Disseny i proporció

Pere Cruells

PID_00150793

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

1. El concepte de *proporció*

1.1. Introducció

La **teoria de la proporció** ha tingut una gran importància en totes les branques de l'art i en l'estètica. Editors, publicistes, pintors, escultors, arquitectes i fins i tot músics s'hi han basat a l'hora de dissenyar les obres.

Trobem aplicacions de la teoria de la proporció a les piràmides egípcies, els edificis de la Grècia clàssica, les pintures de Leonardo da Vinci, les escultures de Miquel Àngel i les obres de l'arquitecte Le Corbusier. En algunes d'aquestes obres queda clar que els autors van usar els seus coneixements sobre la teoria de la proporció, com és el cas de Le Corbusier o de Leonardo da Vinci. En d'altres, estudis posteriors han trobat algunes proporcions clàssiques en la composició, la qual cosa fa suposar que alguns d'aquests autors en tenien coneixement, d'aquestes proporcions. La intenció d'aquests autors era aconseguir un ritme en les obres que creés un efecte visual agradable. L'exemple més palpable i actual per a qualsevol de nosaltres és el de les targetes de crèdit: per què les targetes de crèdit tenen les mides que tenen? Simplement es van escollir aquestes mides per una qüestió estètica. Es tracta d'un rectangle ni massa allargat ni massa quadrat, i les propietats matemàtiques d'aquestes mides el fan molt interessant. La proporció que té es basa en el nombre d'or, que tractarem al final d'aquest mòdul.

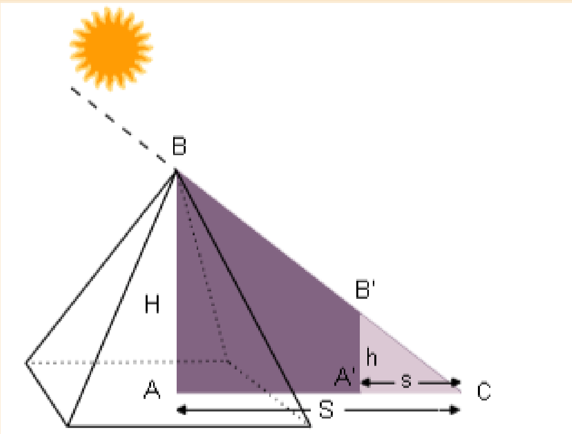
Leonardo da Vinci

En observar la naturalesa també trobem exemples de proporcions que han estat estudiades al llarg de la història. En aquests estudis, en la distribució de les branques dels arbres o el mosaic que es forma a la closca d'una pinya tropical retrobem algunes de les proporcions utilitzades al llarg de la història de l'art.

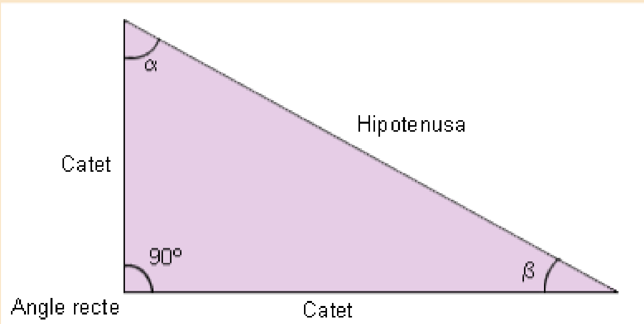
Exemple

Per exemple, les targetes de crèdit actuals que acabem de comentar, alguns documents d'identitat i fins i tot els carnets d'identificació dels estudiants d'aquesta universitat segueixen aquesta proporció.

Carnet del Graduado Multimedia



Una de les primeres aplicacions de la proporció que es coneix és la que va fer Tales de Milet (s. IV a. C.) en mesurar l'alçada de les piràmides egípcies.
Tales va calcular l'altura de les piràmides mesurant-ne l'ombra just en el mateix moment en què l'ombra projectada per un pal vertical era exactament igual que l'altura.



