Grafisme digital 2D i 3D

Salvador Linares Mustarós

PID_00215876

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

En matemàtiques, una corba és una línia continua d'una dimensió. Com a exemple de corbes tancades tenim la circumferència o l'el·lipse i com a exemple de corbes obertes, la recta o la paràbola.

En aquest mòdul didàctic de l'assignatura es treballen les corbes del pla. Aquest tipus d'objectes són imprescindibles per fer animacions realistes, com el moviment d'un planeta al voltant del Sol o el moviment que segueix una pilota que rodola per una taula i cau a terra.

El coneixement de les coordenades és imprescindible per poder seguir els exercicis que mostren a poc a poc una teoria cent per cent aplicable a la pràctica.

1. Conceptes bàsics

1.1. Rectes en el pla

Donat un punt de la recta (p_x, p_y) i un vector director de la recta (v_x, v_y), l'equació matemàtica que serveix per trobar els infinits punts d'una recta és:

$$(x,y) = (p_x, p_y) + t \cdot (v_x, v_y), \text{ on } t \text{ amb } t \in \mathbb{R}$$

S'anomena **equació vectorial** de la recta.

És habitual escriure P(t) en comptes de (x,y) amb la idea que P(t) indica un punt que depèn del instant t. Així, P(t) té relació física amb el temps i la posició espacial.

Observem que matricialment, l'anterior equació és equivalent a:

$$(x,y) = (p_x + t \cdot v_x, p_y + t \cdot v_y)$$

Si separem per coordenades, obtenim el sistema següent:

$$\begin{cases} x = p_x + t \cdot v_y \\ y = p_y + t \cdot v_x \end{cases}$$

que es coneix com a **equació paramètrica**.

Aïllant les t's i igualant obtenim l'equació de la recta anomenada **contínua**

$$\frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y}$$

eliminant els denominadors i passant-ho tot a una banda obtenim el que s'anomena l'**equació implícita** de la recta:

$$v_x y - v_y x + v_y p_x - v_x p_y = 0$$

Finalment, aïllant la y de l'equació anterior s'obté l'**equació explícita** de la recta:

$$y = \frac{v_y}{v_x} x + \frac{v_x p_y - v_y p_x}{v_x}$$

1.2. Altres corbes del pla

L'equació matemàtica d'un **segment** que uneix dos punts A i B és:

$(x,y) = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ amb $t \in [0,1]$ (o equivalentment $0 \leq t \leq 1$).

L'equació matemàtica d'una **circumferència** de centre $C = (a,b)$ i radi R és:

$P(t) = (a + R \cdot \cos(t), b + R \cdot \sin(t))$ amb $0^\circ \leq t \leq 360^\circ$.

Tota corba del tipus $(x,y) = (a \cdot t \cdot \cos(t), a \cdot t \cdot \sin(t))$ amb $0 \leq t \leq b$ s'anomena **espiral d'Arquímedes**.

Tota corba del tipus $(x,y) = (a(1 + \cos(t)) \cdot \cos(t), a(1 + \cos(t)) \cdot \sin(t))$ amb $0 \leq t \leq 2\pi$ s'anomena **cardioide** (per la seva forma de cor).

Tota corba de parametrització tipus $(x,y) = (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))$ amb $0 \leq t \leq 2\pi$ és una **el·lipse** centrada a l'origen tal que talla l'eix x en els punts $(a,0)$ i $(-a,0)$ i l'eix y en els punts $(0, b)$ i $(0,-b)$.

Hi ha molts altres tipus de corbes en el pla: paràboles, hipèrboles, sinusoïdals, etcètera. Els exercicis següents tenen per missió mostrar les seves equacions en paramètriques per tal d'aclarir la teoria anterior.

1.3. Superfícies

Una superfície és un objecte tridimensional que localment té l'aspecte d'espai bidimensional. Hi ha molts tipus de superfícies, com per exemple el cilindre el·líptic, l'esfera o el tor.

2. Exercicis amb solució

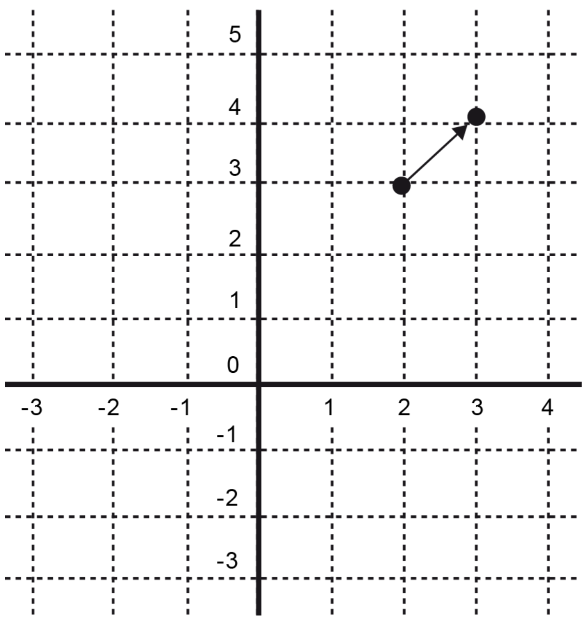
L'objectiu d'aquesta secció és recordar conceptes i tècniques matemàtiques de manera eminentment pràctica a partir d'exemples concrets.

Exercici 1

Parametritzeu la recta que passa pel punt A = (2,3) i té com a vector director el vector (1,1).

Solució:

El dibuix que representa el punt de la recta i el vector director de moviment és:

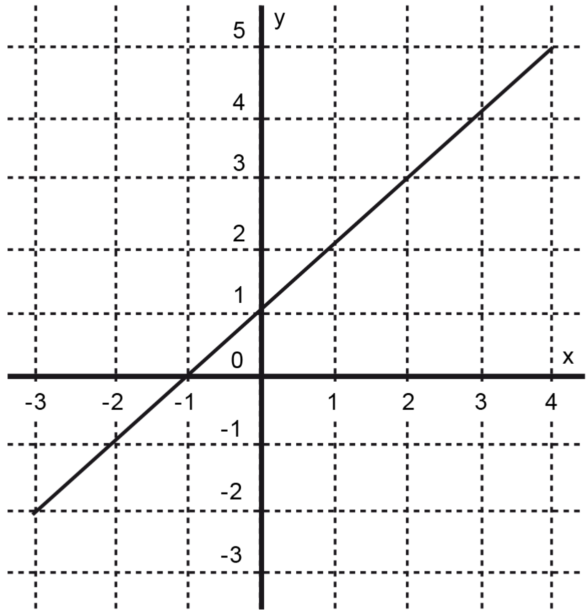


La forma molt intuïtiva de pensar aquest exercici és imaginar-nos que deixem una formiga en el punt (2,3) i que la formiga només es mou en la direcció del vector (1,1). Un punt immediat on la formiga pot anar és el punt (3,4). Però un cop en el (3,4), el punt següent on la formiga pot anar és el punt (4,5).

Atès que la formiga va movent-se en aquest sentit, ha de passar per tots els punts intermedis. Per exemple, si la formiga està en el punt (2,3) i es mou la meitat del vector director, la formiga se situa en el punt (2.5,3.5).

Anàlogament, si la formiga canvia de sentit i es mou cap a l'altra banda, la formiga passa pels punts (1,2), (0,1), (–1,0), (–2,–1)... I per tots els punts intermedis!

El dibuix següent assenyala els punts on pot estar la formiga:



L'equació matemàtica que serveix per trobar els infinits punts d'aquesta recta és:

$(x,y) = (2,3) + t \cdot (1,1)$ amb t qualsevol nombre real ($t \in \mathbb{R}$).

o

$P(t) = (2,3) + t \cdot (1,1)$ amb $t \in \mathbb{R}$.

Observeu que com que $P(0) = (2,3) + 0 \cdot (1,1) = (2,3)$, es pot considerar que en el moment inicial del moviment la formiga es trobaria en el punt (2,3).

Com que $P(1) = (2,3) + 1 \cdot (1,1) = (3,4)$, en l'instant $t = 1$ la formiga és trobaria en el punt (3,4).

Atès que t pot ser qualsevol valor, com 0,5, i que $P(0.5) = (2.5,3.5)$ podem deduir que en l'instant $t = 0.5$ la formiga es trobaria a mig camí dels punts inicial i final.

Observem que una segona opció d'equació vectorial és:

$(x,y) = (0,1) + t \cdot (2,2)$ amb $t \in \mathbb{R}$

Tot i que pot semblar que obtindrem altres punts que els obtinguts amb l'anterior, si substituïm la t per nombres reals, anem obtenint els mateixos punts anteriors de la recta. Així, per exemple, si $t = 1$, obtenim el punt (2,3) i si $t = 1.5$ obtenim el punt (3,4). Així, els punts per on es mou la formiga són els mateixos que abans!

La diferència és que ara la formiga, a part de començar en un altre punt de la recta, es mou molt més de pressa que en l'altra equació.

Exercici 2

Trobeu l'equació en forma explícita de la recta que passa pel punt A = (2,3) i té com a vector director el vector (1,1).

Demostreu que els punts de la recta són de la forma (x, x + 1).

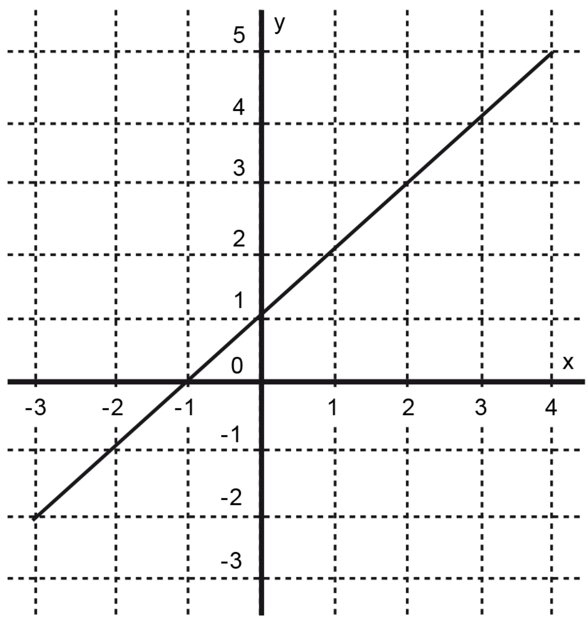
Solució:

Tota equació explícita d'una recta té una forma de l'estil $y = mx + n$. Per trobar-la, sempre partirem de l'equació vectorial de la recta i anirem transformant en les altres equacions.

$(x,y) = (2,3) + t \cdot (1,1)$ o bé $\begin{cases} x = 2 + 1 \cdot t \\ y = 3 + 1 \cdot t \end{cases}$ o bé $\begin{cases} \frac{x-2}{1} = t \\ \frac{y-3}{1} = t \end{cases}$, si igualem les t de les dues equacions obtenim $\frac{y-3}{1} = \frac{x-2}{1}$, o equivalentment, $y - 3 = x - 2$. Aïllant la y, obtenim $y = x + 1$.

Per tant, els punts de la recta tenen les coordenades (x, x + 1).

Observeu que en el dibuix de la recta, sempre es compleix que la y és una unitat més gran que la x.



Observeu que els punts trobats en l'exercici anterior compleixen tots aquesta condició: (2,3), (3,4), (4,5), (1,0), (2.5,3.5), (1,2), (0,1), (–1,0), (–2,–1).

Nota

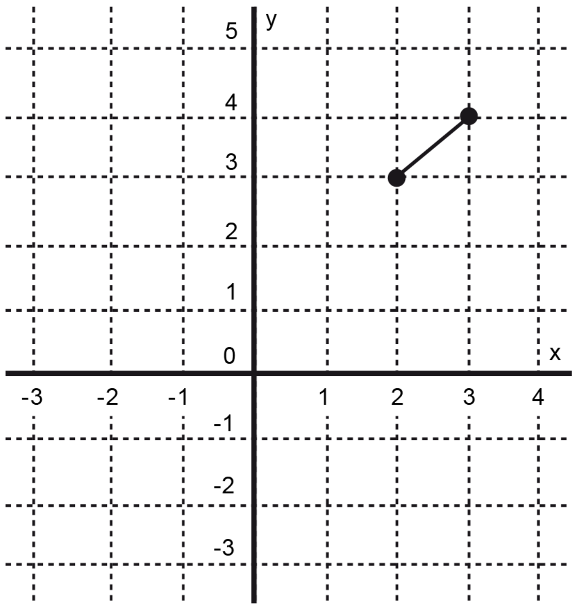
Observeu que els punts són de la forma (x, x + 1).

Exercici 3

Parametritzeu el segment que va del punt A = (2,3) al punt B = (3,4).

Solució:

Aquest és un cas restringit de moviment en una recta.



