Geometria fractal

Pere Cruells
Germán Sáez

PID_00150789

Universitat Oberta de Catalunya

Cap part d'aquesta publicació, incloent-hi el disseny general i la coberta, no pot ser copiada, reproduïda, emmagatzemada o transmesa de cap manera ni per cap mitjà, tant si és elèctric com químic, mecànic, òptic, de gravació, de fotocòpia o per altres mètodes, sense l'autorització prèvia per escrit dels titulars del copyright.

Índex

1. Introducció a la geometria fractal

1.1. Introducció

Els objectes geomètrics representats en els mòduls anteriors es descrivien mitjançant distàncies i angles. A partir d'aquests elements descrivim un triangle, un rectangle o qualsevol altre polígon; i el mateix ocorre amb les figures geomètriques en l'espai tridimensional, com ara prismes, cilindres, cons, esferes, etc. Anomenem **geometria euclidiana** la geometria en què fonamentalment es tenen en compte distàncies i angles. En aquest apartat descriurem objectes geomètrics a partir de procediments, fet que ens porta a la **geometria fractal**. La representació fractal d'objectes és molt usual per a descriure i explicar fenòmens naturals, ja que s'obtenen representacions força reals. Així, s'usen objectes fractals per a modelar superfícies de terrenys, núvols, aigua, arbres, plantes, plomatges, pells, textures per a superfícies o per a crear patrons. En la generació de gràfics per ordinador s'usen els fractals per a generar objectes de la naturalesa i també s'utilitzen en la descripció de problemes físics i matemàtics, així com en la compressió de dades.

Un objecte fractal pot ser una corba, una superfície o un sòlid. Una característica bàsica dels fractals és l'existència d'una certa autosemblança entre les parts de l'objecte i l'objecte total. Per **autosemblant** s'entén que cada tros d'una figura determinada és semblant geomètricament a l'objecte complet (per exemple, que n'és una ampliació). Descriurem un objecte fractal amb un procediment que especifiqui una operació per a generar les parts de l'objecte per repetició. Els objectes naturals es representaran amb procediments que, en teoria, es repeteixen infinitament, tot i que a l'hora de representar-los haurem de generar només un nombre finit de passos. Per a crear un fractal necessitarem un objecte inicial, que denominarem **llavor**, i una transformació que aplicarem repetidament sobre aquesta llavor, transformació que anomenarem **iteració**.

Una de les particularitats dels objectes fractals és que són figures aparentment fragmentades i fracturades. El 1975, Benoît B. Mandelbrot els va donar el nom de *fractals* després d'estudiar i crear diversos tipus d'aquesta mena d'objectes. Igual que entenem que la dimensió d'una recta és 1 i que la dimensió d'un pla és 2, a cada objecte fractal se li associa també una dimensió, però amb la particularitat que les dimensions dels fractals no tenen perquè ser nombres enters, sinó que, en general, són nombres fraccionaris; raó de més per a justificar el nom que els va donar Mandelbrot.

Benoît B. Mandelbrot davant del Newton Institute a Cambridge.

Dins de la teoria dels fractals trobem una idea que ha revolucionat la concepció del nostre entorn. El món on vivim és fractal: les costes, els núvols, els arbres, les muntanyes i molts altres elements que ens envolten s'han de representar per mitjà de fractals i no per mitjà de rectes, circumferències o polígons. Les corbes amb què representem el nostre entorn no tenen dimensió u, sinó que tenen dimensions fraccionàries (és a dir, són **fractals**).

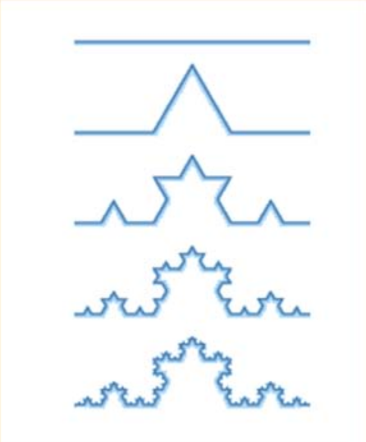
Els fractals, tot i que antics, viuen una edat d'or des que els ordinadors moderns ens permeten representar-los fàcilment i estudiar-ne les propietats. Com veurem al final d'aquest mòdul, els fractals ens permeten realitzar dissenys molt suggestius.

1.2. Els primers fractals

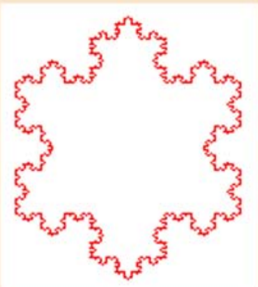
Un objecte fractal es genera per aplicació reiterada d'una transformació dels punts d'una regió del pla. En general, aquesta transformació es pot aplicar a un punt concret o a un conjunt de punts, com ara segments de línia recta o corba, àrees, etc. Començarem presentant un parell d'exemples per a il·lustrar aquests processos de generació.

