Matrius en el grafisme digital i en el desenvolupament de webs

Salvador Linares Mustarós

PID_00215874

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

El tema de matrius i vectors és un tema important en el grafisme digital i en el desenvolupament de webs per dues raons.

1) El fet de tenir ordenats un conjunt de dades en una estructura de files i columnes permet accedir-hi ràpidament i treballar amb les dades d'una manera rutinària un cop s'ha establert el conveni d'ordenació.

2) Són fonamentals a l'hora de fer translacions, girs i simetries, fet que permet introduir nous moviments sorprenents per als usuaris.

1. Conceptes bàsics

1.1. Definició de matriu

A efectes teòrics, considerarem una matriu com un conjunt d'objectes ordenats en files i en columnes. Habitualment els objectes són nombres.

Per conveni, una matriu es llegeix com una pàgina d'un llibre de text. D'esquerra a dreta i de dalt a baix.

	columna 1	columna 2	columna 3	...	columna m
Fila 1					
Fila 2					
Fila 3					
... Fila n					

Amb el conveni, cada element de la matriu queda perfectament identificat amb el seu número de fila i de columna (observeu que la paraula mnemotècnica ***foc*** serveix per recordar que primer sempre va la fila i després la columna).

Escriurem, doncs, una matriu general seguint la notació següent:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Amb aquesta notació, l'element a_{ij} és el nombre que està en la fila "*i*" començant a comptar per dalt i la columna "*j*" començant a comptar per l'esquerra.

1.2. Dimensió d'una matriu

La dimensió d'una matriu és el nombre de files i columnes que té la matriu. Per conveni, si una matriu té *n* files i *m* columnes, direm que la matriu té dimensió (o té ordre) $n \times m$. Per tal de recordar que sempre es comença dient el nombre de files seguit després pel nombre de columnes, tornarem a utilitzar la paraula mnemotècnica ***foc***.

1.3. Tipus de matrius

1) Una matriu formada per una sola fila s'anomena **matriu fila**.

2) Una matriu formada per una sola columna s'anomena **matriu columna**.

3) Una matriu formada amb el mateix nombre de files que de columnes s'anomena **matriu quadrada**.

4) Una matriu amb totes les components iguals a 0 s'anomena **matriu nul·la**. Se sol representar per 0.

5) Una matriu quadrada amb uns a la diagonal i 0 a la resta de posicions, és a dir, una matriu tal que $a_{ii} = 1$ i $a_{ij} = 0$ si i $\neq$ j, s'anomena **matriu identitat**. Se sol representar per Id.

1.4. Operacions amb matrius i propietats de les operacions

Dues matrius de la mateixa dimensió és poden sumar o restar. Aleshores, si anomenem C la suma (o resta) de les matrius A i B, cada element de la matriu C queda identificat com $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ en cas de suma i com $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, en cas de resta.

Si a una matriu qualsevol A li sumem una matriu nul·la 0 adaptada per fer la suma, obtindrem sempre la matriu de partida A. És a dir, A + O = A, sigui quina sigui A. Per tant, tenim un **element neutre per a la suma**.

Si a una matriu qualsevol A li sumem la matriu amb tots els mateixos valors canviats de signe, obtindrem la matriu nul·la. Per tant, per cada matriu A tenim un **element oposat per a la suma** que se sol representar per –A, que compleix A + (–A) = Id.

La suma de matrius compleix la propietat commutativa (A + B = B + A) i la propietat associativa (A + B + C = [A + B] + C = A + [B + C]).

La multiplicació d'una matriu per un nombre *k* es fa multiplicant cada nombre de la matriu pel nombre *k*. D'aquesta manera, si anomenem D la matriu resultant de fer $k \cdot$ A, cada element de la matriu D queda identificat com $d_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

En la multiplicació de matrius hem de tenir presents cinc punts molt importants:

1) Perquè la multiplicació de matrius estigui definida és necessari que el nombre de columnes de la primera matriu que multiplica coincideixi amb el nombre de files de la segona. Així, dues matrius A i B que estan adaptades per fer la multiplicació han de tenir dimensions tipus $r \times n$ i $n \times s$.

2) Només es poden multiplicar les files de la primera matriu per les columnes de la segona matriu. Per tant, la paraula mnemotècnica *foc* (***f**iles* o ***c**olumnes*) adquireix sentit complet en la multiplicació de matrius.

3) El resultat de multiplicar una fila per una columna sempre és un nombre que s'obté de sumar els productes d'elements que ocupen "posicions semblants", en el sentit que el primer element de la fila multiplica el primer de la columna; el segon, el segon; el tercer, el tercer, etcètera. Per tant, un element qualsevol del producte està definit per $m_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$.

4) Si tenim dues matrius adaptables per fer la multiplicació, la dimensió de la matriu que s'obté té el mateix nombre de files que la primera matriu que multiplica i el mateix nombre de columnes que la segona matriu que multiplica. Per tant, si les matrius A i B es poden multiplicar, A té dimensió $m \times n$ i B té dimensió $n \times s$, aleshores A · B té dimensió $m \times s$.

La multiplicació de matrius compleix la propietat associativa

$$(A \cdot B \cdot C = [A \cdot B] \cdot C = A \cdot [B \cdot C])$$

La multiplicació de matrius no ha de complir forçosament la propietat commutativa, és a dir, pot passar que hi hagi matrius A i B tals que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Si multipliquem una matriu quadrada A per una matriu identitat Id adaptada per fer la multiplicació, obtenim sempre la matriu A. És a dir, A · Id = A.

Si multipliquem una matriu identitat Id adaptada per fer una multiplicació amb una matriu quadrada qualsevol A, tornem a obtenir sempre la matriu A. És a dir, Id · A = A.