Un triangle rectangle és un triangle amb dos costats que formen un angle recte, és a dir, de 90°. Els dos costats que formen aquest angle recte es denominen catets, mentre que el tercer costat s'anomena hipotenusa. Els angles interiors d'un triangle sumen 180°. En el cas d'un triangle rectangle, podem afirmar que la suma dels dos angles que forma la hipotenusa amb cadascun dels catets dóna un resultat de 90°.

Els dos triangles que fa servir Tales tenen els mateixos angles interiors, són triangles rectangles, i la inclinació del Sol fa que els dos triangles tinguin els mateixos angles. Així, si un triangle té els dos catets de la mateixa longitud, l'altre també. L'important d'aquest mètode és que Tales es va adonar que comparava dos triangles, i que aquests triangles eren proporcionals. Les mides dels triangles eren diferents, però els angles interiors eren exactament iguals. Generalitzant aquest fet, tenim el **teorema de Tales** tal com el coneixem actualment.

En l'actualitat, la **proporció àuria** s'ha utilitzat tant per tota la història que té com pel fet de proporcionar un rectangle estèticament agradable a la vista.

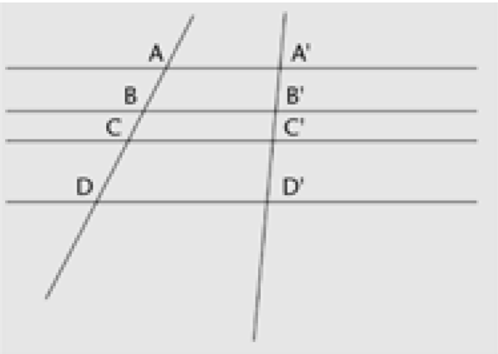
1.2. Teorema de Tales

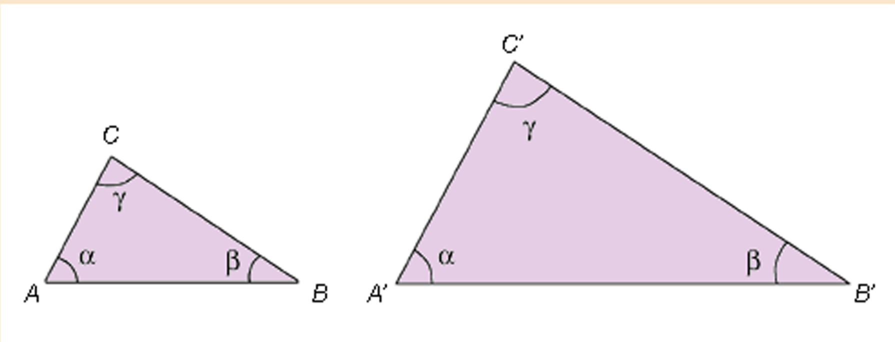
Abans de tractar directament el concepte de *proporció*, recordarem el **teorema de Tales**, perquè és un teorema bàsic en la teoria de la proporció. Com a aplicació directa d'aquest teorema, introduirem què s'entén per **triangles semblants**.

Donada una família de rectes paral·leles que tallen un parell de rectes qualssevol, els segments que es creen en una recta i l'altra són proporcionals.

Si ens fixem en la figura adjunta, el teorema de Tales diu que:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = ..$$





La principal aplicació del teorema de Tales es dóna en l'estudi de triangles semblants. Direm que dos triangles són semblants quan el seus costats són proporcionals o quan els seus angles interiors són iguals.
Els dos triangles de la figura són semblants i, per tant, el seus angles interiors són iguals i els seus costats proporcionals: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

Per a tenir dos triangles semblants no s'han de comprovar totes les condicions de la definició. N'hi ha prou amb aquests criteris:

- **Criteri 1**: si dos triangles tenen els tres angles interiors iguals, són semblants. D'això deduïm que si dos triangles tenen els costats paral·lels dos a dos, els angles interiors són iguals i, per tant, són triangles semblants. Aquest cas particular es veu en el dibuix anterior.