El 1904, Niels Helge von Koch (1870-1924) va definir una corba que ens durà a un dels primers exemples de corba fractal, fent servir la llavor i la iteració que descrivim a continuació. Per començar, Koch va considerar un segment com a llavor. La iteració que va aplicar és la següent: cada segment que tinguem a la figura es divideix en tres parts iguals, i la part central se substitueix per dos segments de la mateixa longitud de manera que formin un triangle equilàter amb el tros de segment que hem suprimit. Aquesta transformació es repeteix indefinidament. Així, les primeres iteracions seran:

Primeres iteracions



Koch va utilitzar aquest procés a partir dels tres costats d'un triangle equilàter, que va donar com a resultat la coneguda corba que duu el seu nom:



Floc de neu de Koch

Helge Von Koch

WEB

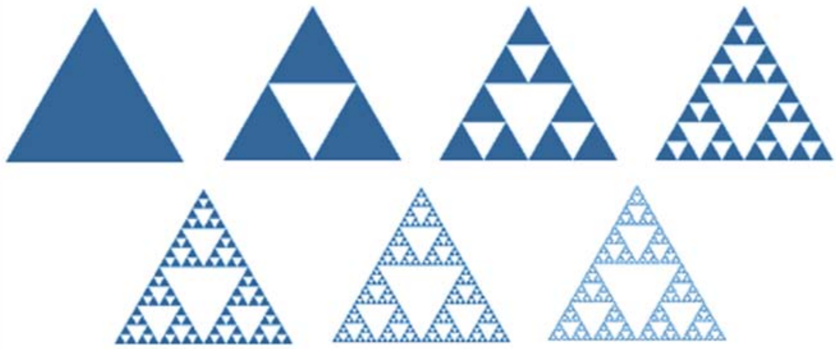
Recurs interactiu accessible només al web.

Activitat

Exercici

Construïu un GIF animat amb les quatre primeres iteracions del fractal conegut com a *antifloc* de neu de Koch. Es construeix a partir d'un triangle equilàter i la iteració és idèntica a la del floc de neu de Koch, però construint-lo cap a l'interior de la figura. Per a construir el GIF animat, creeu quatre imatges GIF amb les quatre iteracions del fractal, després componeu-les en un únic GIF amb el programari adequat.

Cap a 1915, Waclaw Sierpinski (1882-1969) va crear un altre fractal prenent un triangle equilàter com a llavor. La primera iteració consisteix a suprimir el triangle equilàter que es forma amb els tres punts mitjans dels tres costats del triangle equilàter inicial. D'aquesta manera obtenim una figura formada per tres triangles equilàters iguals. Les iteracions següents consisteixen a realitzar la mateixa transformació en cada un dels triangles equilàters que ens queden. Les primeres iteracions són les següents:



Primeres iteracions

Waclaw Sierpinski

WEB

Recurs interactiu
accessible només al web.

Les definicions d'aquests dos objectes són realment simples, però les seves propietats van deixar sorpresos fins i tot els seus propis creadors. Estudiem una mica aquests dos exemples. Considerem en primer lloc la corba de Koch a partir d'un segment de longitud 1 i intentem calcular la longitud de la corba fractal que s'obté. La primera iteració suprimeix un terç del segment i n'afegeix dos d'aquesta mateixa longitud, amb la qual cosa tenim una corba poligonal de longitud $\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Dit d'altra manera, hem multiplicat la longitud inicial per 4/3. En la següent iteració tenim quatre segments; multipliquem cada un per 4/3 i, per tant, tenim una corba poligonal de longitud $\left(\frac{4}{3}\right)^2$. Repetint el procés, el perímetre de la corba després d'aplicar k vegades la iteració per a crear el fractal serà: $\left(\frac{4}{3}\right)^k$. En augmentar el valor de k, la longitud del perímetre creix indefinidament, com es pot observar amb els primers valors:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^1 = 1{,}333..., \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1{,}777, \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2{,}370...$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{10} = 17{,}757..., \left(\frac{4}{3}\right)^{100} = 3.117.982.410.207{,}941...$$

A partir d'això podem afirmar que la longitud de la corba de Koch és infinita.

En el cas del triangle de Sierpinski, el fet sorprenent és que la seva superfície total és zero i que la suma dels perímetres de tots els triangles generats és infinita.

Activitat

Exercici 1

Quants triangles es retiren i quants queden en cada iteració del triangle de Sierpinski? Considerant com a llavor un triangle equilàter de costat 1 cm, calculeu l'àrea dels triangles que queden i la suma dels seus perímetres després de realitzar només quatre iteracions.

Exercici 2

Partim d'un tetraedre regular i creem sobre cada una de les seves cares un altre tetraedre regular la base del qual està formada pel triangle equilàter a partir dels punts mitjans de les arestes que formen aquesta cara. Aquesta iteració es repeteix indefinidament sobre cada un dels triangles que es va formant. Quants tetraedres necessitarem per a la segona iteració? I per a la tercera? Construïu aquest fractal fins a la segona iteració utilitzant el programari 3D Studio.

Exemple

Vegem un altre exemple de construcció d'un fractal:

WEB

Recurs interactiu
accessible només al web.

I així es podrien continuar calculant noves iteracions. Acabem de crear un fractal de tipus Sierpinski.

Activitat

Exercici 1

Calculeu l'àrea total ocupada per les fotografies en cada iteració si sabem que les mesures de cada iteració són 2,75 cm × 3,8 cm.