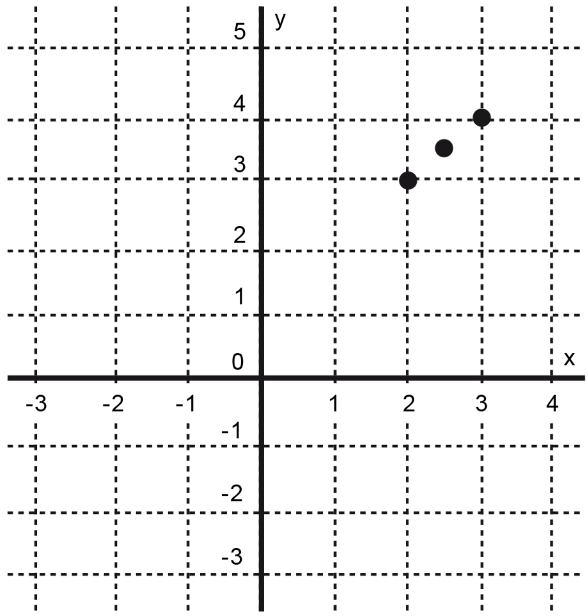
Per tal de parametritzar aquest moviment prendrem la fórmula matemàtica següent:

$(x,y) = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ amb $t \in [0,1]$ (o equivalentment $0 \leq t \leq 1$)

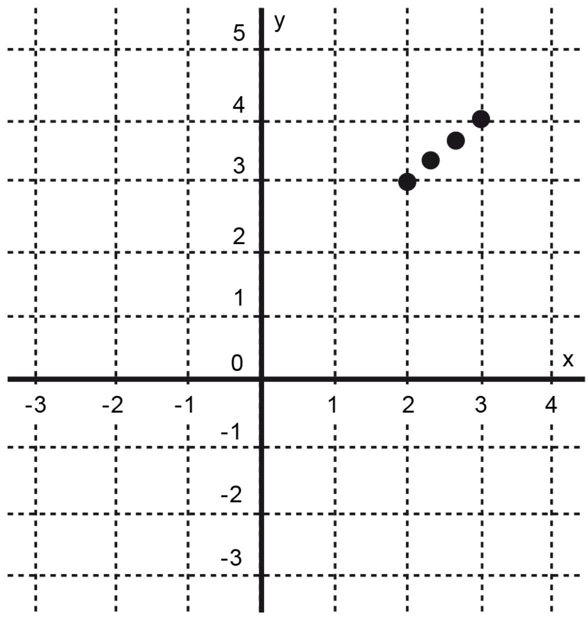
Aleshores en el nostre cas concret,

$(x,y) = (2,3) + t \cdot (1,1)$ amb $t \in [0,1]$

Observeu que si prenem $t = 0$, $t = 0.5$ i $t = 1$ obtenim el punt de partida A, el punt intermedi d'A i B i el punt d'arribada B, tal com mostra el dibuix següent:



Observeu que si prenem $t = 1/3$ i $t = 2/3$ obtenim els dos punts que divideixen el segment en tres parts iguals.



Prenent $t = 1/4$, $t = 2/4$ i $t = 3/4$ obtindríem els tres punts que divideixen el segment en quatre parts iguals.

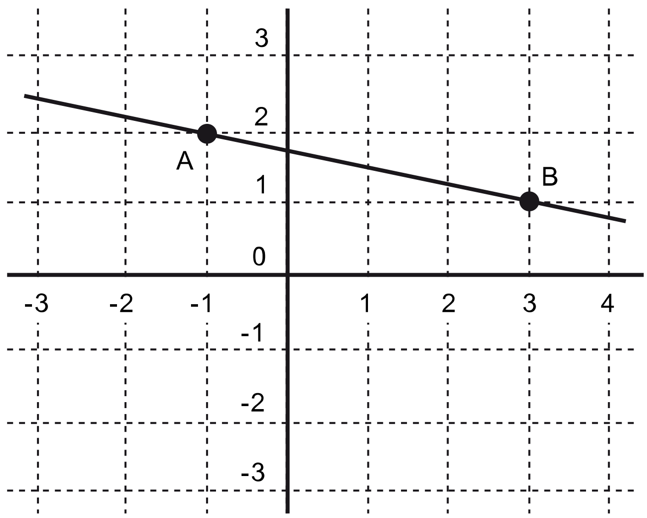
Prenent $t = 1/5$, $t = 2/5$, $t = 3/5$ i $t = 4/5$ obtindríem els quatre punts que divideixen el segment en quatre parts iguals.

...

Aquesta idea pot servir per situar objectes en una pantalla ben repartits per la pantalla mateixa!

Exercici 4

Donada la gràfica següent:



Trobeu les coordenades del punt en què la recta talla l'eix d'abscisses.

Solució:

Atès que A = (–1,2) i B = (3,1), podem obtenir una parametrització de la recta a partir de l'expressió $(x, y) = A + t(B - A)$ amb $t \in R$.

Per tant, $(x,y) = (-1,2) + t((4,-1) = (-1+4t, 2-t)$.

El punt de tall amb l'eix d'abscisses o eix de les *x* és el punt que té per coordenada *y* el valor 0. Aleshores podem obtenir el valor de *t* fent 2 – *t* = 0, que equival a *t* = 2.

Les coordenades del punt seran, doncs, (*x,y*) = (–1 + 4 · 2 , 2 – 2) = (7,0).

Exercici 5

Donada l'equació vectorial de la recta $P(t) = (3,2) + t \cdot (-4,-2)$, trobeu els punts de tall amb els eixos.

Solució:

Per al punt de tall amb l'eix *y* o eix d'ordenades cal que el valor de *x* sigui 0. Per tant, $3 - 4t = 0$ o $t = \frac{3}{4}$. Aleshores $y = 2 - 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$. Així doncs, el punt de tall amb l'eix *y* és $(0,\frac{1}{2})$.

Per al punt de tall amb l'eix x o eix d'abscisses cal que $y = 0$, per tant $2 - 2t = 0$ o $t = 1$.

Aleshores $x = 3 - 4 \cdot 1 = -1$. Així doncs, el punt de tall amb l'eix d'abscisses és $(-1,0)$.

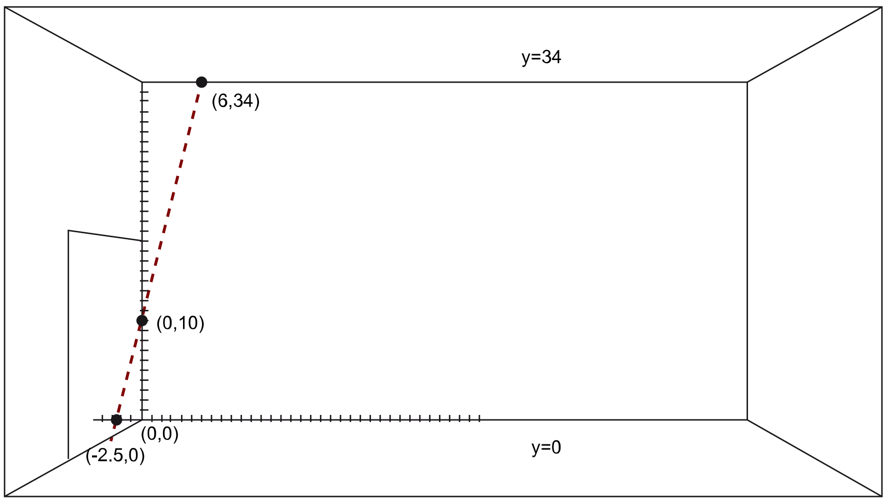
Exercici 6

Una pilota es mou sobre la recta $y = 4x + 10$. Trobeu el punt de contacte amb el sostre, si té per equació $y = 34$, i amb el terra, si té per equació $y = 0$. Feu un dibuix d'una gràfica amb les funcions recta, terra, sostre i marqueu els punts on la pilota xoca amb el sostre i el terra.

Solució:

La pilota toca el terra en $y = 0$, així: $x = -10/4 = -2.5$.

La pilota toca el sostre en $y = 34$, així $x = 6$.



Exercici 7

Donats els punts A = (–3,7) i B = (4,–1)

a) Demostreu utilitzant el teorema de Pitàgores que la distància d'A al punt mitjà entre A i B és igual que la distància de B a aquest punt mitjà.

b) Trobeu el punt que es troba entre A i B a triple distància de A que de B.

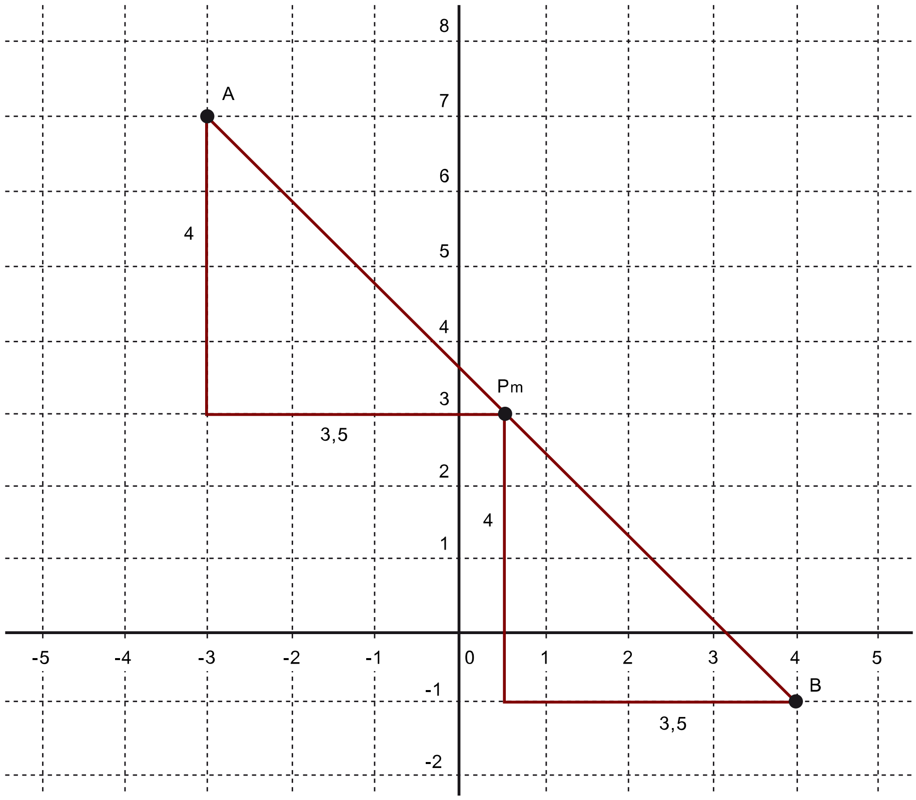
Solució:

La parametrització de la recta és: $P(t) = (-3 + 7t, 7 - 8t)$

Trobem el punt mitjà fent $t = 0.5$. Observeu que per a $t = 0$ estem en A i per a $t = 1$ estem en B. Per tant, per a $t = 0.5$ estarem just a mig camí entre A i B.

El punt mitjà és, doncs, $P_m = (0.5,3)$.

Si dibuixem en uns eixos els tres punts, podem construir dos triangles rectangles de la manera següent:



i ara podem comprovar que la distància de A a P_m, que per a Pitàgores és la hipotenusa del primer triangle, és igual a la distància de B a P_m, que per a Pitàgores és la hipotenusa del segon triangle. I són iguals ja que com que els catets són iguals, en tots dos casos la hipotenusa val $\sqrt{4^2+3.5^2} = 5.315072906367324703999560957 46\ldots$

Per trobar el punt que es troba en el segment a triple distància de A que de B fem $t = 0.75$ i obtenim (2.25,1). Si repetim la idea de calcular les distàncies amb el teorema de Pitàgores comprovarem que realment la hipotenusa del primer és el triple que la del segon i, per tant, el punt està situat a triple distància de A que de B.

Exercici 8

Digueu cinc punts de la recta que conté els punts A = (–100,100) i B = (100,0).

Solució:

Una possible parametrització de la recta és P(*t*) = (–100,100) + *t* · (200,–100).

Per obtenir cinc punts sobre la recta podem prendre cinc valors de *t* qualssevol.

Si prenem *t* = 0, obtenim (–100, 100), que és el punt A.

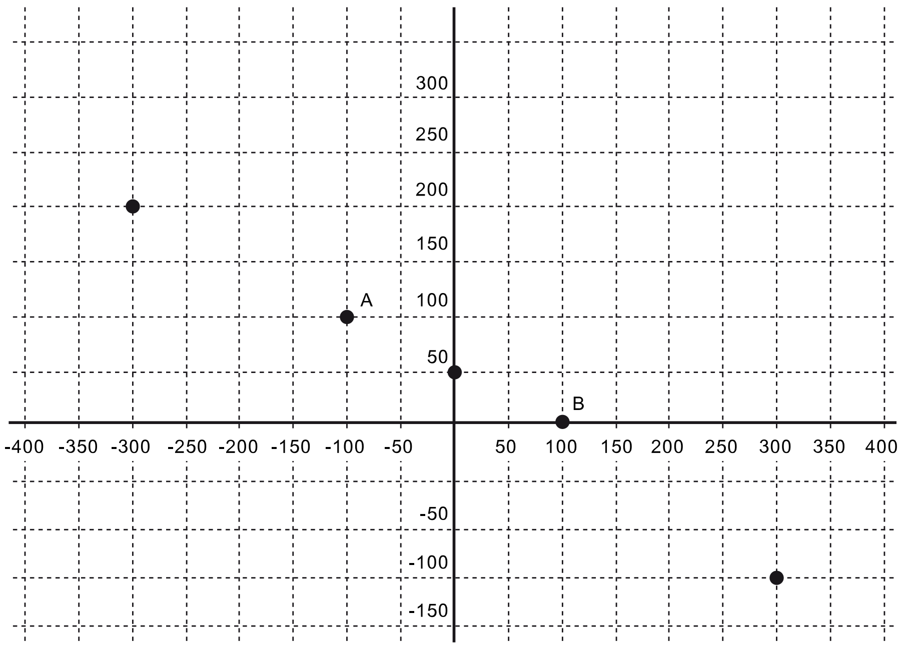
Si prenem *t* = 1, obtenim (100, 0), que és precisament B.