- **Criteri 2**: si dos triangles tenen els costats proporcionals dos a dos, són semblants.

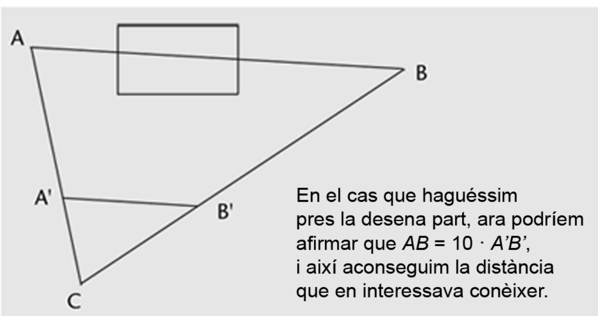
- **Criteri 3**: si dos triangles tenen dos costats proporcionals dos a dos i l'angle que formen aquests costats coincideix en els dos triangles, els dos triangles són semblants. Un cas particular molt comú d'aquest darrer criteri es refereix a triangles rectangles: si dos triangles rectangles tenen els catets proporcionals, aquests triangles han de ser semblants.

Aquests criteris es dedueixen del teorema de Tales. Amb aquest teorema i amb l'estudi de triangles semblants podrem fer càlculs amb triangles.

Exemple

Volem calcular la distància entre dos punts, *A* i *B*, però no podem posar una cinta mètrica d'un punt a l'altre, ja que tenim algun obstacle al mig, per exemple, una casa. Ens situem en un punt *C* des del qual puguem mesurar les distàncies *AC* i *BC*. Amb això construïm un triangle del qual coneixem dos costats i prou. Ens interessa conèixer el tercer. Per a això construïm un altre triangle més petit que aquest però que s'hi assembli. Agafem *A*' i *B*' de manera que les longituds *CA*' i *CB*' siguin proporcionals a les longituds *CA* i *CB*, respectivament. És a dir: $\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'}$. Això ho podem aconseguir fàcilment agafant, per exemple, *CA*' com una desena part de *CA*, i *CB*' com una desena part de *CB*. Si ho agafem així, tenim: $\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'} = 10$, amb la qual cosa obtenim dos triangles semblants: el triangle *ABC* i el triangle *A'B'C*, amb dos costats proporcionals i l'angle igual que formen aquests dos costats. Pel tercer criteri de semblança podem afirmar que els dos triangles són semblants i, per tant:

$$\frac{CA}{CA'} = \frac{CB}{CB'} = \frac{AB}{A'B'}$$



Com hem vist, les propietats de les proporcions i, sobretot, les d'algunes proporcions clàssiques, influeixen enormement en l'art i, a més, es veuen en la naturalesa.

1.3. Definició de *proporció*

WEB

Recurs interactiu accessible només al web.

La definició de **proporció** és summament senzilla. Donats dos nombres positius a i b, es defineix la proporció entre aquests nombres com el quocient del més gran entre el més petit. Això ho escriurem usant les funcions màx(a, b) i mín(a, b), que donen el més gran i el més petit dels dos nombres a i b. Així, tenim que la proporció entre els nombres a i b es defineix de la manera següent:

$$p(a, b) = \frac{\text{màx}(a, b)}{\text{mín}(a, b)}$$

Exemple

Volem calcular la proporció entre 2 i 3, és a dir, p (2, 3). Per a això plantegem el càlcul:

$$p(2,3) = \frac{\text{màx}(2, 3)}{\text{mín}(2, 3)}$$

Com que màx(2, 3) = 3, mín(2, 3) = 2, tenim que $p(2, 3) = \frac{3}{2} = 1{,}5$. Simplement hem de pensar que el quocient s'obté del més gran entre el més petit.