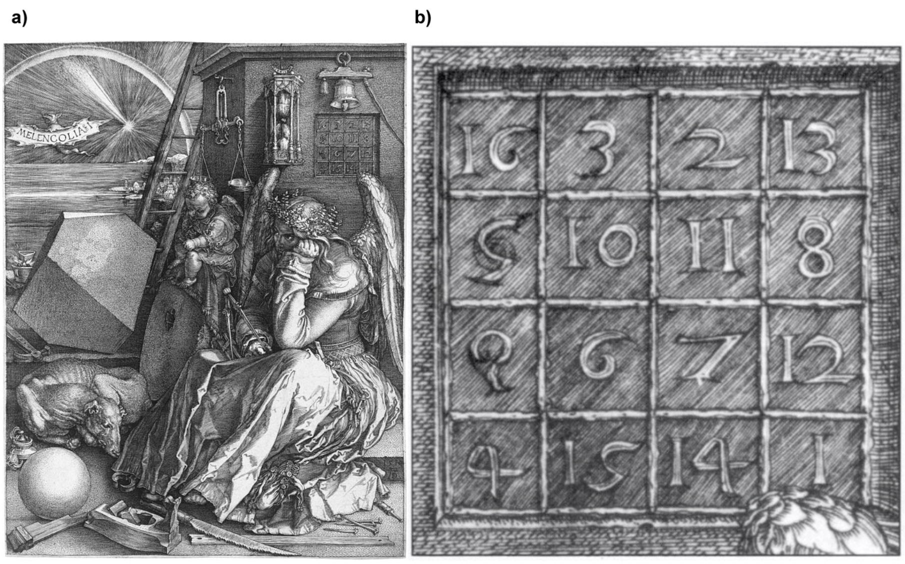
Hi ha moltes altres propietats que combinen les diferents operacions de matrius vistes fins ara. Per exemple, donat un nombre real k i dues matrius A i B, es compleix que $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B$.

1.5. Equacions amb matrius

Si respectem el conveni d'ordre d'operacions parèntesis, multiplicacions i divisions, sumes i restes, és possible crear equacions en què la incògnita és una matriu. Per trobar la matriu resultant hi sol haver dues vies possibles. O bé se substitueix la matriu per uns elements en forma d'incògnita i es troba per quins valors és compleix l'equació, o bé es transforma l'equació matricial en equacions matricials equivalents fins a obtenir una equació en què la matriu es pugui trobar immediatament.

1.6. Aplicacions en el món del disseny

Segurament, la matriu més famosa aplicada a la creació d'art és la matriu que apareix en l'obra d'Albrecht Dürer, *Malenconia I*. Es tracta d'una matriu 4 × 4 en la qual el resultat de totes les sumes per files o per columnes és el nombre 34.



a) *Malenconia I*, Albrecht Dürer, 1415.
b) Detall de la matriu. Les dues xifres centrals de l'última fila, 15 i 14, formen l'any en què s'executà l'obra, 1514.

Les matrius tenen moltes utilitats en el disseny i la creació d'aplicacions interactives, a banda de l'embelliment gràfic d'una obra.

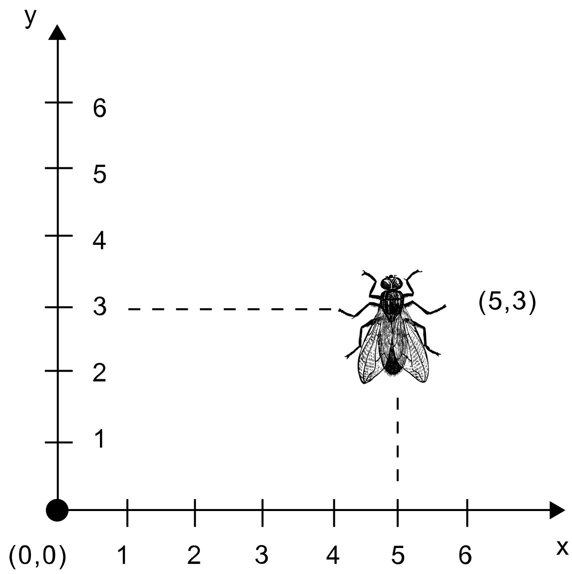
Per exemple, amb les matrius fila és possible identificar punts del pla o l'espai. També és possible representar numèricament amb les matrius els vectors, elements bàsics per obtenir transformacions del pla o l'espai tipus translacions, canvi d'escales, rotacions i simetries.

Finalment, les matrius també tenen una utilitat increïble en la programació informàtica. Tenir la informació ordenada permet accedir sense errors a les dades i dur a terme un treball sistemàtic que minimitza els errors d'operacions entre dades.

1.7. Sistemes de coordenades cartesianes

Si tenim dues rectes reals perpendiculars amb unitats assignades, tot punt representat per una matriu fila tipus (x, y), amb el conveni que la x i la y són les distàncies a les rectes en un ordre determinat, identifica una única posició en el pla.

Per exemple, la mosca del dibuix es troba a la posició (5,3), ja que les distàncies a les rectes són de 5 i 3 unitats.



Si acceptem que una distància negativa indica que la mosca es troba a l'altra banda de la recta, la idea ens permet determinar unívocament cada punt del pla a través de dos nombres reals anomenats habitualment la coordenada x o abscissa i la coordenada y o ordenada.