Observeu que això ens garanteix que anem bé, ja que hem obtingut dos punts de la recta que passa per A i per B segur.

Si prenem *t* = 0.5, obtenim el punt mitjà entre A i B, (0,50).

Si prenem *t* = –1, obtenim el punt simètric de B respecte de A, (–300, 200).

Si prenem *t* = 2, obtenim el punt simètric de A respecte de B, (300,–100).



Exercici 9

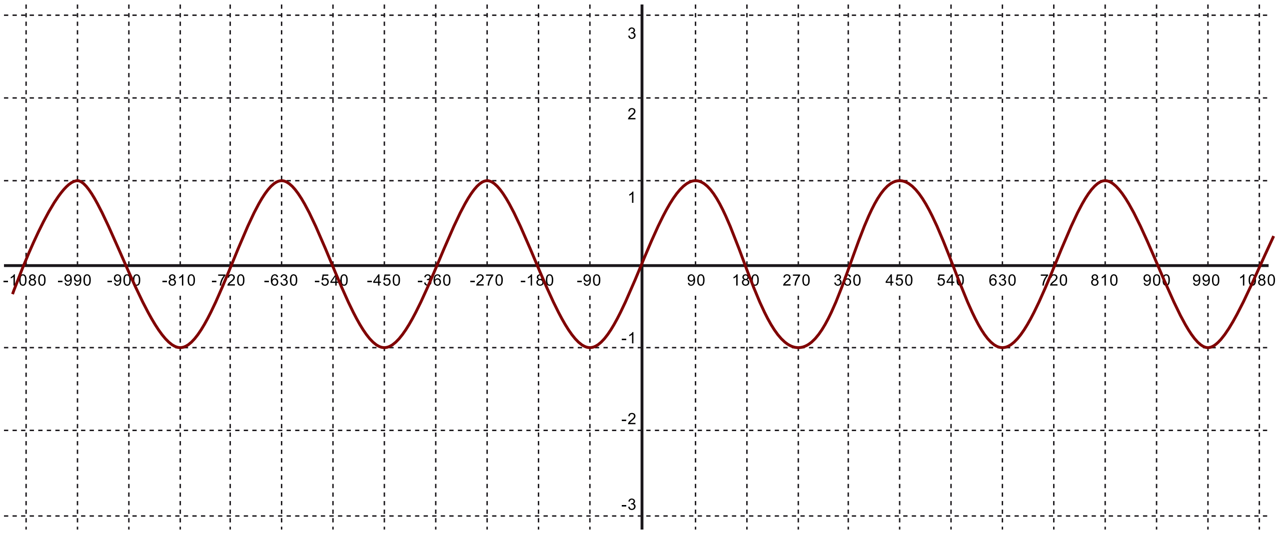
Dibuixeu la corba en el pla següent:

P(*t*) = (*t* , sin(*t*)) amb $t \in \mathbb{R}$

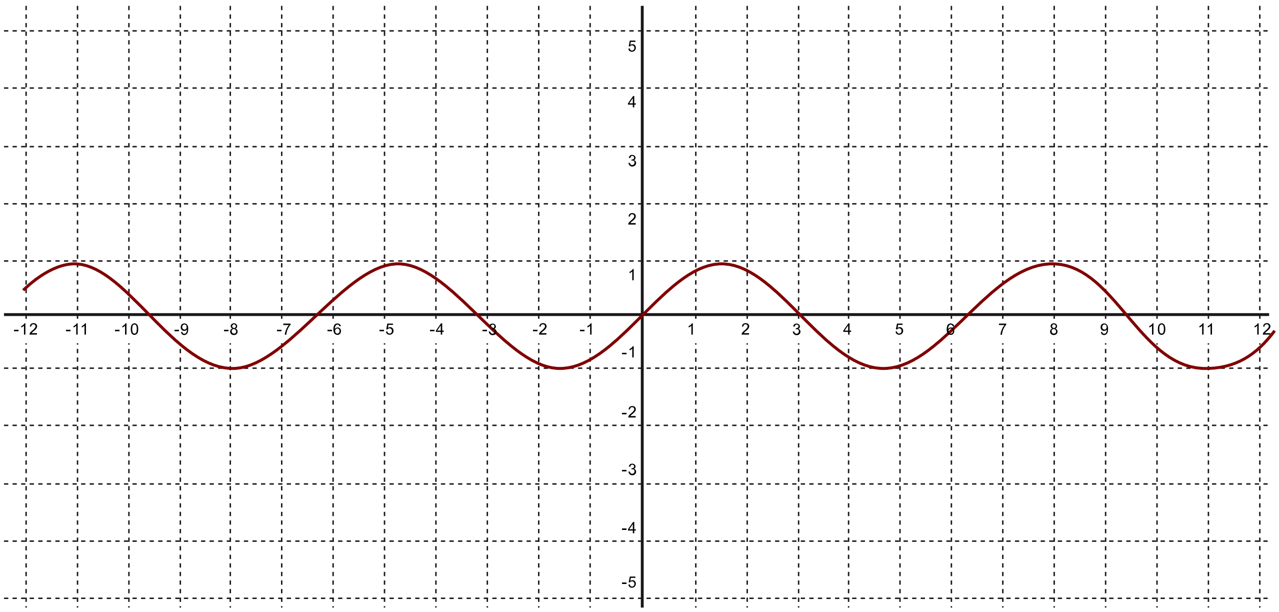
Solució:

Donant valors a *t* i dibuixant els punts, hi ha dues opcions.

Si el **sinus** està en graus obtindríem:



Si el **sinus** està en radiants obtindríem:



Podem observar que sempre obtenim una ona que es mou entre els valors –
1 i 1.

Exercici 10

Dibuixeu les corbes en el pla següents:

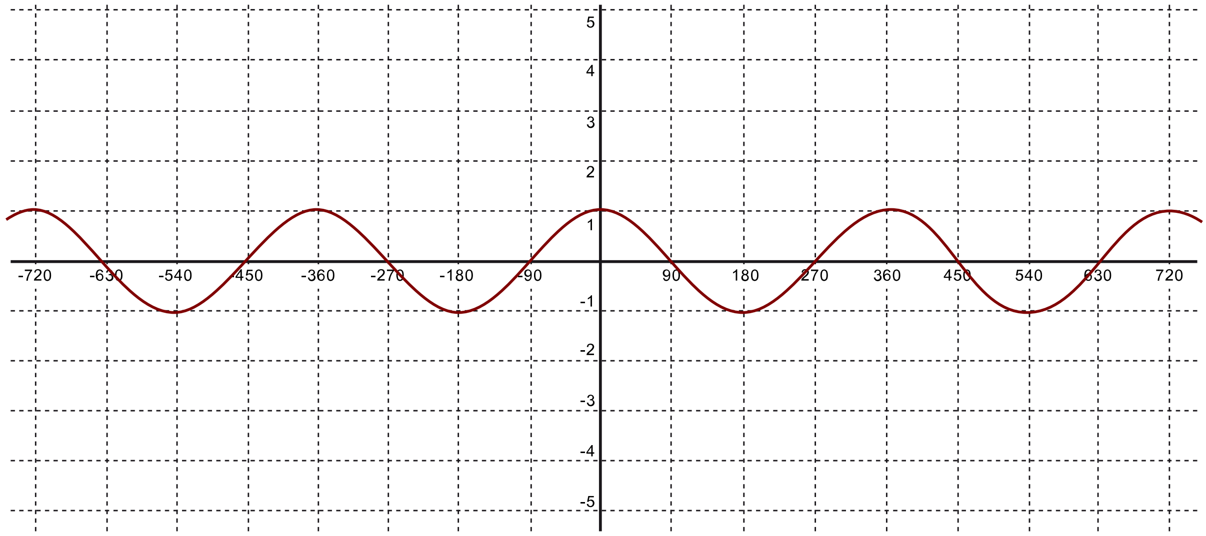
a) P(t) = (t , cos(t)) amb $t \in \mathbb{R}$
b) P(t) = (t , 2 · cos(t)) amb $t \in \mathbb{R}$
c) P(t) = (t , –cos(t)) amb $t \in \mathbb{R}$
d) P(t) = (t , cos(2 · t)) amb $t \in \mathbb{R}$
e) P(t) = (t , cos(t) + 3) amb $t \in \mathbb{R}$

f) P(t) = (t , cos(t + 90)) amb $t \in \mathbb{R}$

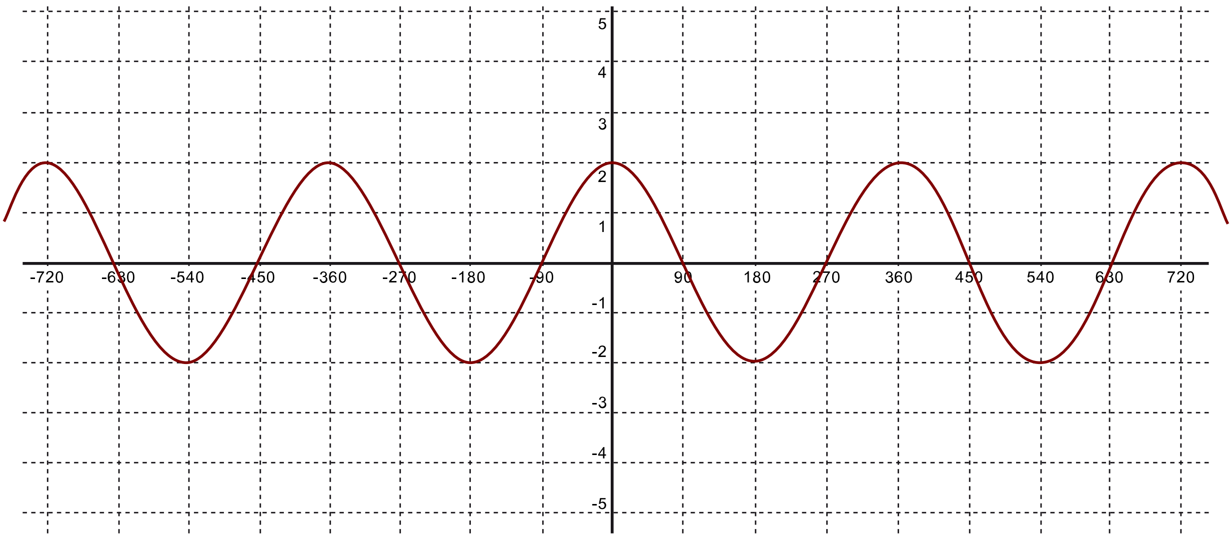
g) P(t) = (t , 3 · cos(t + 90)) amb $t \in \mathbb{R}$

Solució:

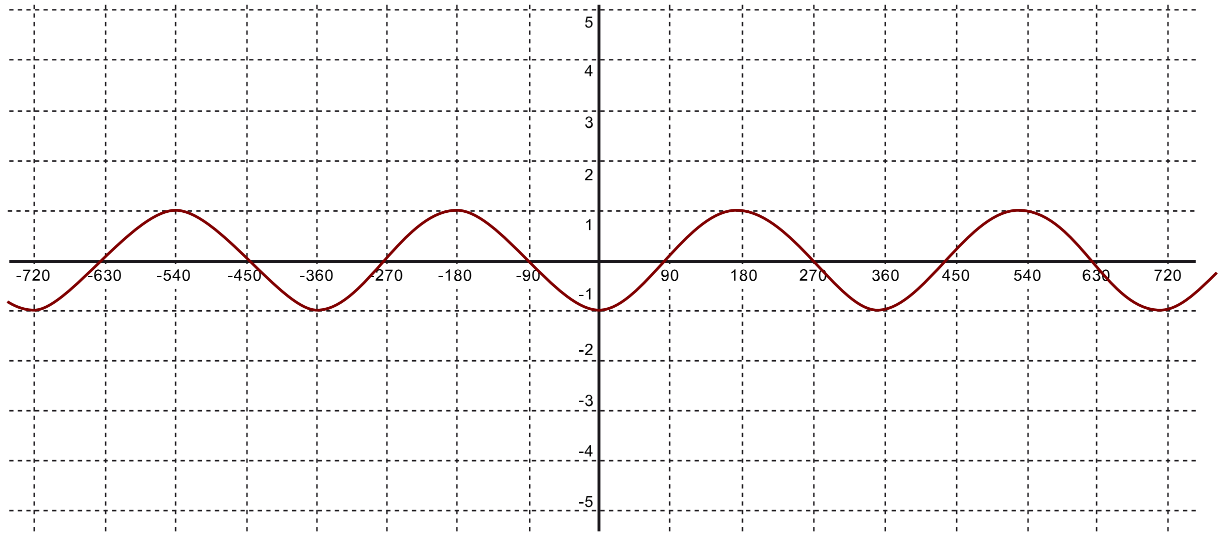
Suposarem que el **cosinus** està en graus sexagesimals.