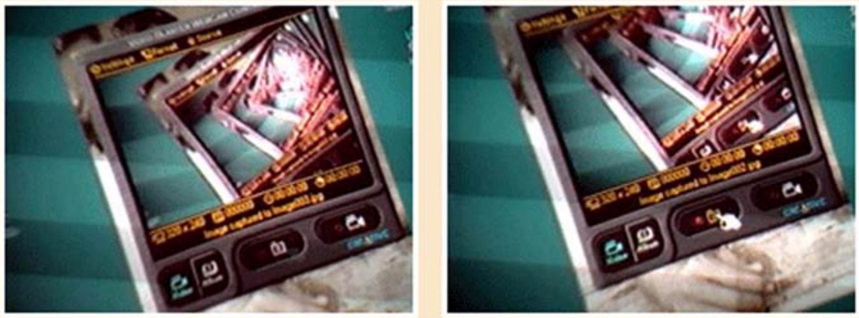
Exercici 2

Repetiu el mateix fractal amb fotografies, obtingudes del campus, del tutor, del consultor de matemàtiques i del rector. Creeu un GIF animat amb les diferents iteracions per a visualitzar la construcció del fractal.

Exercici 3

Repetiu el mateix fractal amb tres fotografies de tres bons amics, però aquesta vegada col·locant-ne dues una al costat de l'altra, i la tercera col·locada a sobre de les altres dues i centrada.

Un exemple molt clàssic en televisió és el principi de la retroalimentació (*feedback*). En aquest, la càmera s'enfoca a la mateixa pantalla en la qual s'està visualitzant la imatge recollida per la càmera.



Exemples d'algunes imatges estàtiques preses amb una càmera web utilitzant la retroacció.

Els efectes que es poden obtenir donant moviment a la càmera poden ser vertiginosos. La imatge queda repetida dins de la mateixa imatge fins que la definició de la pantalla no és suficient per a poder representar amb nitidesa l'objecte. De fet, l'ull humà també està limitat per un llindar a partir del qual no es pot distingir res. Al món matemàtic dels fractals no hi ha cap limitació, i si definíssim aquestes imatges matemàticament, en prendre una part i comparar-la amb el tot veuríem que són idèntiques (sense haver desaparegut cap de les iteracions).

S'han utilitzat fractals des de fa molt temps en publicitat, ja que produeixen un efecte visual curiós i vistós.

En la publicitat de les sopes Campbell es mostra una llauna de sopa en l'etiqueta mateixa de la llauna, de manera que es produeix un efecte de retroalimentació.

Existeixen nombroses formes de generar fractals. Els dos exemples explicats abans tenen una construcció determinista i, a més, produeixen un fractal autosemblant. Per *construcció determinista* s'entén una construcció que sempre que s'aplica dóna un mateix resultat, en contraposició amb construccions aleatòries, que no sempre donen el mateix resultat. *Autosemblant* significa que cada fragment de la figura és semblant geomètricament al tot o, dit d'una altra manera, que en ampliar qualsevol part de la figura obtenim exactament la mateixa figura.

Si ampliem una part d'un objecte fractal, sigui autosemblant o no, el veiem exactament amb el mateix grau de detall que l'objecte original. Si observem l'exemple de Koch a partir d'un segment, podem ampliar tant com desitgem un tros de corba i sempre veurem exactament el mateix i amb el mateix detall.

A cada fractal se li associa una dimensió fractal, que introduirem en l'apartat següent. La dimensió fractal mesura la rugositat de l'objecte fractal. Intuïtivament, la vora d'una circumferència no és rugosa, mentre que la corba de Koch presenta una rugositat molt alta. Aquesta dimensió no té perquè ser un nombre enter; en general escriurem la dimensió com una fracció, i d'aquest fet prové precisament el nom de *fractal*.

Activitat

Exercici 1

Si disposeu d'una càmera web o d'una càmera de vídeo, creeu diferents imatges utilitzant el principi de retroalimentació. Observeu els efectes a mesura que la càmera s'allunya del monitor o a mesura que s'apropa, així com a mesura que es gira respecte al monitor.

Exercici 2

Dissenyeu un fullet (elemental) de propaganda d'ordinadors utilitzant alguna tècnica semblant a la de les sopes Campbell.

2. Dimensió fractal i altres construccions fractals

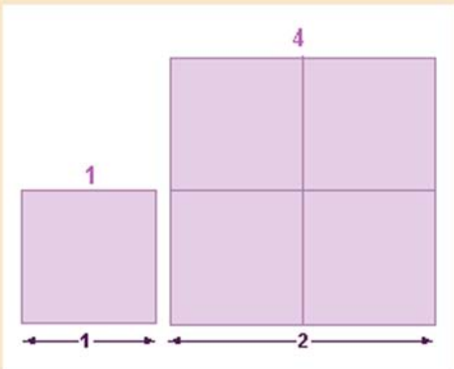
2.1. Dimensió fractal

La rugositat i la fragmentació d'un objecte fractal es poden descriure mitjançant un nombre que denominarem **dimensió fractal**. En general, calcular la dimensió fractal d'un objecte és un procés molt complex. En aquest apartat intentarem exposar una idea intuïtiva d'aquesta mesura i en donarem alguns exemples.