Aquests són alguns altres exemples:

$$p(4,2) = \frac{\text{màx}(4, 2)}{\text{mín}(4, 2)} = \frac{4}{2} = 2; \quad p(10, 6) = \frac{\text{màx}(10, 6)}{\text{mín}(10, 6)} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$$

Comparació de fraccions

Per calcular la proporció de dos nombres que són representats per fraccions, hem de saber com els hem de comparar i establir així quin és el més gran i quin és el més petit. La manera més senzilla de fer-ho és dividint-los, és a dir, buscant l'expressió decimal de la fracció (es pot fer amb una calculadora) i comparant-ne les expressions decimals.

També es poden comparar seguint el criteri següent: si a, b, c i d són positius, llavors:

$$\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \quad \text{equival a} \quad ad \le cb$$

Així, podem calcular proporcions del tipus:

$$p\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right) = \frac{\text{màx}\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right)}{\text{mín}\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{5}\right)} = \frac{2/3}{3/5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9}$$

En aquest exemple sabem que 2/3 és més gran que 3/5, ja que $2 \cdot 5 = 10$ és més gran que $3 \cdot 3 = 9$.

Per a calcular una proporció s'han de saber comparar i dividir nombres. No solament nombres naturals, sinó també nombres racionals i nombres reals.

N conjunt dels nombres naturals: {1, 2, 3, 4, 5, 6...}

Z conjunt dels nombres enters: {... –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5...}

Q conjunt dels nombres racionals:

$$\left\{ \frac{m}{n} \text{ si } m, n \text{ són nombres enters amb } n \neq 0 \right\}$$

Nombres naturals, enters i racionals

Hi ha diverses menes de problemes que ens obliguen a introduir diferents classes de nombres. Problemes tan simples com comptar el nombre d'ovelles d'un ramat o comparar extensions de terreny per a conrear-lo han fet que la humanitat introdueixi els nombres. Els més intuïtius són els **nombres naturals** i les seves fraccions. Comptar un, dos, tres, etc. és el primer que aprenem dels nombres, i amb això introduïm els nombres naturals. Els nombres naturals ens permeten comptabilitzar objectes que tenim classificats d'una manera o una altra. Per exemple, podem comptabilitzar el nombre d'ovelles d'un ramat. Així, el conjunt dels nombres naturals, que denotem amb ***N***, és el conjunt format pels nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc., és a dir, ***N*** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13...}.

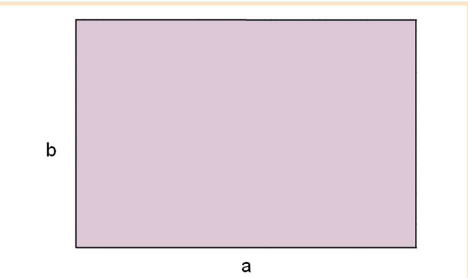
A partir dels nombres naturals podem crear fraccions. Les **fraccions** també apareixen de manera natural en comparar nombres naturals. Els mateixos exemples de proporció ens condueixen dels nombres naturals a les seves fraccions.

Donada una fracció, per exemple $\frac{n}{m}$ amb n i m com a nombres naturals i essent m diferent de zero, el nombre de la part superior es diu **numerador**, mentre que el nombre de la part inferior es diu **denominador**.

Tant els naturals com les seves fraccions es poden sumar i multiplicar sense cap problema. Trobem un obstacle, però, quan mirem de restar aquests nombres. No es poden restar sempre dos nombres naturals per a obtenir un altre nombre natural. Això ens obliga a introduir els **nombres amb signe**. Per a cada nombre natural, n, introduïm dos símbols nous: $+n$ i $-n$. També s'ha d'introduir el nombre zero: 0. El conjunt dels nombres naturals amb signe és el **conjunt dels nombres enters**. Es denota amb la lletra ***Z*** i podem escriure-ho de la manera següent: ***Z*** = {... –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5...}. Dins d'aquest conjunt ja podem sumar i restar sense cap problema. També podem introduir les fraccions amb nombres enters. El conjunt de totes les fraccions que s'obtenen en fer el quocient entre nombres enters és el **conjunt dels nombres racionals**. Aquest conjunt també inclou el zero, però no pot incloure les fraccions amb zero en el denominador. Inclou totes les fraccions positives i negatives i es denota amb la lletra **Q**.