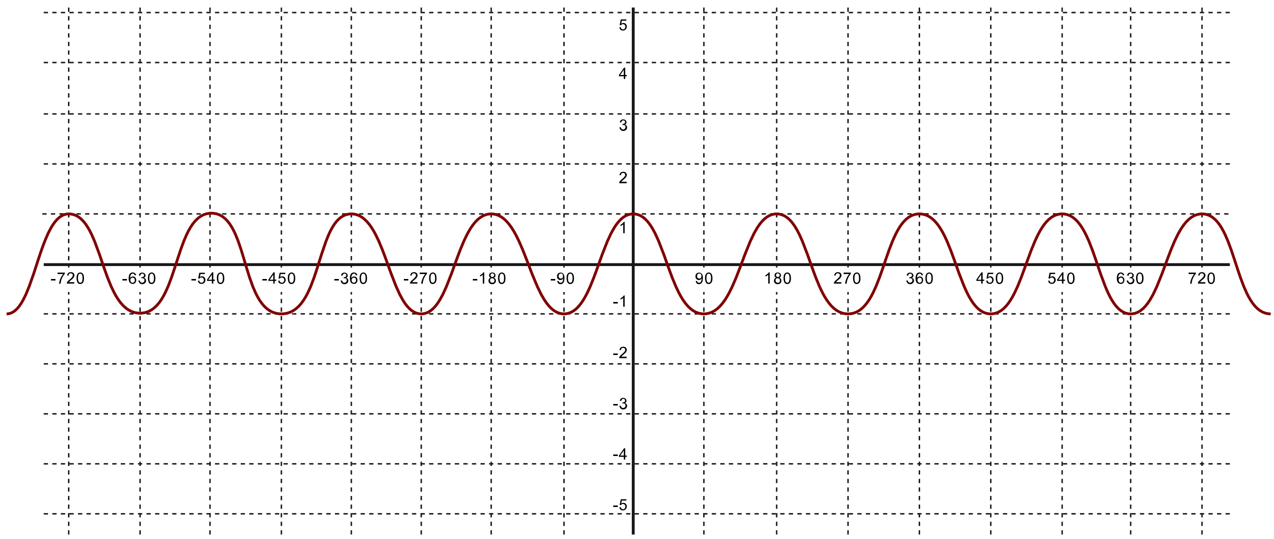
a) Observeu que la funció cosinus també és una ona d'amplada [-1,1]



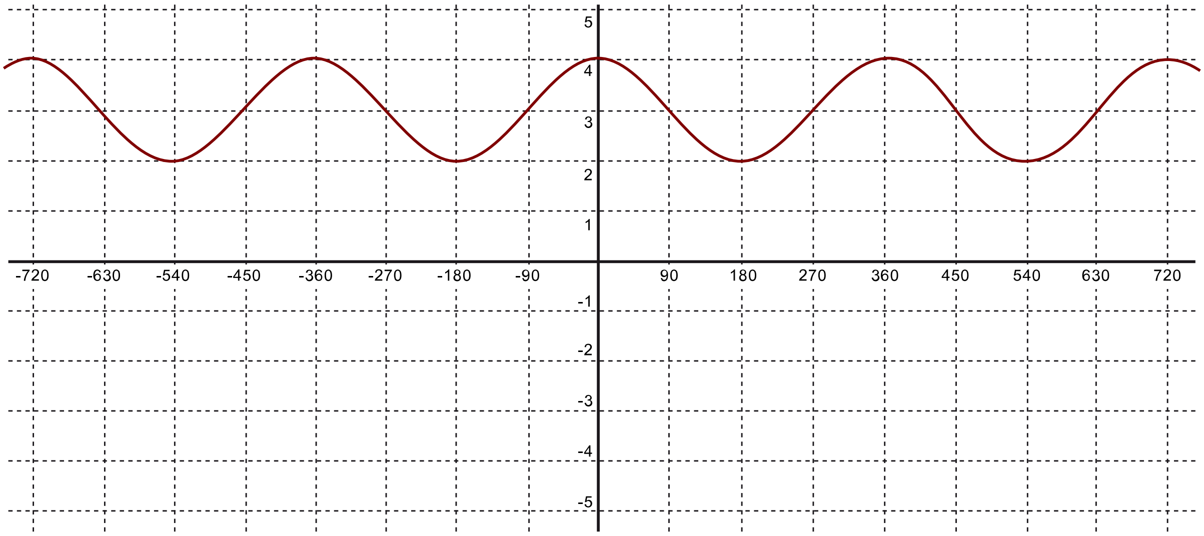
b) Observeu que en multiplicar la funció cosinus per un nombre, l'amplitud de l'ona es multiplica pel mateix nombre.



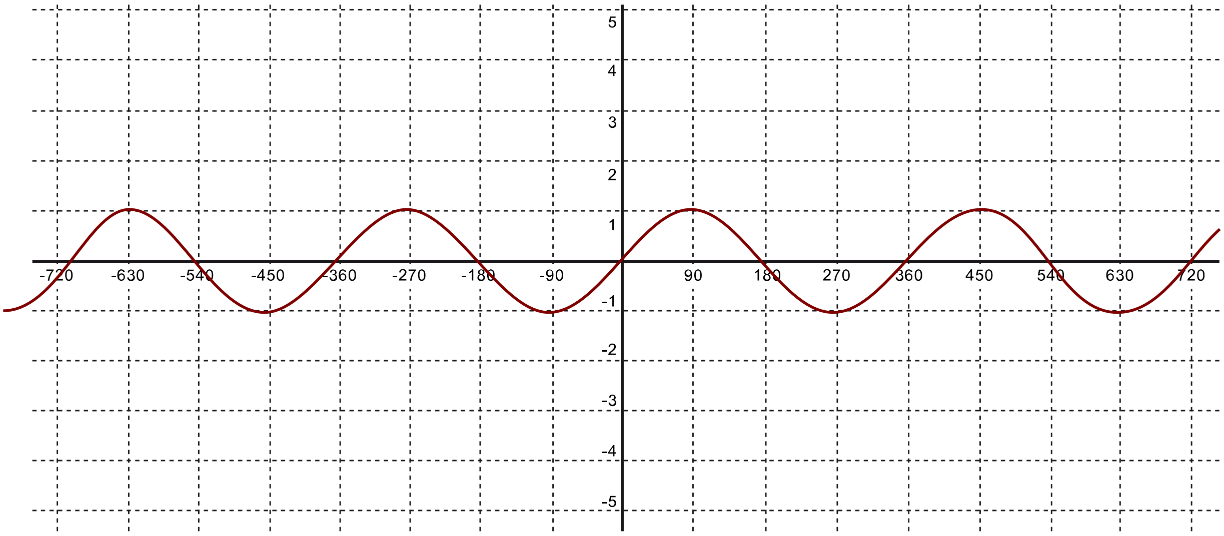
c) Observeu que en multiplicar la funció cosinus per (-1), obtenim una simetria de la funció respecte a l'eix d'abscisses.



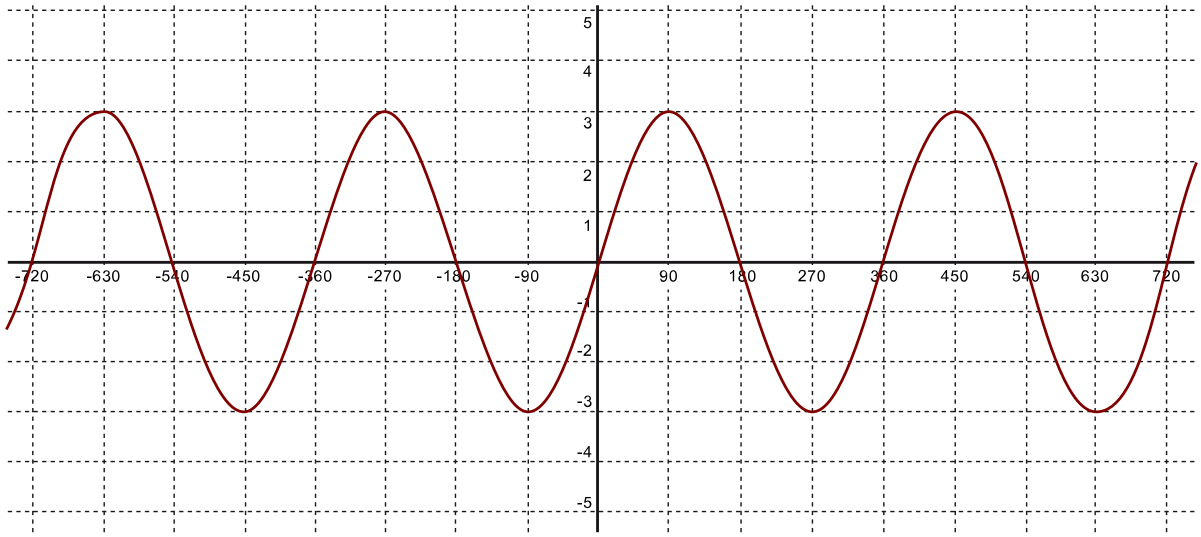
d) Observeu que en multiplicar la x del cosinus per un nombre major que 1, creem més onades en el mateix espai. Si el nombre és entre 0 i 1, en farem més onades i, per tant, el moviment serà menys ondulatori.



e) Observeu que en sumar nombres al cosinus, podem aixecar la funció. Si en restem, la baixarem.



f) Observeu que en sumar un valor a la x del cosinus, provoquem un desplaçament de la funció cap a la dreta.
Si aquest valor és 90, obtenim exactament la funció cosinus.



g) Observeu que diferents combinacions d'operacions anteriors, produeixen les combinacions ja estudiades una a una.
Així, en aquest cas concret, en sumar 90 obtenim el sinus, i en multiplicar per 3 el cosinus, ampliem l'interval de moviment a [-3,3].

Exercici 11

Escriviu una parametrització de la circumferència de centre (3,2) i radi 4. Trobeu, amb l'ajuda de la parametrització, cinc punts sobre la circumferència.

Solució:

Utilitzarem la parametrització $P(t) = (a + R \cos t, b + R \sin t)$, $0 \leq t \leq 360^o$.

Aleshores $P(t) = (3 + 4 \cdot \cos(t), 2 + 4 \cdot \sin(t)))$, $0 \leq t \leq 360^o$.

Per trobar cinc punts sobre la circumferència donem cinc valors a *t*. Per exemple: 0, 45, 90, 180 i 270.

$P(0) = (3 + 4 \cdot \cos 0, 2 + 4 \cdot \sin 0) = (3 + 4 \cdot 1, 2 + 4 \cdot 0) = (3 + 4, 2 + 0) = \mathbf{(7, 2)}$

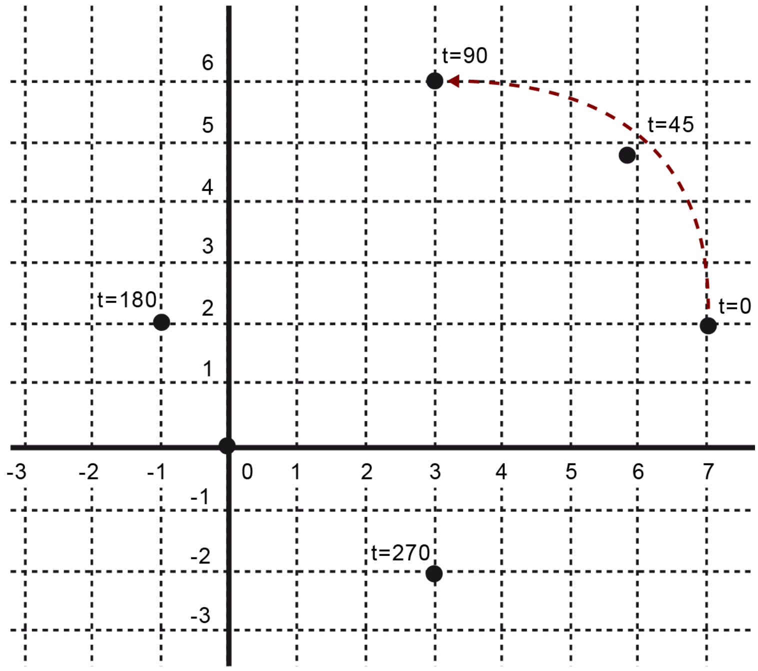
$P(45) = (3 + 4\cos 45, 2 + 4\sin 45) = (3 + 4 (\sqrt{2}/2), 2 + 4 (\sqrt{2}/2)) = (3 + 2{,}828..., 2 + 2{,}828...) = \mathbf{(5{,}828..., 4{,}828...)}$

$P(90) = (3 + 4\cos 90, 2 + 4\sin 90) = (3 + 4 (0), 2 + 4 (1)) = (3 + 0, 2 + 4) = \mathbf{(3, 6)}$

$P(180) = (3 + 4\cos 180, 2 + 4\sin 180) = (3 + 4 (-1), 2 + 4 (0)) = (3 - 4, 2 + 0) = \mathbf{(-1, 2)}$

$P(270) = (3 + 4 \cos 270, 2 + 4 \sin 270) = (3 + 4 (0), 2 + 4 (-1)) = (3 + 0, 2 - 4) = \mathbf{(3, -2)}$

Observeu que si marquem els punts en uns eixos de coordenades, obtindrem on comença el moviment i la direcció del gir.