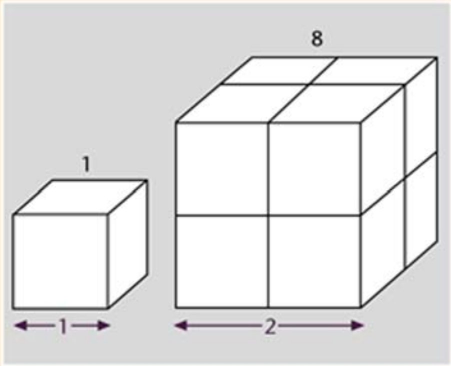
En geometria sabem que si tenim un segment de longitud 1, en doblar la seva longitud obtenim un segment de longitud 2. Si considerem un quadrat de costat 1, en doblar aquesta mesura obtenim un altre quadrat de costat 2, però en calcular l'àrea d'aquests dos quadrats observem que la relació entre les seves àrees no és doble; l'àrea del quadrat de costat 2 és quatre vegades major que l'àrea del de costat 1. Fem el mateix amb un cub: considerem un cub de costat 1, doblem la longitud del seu costat per a obtenir un segon cub de costat 2; el volum d'aquest segon cub és vuit vegades més gran que el volum del cub inicial.

Dimensió 1

Dimensió 2



Dimensió 3



Potències d'un nombre

Multiplicar un nombre diverses vegades per si mateix s'expressa de la forma següent $a \cdot a = a^2$, $a \cdot a \cdot a = a^3$, $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$, i així successivament, de manera que, en general, tindrem una expressió del tipus a^n, on n és un nombre natural. El nombre a s'anomena **base** de la potència, i el nombre n, **exponent**. Per exemple, per a elevar el nombre 7 a l'exponent 3 haurem de realitzar l'operació: $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$. Es pot observar que si en una potència l'exponent és 1, llavors el seu valor és simplement la base, és a dir, $a^1 = a$; en el cas en què l'exponent sigui 0, el valor és 1, és a dir, $a^0 = 1$ per a qualsevol valor d'a diferent de 0.

La potenciació pot estendre's a qualsevol exponent sense necessitat que sigui un nombre natural. Per a enters negatius entendrem l'exponent de la següent forma. Si l'exponent és un nombre enter negatiu, podem considerar que $-n$, amb n natural. Llavors:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \cdot a \ldots a}.$$

Per exemple, $5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{625}$

L'exponent d'una potència també pot ser un nombre racional, circumstància que entendríem de la forma següent: si l'exponent és un nombre racional, aquest podrà expressar-se com una fracció de la forma $\frac{m}{n}$ amb m un nombre enter i n un nombre natural diferent de 0, de manera que tenim:

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Per exemple, $4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$

A partir de la potenciació amb exponents racionals es pot estendre el càlcul de potències a tots els nombres reals; d'aquesta manera obtenim el que anomenarem **funció exponencial**. Així, per a qualsevol nombre real x podem calcular a^x mitjançant la funció $f(x) = a^x$.

Algunes propietats bàsiques de la funció exponencial són les següents:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Exercici

Realitzeu els càlculs següents:

a) 4^3
b) 2^{-3}
c) $\sqrt[3]{-8}$
d) $\left(\frac{1}{3^2}\right)^4 - \sqrt{5^4} + \frac{2^5}{2^2}$

e) $7^3 \cdot 7^{-5} \cdot 7^2$

Observem que les relacions obtingudes en doblar longituds són 2^1, 2^2 i 2^3. Si en lloc de doblar els costats els haguéssim triplicat, hauríem obtingut els nombres 3^1, 3^2, 3^3. Anàlogament, si haguéssim multiplicat cada costat per k, el resultat seria: k^1, k^2 i k^3. Això ens duu a relacionar la dimensió de l'objecte que estem tractant: 1 per a un segment, 2 per a un quadrat, 3 per a un cub. En el cas de doblar el segment, obtenim dos objectes idèntics a l'inicial. En doblar el costat del quadrat, obtenim quatre quadrats idèntics a l'inicial, i amb el cub obtenim vuit cubs idèntics a l'inicial. Així, tenim les relacions $2 = 2^1$; $4 = 2^2$ i $8 = 2^3$. Si simbolitzem amb n el nombre d'objectes obtinguts en fer una ampliació en cada un d'aquests casos i k és el factor d'ampliació, tenim la relació: $n = k^D$, on D és la dimensió en cada un d'aquests casos. Generalitzant aquesta propietat es calcula la dimensió d'un fractal en ampliar-lo k vegades comptant el nombre n d'objectes que obtenim idèntics a l'original i comprovant quin és el valor de D que satisfà $n = k^D$.

En general, el càlcul de la dimensió d'un objecte fractal és molt difícil, malgrat que per als exemples que hem exposat anteriorment resulta relativament senzill.

Calcularem la dimensió de la corba de Koch. La iteració que realitzem a cada pas de la creació de la corba de Koch ens proporciona quatre vegades aquesta mateixa corba, però cada corba té una longitud tres vegades menor. Dit d'una altra manera, en ampliar $k = 3$ vegades la corba de Koch (després de la 1a. iteració), obtenim $n = 4$ vegades la corba inicial. Això ens duu a l'equació: $4 = 3^D$. Aquesta equació es resol amb l'ús de logarismes. Així, tenim que $\ln 4 = \ln 3^D$, que equival a $\ln 4 = D \ln 3$, de manera que:

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1{,}2618595...$$

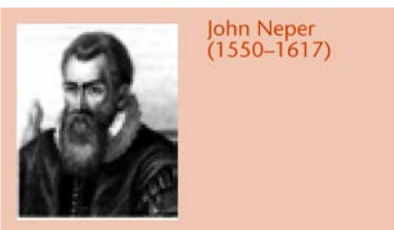
Activitat

Exercici

Calculeu la dimensió del triangle de Sierpinski.

