a través dels borns d'alimentació. El dipol es considera un conductor elèctric perfecte (PEC, *perfect electric conductor*), i per tant no hi ha cap corrent dels que flueixen per la seva superfície que pugui penetrar a l'interior del conductor, ja que la profunditat de penetració és nul·la. Per tant, es prenen les consideracions següents:

- El dipol està fet d'un conductor perfecte, i per tant els corrents flueixen per la seva superfície (profunditat de penetració nul·la).
- El dipol és prou prim perquè el sentit dominant del corrent sigui en la direcció \hat{z} .
- Els corrents existents a prop dels extrems del dipol, i els que puguin penetrar a l'interior del tub es consideren molt petits, i per tant es poden negligir i es consideren 0. I, molt important, els corrents en els extrems del dipol es consideren 0, fet que satisfà les condicions de contorn.
- S'assumeix que l'alimentació del dipol s'efectua mitjançant una font connectada als borns d'alimentació anomenada *generador delta gap*, que es descriu a continuació.

Figura 21. Dipol amb alimentació al centre de longitud $2L$ i amb borns d'alimentació separats 2δ



El concepte de *generador delta gap* té l'origen en la noció d'un voltatge V aplicat entre els borns d'alimentació del dipol. Entre els borns d'alimentació, el voltatge V està relacionat amb el camp elèctric E_z de la manera següent:

$$V = \begin{cases} -\int_{-\delta}^{\delta} E_z(a, z) dz & |z| < \delta \\ 0 & \text{Altres} \end{cases} \quad 3.118$$

Normalitzant respecte de la tensió V , queda:

$$1 = \begin{cases} \int_{-\delta}^{\delta} \left(-\frac{E_z(a, z)}{V} \right) dz & |z| < \delta \\ 0 & \text{Altres} \end{cases} \quad 3.119$$

Si la distància entre borns d'alimentació es fa infinitesimalment petita, en fer el límit de $\delta \rightarrow 0$, es pot identificar el contingut de la integral com la funció delta. D'aquesta manera, es pot escriure:

$$\left(-\frac{E_z(a, z)}{V} \right) = \delta(z)$$

Aquest raonament es pot fer perquè si la distància entre borns d'alimentació és infinitesimalment petita, la tensió que dóna la font només existeix en el punt en què $z \rightarrow 0$ perquè s'ha considerat $\delta \rightarrow 0$.

Per tant, havent fet aquesta consideració ($\delta \rightarrow 0$), entre els borns d'alimentació el voltatge V està relacionat amb el camp elèctric E_z de la manera següent:

$$E_z(a, z) = -V \cdot \delta(z) \quad 3.120$$

Considerem ara que s'aplica l'expressió de E_z de l'equació 3.117 entre els borns d'alimentació quan $\delta \rightarrow 0$. L'equació 3.117 dóna el component z del camp elèctric observat en el punt $P(x, y, z)$ generat pel corrent del dipol polaritzat en z , que es monitora en el punt $Q(a, \varphi', z')$ (figura 21).

En aquest punt de l'anàlisi, tant J_z com E_z són encara desconegudes. Per a poder avançar es pot desplaçar el punt d'observació P (punt en què s'observa el component z del camp elèctric, produït per la J_z monitorada des de Q) fins a la superfície del dipol, on se sap que $E_z = 0$ en tota la seva longitud excepte entre els borns d'alimentació, en què està determinat per l'expressió 3.117.

Amb el punt P desplaçat fins a la superfície del dipol, l'equació 3.117 dóna lloc a:

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot \int_V J_z(r') \cdot G(r, r') \cdot dV' = -j\omega\epsilon \cdot V \cdot \delta(z), \quad \rho = a, \quad -L < z < L \quad 3.121$$

En l'equació 3.121 tot és conegut excepte el corrent $J_z(r')$. L'equació és, per tant, una equació integral de la qual cal obtenir el corrent.