En l'exercici anterior, hem après diferents transformacions que poden permetre canviar la direcció de gir, la velocitat de gir o el punt de partida.

Així, per exemple:

Amb la parametrització $P(t) = (3 + 4 \cdot \cos(2 \cdot t), 2 + 4 \cdot \sin(2 \cdot t))$, $0 \le t \le 180^o$, obtenim la mateixa circumferència però ara és recorreguda a doble velocitat.

Amb la parametrització $P(t) = (3 + 4 \cdot \cos(t + 180), 2 + 4 \cdot \sin(t + 180))$, $0 \le t \le 360^o$, obtenim la mateixa circumferència però ara el punt d'inici és el punt (–1,2).

Amb la parametrització $P(t) = (3 + 4 \cdot \cos(t), 2 - 4 \cdot \sin(t))$, $0 \le t \le 360^o$, obtenim la mateixa circumferència però ara és recorreguda en sentit horari a partir del punt inicial (7,2).

Exercici 12

Parametritzeu la circumferència de centre (6,7) i radi 3. Trobeu les coordenades dels punts situats sobre la circumferència amb valor x igual a 7. Dibuixeu-la. Marqueu sobre el dibuix els punts obtinguts.

Solució:

La parametrització de la circumferència de centre (6,7) i radi 3 és:

$$(x,y) = (6 + 3\cos t,\ 7 + 3\text{sen } t)$$

Per trobar els punts amb x igual a 7 fem: $6 + 3\cos t = 7$; i obtenim un valor t que compleix l'equació:

$6 + R\cos t = 7$, o bé $\cos t = (7 - 6)/3$, o bé $t = ar\cos(1/3) = 1.23095941734078$ rad

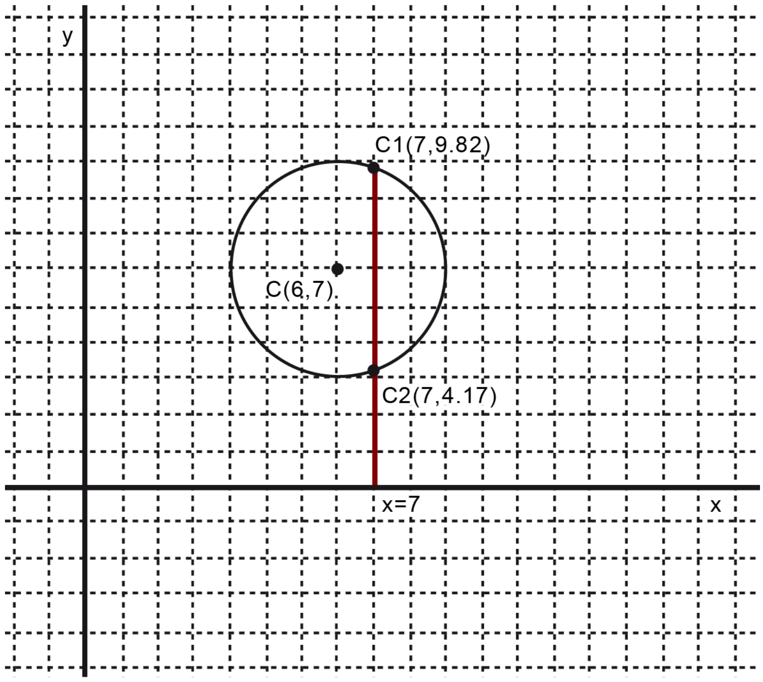
Aleshores

$y = 7 + (3 \cdot \text{sen}(1.23095941734078)) = 9.82842712474621$

Observem que per simetria podem trobar l'altre punt sobre la circumferència...

$y = 7 - (3 \cdot \text{sen}(1.23095941734078)) = 4.17157287525379$

El dibuix amb els punts marcats és:



Exercici 13

Parametritzeu la circumferència de centre (2,1) i radi 3 de manera que per al valor de paràmetre $t = 0$ estiguem situats sobre el punt (–1,1). Dibuixeu-la. Donats els punts de la circumferència (5,1) i (2,4), trobeu en cada cas el valor del paràmetre o angle t i indiqueu quina porció de volta hem fet. Recordeu que la circumferència comença en el punt (–1,1) i el gir és antihorari. Marqueu sobre el dibuix ambdós punts donats.

Solució:

$P(t) = (2 - 3\cos t,\ 1 + 3\sin t)$ on $0 \le t \le 2\pi$

a) En el punt (5,1), $t = \pi$ o mitja volta.

b) En el punt (2,4), $t = \frac{3\pi}{2}$ o tres quarts de volta.

Exercici 14

Tenim dos punts d'una circumferència diametralment oposats $A = (2,7)$ i $B = (2,3)$

a) Trobeu el centre de la circumferència.

b) Trobeu el radi de la circumferència.

c) Trobeu l'equació paramètrica de la circumferència i feu-ne la representació gràfica sobre uns eixos de coordenades.

d) Trobeu quatre punts interns a la circumferència i quatre punts externs.

Solució:

a) El centre de la circumferència estarà al punt mitjà d'ambdós punts diametralment oposats: $C = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = (2,5)$

b) El radi, per tant, es pot calcular com la distància del centre a un punt de la circumferència: $r = \sqrt{(2-2)^2 + (7-5)^2} = 2$

c) Una parametrització de la circumferència de centre (a, b) i de radi r és $(x, y) = (a + r \cdot \cos t, b + r \cdot \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Per tant, substituint pels nostres valors obtenim: $(x, y) = (2 + 2 \cdot \cos t, 5 + 2 \cdot \sin t)$.

d) Per trobar quatre punts a l'exterior, podem o bé fer-ho a ull, triant punts molt allunyats del centre tals que la seva distància al centre sigui superior a 2, o bé agafar punts de circumferències centrades en (2,5) però de radi superior a 2. Per exemple, r = 4. Així, (6,5), (2,9), (–2,5) i (2,1) són quatre punts exteriors a la circumferència.

Per trobar quatre punts a l'interior, podem o bé fer-ho a ull, triant punts molt propers del centre tals que la seva distància al centre sigui inferior a 2, o bé agafar punts de circumferències centrades en (2,5) però de radi inferior a 1. Per exemple, r = 1. Així, (3,5), (2,6), 1,5) i (2,4) són quatre punts interiors a la circumferència.

Exercici 15

a) Parametritzeu una circumferència de centre (5,0) i radi 5 de forma que per al valor del paràmetre t = 0 estiguem situats sobre el punt (0,0).

b) Trobeu sis punts situats sobre la circumferència.

c) Doneu quatre punts de l'interior de la circumferència i 2^2 punts de l'exterior de la circumferència.

d) Dibuixeu la circumferència en uns eixos de coordenades i assenyaleu-hi tots els punts.

Solució:

> Una parametrització de la **circumferència** de centre (a,b) i de radi r és
>
> $(x,y) = (a + r\cos t,\ b + r\sin t)$.

Observem que en aquesta parametrització sempre que $t = 0$, $(x,y) = (a + r, b)$.

A nosaltres, per a $t = 0$ ens interessa estar en $(x,y)=(a - r, b)$.

Teníem diferents opcions per parametritzar la circumferència. Ho podem fer o bé traslladant el temps en 180 o bé jugant amb els signes de la suma. Veiem alguns exemples:

1) $(x,y) = (5 + 5\cos(t - 180),\ 5\sin(t - 180))$
2) $(x,y) = (5 + 5\cos(t - 180),\ 5\sin t)$
3) $(x,y) = (5 + 5\cos(t + 180),\ 5\sin t + 180))$
4) $(x,y) = (5 + 5\cos(t + 180),\ 5\sin t)$
5) $(x,y) = (5 - 5\cos t,\ 5\sin(t + 180))$
6) $(x,y) = (5 - 5\cos t,\ 5\sin t)$

Observem que en tots els casos, quan $t = 0$ obtenim el punt (0,0).

Per trobar sis punts sobre la circumferència sols hem de donar sis valors a t.

Per trobar quatre punts a l'interior, o bé ho fem a ull prenent valors molts propers al centre, o bé per assegurar-ho podem agafar punts de circumferències centrades a (5,0) però de radi més petit que 5. Per exemple $r = 4$. És evident que si calculem la distància d'aquests punts al centre hem d'obtenir valors inferiors a 5.

Per trobar quatre punts a l'exterior, podem o bé fer-ho a ull, triant punts molt allunyats del centre tals que la seva distància al centre sigui superior a 5, o bé podem agafar punts de circumferències centrades a (5,0) però de radi superior a 5. Per exemple, $r = 7$.

En principi la gràfica amb els punts ha de tenir una estructura com la següent, amb sis punts sobre la circumferència, quatre dins i quatre fora.

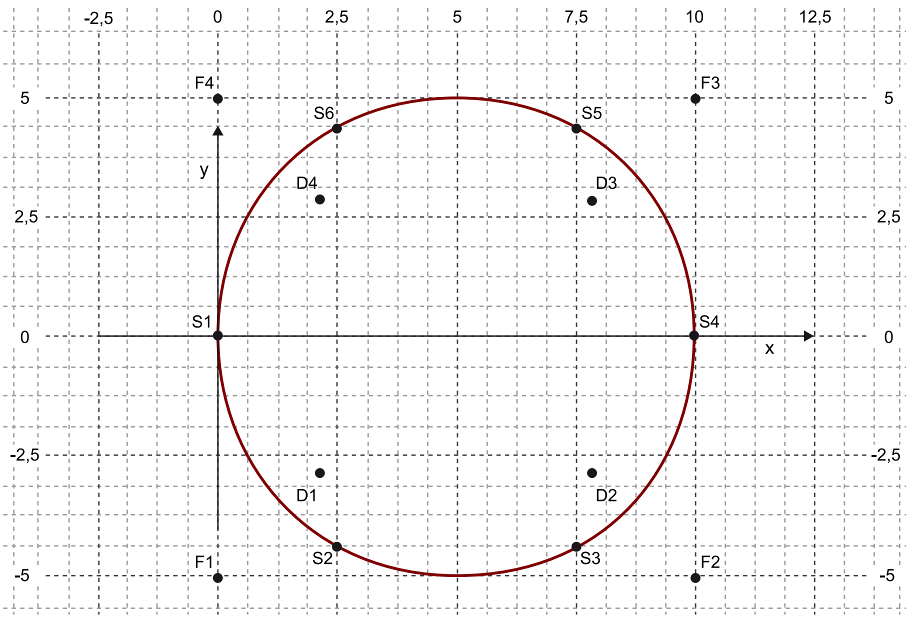
Compte amb els arrodoniments!

Per exemple, el punt per a t = 60 amb $(x,y) = (5 - 5\cos t\ ,\ 5\sin t)$ és

$(5 - 5\cos 60\ ,\ 5\sin 60) = (5 - 5 \cdot 0.5\ ,\ 5 \cdot \sqrt{3}/2) =$

(2.5 , 4.33012701892219323381861585376...).

I no podem arrodonir! Ja que si, per exemple, fem (2.5 , 4.33), estem en un punt proper però no estem sobre la circumferència, ja que el que sí que està és el que té per a y el valor 4.33012701892219323381861585376...



Exercici 16

Representeu en el pla bidimensional la parametrització següent:

$$(x,y) = (t,\ tg\ (t))$$

Solució:

La funció **tangent** té una forma molt diferent del sinus i cosinus a la que hem vist anteriorment. Normalment només es dibuixa de –90 a 90, ja que la funció es va repetint a partir d'aquests valors. Una curiositat que cal tenir en compte és que la funció no està definida pels angles de 90° i –90°.

Contra més ens apropem al 90 més gran dóna la tangent. Vegem-ho:

tg(89) = 57,289961630759424687278147537113

tg(89,9) = 572,95721335428773113642012662223

tg(89,99) = 5729,5778931305902363893418143585

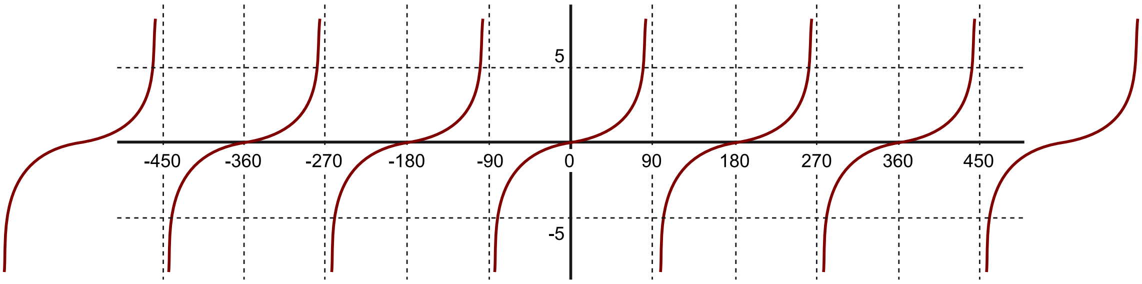
tg(89,999) = 57295,779507264556703365576736929

...