Logarismes

Els logarismes van ser introduïts al començament del segle XVII per John Napier, a fi de facilitar operacions de càlcul.



En aquesta època, els càlculs s'havien de fer manualment. Sumar és molt més simple que multiplicar i, gràcies a una de les propietats bàsiques dels logarismes, un producte es converteix en una suma utilitzant taules de logarismes.

Un logarisme es defineix de la manera següent: el $\log_a b$ (ho llegirem com a "logarisme en base a de b") és un nombre x tal que compleix $a^x = b$. En el cas que la base del logarisme no s'especifiqui, suposarem que es tracta d'un logarisme en base 10, és a dir $a = 10$, i en el cas que la base sigui el nombre $a = 2{,}718281828459...$, l'anomenarem **logarisme neperià** (o logarisme natural) i el simbolitzarem amb ln en lloc de log. El nombre 2,718281828459... és el nombre e; es tracta d'un nombre que, igual que el nombre π, té una gran transcendència en matemàtiques.

Alguns exemples de logarismes en base 10 són:

- $\log 1 = 0$, ja que $10^0 = 1$
- $\log 10 = 1$, ja que $10^1 = 10$
- $\log 100 = 2$, ja que $10^2 = 100$

i en base e:

- $\ln e = 1$, ja que $e^0 = 1$ i $e^1 = e$

$ln\ \sqrt{e} = \frac{1}{2}$, ya que $e^{1/2} = \sqrt{e}$

Algunes propietats bàsiques dels logarismes són les següents:

1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

2) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3) $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$

Exercici 1

Realitzeu els següents càlculs:

a) $\log 10^{13}$
b) $\ln e^3$
c) $\ln 1$

Exercici 2

Resoleu les següents equacions:

a) $3^x = 5$
b) $\ln x^2 = 4$
c) $2^x = 4^{x+1}$

Mentre que la dimensió d'una recta és 1, la dimensió d'una superfície plana és 2 i la d'un volum és 3, les dimensions dels fractals presenten moltes més possibilitats.

A continuació donarem una idea intuïtiva sobre les dimensions que poden tenir els fractals. Una corba fractal que es trobi en un pla i que no es talli a si mateixa tindrà com a dimensió un nombre comprès entre 1 i 2. Quant més pròxima a 1 es trobi la dimensió, més suau serà aquesta corba. Una corba que omplís una superfície plana finita, per exemple un quadrat, tindria dimensió 2. Per a dimensions entre 2 i 3, la corba es talla a si mateixa diverses vegades, de manera que podria omplir un tros finit de superfície plana infinites vegades.

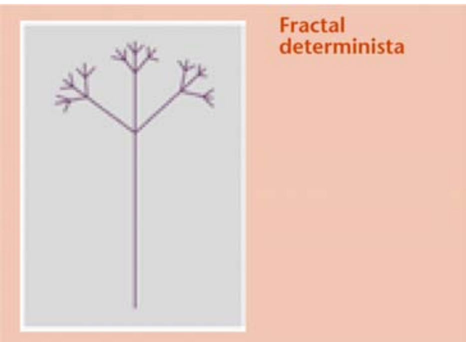
Per a corbes en l'espai, i que no es trobin en pla, també s'obtenen dimensions majors que 1, tot i que es poden tenir dimensions superiors a 2 sense necessitat d'interseccions. Una corba que ompli un volum finit, per exemple un cub, tindrà dimensió 3.

2.2. Fractals aleatoris

Els dos exemples que hem vist fins ara de fractals són alguns dels més fàcils de definir i, històricament, són els primers que es van crear. Aquests fractals són de tipus determinista i autosemblants, ja que la seva construcció queda ben determinada a partir de la llavor i de la iteració i, en considerar una part del total, obtenim un fractal similar al tot. Malgrat que qualsevol fractal es defineix, tal com hem indicat, a partir d'una llavor i una iteració, no tots els fractals són deterministes i autosemblants. A continuació descriurem altres tipus de fractals.

Es poden construir fractals en els quals la iteració tingui un component aleatori. En aquest cas, el fractal no tindrà la propietat d'autosemblança, tot i que pot donar-se una certa semblança entre les parts del fractal i el total. Aquest tipus de fractals s'anomenen **fractals autosemblants aleatoris**.

Crearem un fractal d'aquest tipus. Per a facilitar l'explicació, començarem creant un fractal autosemblant determinista. Prenem un segment de longitud 1 com a llavor. La iteració consistirà a col·locar dos segments de longitud 1/3 a partir d'un punt situat a un terç de l'extrem del segment inicial i formant-hi un angle de 60°. Obtindrem així una figura semblant a un arbre amb només tres branques. A cada un dels tres segments que formen aquestes tres branques apliquem novament la mateixa iteració. Actuant així de forma successiva obtindrem un fractal en forma d'arbre però totalment simètric respecte al segment inicial. Aquest arbre que hem creat és de tipus determinista, ja que cada segment queda perfectament definit.