En l'equació 3.121 es pot suposar que el corrent es desplaça únicament per la superfície del dipol i que és independent de l'angle en coordenades cilíndriques ϕ , és a dir, que al voltant del conductor el corrent està uniformement distribuït. D'aquesta manera, el corrent es pot expressar de la manera següent:

$$J_z(r) = I(z) \cdot \frac{\partial(\rho - a)}{2\pi\rho} \quad 3.122$$

El factor 2π s'hi ha inclòs perquè $I(z)$ és el corrent total en amperes, com es demostra a continuació:

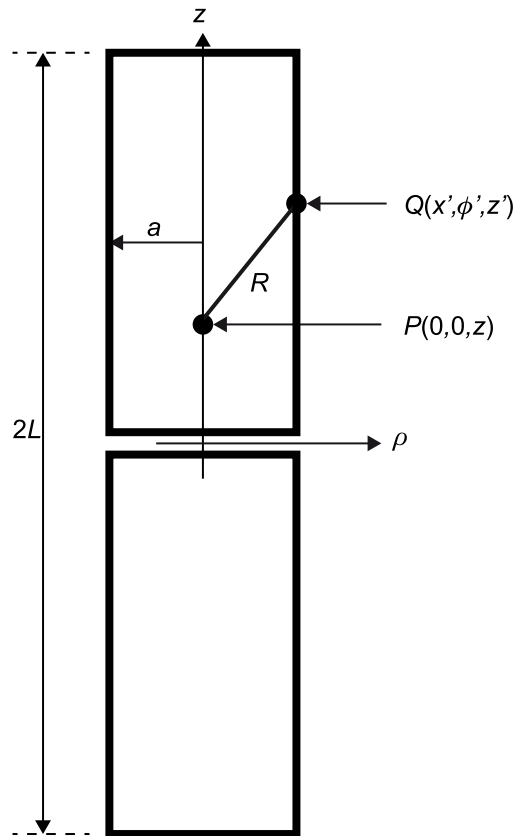
$$I(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty J_z(r) \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty I(z) \cdot \frac{\partial(\rho - a)}{2\pi\rho} \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\phi \quad 3.123$$

Utilitzant 3.123, es pot desenvolupar la integral del costat esquerre de la igualtat de l'equació 3.121 de la manera següent:

$$\begin{aligned} \int_V J_z(r') \cdot G(r, r') \cdot dV' &= \int_{-L}^L \int_0^{2\pi} \int_0^a J_z(\rho', \phi', z') \cdot G(x, y, z | \rho', \phi', z') \cdot \rho' d\rho' d\phi' dz' = \\ &= \int_{-L}^L I(z') \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} G(x, y, z | \rho', \phi', z') \cdot d\phi' dz' \end{aligned} \quad 3.124$$

En aquest punt de l'anàlisi, es pot adoptar l'aproximació anomenada *reduced kernel* (figura 22). En aquesta aproximació es considera que el dipol és tan prim que es comet un error molt petit en avaluar el camp en l'eix central del dipol, en comptes d'avaluar-lo en la superfície.

Figura 22. Dipol amb alimentació al centre, amb el punt d'avaluació del camp (P) i el punt d'avaluació de font (Q)



L'avantatge d'aquesta aproximació es troba en la simplificació que es pot fer en R en l'equació 3.124:

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \sqrt{a^2 + (z-z')^2} \quad 3.125$$

Com que $x = y = 0$, $\rho' = a$.

Cal notar que R és ara independent de l'angle cilíndric ϕ . Substituïm 3.125 en $G(r, r')$ i s'obté:

$$G(r, r') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \equiv \bar{G}(z, z') \quad 3.126$$

Atès que: $x = y = 0$, $\rho' = a$.

Substituïm 3.126 en 3.124 i tenim que:

$$\begin{aligned} \int_V J_z(r') \cdot G(r, r') \cdot dV' &= \int_{-L}^L I(z') \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \bar{G}(z, z') \cdot d\phi' \cdot dz' = \\ &= \int_{-L}^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' \end{aligned} \quad 3.127$$

Substituïm 3.127 dins de 3.121 i s'obté:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \cdot \int_{-L}^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' = -j\omega\epsilon \cdot V \cdot \delta(z), \quad \rho = 0, \quad -L < z < L \quad 3.128$$

Com a últim pas en la formulació, es pot normalitzar el corrent $I(z)$ en el dipol amb la tensió d'entrada V . Per a això es fixa $V = 1$ i s'obté:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \cdot \int_{-L}^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' = -j\omega\epsilon \cdot \delta(z), \quad \rho = 0, \quad -L < z < L \quad 3.129$$

3.3. Derivació de l'equació integral d'Hàllen

A continuació, l'objectiu és trobar una solució a l'equació 3.129.