Es pot destacar que tot nombre natural és un nombre enter i, al seu torn, tot nombre enter és un nombre racional.

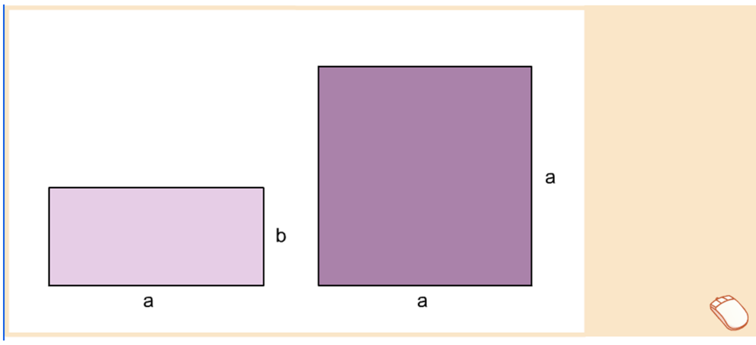
1.4. Propietats de la proporció



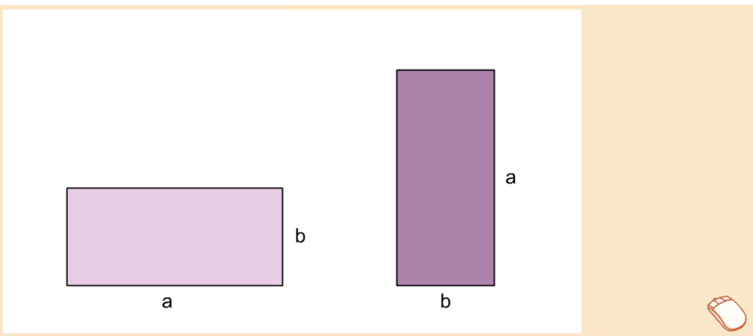
La definició de proporció també es pot interpretar com la proporció d'un rectangle de costats a i b, o simplement com la proporció entre dos segments de longituds a i b.

Amb aquesta definició tan senzilla tractarem de raonar diverses propietats sobre la proporció. Ens centrarem en algunes proporcions que, per raons històriques o per la bellesa de les propietats que tenen, s'han convertit en **proporcions clàssiques**.

El primer que es desprèn de la definició és que la proporció és sempre més gran o igual que 1, i només és 1 quan a i b són iguals. Aquesta propietat es dedueix simplement del fet de dividir dues quantitats en què el numerador sempre supera el denominador o és igual que el denominador. En cas d'interpretar la proporció des del punt de vista dels rectangles, aquesta propietat ens indica que tot rectangle té una proporció més gran que 1, i només té una proporció 1 si aquest rectangle és, en realitat, un quadrat.



També és fàcil de veure que la proporció no depèn de l'ordre de les dades. És obvi que sempre obtindrem quocient entre la dada més gran i la dada més petita i, per tant, tindrem que $p(a, b) = p\ (b, a)$. Aquesta propietat la podem interpretar amb rectangles, ja que la proporció no depèn de la posició del rectangle. Fixem-nos que la definició de *proporció d'un rectangle* no és "base partit per altura", sinó "costat més gran entre costat més petit".