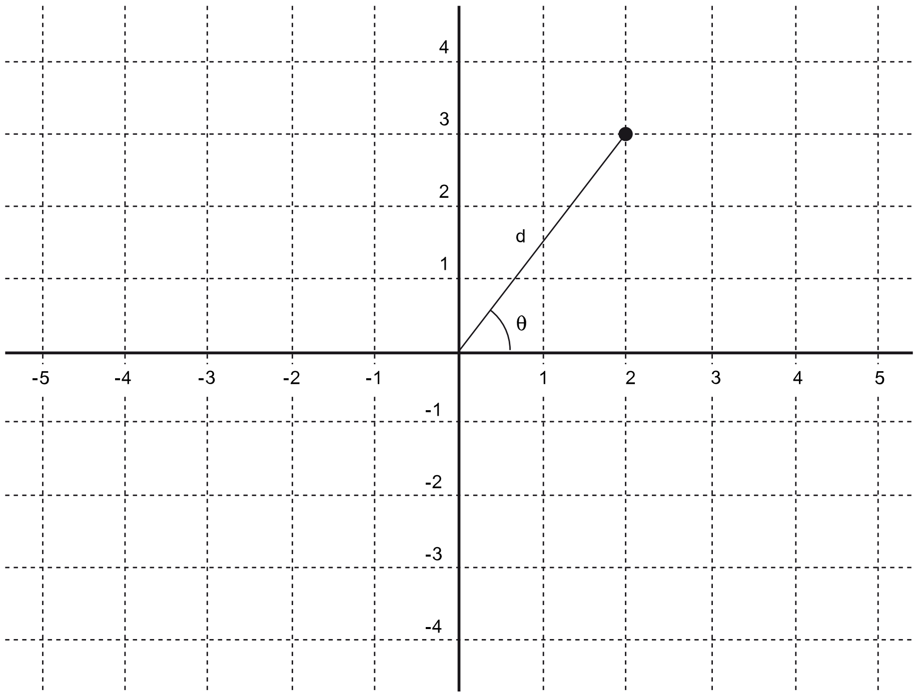
La mateixa idea pot extrapolar-se per determinar unívocament cada punt de l'espai a través de tres nombres reals, anomenats habitualment la coordenada x, la coordenada y i la coordenada z.

De fet, es diu que aquesta forma de representar els punts del pla o de l'espai la va idear Descartes de petit quan, malalt al llit, observava el vol d'una mosca per l'habitació.

1.8. Sistema de coordenades polars en el pla

Una segona manera d'identificar tots els punts del pla bidimensional és donar la distància al centre de coordenades i l'angle respecte de l'eix 0X positiu.

Així, tot punt del tipus (x, y) del pla queda identificat amb els valors $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $\theta = arctg\frac{y}{x}$ del dibuix següent.



1.9. Vectors

En el pla o en l'espai tridimensional, donats dos punts, anomenem la fletxa que surt del primer i arriba al segon un **vector de direcció**. Un vector no depèn del punt origen ni del punt final. Un **vector** és una direcció de moviment en el pla. Els valors del desplaçament en un eix i en l'altre s'anomenen les **components del vector**.

Una forma senzilla de trobar les components d'un vector que uneix dos punts és restar matricialment el punt de sortida al punt d'arribada.

Per tal de no confondre punts i vectors, els vectors solen dur una fletxa. Així, el vector que va de C a D es denota per $\overrightarrow{CD}$, amb una fletxa sobre les lletres que surt de C i arriba a D.

> Els vectors tenen una direcció, un sentit i un mòdul o llargada. La direcció és la recta que inclou el vector. El sentit és cap on assenyala la fletxa. El mòdul o llargada del vector és la seva mida. Aquesta mida es pot calcular amb el teorema de Pitàgores i el valor indica la distància que separa el punt de sortida i el punt d'arribada.

Donats dos punts $P_1 = (a, b)$ i $P_2 = (c, d)$, la fórmula per trobar la distància entre punts o llargada del vector v amb origen P_1 i arribada P_2 és:

$$d(P_1,P_2)=|v|=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$$

2. Exercicis amb solució

L'objectiu d'aquesta secció és recordar conceptes i tècniques matemàtiques de manera eminentment pràctica a partir d'exemples concrets.

Exercici 1

Trobeu les dimensions de les matrius següents:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Solució:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ és una matriu d'una sola fila i tres columnes. Aleshores té dimensió 1×3.

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ és una matriu de tres files i una columna. Aleshores té dimensió 3×1.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ és una matriu de dues files i tres columnes. Aleshores té dimensió 3×2.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ és una matriu de tres files i tres columnes. Aleshores té ordre 3×3.

Exercici 2

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$, digueu qui és l'element a_{23}.

Solució:

Del fet que l'element a_{23} de la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & 7\end{pmatrix}$ està en la segona fila i tercera columna podem deduir que l'element demanat és el nombre 7.

Exercici 3

Calculeu si és possible la suma de matrius següent: $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}$

Solució:

No és possible sumar matrius de diferents dimensió.

Exercici 4

Calculeu si és possible la suma de matrius següent: $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}$

Solució:

En tenir la mateixa dimensió, les matrius estan adaptades per poder sumar-les.

Aleshores,

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1 & 3+2 & -1+(-1)\\ 4+0 & 0+0 & 5+(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5 & -2\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Exercici 5

Calculeu si és possible la suma de matrius següent: $\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

Solució:

En tenir la mateixa dimensió, les matrius estan adaptades per poder sumar-les.

Aleshores,

$$\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

Nota

Observeu que en sumar la matriu nul·la a la matriu $\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$, obtenim de nou la matriu $\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$.

Exercici 6

Calculeu si és possible la suma de matrius següent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució:

Com que les matrius tenen la mateixa dimensió i, per tant, estan adaptades per fer la suma, aplicant la propietat associativa de la suma obtenim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Atès que estem fent sumes de la mateixa matriu, una segona forma de fer-ho és a partir de la definició de multiplicació d'una matriu per un nombre real:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 3\cdot(-3) & 3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercici 7

Calculeu la multiplicació de matrius següent: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Solució:

Atès que la multiplicació d'una fila per una columna adaptades per a ser multiplicades sempre és un nombre que s'obté de sumar els productes d'elements que ocupen "posicions semblants", fem l'operació següent: $1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$

Per tant, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 32$

> **Nota**
>
> Es pot pensar que el resultat que obtenim en multiplicar la matriu fila per la matriu columna de l'exercici és una matriu 1×1, és a dir, una matriu que té només una fila i una columna.

Exercici 8

Calculeu si és possible la multiplicació de matrius següent: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Solució:

No és possible multiplicar aquesta fila per aquesta columna, ja que no estan adaptades per fer la multiplicació. L'1 multiplicaria el 4, el 2 multiplicaria al 5, però el 3 no pot multiplicar cap nombre ja que la segona matriu acaba en el 5!