Es reescriu l'equació 3.129 de la manera següent:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \cdot \Phi(z) = \delta(z) \quad \rho = 0, \quad -L < z < L \quad 3.130$$

On:

$$\Phi(z) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \cdot \int_{-L}^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' \quad 3.131$$

En 3.130:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \cdot \Phi(z) = 0, \quad z \neq z' \quad 3.132$$

La solució d'aquesta equació diferencial de segon ordre es pot escriure de la manera següent:

$$\Phi(z) = \begin{cases} A \cdot \cos(k \cdot z) + B \cdot \sin(k \cdot z) & 0 < z < L \\ C \cdot \cos(k \cdot z) + D \cdot \sin(k \cdot z) & -L < z < 0 \end{cases} \quad 3.133$$

On A , B , C i D són constants per determinar. La funció $\Phi(z)$ és proporcional al potencial vector. Atès que el potencial vector resultant del corrent, tal com es defineix en 3.108, ha de ser doblement diferenciable, es pot considerar que $\Phi(z)$ també és doblement diferenciable. No obstant això, s'empra la funció singular $\delta(z)$ com la font en l'equació 3.130.

Per tant, es pot simplificar la doble diferenciació a una diferenciació simple. Aquesta simplificació permetrà obtenir una millora en la derivada de $\Phi(z)$, ja que la segona derivada produirà la funció delta ($\delta(z)$).

Lectura complementària

Sobre la derivació de l'equació integral d'Hàllen, podeu consultar l'obra següent:

K. K. Mei (1965). "On the integral equations of thin wire antennas". *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* (vol. 12, núm. 3, pàg. 354-378).

Com que la diferenciació d'una funció implica que aquesta ha de ser contínua al voltant del punt en què es fa la derivada, es demostra que $\Phi(z)$ ha de ser contínua en el punt $z = 0$. Si apliquem aquesta condició de continuïtat a l'equació 3.133, resulta el següent:

$$A = C \quad 3.134$$

I per tant:

$$\Phi(z) = \begin{cases} A \cdot \cos(k \cdot z) + B \cdot \sin(k \cdot z) & 0 < z < L \\ A \cdot \cos(k \cdot z) + D \cdot \sin(k \cdot z) & -L < z < 0 \end{cases} \quad 3.135$$

La simplificació següent que es duu a terme resulta d'observar que la funció $\Phi(z)$ ha de ser una funció parella respecte de z . Atès que l'excitació del dipol és simètrica respecte del punt $z = 0$, el corrent, el potencial vector i la funció $\Phi(z)$ han de restar inalterades quan z es reemplaci per $-z$. Per a forçar aquesta condició de paritat en l'equació 3.135, s'ha de donar la condició següent:

$$D = -B \quad 3.136$$

I per tant:

$$\Phi(z) = \begin{cases} A \cdot \cos(k \cdot z) + B \cdot \sin(k \cdot z) & 0 < z < L \\ A \cdot \cos(k \cdot z) - B \cdot \sin(k \cdot z) & -L < z < 0 \end{cases} \quad 3.137$$

Encara cal avaluar un coeficient més, integrant l'equació diferencial al llarg d'una petita regió al voltant de $z = 0$, i forçant el límit a 0 de l'amplada d'aquesta regió. Com és sabut, la integral de la funció $\delta(z)$ al voltant de $z = 0$ ha de donar 1.

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \cdot \Phi(z) \cdot dz = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(z) \cdot dz = 1 \quad 3.138$$

Com ja s'ha demostrat, $\Phi(z)$ ha de ser contínua al voltant de $z = 0$. Per tant, la integral al voltant de $z = 0$ ha de ser 0.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \Phi(z) \cdot dz = 0 \quad 3.139$$

Utilitzem aquest resultat en l'equació 3.138 i s'obté el següent:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2} dz = \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \Big|_{0^+} - \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \Big|_{0^-} = -1 \quad 3.140$$