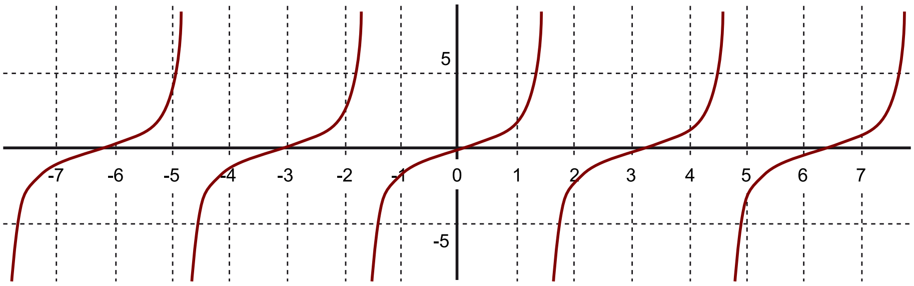
Això fa que la funció no acabi mai de pujar i pujar.

Com més ens apropem a –90 més gran en negatiu dóna la tangent.

El dibuix de la parametrització si utilitzem graus com a valor de *t* és, doncs:



El dibuix de la parametrització si utilitzem radiants és:



Exercici 17

Representeu en el pla bidimensional la parametrització següent:

$$(x,y) = (t, t^2)$$

Solució:

Aquesta és la parametrització de la **paràbola** $y = x^2$ (observeu que si substituïm la x per t, la y és t^2 i es compleix que $(x,y) = (t, t^2)$).

Si anem donant valors a la t anem obtenint punts de la corba. Així:

Si $t = 0$ obtenim el punt (0,0)

Si $t = 1$ obtenim el punt (1,1)

Si $t = 2$ obtenim el punt (2,4)

Si $t = 0.5$ obtenim el punt (0.5,0.25)

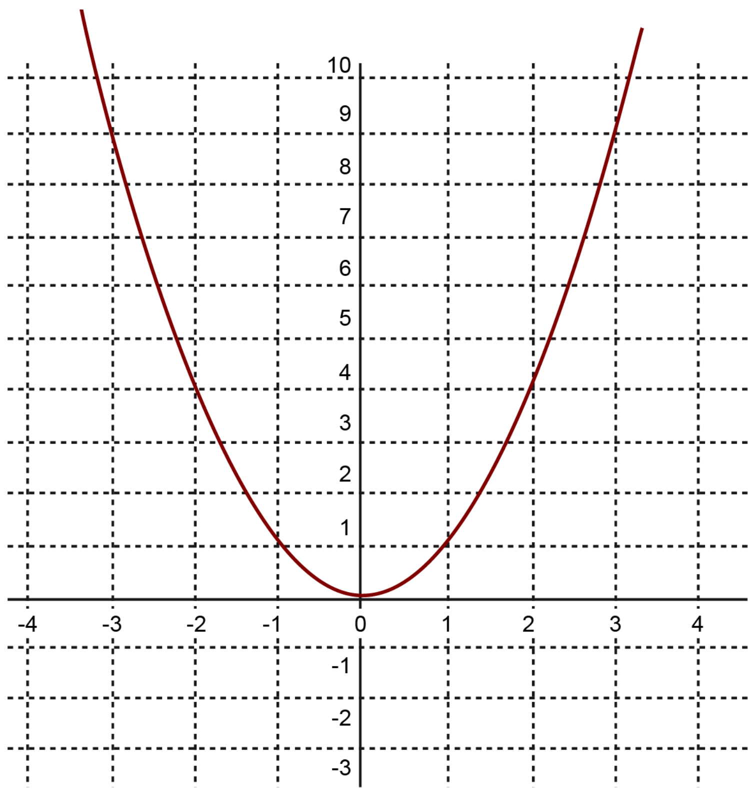
Si $t = -1$ obtenim el punt (–1,1)

Si $t = -2$ obtenim el punt (–2,4)

Una primera observació és que tots els valors y de la corba han de ser positius.

Una segona observació és que per a mateixos valors de t positius i negatius, la y ha de ser la mateixa. Això obliga a fer que la corba sigui simètrica respecte de l'eix de les y.

El dibuix de la corba parametritzada és:



Exercici 18

Representeu en el pla bidimensional la parametrització següent:

$$(x,y) = (t,\ 10 - t^2)$$

Solució:

Aquesta és la parametrització de la paràbola $y = 10 - x^2$ (observeu que si substituïm la x per t, la y és $10 - t^2$ i es compleix que $(x,y) = (t,\ 10 - t^2)$)

Si anem donant valors a la t anem obtenint punts de la corba.

Si $t = 0$ obtenim el punt (0,10)

Si $t = 1$ obtenim el punt (1,9)

Si $t = -1$ obtenim el punt (–1,9)

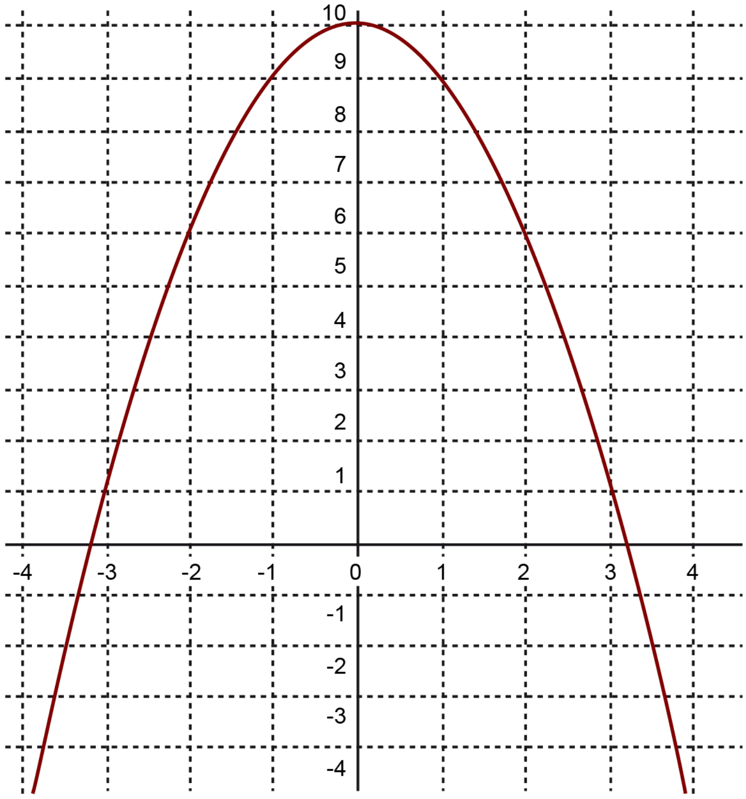
Si $t = 2$ obtenim el punt (2,6)

Si $t = -2$ obtenim el punt (–2,6)

Una primera observació és que tots els valors y de la corba han de ser menors que 10.

Una segona observació és que per a mateixos valors de t positius i negatius, la y ha de ser la mateixa. Això obliga a fer que la corba sigui simètrica respecte de l'eix de les y.

El dibuix de la corba parametritzada és:



Dominar el dibuix de paràboles és essencial per donar realisme a trajectòries de xut de pilotes, llançament de fletxes i qualsevol moviment relacionat amb la caiguda d'un cos sobre el terra!

Exercici 19

Representeu en el pla bidimensional la parametrització següent:

$$(x,y) = (t, -t^2 + 6t - 8)$$

Solució:

Aquesta és la parametrització de la paràbola $y = -x^2 + 6x - 8$.

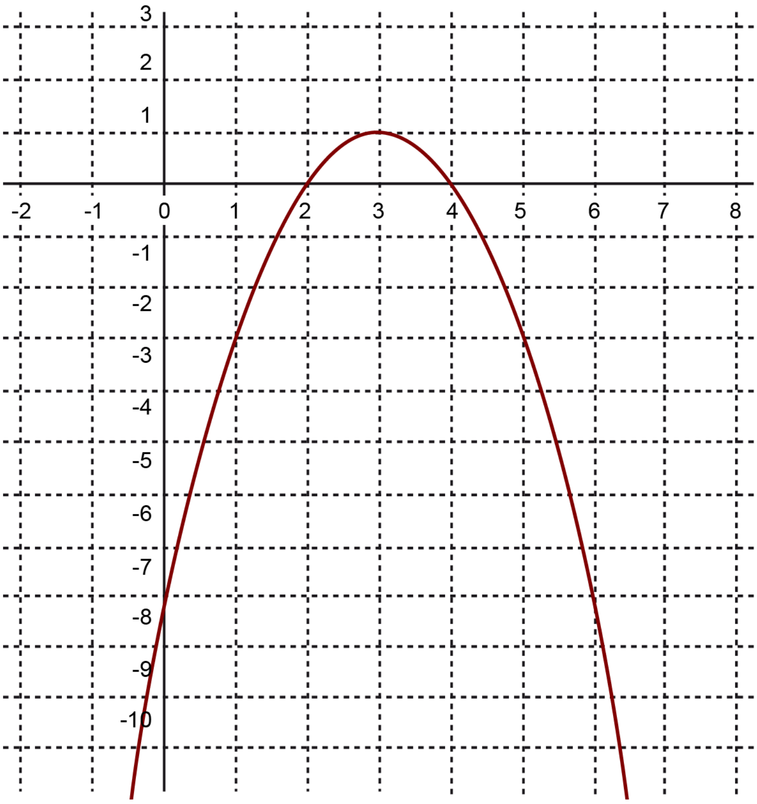
Que davant de t^2 hi hagi un negatiu no vol dir que tinguem $(-t)^2$, que sempre és positiu. Aquí diu que primer fem $t * t$ i el resultat el posem negatiu. Per tant $-t^2$ sempre és un nombre negatiu. Compte que aquest és un error molt típic en treballar amb paràboles!

Si anem donant valors a la t anem obtenint punts de la corba.

Hi ha, però, uns valors de t que sempre mirarem de tenir. Són els valors en què la corba talla els eixos de coordenades. Per a $t = 0$ tenim (0,–8) i si fem $-t^2 + 6t + 8 = 0$ obtenim $t = 2$ i $t = 4$. Aleshores per a $t = 2$ tenim el punt (2,0) i per a $t = 4$, el punt (4,0).

Prendre com a t el valor intermedi dels dos valors que anul·len la paràbola proporciona sempre el vèrtex de la paràbola, que és el punt que assenyala la simetria d'aquest tipus de corba. En aquest exercici, el valor just entre 2 i 4 és 3. Aleshores el vèrtex de la paràbola és (3, –9 + 18 – 8) = (3,1).

Obtenint punts i més punts, podem arribar al dibuix següent:



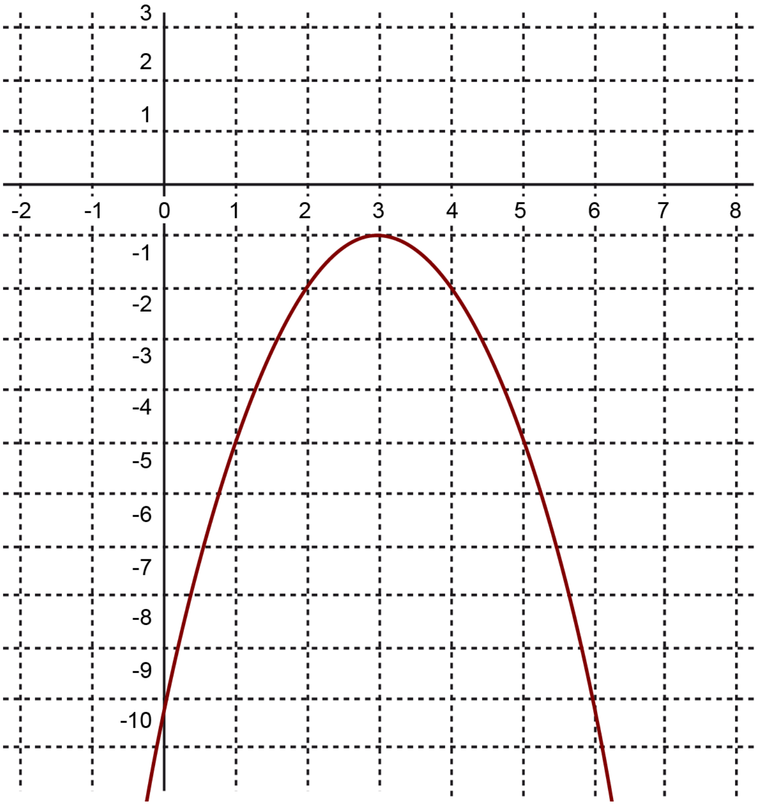
Exercici 20

Representeu en el pla bidimensional la parametrització següent:

$$(x,y) = (t, -t^2 + 6t - 10)$$

Solució:

Donant valors a la t obtenim la representació de la corba següent:



Si s'ha intentat trobar els punts de tall amb els eixos, només haurem trobat el punt (0,–10) ja que la corba no talla mai l'eix de les *x*.

Això ocasiona un problema a l'hora de trobar el vèrtex.