Exercici 9

Calculeu la multiplicació de matrius següent: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Solució:

Observeu que el nombre de columnes de la primera coincideixi amb el nombre de files de la segona. Per tant, les dues matrius estan adaptades per fer la seva multiplicació. Hi ha una tècnica que permet conèixer l'ordre de la matriu resultant de la multiplicació. Si multipliquem les dimensions i tatxem els dos nombres iguals del mig $2 \times 3 \cdot 3 \times 1$, obtenim que la matriu resultant té per dimensió 2×1, és a dir, té dues files i una columna.

Atès que ara tenim dues files que multipliquen una columna, i recordant que sempre es multipliquen files de la primera per columnes de la segona i que el resultat de multiplicar una fila per una columna sempre és un nombre, ara tenim dues opcions de multiplicació:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

i

$$\begin{pmatrix} 1 \quad 2 \quad 3 \\ \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Aleshores el resultat de la multiplicació és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Exercici 10

Calculeu la multiplicació de matrius següent: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 5 & -5 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$

Solució:

Si utilitzeu la tècnica de tatxar els valors iguals per saber la dimensió de la matriu resultant comprovareu que la matriu resultant de la multiplicació ha de ser 2 × 2, ja que 2 × 3 · 3 × 2 = 2 × 2. Per tant, la matriu resultant de la multiplicació es pot escriure com:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

Atès que ara tenim dues files que multipliquen dues columnes, i recordant que el resultat de multiplicar una fila per una columna sempre és un nombre, la matriu resultant ha de tenir els nombres següents:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 32$ Fila 1 de la primera matriu • Columna 1 de la segona matriu. Aleshores obtenim l'element m_{11}.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} = -32$ Fila 1 de la primera matriu • Columna 2 de la segona matriu. Aleshores obtenim l'element m_{12}.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 15$ Fila 2 de la primera matriu • Columna 1 de la segona matriu. Aleshores obtenim l'element m_{21}.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} = -15$ Fila 2 de la primera matriu • Columna 2 de la segona matriu. Aleshores obtenim l'element m_{22}.

L'ordenació dels quatre nombres és senzilla si tenim en compte que s'han de respectar les posicions de les files i columnes que multipliquen seguint la regla mnemotècnica *foc*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 5 & -5 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & -32 \\ 15 & -15 \end{pmatrix}$$

Exercici 11

Calculeu la multiplicació de matrius següent: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Solució:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+0\cdot(-1) & 1\cdot 4+0\cdot 2 \\ 0\cdot 3+1\cdot(-1) & 0\cdot 4+1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observeu que per a l'estructura de la matriu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sempre que multipliquem aquesta per una altra matriu adaptable per poder fer la multiplicació, sempre obtindrem de nou l'altra matriu. Aquesta matriu es coneix com la matriu identitat de dues dimensions. Ve a ser com el nombre 1 dels enters, un objecte també especial, ja que la seva multiplicació per qualsevol nombre no canvia el nombre multiplicat.

Exercici 12

Comproveu amb un exemple que la propietat commutativa a la multiplicació de matrius no ha de ser forçosament certa.

Solució:

Observem, per exemple, que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (32)$ i $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$.

Hem trobat dues matrius tals que A · B és diferent de B · A!

Recordeu que en els nombres reals això mai no passava, ja que sempre es compleix que $a \cdot b = b \cdot a$, utilitzem els nombres que utilitzem!

Exercici 13

Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, i el nombre $k = -3$, feu sempre que sigui possible les operacions que s'indiquen en els apartats següents. Quan l'operació sigui possible, calculeu la matriu resultant i les dimensions que té. Quan l'operació no sigui possible, indiqueu per què.

a) $A+B$; **b)** $A \cdot B$; **c)** $B \cdot A$; **d)** $k \cdot B \cdot C$

Solució:

a) La matriu A té dimensions 2 × 2 i la matriu B té dimensions 2 × 3. Per tant, la suma $A+B$ no està definida.

b) La matriu A té dimensions 2 × 2 i la matriu B té dimensions 2 × 3. Per tant, el producte $A \cdot B$ està definit i donarà una matriu amb les files de la primera (2) i les columnes de la segona (3), és a dir, una matriu de dimensions 2 × 3.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 6 \\ -2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

c) La matriu B té dimensions 2 × 3 i la matriu A té dimensions 2 × 2. Per tant, el seu producte no està definit, ja que el nombre de columnes de B (3) no coincideix amb el nombre de files de A (2).

d) La matriu B té dimensions 2 × 3 i la matriu C té dimensions 3 × 1. Per tant, el producte $B \cdot C$ està definit i dóna una matriu amb les files de la primera (2) i les columnes de la segona (1), és a dir, una matriu de dimensions 2 × 1.

$$k \cdot B \cdot C = -3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -39 \end{pmatrix}$$

Exercici 14

Calculeu la matriu resultant:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solució:

Recordeu el conveni operatiu que primer s'han de fer les multiplicacions abans que les sumes o restes.

Aleshores,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 2+5 & 2+0 \\ -4+15 & -4+0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1-1 & -1-1 \\ -1+0 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercici 15

Calculeu $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solució:

Atès que la multiplicació de matrius es fa fent files per columnes, tenim primer que:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2+0 \\ -2+6-3 \\ -2+2+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Aleshores,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Exercici 16

Calculeu $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solució:

Atès que la multiplicació de matrius es fa fent files per columnes, tenim primer que:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Aleshores,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \\ 10 & -10 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -3 & -5 \\ 9 & -4 & 0 \\ 16 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercici 17

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ i $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ feu els productes següents si és possible, i si no és possible expliqueu per què:

i) $A \cdot C$

ii) $C \cdot B$

iii) $C \cdot A$

iv) $B \cdot A$

Solució:

i) $A \cdot C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -1 \end{pmatrix}$

Es poden multiplicar, ja que A té 3 columnes i C té 3 files. La matriu resultant té tantes files com A (1) i tantes columnes com C (2).

ii) $C \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Es poden multiplicar, ja que C té 2 columnes i B té 2 files. La matriu resultant té tantes files com C (3) i tantes columnes com B (1).

iii) Com que C té 2 columnes i A 1 fila, el producte $C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ no és possible.

iv) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$

Es poden multiplicar, ja que B té 1 columna i A té 1 fila. La matriu resultant té tantes files com B (2) i tantes columnes com A (3).