Aquest resultat mostra que el salt en la primera derivada necessari per a produir la funció delta ha de ser de magnitud -1 . Apliquem aquest resultat a l'equació 3.137 i tenim que:

$$2kB = -1$$

O el que és el mateix:

$$B = \frac{-1}{2k} \quad 3.141$$

Si substituïm aquesta expressió 3.141 en l'equació 3.137, s'obté:

$$\Phi(z) = \begin{cases} A \cdot \cos(k \cdot z) - \frac{1}{2k} \cdot \sin(k \cdot z) & 0 < z < L \\ A \cdot \cos(k \cdot z) + \frac{1}{2k} \cdot \sin(k \cdot z) & -L < z < 0 \end{cases} \quad 3.142$$

Substituïm 3.131 dins de 3.142 i utilitzem les característiques de $|z|$, i s'obté:

$$\frac{1}{j\omega\epsilon} \cdot \int_{-L}^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' = A \cdot \cos(k \cdot z) - \frac{1}{2k} \cdot \sin(k \cdot |z|) \quad 3.143$$

O el que és el mateix:

$$\int_{-L}^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' = \bar{A} \cdot \cos(k \cdot z) - \frac{j}{2\eta} \cdot \sin(k \cdot |z|) \quad 3.144$$

On s'ha aplicat que:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad 3.145$$

De la manera següent:

$$\frac{j\omega\epsilon}{2k} = \frac{j\omega\epsilon}{2\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = j \cdot \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{4\mu}} = j \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{j}{2\eta} \quad 3.146$$

I, per tant, $\bar{A} = A \cdot j\omega\epsilon$.

L'equació 3.144 és coneguda com a **equació integral d'Hallén**, introduïda per Hallén el 1938. Com que el corrent és una funció parella, 3.144 es pot simplificar de la manera següent:

Lectura complementària

Sobre l'equació integral d'Hallén, podeu consultar l'obra següent:

E. Hallén (1938). "Theoretical investigations into transmitting and receiving qualities of antennas". *Nova Acta Regiae Soc. Sci. Upsaliensis* (gener, pàg.1).

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' &= \int_{-L}^0 I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' + \int_0^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' = \\
&= \int_0^L I(-z') \cdot \bar{G}(z, -z') \cdot dz' + \int_0^L I(z') \cdot \bar{G}(z, z') \cdot dz' = \\
&= \{I(-z') = I(z')\} = \int_0^L I(z') \cdot [\bar{G}(z, z') + \bar{G}(z, -z')] \cdot dz'
\end{aligned} \tag{3.147}$$

Substituïm 3.147 en l'equació 3.144 i s'obté:

$$\int_0^L I(z') \cdot K(z, z') \cdot dz' = \bar{A} \cdot \cos(k \cdot z) - \frac{j}{2\eta} \cdot \sin(k \cdot z) \tag{3.148}$$

En l'equació 3.148, tant z com z' estan compreses en l'interval $(0, L)$ i:

$$K(z, z') = \bar{G}(z, z') + \bar{G}(z, -z') \tag{3.149}$$

$$K(z, z') = \frac{e - jk\nu_1}{4\pi\nu_1} + \frac{e - jk\nu_2}{4\pi\nu_2} \tag{3.150}$$

en què $\nu_1 = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$ i $\nu_2 = \sqrt{a^2 + (z + z')^2}$

Les equacions 3.148 i 3.150 formen el punt de partida de la solució numèrica per al corrent mitjançant el mètode dels moments. Cal tenir en compte que encara hi ha un coeficient indeterminat: \bar{A} .

En aquest punt de la discussió, cal utilitzar ja la suposició que hem comentat anteriorment, que estableix que el corrent del dipol s'esvaeix en els extrems d'aquest, és a dir, $z = L$. Aquesta suposició es pot utilitzar en la reducció numèrica que es farà a continuació, com es veurà de seguida.