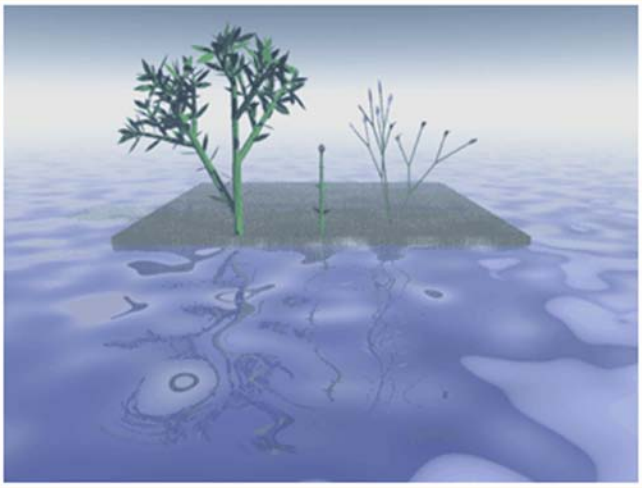


Per a crear un fractal autosemblant aleatori, n'hi haurà prou amb afegir variacions aleatòries sobre aquesta construcció. Comencem igualment amb un segment de longitud 1. La iteració serà similar, però en lloc d'afegir dos segments exactament en el punt que divideix el segment inicial en terços, ho farem en un punt situat en un interval pròxim a aquest punt i, en lloc de col·locar els dos segments formant un angle de 60° amb el segment inicial, els col·locarem de manera que formin un angle proper a 60°. Per a aconseguir aquests efectes, escollirem el punt de ramificació i l'angle de forma aleatòria en cada iteració. Amb la introducció d'aquestes eleccions aleatòries en la construcció del fractal, obtindrem una branca d'aspecte molt més natural.

Fractal aleatori

Malgrat que els fractals més simples de definir siguin deterministes, la importància pràctica dels fractals aleatoris resulta fonamental per a representar objectes de la naturalesa. De la mateixa manera que hem introduït aleatorietat en la construcció geomètrica, es pot escollir de forma aleatòria el color que s'usarà en cada part del fractal. Amb això es poden obtenir fractals realment espectaculars.

Aquesta imatge s'ha creat a partir de diversos fractals. La vegetació que apareix s'ha creat seguint un procés similar al descrit anteriorment.



Acabem de veure com generar un fractal autosemblant aleatori, però hi ha moltes formes d'introduir aleatorietat en la construcció d'un fractal. Per a això s'inicia la creació del fractal a partir d'una llavor i en la iteració que apliquem s'introdueix alguna dada de forma aleatòria. Aquesta dada pot consistir en les coordenades d'un punt, la divisió d'un segment, etc.

Activitat

Exercici 1

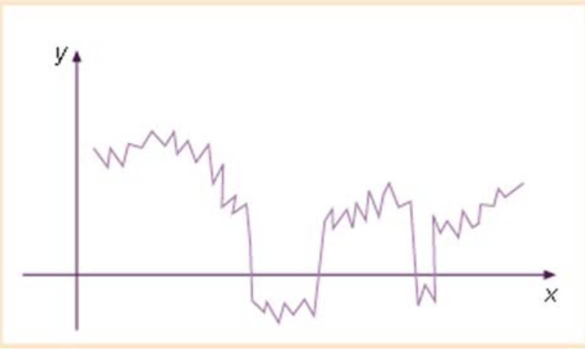
Creeu un fractal autosemblant aleatori seguint la mateixa construcció que amb el floc de neu de Koch, però escollint dos punts aleatoris de cada un dels segments que tinguem en el moment d'aplicar la iteració. A partir d'això, creeu un triangle equilàter la longitud del qual sigui el segment mitjà que hàgim escollit aleatòriament.

Exercici 2

Creeu un fractal autosemblant aleatori en 3D Studio que sembli un arbre, seguint les instruccions que presentem a continuació. Creeu un cilindre bastant alt i estret, que representarà el tronc de l'arbre. Escolliu un punt que estigui a una altura aproximada de tres quartes parts del tronc. Llanceu una moneda a l'aire. Si el resultat és cara, afegiu dues branques en aquest punt del tronc; si surt creu, afegiu-ne tres. L'angle que ha de formar cada branca amb el tronc principal el determinarem aleatòriament llançant un dau: es dividirà 60° entre el nombre que s'obtingui en tirar el dau. El gruix de les dues o tres branques ha de ser menor que el del tronc principal; aconseguirem aquest efecte dividint el gruix del tronc per la meitat. La disposició de les dues o tres branques entre elles queda a la vostra elecció com a creadors del fractal. Després d'aquesta primera iteració, repetiu el procés considerant cada una de les branques creades com si fossin el tronc principal. Realitzeu quatre iteracions per a aquest fractal.