Exercici 18

Trobeu les matrius A i B tals que:

$$A + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solució:

Una primera forma de trobar A és aïllant l'equació. Així,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una segona forma consisteix a substituir A per la matriu adaptable per fer la suma:

$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, així: $A + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es transforma en $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i aleshores pensant com se sumen les matrius, cal que $a_1 = -1$, $a_2 = -3$, $a_3 = 1$ i $a_4 = 0$

i consegüentment A = $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Com que no sabem dividir matrius, per trobar B només tenim el segon procediment. Així, com que cal que la matriu B tingui dimensions 2 × 2, hem de substituir B per $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com que sabem multiplicar matrius, obtenim la igualtat següent:

$$\begin{pmatrix} b_1 - b_2 & 3b_1 - 4b_2 \\ b_3 - b_4 & 3b_3 - 4b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, $b_1 - b_2 = 1$, $3b_1 - 4b_2 = 0$, $b_3 - b_4 = 0$ i $3b_3 - 4b_4 = 1$.

Resolent els sistemes $\begin{cases} b_1 - b_2 = 1 \\ 3b_1 - 4b_2 = 0 \end{cases}$ i $\begin{cases} b_3 - b_4 = 0 \\ 3b_3 - 4b_4 = 1 \end{cases}$ obtenim:

$b_1 = 4$, $b_2 = 3$, $b_3 = -1$ i $b_4 = -1$ i conseqüentment B = $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Nota

És habitual que en exercicis de molts passos com aquest, es comprovi al final la solució per tal d'assegurar-nos de no haver comès cap error de càlcul. Si fem la multiplicació de matrius $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ comprovarem que obtenim $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aquest fet mostra que hem obtingut correctament la B, ja que precisament la B que ens demana l'exercici havia de satisfer aquesta condició.

Exercici 19

Trobeu x, y, z i w per tal que es verifiqui la igualtat següent:

$$2\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -2 \\ 1/3 & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z+w & 4 \\ 3 & y-x \end{pmatrix}$$

Solució:

Desenvolupant totes dues bandes arribem a la igualtat:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2z & 2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+3 & 2+y-x \\ 1+z+w & 3w+4 \end{pmatrix}$$

Igualant element a element de totes dues matrius obtenim el sistema:

$$\begin{cases} 2x = -x+3 \\ 2y = 2+y-x \\ 2z = 1+z+w \\ 2w = 3w+4 \end{cases}$$

De la primera equació obtenim que $x = 1$. Aleshores, de la segona substituint x per 1 obtenim $2y = 2 + y - 1$, d'on s'obté $y = 1$. De la darrera obtenim $w = -4$ i de la tercera, substituint w per -4, obtenim $2z = 1 + z - 4$ i, per tant, $z = -3$.

Nota

Substituint x per 1, y per 1, z per –3 i w per –4 a $2\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -2 \\ 1/3 & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z+w & 4 \\ 3 & y-x \end{pmatrix}$ i fent les operacions a banda i banda, obtenim a cada banda exactament la mateixa matriu numèrica $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$, fet que confirma que els valors x, y, z i w han estat ben trobats i no hem comès cap error de càlcul.

Exercici 20

Trobeu els elements de la matriu A de dimensions 2 × 2 tals que:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solució:

A ha de ser una matriu 2 × 2, ja que ha de ser una matriu adaptable per fer les operacions demanades. Aleshores, substituïm A per $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i operem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5a+4b & b \\ 5c+4d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+4b+3 & b+4 \\ 5c+4d-5 & d+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

D'aquesta manera, si analitzem la matriu membre a membre, obtenim quatre equacions de primer grau:

$$\begin{aligned} &5a+4b+3=3 \\ &b+4=6 \\ &5c+4d-5=1 \\ &d+2=2 \end{aligned}$$

Obtenim directament de la segona i quarta equació que $b=2$ i $d=0$. Substituint aquests valors a la primera i tercera equació, obtenim $a=\frac{-8}{5}$ i $c=\frac{6}{5}$.

Consegüentment, $A=\begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & 2 \\ \frac{6}{5} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercici 21

Trobeu una matriu A tal que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Solució:

Si operem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ -a-4c & -b-4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Així doncs, obtenim un sistema de quatre equacions amb quatre incògnites (o dos sistemes de dues equacions amb dues incògnites:

$$\begin{cases} a+3c=11 \\ -a-4c=6 \end{cases} \begin{cases} b+3d=0 \\ -b-4d=-6 \end{cases}.$$

Si resolem els dos sistemes (per reducció) obtenim $c=-17$, $d=+6$, $a=62$ i $b=-18$. Així doncs,

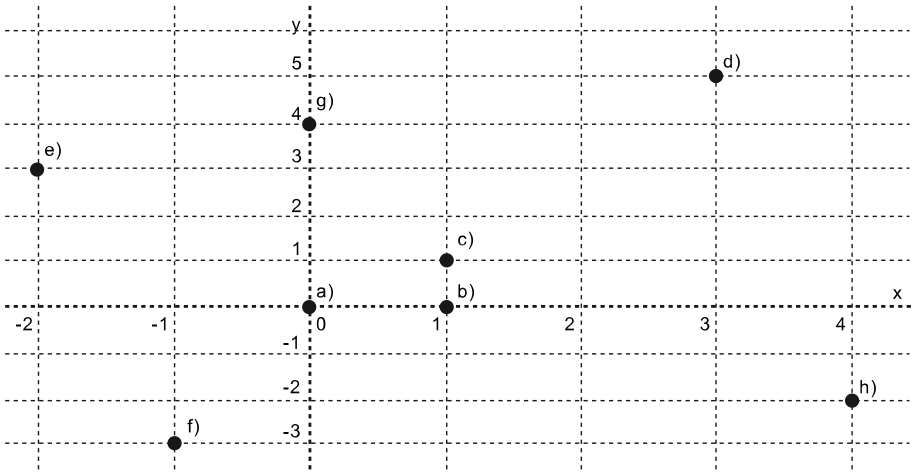
$$A = \begin{pmatrix} 62 & -18 \\ -17 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercici 22