3.4. La solució mitjançant el MoM

Per començar la representació mitjançant el mètode dels moments, s'expressa el corrent $I(z)$ com una suma de funcions pulsació ponderades amb un coeficient per a cadascuna, tal com es pot veure en la figura 23:

$$I(z) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot P_n(z) \tag{3.151}$$

En què:

$$P_n(z) = \begin{cases} 1 & (n-1) \cdot \Delta < z < n \cdot \Delta \\ 0 & \text{Altres} \end{cases} \tag{3.152}$$

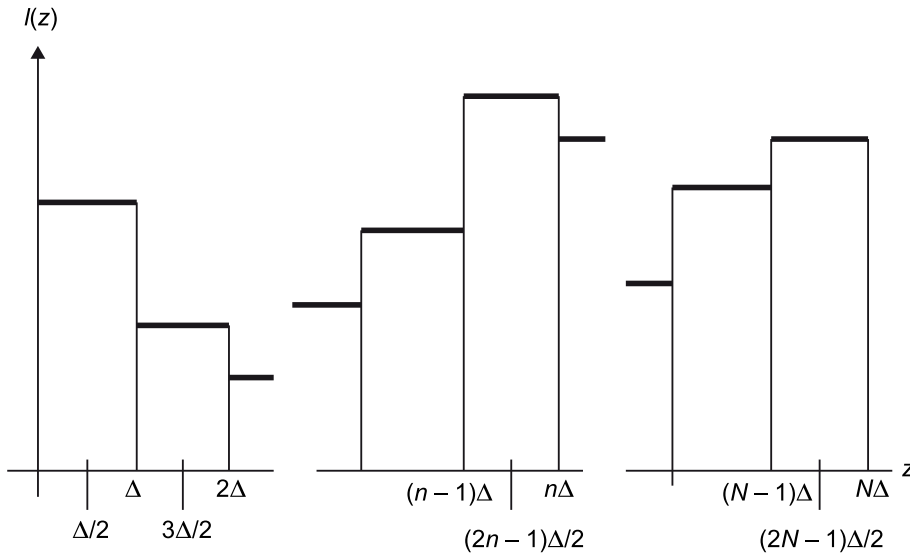
I es defineix: $\Delta = \frac{L}{N}$.

Lectures complementàries

Sobre la solució mitjançant el MoM, podeu consultar les obres següents:

W. L. Stutzman; Gary A. Thiele (1998). "Antenna theory and design" (2a. ed.). John Wiley.

L. L. Tsai; C. E. Smith (1978). "Moment methods in electromagnetics for undergraduates". *IEEE Trans. on Education* (E-21, 14).

Figura 23. Representació amb pulsacions del corrent $I(z)$ 

Substituïm 3.151 en l'equació 3.148, i s'obté l'expressió següent:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \int_0^L P_n(z') \cdot K(z, z') \cdot dz' &= \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \int_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} K(z, z') \cdot dz' = \\ &= \bar{A} \cdot \cos(kz) - \frac{j}{2\eta} \cdot \sin(kz) \end{aligned} \quad 3.153$$

Com a criteri, s'avalua l'equació 3.153 en els punts següents:

$$z = (m - 0,5) \cdot \Delta \quad m = 1, 2, \dots, N \quad 3.154$$

I s'obté:

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \int_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} K[(m - 0,5) \cdot \Delta, z'] \cdot dz' = \bar{A} \cdot \cos[k \cdot (m - 0,5) \cdot \Delta] - \frac{j}{2\eta} \cdot \sin[k \cdot (m - 0,5) \cdot \Delta] \quad 3.155$$

Cal recordar que la variable \bar{A} encara s'ha de determinar. Es pot solucionar aquesta incògnita utilitzant ara la condició que es comentava abans: $I(L) = 0$. En l'equació 3.155, l'esvaniment del corrent en $z = L$ implica que $\alpha_N = 0$. Inserir aquesta condició en l'equació 3.155 i resulta la matriu d'equacions següent:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_n \cdot \int_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} K[(m - 0,5) \cdot \Delta, z'] \cdot dz' - \bar{A} \cdot \cos[k \cdot (m - 0,5) \cdot \Delta] &= \\ = -\frac{j}{2\eta} \cdot \sin[k \cdot (m - 0,5) \cdot \Delta] \end{aligned} \quad 3.156$$

L'escrivim en forma matricial:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad 3.157$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1(N-1)} & c_1 \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2(N-1)} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ r_{N1} & r_{N2} & \cdots & r_{N(N-1)} & c_N \end{bmatrix} \quad 3.158$$

En què:

$$\mathbf{a} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_{N-1} \ \bar{A}]^T \quad 3.159$$

$$\mathbf{b} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \cdots \ \beta_N]^T \quad 3.160$$