Un altre tipus de corba fractal aleatòria és l'anomenat **camí aleatori**. Es parteix d'un punt qualsevol del pla i es tria la direcció i la longitud que caldrà seguir de forma aleatòria. S'avança des d'aquest punt en la direcció i la longitud escollides i des del punt final d'aquest primer trajecte s'itera el procés de bell nou. Això crea un camí pel pla format per segments rectilinis. Aquest tipus de procés per a la creació d'un camí es pot modificar en imposar condicions en l'elecció dels punts del pla; per exemple, que no estiguin a una distància superior a una certa longitud, que les direccions que cal prendre des de cada punt estiguin en un determinat rang, etc. Segons les condicions que imposem, obtindrem un camí més o menys rugós, i aquesta rugositat es mesurarà segons la dimensió fractal de la corba obtinguda.

Hi ha una altra forma de crear corbes d'aquest tipus. Considerem un segment en el pla. Escollim un punt del segment que no siguin els seus extrems i el desplacem aleatòriament. Aquest tipus de corba fractal es pot usar per a crear imatges com el contorn d'una costa, el perfil d'una muntanya, etc.

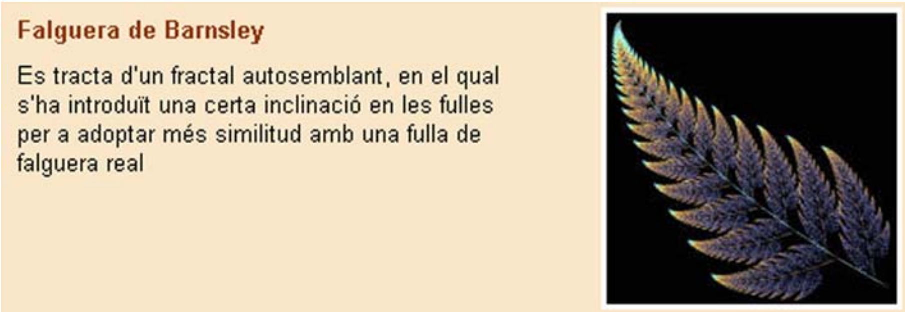


Camí aleatori

Un procés semblant es pot realitzar amb superfícies, en principi planes, si en desplacem punts de forma aleatòria. Aquesta aleatorietat es pot emmarcar dins d'uns intervals per a crear la rugositat desitjada.

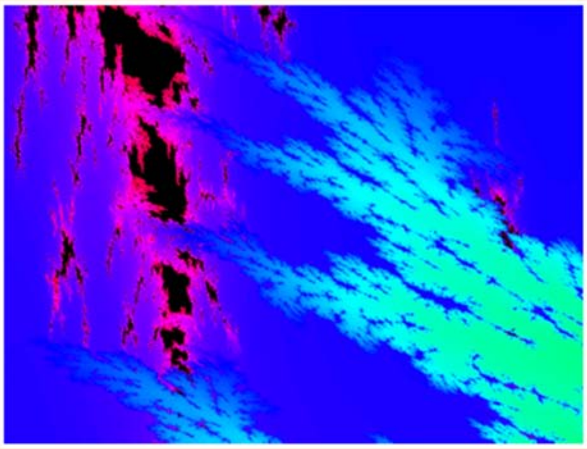
2.3. Altres tipus de fractals

Existeixen molts més tipus de fractals. Tot depèn de les operacions que es realitzin en les iteracions. Es poden aplicar diferents transformacions geomètriques, com ara torsions, girs, simetries, ampliacions, reduccions, deformacions, etc.



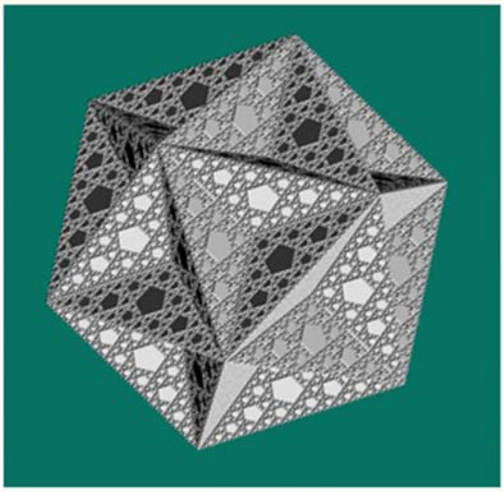
També és possible crear fractals si s'introdueixen decisions sobre el color que ha de prendre cada punt del pla. Per exemple, es considera una funció $f(x, y)$ que s'aplica a cada un dels punts del pla i que s'itera calculant $f(f(x, y))$, $f(f(f(x, y)))$, etc., fins a obtenir un resultat que compleixi certa condició. En aquell moment, s'assigna al punt (x, y) un color segons el nombre de vegades que hàgim aplicat la funció f al punt (x, y). Per a crear un fractal d'aquest tipus, s'han de realitzar milions d'operacions, de manera que només poden dibuixar-se amb l'ajuda d'un ordinador. Aquest tipus de fractals va ser ideat per Benoît B. Mandelbrot. Els dos exemples que us presentem a continuació es van crear seguint aquest procediment.