El teorema de Tales, que hem esmentat en la introducció, es pot interpretar com una altra propietat de la proporció, ja que aquesta proporció és invariable per ampliacions o reduccions. Això vol dir que:

$$p(ka, kb) = p(a, b)$$

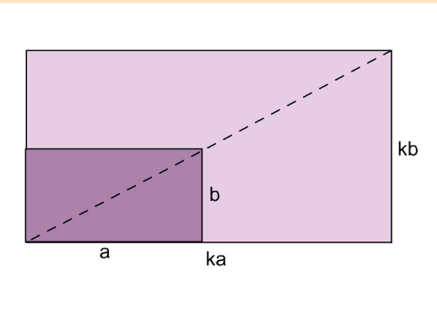
Aquesta propietat és certa ja que, si anomenem a el més gran i b el més petit, tenim que $a \geq b$, i llavors:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$$

Aquesta igualtat és certa, si recordem que en una fracció es poden eliminar factors que coincideixen en el numerador i el denominador, o bé recordant que dues fraccions són iguals quan el producte en creu coincideix:

$$(ka)b = (kb)a$$

Interpretant aquesta propietat de les proporcions com la proporció d'un rectangle, tenim que, donat un rectangle de costats a i b, en multiplicar els costats per una mateixa constant positiva, k, s'obté un rectangle de la mateixa proporció.

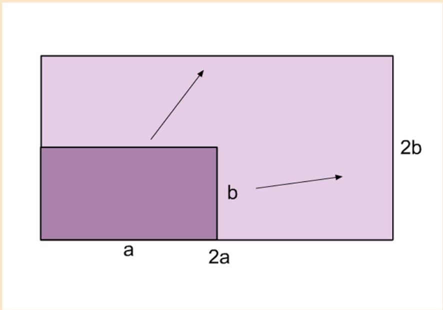


Una manera gràfica de comprovar si dos rectangles tenen o no la mateixa proporció és superposant-los un damunt de l'altre, de manera que coincideixin un dels vèrtexs i un dels costats majors. Llavors, si les diagonals de cada rectangle que passen per aquest vèrtex se superposen, els rectangles tenen la mateixa proporció.

El recíproc d'aquesta propietat també se satisfà: si dos rectangles tenen la mateixa proporció, les diagonals se sobreposen en situar un rectangle a sobre de l'altre (de la manera que hem indicat). Les justificacions d'aquestes afirmacions es raonen gràcies al teorema de Tales.

Una de les maneres més còmodes d'obtenir a la pràctica un rectangle ampliat o reduït és mitjançant l'ús d'una fotocopiadora. Si donem l'ordre a la fotocopiadora que faci una ampliació de 200%, veurem que la proporció entre els costats corresponents del rectangle ampliat i de l'original és 2. Per exemple, si un full de paper fa 30 cm × 20 cm, per a ampliar-lo a un 200% hi hem de posar un full de 60 cm × 40 cm, és a dir, que multipliquem les longituds per 2. Això passa de manera semblant en el cas d'una reducció: si marquem un factor d'ampliació de 50%, reduïm tots els costats del full a la meitat; en aquest cas multipliquem les longituds pel factor 0,5. Fixem-nos que la proporció entre els costats del full original al reduït també és 2, i no ½, ja que en proporció sempre considerem el més gran entre el més petit a l'hora d'obtenir el quocient.

En aquestes ampliacions i reduccions ens hem fixat com canvien les longituds dels costats, però què passa amb les àrees? Si ampliem un full un 150%, multipliquem els dos costats per 1,5. Si els costats originals eren de longituds a i b, l'àrea original era de $a \cdot b$. El full ampliat té una àrea $1{,}5\ a \cdot 1{,}5\ b = 1{,}5^2 ab$, és a dir, $1{,}5^2 = 2{,}25$ vegades l'àrea del full original. Això es pot apreciar clarament en la figura adjunta si l'ampliació és a 200%; en aquest cas, l'àrea es multiplica per $2^2 = 4$. En resum, quan les longituds s'amplien per un determinat factor k, les àrees queden afectades pel factor k^2. Passa de manera anàloga en el cas de les reduccions; l'única diferència és que, en aquest cas, els factors de reducció són més petits que 1.