Recordem que donada una equació de segon grau tipus $a\,t^2 + b\,t + c = 0$, els valors solució de l'equació són $t = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ i $t = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ o equivalentment $\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ i $\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Observem que el valor intermedi dels dos valors és exactament $\frac{-b}{2a}$, ja que sumem i restem la mateixa quantitat $\left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$ per obtenir els valors solució. Malgrat que l'arrel sigui negativa i no trobem punts de tall amb l'eix de les *x*, aquest valor de $\frac{-b}{2a}$ ens indica sempre la *t* que identifica el vèrtex de la paràbola.

En el nostre cas concret de $-t^2 + 6t - 10$, la *t* del vèrtex és $\frac{-6}{2(-1)} = 3$ i, per tant, el punt del vèrtex de la paràbola és (3,–1).

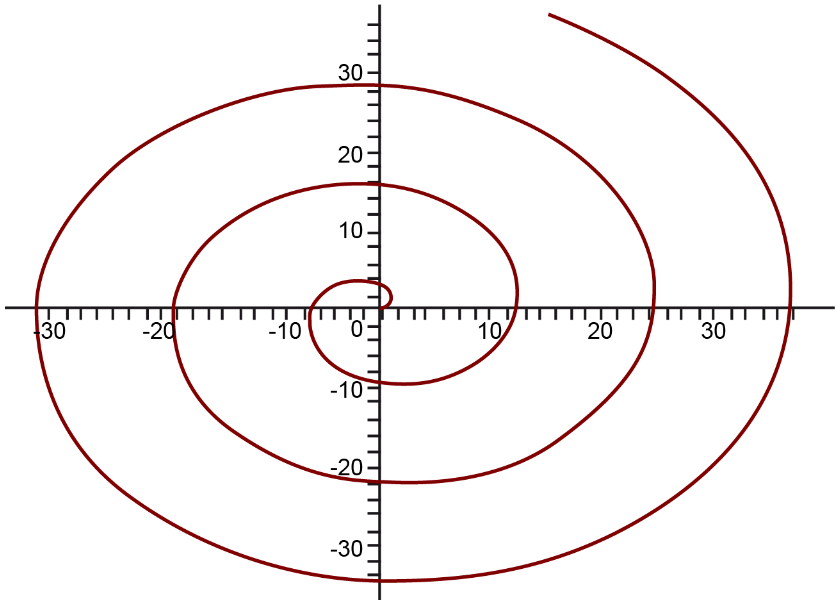
Exercici 21

Representeu en el pla bidimensional la parametrització següent:

$$(x,y) = (2t\cos t,\ 2t\sin t) \text{ amb } 0 \leq t \leq 20$$

Solució:

Tota corba del tipus $(x,y) = (at\cos t,\ at\sin t)$ amb $0 \leq t \leq b$ s'anomena **espiral d'Arquímedes**. Donant valors a la t i trobant punts trobaríem la representació següent de la corba:



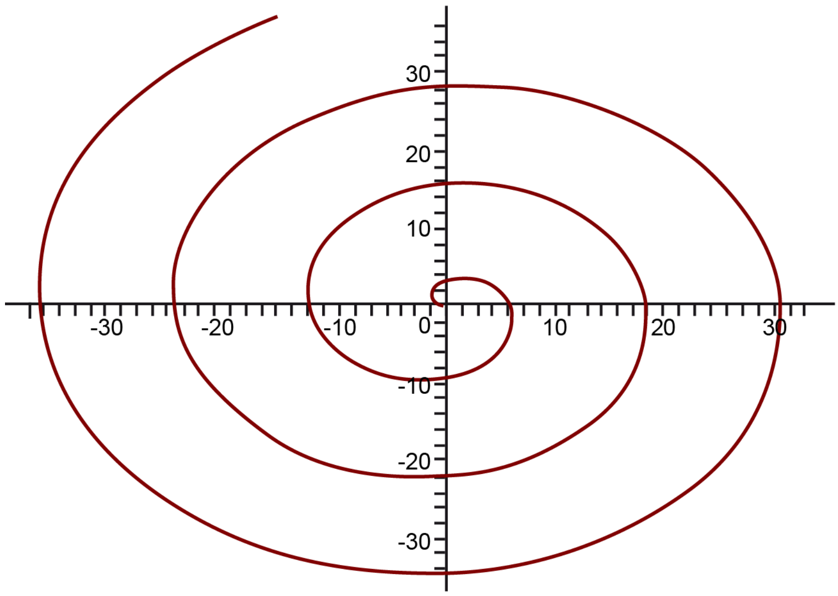
Exercici 22

Representeu en el pla bidimensional la parametrització següent:

$$(x,y) = (2t\cos t,\ 2t\sin t) \text{ amb } -20 \leq t \leq 0$$

Solució:

Tota corba del tipus $(x,y) = (at\cos t,\ at\sin t)$ amb $b \leq t \leq 0$ també forma una corba tipus **espiral**. Donant valors a la t i trobant punts trobaríem la representació següent de la corba:



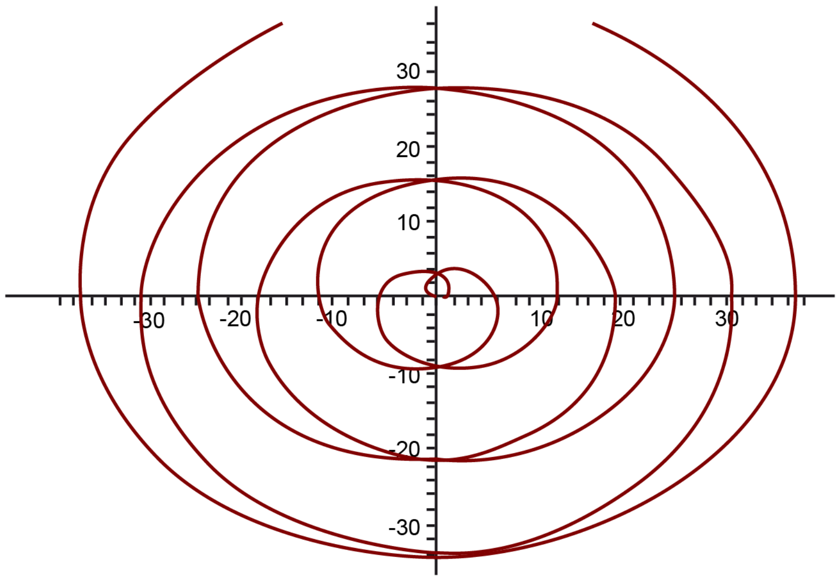
Exercici 23

Representeu en el pla bidimensional la parametrització següent:

$$(x,y) = (2t\cos t,\ 2t\sin t) \text{ amb } -20 \leq t \leq 20$$

Solució:

Atès que els punts de la corba són els $(x,y) = (2t\cos t,\ 2t\sin t)$ amb $-20 \leq t \leq 0$ i els $(x,y) = (2t\cos t,\ 2t\sin t)$ amb $0 \leq t \leq 20$, la representació ha de ser la combinació de les dues espirals anteriors.



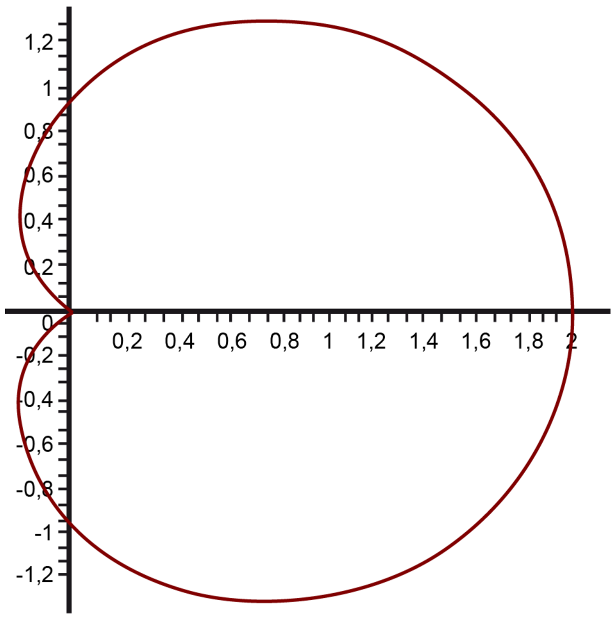
Exercici 24

Representeu en el pla bidimensional la parametrització següent:

$(x,y) = ((1 + \cos(t)) \cdot \cos(t), (1 + \cos(t)) \cdot \sin(t))$ amb $0 \leq t \leq 2\pi$

Solució:

Tota corba del tipus $(x,y) = (a(1 + \cos(t)) \cdot \cos(t), a(1 + \cos(t)) \cdot \sin(t))$ amb $0 \leq t \leq 2\pi$ s'anomena **cardioide** (per la forma de cor...). Donant valors a la t i trobant punts trobaríem la representació següent de la corba:



Nota

Si volem girar el cor, podem fer una rotació de 270º (o de –90º) per tal de tenir-lo en posició vertical i no horitzontal com ara. En el mòdul de matrius, hem vist que l'operació següent giraria α graus la corba:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En el cas que ens interessa fem:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 270 & -\sin 270 \\ \sin 270 & \cos 270 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\cos(t) \\ (1+\cos(t))\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\cos(t) \\ (1+\cos(t))\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$$

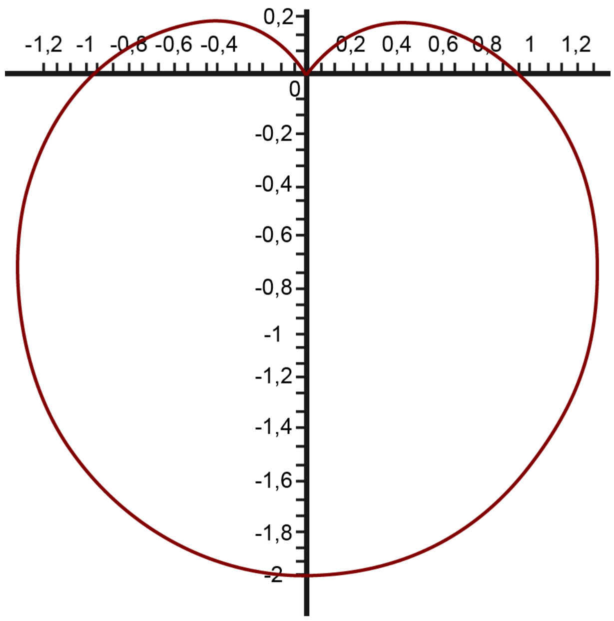
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\cos(t) \\ (1+\cos(t))\cdot\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\sin(t) \\ -(1+\cos(t))\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$$

Si ara representem en el pla bidimensional la parametrització següent:

$(x,y) = ((1 + \cos(t)) \cdot \sin(t), -(1 + \cos(t)) \cdot \cos(t))$ amb $0 \leq t \leq 2\pi$

obtenim:



Recordeu que en el mòdul de matrius també vam veure que si volem la podem desplaçar amb una translació de vector!

Imaginem, doncs, que per exemple ara volem moure el cor vertical cap a la dreta, 10 unitats. Les coordenades de la transformació són ara:

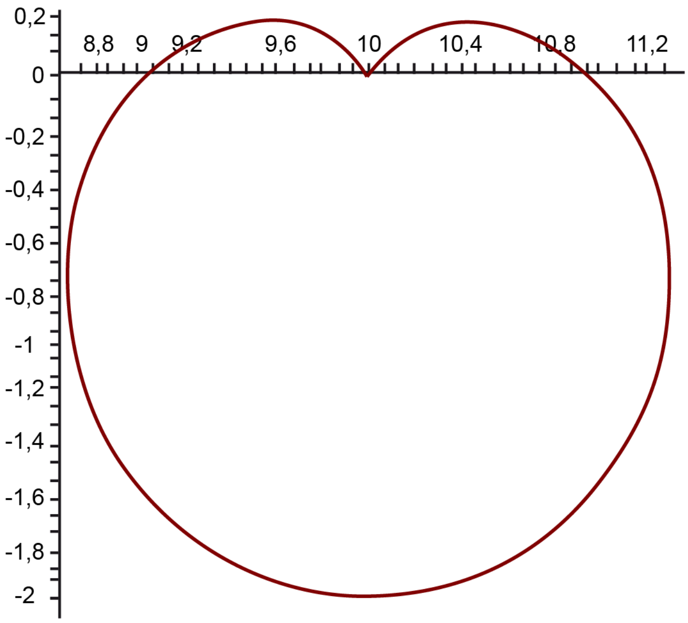
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\sin(t) \\ -(1+\cos(t))\cdot\cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o bé sumant les matrius,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\sin(t)+10 \\ -(1+\cos(t))\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$$

Si ara representem en el pla bidimensional la parametrització següent:

$(x,y) = ((1 + \cos(t)) \cdot \sin(t) + 10, -(1 + \cos(t)) \cdot \cos(t))$ amb $0 \leq t \leq 2\pi$, obtenim:



Finalment, si volem estilitzar el cor podem fer un canvi d'escala com el que s'ha vist també en el mòdul de matrius:

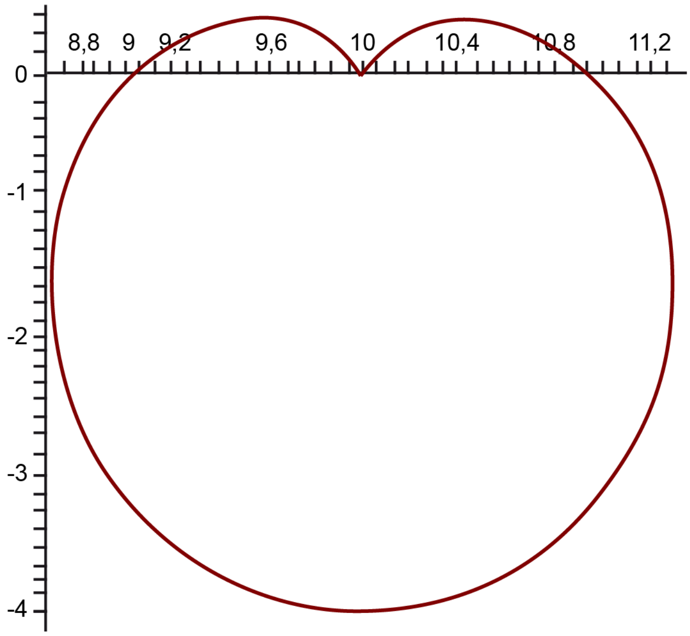
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\sin(t)+10 \\ -(1+\cos(t))\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$$

o bé multiplicant les matrius,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cdot\sin(t)+10 \\ -0.5(1+\cos(t))\cdot\cos(t) \end{pmatrix}$$

Si ara representem en el pla bidimensional la parametrització següent:

$(x,y) = ((1+\cos(t)) \cdot \sin(t) + 10, -0.5(1+\cos(t)) \cdot \cos(t))$ amb $0 \le t \le 2\pi$, obtenim:



Nota

Observeu que ara el cor va de 0.5 a –4 mentre que abans només anava de 0.25 a –2, i que l'amplada, o sigui els valors que ocupava a la *x*, no ha canviat.