On T significa la matriu transposada. De l'equació matricial 3.157 cal trobar la matriu \mathbf{a} , que conté els coeficients amb els quals s'ha redefinit el corrent per a utilitzar el mètode dels moments. La resta d'elements de \mathbf{R} i de \mathbf{b} són els següents:

$$r_{mn} = \int_{(n-1)\Delta}^{n\Delta} K[(m-0,5)\Delta, z'] \cdot dz' \quad m = 1, 2, \dots, N; \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad 3.161$$

$$c_m = -\cos[k(m-0,5)\Delta] \quad m = 1, 2, \dots, N; \quad 3.162$$

$$\beta_m = -\frac{j}{2\eta} \cdot \sin[k(m-0,5)\Delta] \quad m = 1, 2, \dots, N; \quad 3.163$$

Per a tractar de simplificar les expressions, un pas que es pot fer a continuació consisteix a normalitzar les equacions com s'indica a continuació:

Segons 3.154:

$$z = (m-0,5) \cdot \Delta \quad 3.164$$

I si es duu a terme el canvi de variable: $u = k \cdot z'$:

$$du = k \cdot dz' \quad 3.165$$

Les equacions queden aleshores:

$$r_{mn} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{(n-1)\frac{kL}{N}}^{n\frac{kL}{N}} \left\{ \frac{e^{-jv_1}}{e^{-jv_1}} + \frac{e^{-jv_2}}{e^{-jv_2}} \right\} \quad 3.166$$

en què $\nu_1 = \sqrt{(ka)^2 + \left((m-0,5)\frac{kL}{N} - u\right)^2}$ i $\nu_2 = \sqrt{(ka)^2 + \left((m-0,5)\frac{kL}{N} + u\right)^2}$

$$c_m = -\cos\left[k(m-0,5) \cdot \frac{kL}{N}\right] \quad 3.167$$

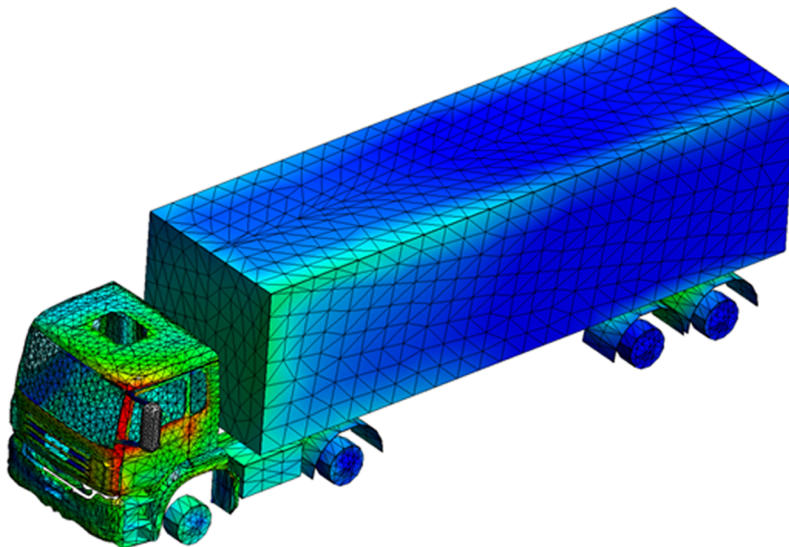
$$\beta_m = -\frac{j}{2\eta} \cdot \sin\left[k(m-0,5) \cdot \frac{kL}{N}\right] \quad 3.168$$

Així, el problema consisteix a trobar una equació, en aquest cas una equació integral la incògnita de la qual és el corrent al llarg del fil (generalitzant, al llarg d'una estructura conductora). La tensió o font d'excitació és coneguda. Per a trobar el corrent, es planteja un sistema de N equacions amb N incògnites, en què les incògnites són els pesos que defineixen el corrent. Amb l'aplicació de l'equació de contorn (camp nul en el conductor), es resol, mitjançant inversió de la matriu, el sistema d'equacions. Un cop trobat el corrent, trobar els paràmetres d'antena és immediat. Per exemple, per a calcular els diagrames de radiació en camp llunyà, s'integra el corrent al llarg del fil mitjançant els procediments habituals.