Dibuixeu en uns eixos de coordenades els punts:

a) (0,0)
b) (1,0)
c) (1,1)
d) (3,5)
e) (–2,3)
f) (–1,–3)
g) (0,4)
h) (4,–2)

Solució:



Nota

Observeu que la unitat d'un eix i la unitat de l'altre no han de coincidir.

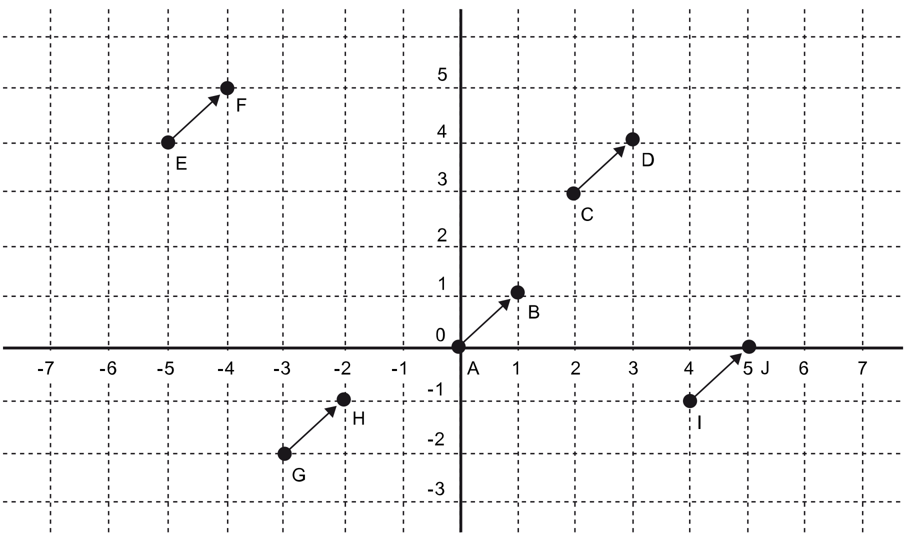
Exercici 23

Trobeu els vector de direcció següents:

a) vector director d'origen A = (0,0) i final B = (1,1)
b) vector director d'origen C = (2,3) i final D = (3,4)
c) vector director d'origen E = (–5,4) i final F = (–4,5)
d) vector director d'origen G = (–3,–2) i final H = (–2,–1)
e) vector director d'origen I = (4,–1) i final J = (5,0)

Solució:

Representant els punts, els vectors que en principi es formen són:



A partir de l'anterior visualització dels vectors, tenim la sensació que si desplacem les fletxes una sobre les altres, aquestes van coincidint i que, per tant, només tenim un únic vector representat en el dibuix.

Si calculem les components de cada vector, veurem l'encert d'aquesta percepció. Observeu que cada punt final es troba a una distància d'una unitat en cada eix. És a dir, triat un punt inicial A, C, E, G o I, si ens movem una unitat cap a la dreta i una unitat cap amunt del punt inicial, arribem sempre al punt final B, D, F, H i J.

En el nostre exemple tots els vector tenen components (1,1) i, per tant, només tenim un vector representat. Comprovem-ho:

$\overrightarrow{AB} = (1,1) - (0,0) = (1,1)$

$\overrightarrow{CD} = (3,4) - (2,3) = (1,1)$

$\overrightarrow{EF} = (-4,5) - (-5,4) = (1,1)$

$\overrightarrow{GH} = (-2,-1) - (-3,-2) = (1,1)$

$\overrightarrow{IJ} = (5,0) - (4,-1) = (1,1)$

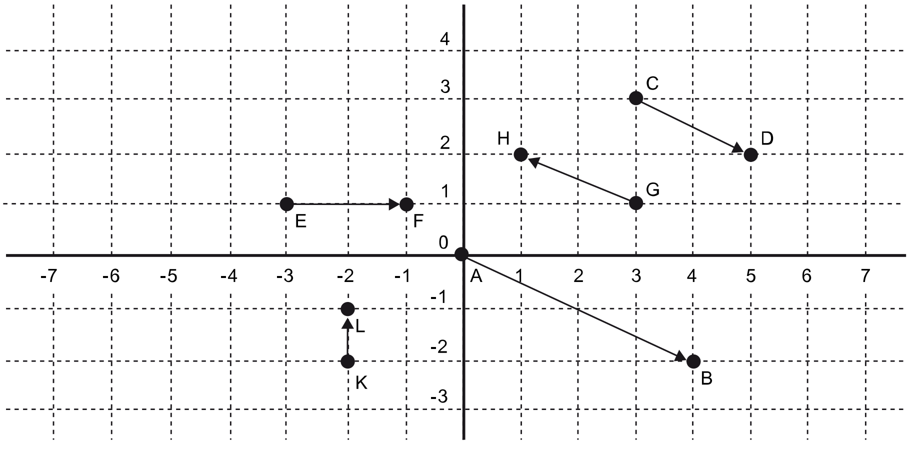
Exercici 24

Trobeu els vector de direcció següents:

a) vector director d'origen A = (0,0) i final B = (4, –2)
b) vector director d'origen C = (3,3) i final D = (5,2)
c) vector director d'origen E = (–3,1) i final F = (–1,1)
d) vector director d'origen G = (3,1) i final H = (1,2)
e) vector director d'origen K= (–2, –2) i final L = (–2, –1)