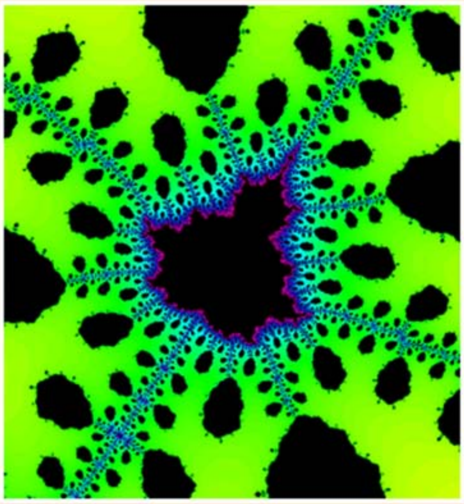
A continuació, exposem una col·lecció de fractals que s'ha calculat de maneres molt variades, des de procediments deterministes fins als procediments ideats per Mandelbrot en la creació de fractals. Aquests exemples fan patent la relació entre matemàtiques i art que hi ha en la geometria fractal.



Fractal que simula una nebulosa.

Fractal construït a partir d'un poliedre





Fractal de tipus Mandelbrot

Composicions de fractals que simulen vegetació.

Activitat

Exercici

(només apte per a sibarites de la música amb una bona base matemàtica)

Estudieu l'ús de la iteració, la recursió i els fractals en general en la composició de música a partir de l'article "Recursion: A Paradigm for Future Music?" de Nicholas Mucherino (74012.2265@compuserve.com), que podreu trobar a la pàgina web:

http://www-ks.rus.uni-stuttgart.de/people/schulz/fmusic/recursion.html

Exercicis d'autoavaluació

1. Un dels primers fractals que es coneixen va ser creat per...

a) Mandelbrot.
b) Koch.
c) Sierpinski.

2. Quina és la longitud de la corba de Koch?

a) 4/3.
b) Depèn de la longitud del segment que usem com a llavor.
c) Infinita.

3. Quants triangles queden en la cinquena iteració del triangle de Sierpinski?

a) 81.
b) 12.
c) 27.

4. Observant la cinquena iteració del triangle de Sierpinski, quants triangles s'han tret?

a) 27.
b) 40.
c) 50.

5. La superfície del triangle de Sierpinski és...

a) 0 cm^2.
b) 1 cm^2.
c) infinita.

6. Si un quadrat té de costat 3 cm, en ampliar-lo quatre vegades, s'obté un quadrat d'àrea...

a) 12 cm^2.
b) 36 cm^2.
c) 144 cm^2.

7. En calcular la dimensió D d'un fractal, hem arribat a l'equació $15 = 7^{D}$, llavors...

a) $D = 1{,}39166...$
b) $D = 0{,}71856...$
c) $D = 2{,}14285...$

8. La diferència entre un fractal determinista i un fractal aleatori és...

a) l'elecció de la llavor.
b) que el procés d'iteració queda perfectament definit en el primer cas, mentre que en el segon intervenen factors aleatoris.
c) No hi ha cap tipus de diferència.

9. Quina de les afirmacions següents és falsa?

a) Els fractals són un bon model per a representar objectes de la naturalesa.
b) Els fractals s'usen com una tècnica de compressió de dades.
c) Els fractals encara no s'han usat per a la generació de gràfics per ordinador.

10. Es diu que un fractal és autosemblant quan...

a) està format per segments.
b) algunes parts del fractal són semblants geomètricament a tot el fractal.
c) la llavor amb què s'ha format el fractal és un triangle.

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. b
a) Incorrecta. Tot i que va ser Mandelbrot qui va donar nom als fractals, no va ser ell qui en va crear els primers.
c) Incorrecta. Koch va crear el seu famós fractal uns deu anys abans que el triangle de Sierpinski.

2. c
a) Incorrecta. Això seria el valor de la primera iteració si la llavor fos un segment de longitud 1.
b) Incorrecta. Se suposa que fem infinites iteracions. Torneu a llegir l'apartat on s'explica la corba de Koch.

3. a
b) Incorrecta. Noteu que en cada iteració el nombre de triangles es multiplica per 3.
c) Incorrecta. Noteu que en cada iteració el nombre de triangles es multiplica per 3.

4. b
a) Incorrecta. Noteu que el triangle està format per tres còpies de la iteració anterior més el triangle gran que s'ha tret.
c) Incorrecta. Noteu que el triangle està format per tres còpies de la iteració anterior més el triangle gran que s'ha tret.

5. a
b) Incorrecta. Incorrecte, penseu que se suposa que hem fet infinites iteracions.
c) Incorrecta. Si calculem l'àrea d'una iteració, el resultat és 2/3 de l'anterior. En iterar el procés infinites vegades, l'àrea tendeix a 0.

6. c
a) Incorrecta. En multiplicar longituds per 4, les àrees es multipliquen per 16.
b) Incorrecta. En multiplicar longituds per 4, les àrees es multipliquen per 16.

7. a
b) Incorrecta. Heu de calcular ln15 / ln7.
c) Incorrecta. Heu de calcular ln15 / ln7.

8. b
a) Incorrecta. Amb una mateixa llavor es poden crear fractals deterministes o aleatoris.
c) Incorrecta. Sí que hi ha diferència.

9. c Correcte, aquesta afirmació és falsa.
a) Incorrecta. Incorrecte: aquesta afirmació és vertadera.
b) Incorrecta. Incorrecte: aquesta afirmació és vertadera.

10. b
a) Incorrecta. Hi ha fractals autosemblants que no estan formats per segments.
c) Incorrecta. Hi ha fractales autosemblants que no estan formats per segments.