3.5. Exemple de MoM

Un exemple de programa de simulació electromagnètica basat en MoM és el FEKO (figura 24).

Figura 24. Exemple de discretització MoM en un camió



El mallat és adaptatiu, de manera que la malla és més fina a prop de la ubicació de l'antena (en la cabina del camió).

3.6. Exemples d'aplicacions

En la figura 25 es mostren algunes aplicacions en què el mètode MoM és útil.

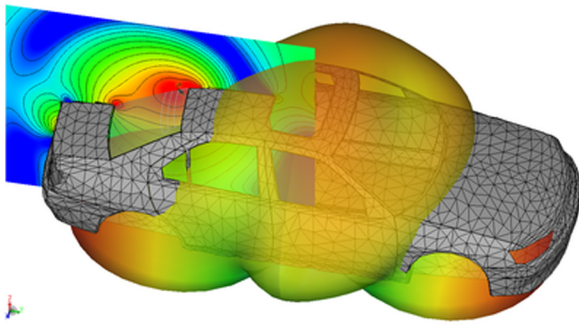
Lectura complementària

Sobre el càlcul dels diagrames de radiació en camp llunyà, podeu consultar l'obra següent:

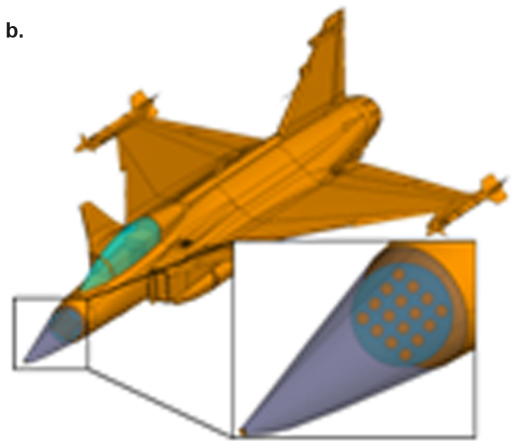
J. Anguera; A. Pérez (2008).
Teoria d'antenes (ISBN:
978-84-935665-4-8).

Figura 25. Exemples d'aplicació del mètode MoM

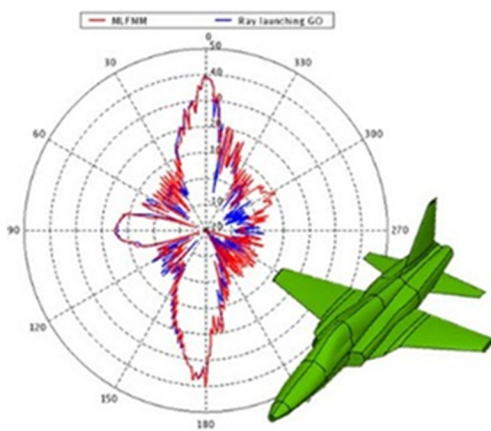
a.



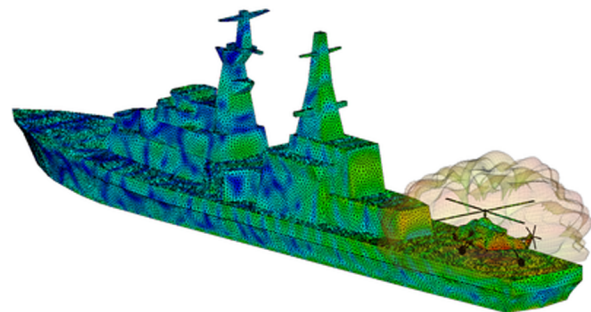
b.



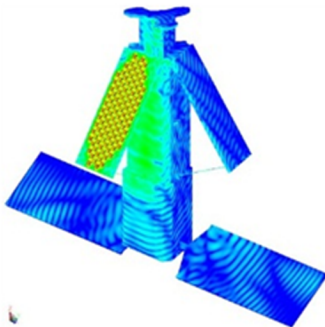
c.



d.



e.



f.



a. Automoció; b. Disseny de radoms; c. Radar cross section (RCS); d. Naval; e. Aeroespacial; f. Antenes conformades.
Font: Feko.