Solució:

La representant dels punts i vectors en uns eixos cartesians és:



El càlcul dels vectors és:

$\overrightarrow{AB} = (4, -2) - (0,0) = (4, -2)$

$\overrightarrow{CD} = (5,2) - (3,3) = (2, -1)$

$\overrightarrow{EF} = (-1,1) - (-3,1) = (2,0)$

$\overrightarrow{GH} = (1,2) - (3,1) = (-2,1)$

$\overrightarrow{KL} = (-2, -1) - (-2, -2) = (0,1)$

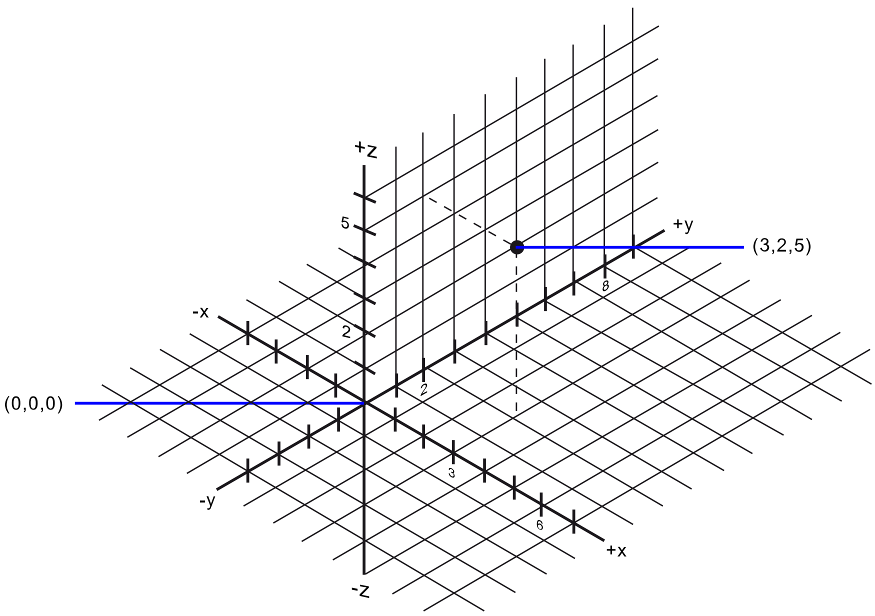
Observem que el vector $\overrightarrow{AB}$ és el vector $\overrightarrow{CD}$ multiplicat per 2 i que el vector $\overrightarrow{GH}$ és el vector $\overrightarrow{CD}$ multiplicat per –1. Aquest fet ens diu que $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{GH}$ tenen la mateixa direcció, que $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{AB}$ tenen el mateix sentit i que $\overrightarrow{GH}$ té sentit oposat als anteriors.

Exercici 25

Representeu en un sistema de coordenades tridimensional el punt de l'espai (3,2,5).

Solució:

Per tal de construir un sistema de coordenades tridimensional ens calen tres rectes perpendiculars que passin pel mateix punt. Una de les rectes determinarà l'eix *x*; una segona, l'eix *y*, i una tercera, l'eix *z*. Tot punt de la forma (*x*,*y*,*z*) quedarà identificat per les distàncies als plans que formen les rectes dues a dues.

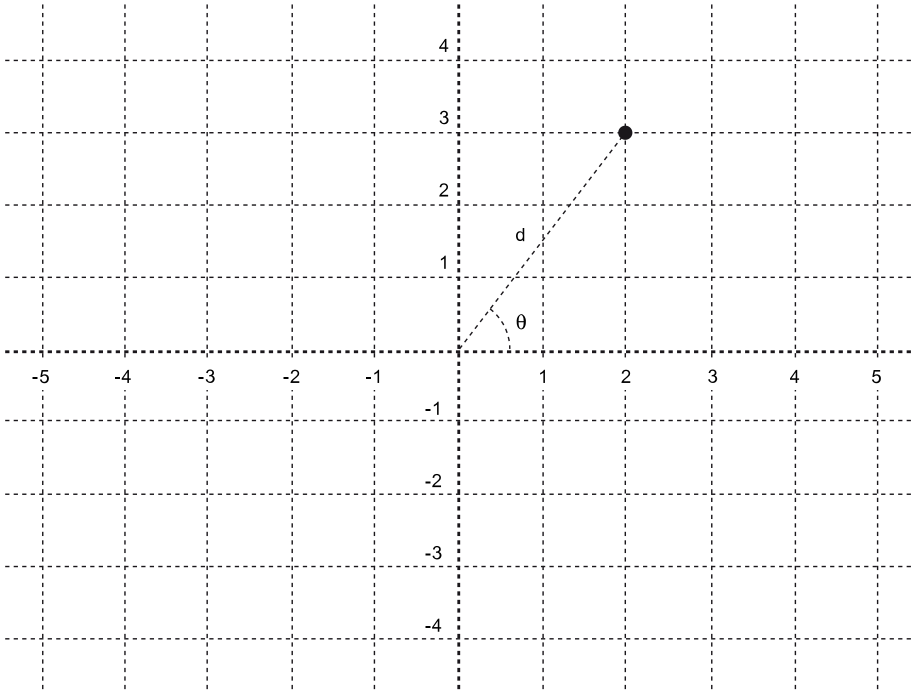


Exercici 26

Passeu a coordenades polars els punts (2,3) i (2, –3).