Exercici 25

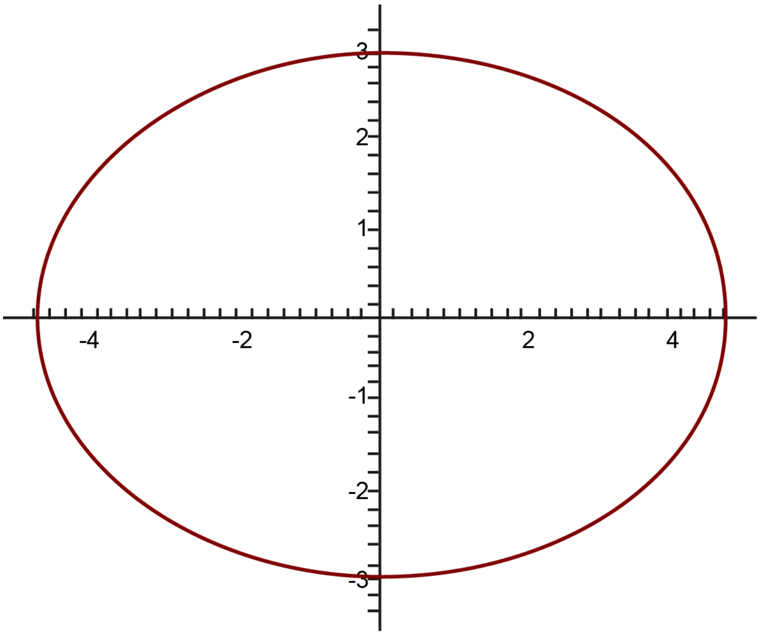
Representeu en el pla bidimensional la corba de parametrització següent:

$$(x,y) = (5 \cdot \cos(t),\ 3 \cdot \sin(t)) \text{ amb } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Solució:

Tota corba de parametrització tipus $(x,y) = (a \cdot \cos(t),\ b \cdot \sin(t))$ amb $0 \leq t \leq 2\pi$ és una **el·lipse** centrada en l'origen tal que talla l'eix *x* en els punts $(a,0)$ i $(-a,0)$ i l'eix *y* en els punts $(0, b)$ i $(0,-b)$.

Aleshores el dibuix és:



Imaginem que ara volem centrar l'el·lipse en el punt (6,4). Les coordenades de la transformació són ara:

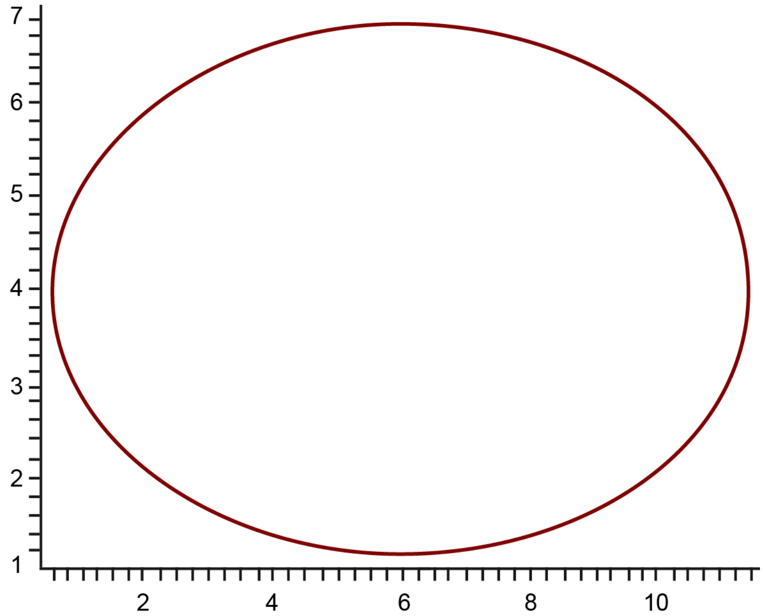
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

o bé sumant les matrius,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos(t)+6 \\ 3\sin(t)+4 \end{pmatrix}$$

Si ara representem en el pla bidimensional la parametrització següent:

$(x,y) = (5\cos(t) + 6,\ 3\sin(t) + 4)$ amb $0 \leq t \leq 2\pi$, obtenim:



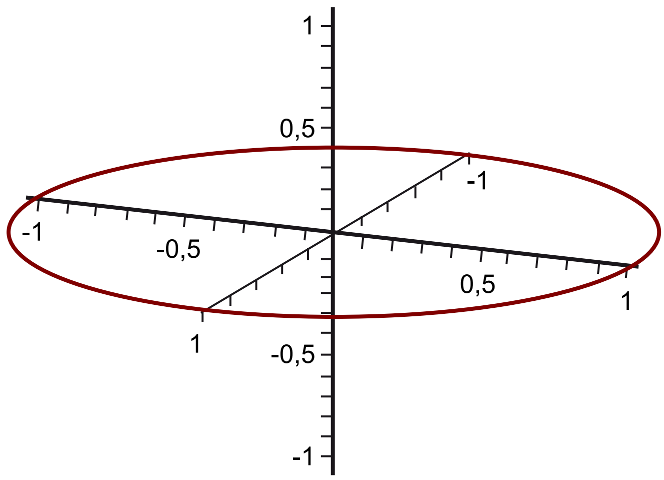
Exercici 26

Representeu en l'espai tridimensional la corba de parametrització següent:

$$(x,y,z) = (\cos(t), \sin(t), 0) \text{ amb } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Solució:

Atès que el valor de *z* sempre és zero per a tot valor de *t*, la corba estarà continguda en el pla format per *x* i per *y*. Sabem que la corba és una **circumferència** de radi 1. Aleshores la representació de la corba és:



Per conveni, en el dibuix de corbes, prendrem l'angle en radiants. El fet que *t* vagi de 0 a 2π ens indica que només tenim una volta.

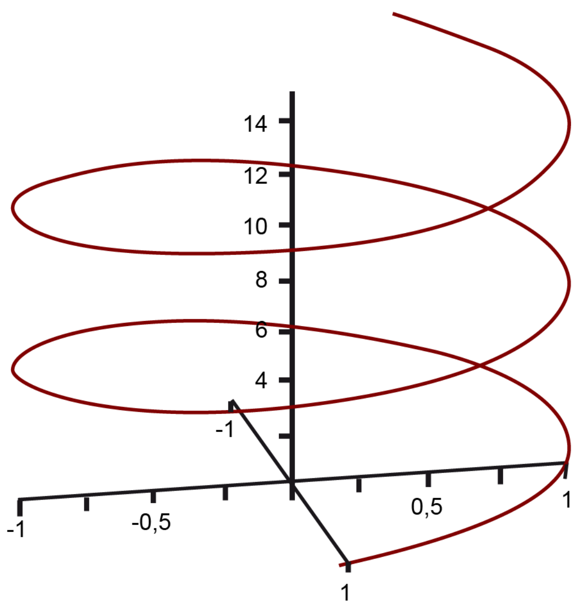
Exercici 27

Representeu en l'espai tridimensional la corba de parametrització següent:

$$(x,y,z) = (\cos(t), \sin(t), t) \text{ amb } 0 \leq t \leq 15$$

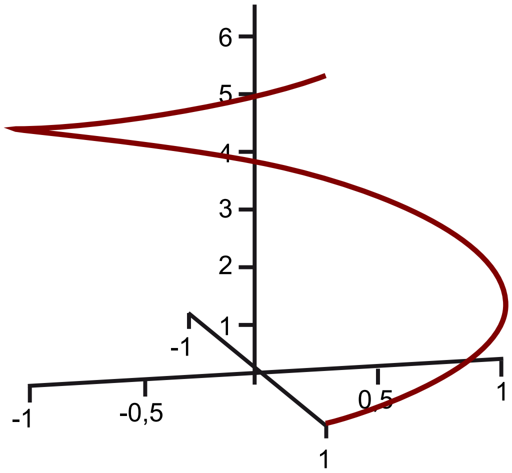
Solució:

Atès que el valor de *z* és diferent per a cada *t*, els punts del cercle es van dibuixant i dibuixant cada vegada una mica més amunt. Aleshores la corba que obtenim és una **espiral**. La representació de la corba és:

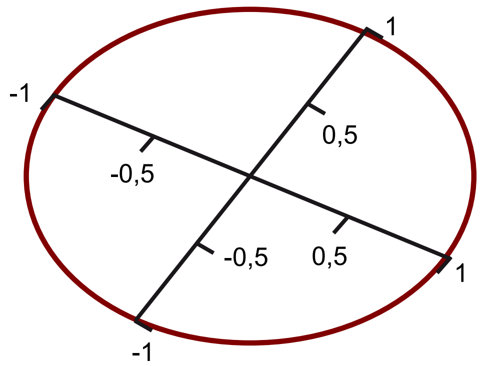


Observeu que com que $15 \geq 2\pi + 2\pi$, hem fet més de dues voltes de circumferència.

Si arribem a tenir $(x,y,z) = (\cos(t), \sin(t), t)$ amb $0 \leq t \leq 2\pi$, el dibuix hagués estat:

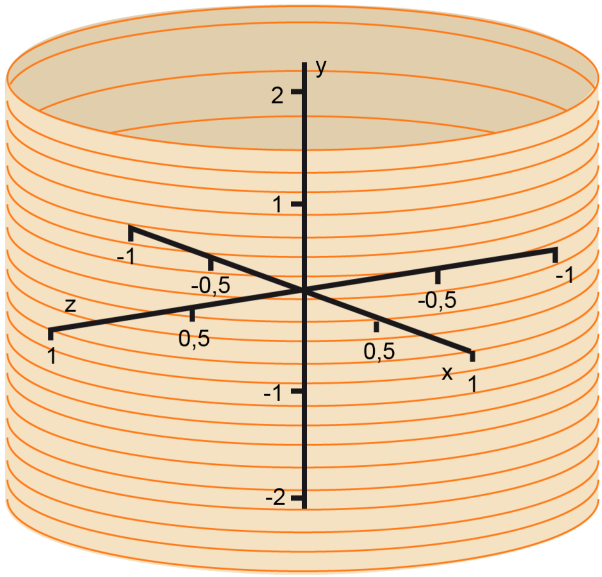


A vista d'ocell, veuríem el següent:

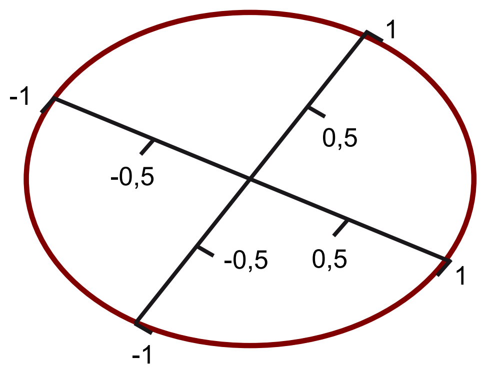


Exercici 28

Observeu la superfície següent.



A vista d'ocell, veuríem el següent:



Quin nom rep aquesta superfície?

Solució:

La superfície de l'enunciat està formada per cercles de radi 1 complets a diferents alçades entre –2 i 2 de la *z*. D'aquesta manera, l'aspecte global és el que es presenta a l'enunciat.

La superfície que el dibuix ens mostra s'anomena **cilindre circular**.

Sabem que una superfície és un objecte tridimensional, que localment té l'aspecte d'espai bidimensional. La idea és que si deixem una formiga en un punt d'aquest objecte, li semblarà que es pot moure en dues direccions perpendiculars, però no en tres, com sí que pot fer una mosca en l'espai tridimensional.