Resum

Les equacions de Maxwell en entorns complexos impliquen, o bé per la seva geometria o bé per la constitució dels materials, que s'hagin de desenvolupar mitjançant mètodes numèrics. Entre els mètodes més destacats trobem l'FDTD i el MoM.

El primer, el mètode FDTD, és un mètode iteratiu que no requereix inversió de matrius, però requereix mallar no solament el domini de l'estructura sinó també tot l'espai. Per tant, aquest mètode és eficient quan intervenen en el problema antenes en entorns complexos com poden ser antenes de telefonia mòbil en presència del cos humà, on cal mallar no solament el domini del telèfon mòbil sinó també tot el volum proper, incloent-hi el cap. El mètode treballa en el domini del temps, i mitjançant l'excitació amb una font de banda ampla, és possible calcular els paràmetres d'antena com la impedància d'antena mitjançant transformada de Fourier. Com que el mallat no acostuma a cobrir el camp llunyà, es requereix una rutina de transformació dels camps propers a camps llunyans amb l'objectiu d'obtenir els paràmetres de radiació, com ara diagrames, eficiències i directivitat d'antena.

Per contra, el MoM duu a terme una discretització de l'estructura de manera que s'obté una matriu d'impedància que s'ha d'invertir. Una vegada s'ha obtingut la matriu d'impedàncies, s'imposen les fonts que permeten trobar les incògnites (el corrent en cada punt del mallat). Un cop determinats els corrents, és possible calcular tots els paràmetres d'antena, com la impedància d'entrada o els corrents sobre l'estructura. Mitjançant la integració d'aquests corrents es poden determinar els camps, tant els propers com els radiats, i a partir d'aquí s'obtenen l'eficiència de radiació, els diagrames de radiació o la polarització entre els principals paràmetres de radiació.

Tant el MoM com l'FDTD són presents en molts programes comercials de simulació electromagnètica.

Bibliografia

Anguera, J. (2002). "Simulación electromagnética mediante el método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo". *Ingeniería y Arquitectura* (núm. 23). Barcelona: La Salle, Universitat Ramon Llull.

Anguera, J.; Pérez, A. (2008). *Teoría d'antenes* (ISBN: 978-84-935665-4-8).

Balanis, C. A. (1997). *Antenna theory: Analysis and design* (2a. ed.). John Wiley.

Berenger, J. P. (1994). "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves". *Journal of Computational Physics* (vol. 114, núm. 2, pàg. 185-200, octubre).

Berenger, J. P. (1996). "Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves". *Journal of Computational Physics* (vol. 127, núm. 2, pàg. 363-379).

Courant, R.; Friedrichs, K.; Lewy, H. (1967). "On the partial Difference Equations of Mathematical Physics". *Journal of Research and Development* (vol. 11, núm. 2, pàg. 215-234).

Elsherbeni, A.; Demir, V. (2009). *The finite-difference time-domain method for electromagnetics with Matlab simulations*. Scitech Publishing Inc.

Hallén, E. (1938). "Theoretical investigations into transmitting and receiving qualities of antennas". *Nova Acta Regiae Soc. Sci. Upsaliensis* (gener, pàg.1).

Harrington, R. F. (1993). "Field computations by moment methods". *IEEE Press*. Piscataway (NJ).

Hoorfar, A.; Jamnejad, V. (2003). "Electromagnetic modeling and analysis of wireless communication antennas". *IEEE Microwave Magazine* (març, pàg. 51-67).

Mei, K. K. (1965). "On the integral equations of thin wire antennas". *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* (vol. 12, núm. 3, pàg. 354-378).

Shlager, K. L.; Schneider, J. (1995). "A selective survey of finite-difference time-domain literature". *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* (vol. 37, núm. 4).

Stutzman, W. L.; Thiele, Gary A. (1998). "Antenna theory and design" (2a. ed.). John Wiley.

Taflove, A.; Hagness, S. (2006). *Computational electrodynamics: The finite-difference time-domain method* (3a. ed.). Artech House.

Tsai, L. L.; Smith, C. E. (1978). "Moment methods in electromagnetics for undergraduates". *IEEE Trans. on Education* (E-21, 14).

Yee, K. S. (1966). "Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equations in isotropic media". *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* (vol. 14, núm. 8, pàg. 302-307).