Solució:

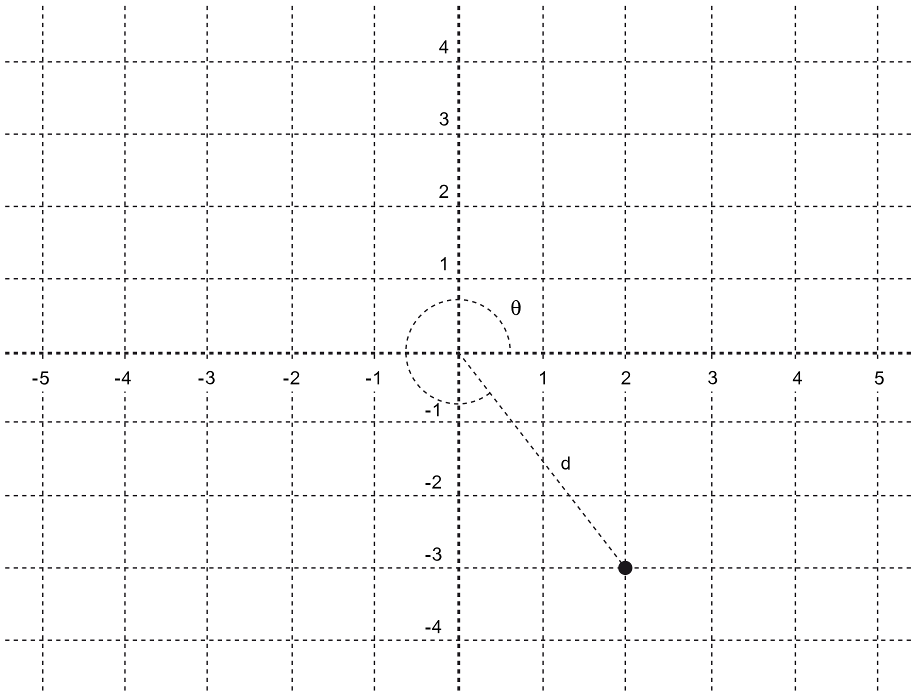
Si volem trobar les coordenades polars del punt (2,3), cal trobar la d i l'angle θ que assenyala el dibuix següent:



A partir del triangle rectangle format, és molt senzill comprovar que $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $\theta = arctg\frac{y}{x}$. Per tant:

Per al punt (3,2) tenim que $d = \sqrt{13}$ i $\theta = 56{,}3^{o}$ (1r quadrant = angle entre 0º i 90º).

Per al (3, –2), $d = \sqrt{13}$ i $\theta = 360^{o} - 56{,}3^{o} = 303{,}7^{o}$ (4t quadrant = angle entre 270º i 360º).



Nota

És molt habitual utilitzar *r* (de **r**adi) per comptes de *d* (de **d**istància).

Exercici 27

Donada la suma de matrius següent, trobeu-hi una utilitat en el món del disseny.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solució:

Imaginem un escenari amb tres objectes col·locats en les coordenades (1,3), (3,5) i (–2, –5). Les coordenades finals de cada objecte són (2,4), (4,6) i (–1, –4).

Amb aquest tipus de suma de matrius podem representar una translació en el pla de vector (1,1).

De manera semblant, tota translació de vector (*a*,*b*) en l'espai bidimensional té per noves coordenades l'expressió següent:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

o si ho preferiu:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Exercici 28

Donada la multiplicació de matrius següent, trobeu-hi una utilitat en el món del disseny.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solució:

Imaginem un escenari amb tres objectes col·locats en les coordenades (1,3), (3,5) i (–2, –5). Les coordenades finals de cada objecte són (2,9), (6,15) i (–4, –15).

Un usuari tindria la sensació que hi ha hagut una expansió de l'univers on vivien els objectes i que l'expansió ha estat més gran en l'eix de les y que en els de les x.

Aquest tipus de transformacions de les posicions dels objectes s'anomenen transformacions de canvi d'escala. També permeten produir dilatacions o contraccions (en funció de si els valors són superiors a 1 o entre 0 i 1) en les dimensions dels objectes segons les direccions dels eixos. El cas general es pot escriure com:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nota

Si p o q valen 1, no hi ha ni contracció ni dilatació en l'eix corresponent.

Exercici 29

Donada la multiplicació de matrius següent, trobeu-hi una utilitat en el món del disseny.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solució:

Aquest tipus de transformacions de les posicions dels objectes s'anomenen gir en el pla respecte de l'origen de coordenades (0,0).

Si α és positiu, s'obté una rotació antihorària, de sentit contrari a les agulles del rellotge.

Exercici 30

Donada la multiplicació i suma de matrius següent, trobeu-hi una utilitat en el món del disseny.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Solució:

Aquest tipus de transformacions de les posicions dels objectes s'anomenen gir en el pla respecte del punt (a,b).

Si α és positiu, s'obté una rotació antihorària, de sentit contrari a les agulles del rellotge amb el centre del moviment en el punt (a,b).

Exercici 31

Donada la multiplicació de matrius següent, trobeu-hi una utilitat en el món del disseny.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Solució:

Aquest tipus de transformacions de les posicions dels objectes s'anomenen simetria central respecte de l'origen de coordenades. És un cas particular de gir amb un angle de 180º.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180 & -\sin 180 \\ \sin 180 & \cos 180 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exercici 32

Donada la multiplicació i suma de matrius següent, trobeu-hi una utilitat en el món del disseny.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Solució:

Aquest tipus de transformacions de les posicions dels objectes s'anomenen simetria central respecte del punt (a,b). És un cas particular de gir amb un angle de 180º.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Exercici 33

Un cinema que obre de dilluns a diumenge ha fet les vendes de butaques següents al matí: 50, 48, 100, 30, 20, 40, 60. Les vendes de butaques a la tarda han estat: 60, 70, 150, 45, 100, 200 i 150. Trobeu els ingressos del cinema si el preu de l'entrada entre setmana és de 6 €, llevat del dimecres, que és de 4 € i de 8 € el cap de setmana.

Solució:

Una forma senzilla de fer aquest exercici és per mitjà de la multiplicació de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 50 & 48 & 100 & 30 & 20 & 40 & 60 \\ 60 & 70 & 150 & 45 & 100 & 200 & 150 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2010 \\ 5050 \end{pmatrix}$$

Observeu que les matrius proporcionen una visió senzilla i mecànica per tal d'operar amb les dades d'un problema.