Ampliació al 200%

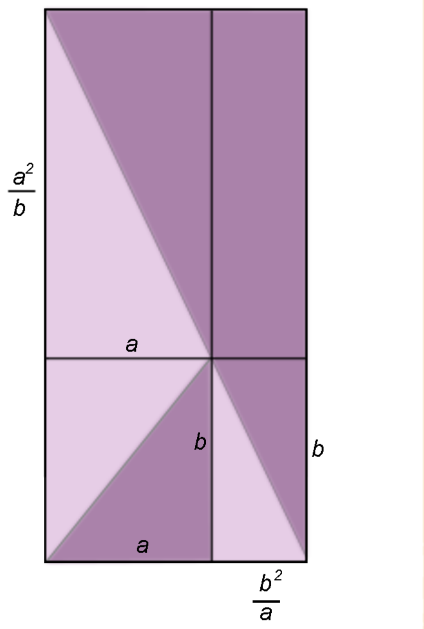
Es produeix aquest mateix fet amb les lletres que hi ha impreses en un full que volem ampliar o reduir. Si ampliem un full un 200%, l'altura i l'amplada es multipliquen per 2, mentre que la superfície es multiplica per 4. Així, arribem a la conclusió que en ampliar un full imprès a 200% gastem 4 vegades més de tinta (o tòner de fotocopiadora).

Fer un X% d'una quantitat vol dir multiplicar aquesta quantitat per $\frac{X}{100}$. Per exemple, si volem ampliar un full de paper a 150%, hem de multiplicar les longituds del full per $\frac{150}{100} = 1{,}5$. Si el que volem és una reducció a 50%, el factor de reducció ha de ser $\frac{50}{100} = 0{,}5$. En general, per a les ampliacions tenim factors més grans que 1, mentre que els factors més petits que la unitat es refereixen a les reduccions. En llenguatge habitual és freqüent parlar d'una "ampliació del 50%". En aquest cas, s'entén que el factor d'ampliació és de 150% = 1,5.

WEB

Recurs interactiu
accessible només al web.

Rectangles recíprocs



Donat un rectangle, es poden construir els seus dos rectangles recíprocs de la manera següent: per a cadascun dels costats del rectangle, es construeix un altre rectangle amb aquest costat i de manera que la seva diagonal sigui perpendicular a la diagonal del rectangle inicial tal com indica la figura adjunta.

És fàcil de veure que aquests rectangles tenen la mateixa proporció, ja que si retallem cadascun dels rectangles recíprocs i els sobreposem a l'inicial amb un gir de 90°, les diagonals se sobreposen. D'aquest fet podem deduir, a més, que els costats dels rectangles recíprocs són a i $\frac{a^2}{b}$ l'un, i b i $\frac{b^2}{a}$ l'altre.

Exercici 1

Comproveu aquesta darrera propietat, és a dir, que els costats dels dos rectangles recíprocs d'un rectangle de costats a i b fan b i $\frac{b^2}{a}$ en un cas, i a i $\frac{a^2}{b}$ en l'altre.

Solució:

Observeu pel dibuix que $b < a$. Aleshores la proporció del rectangle és $\frac{a}{b}$.

Hi ha una propietat dels nombres molt fàcil de comprovar que diu que si $b < a$ i $k > 0$, aleshores $b{\cdot}k < a{\cdot}k$ (per exemple, com que $4 < 10$, aleshores $4{\cdot}5 < 10{\cdot}5$).

Prenent $k = b$ en el nostre cas, obtenim que $b^2 < a{\cdot}b$, i ara multiplicant per $k = \frac{1}{a}$ obtenim que $\frac{b^2}{a} < b$. Observeu que $\frac{b^2}{a}$ i b són els costats d'un dels triangles recíprocs. Si calculem la proporció fent el costat gran entre el petit, obtenim...

b: $\frac{b^2}{a} = \frac{b}{1} : \frac{b^2}{a} = \frac{ba}{b^2} = \frac{a}{b}$.

De la mateixa manera es pot veure que $a < \frac{a^2}{b}$ i aleshores la proporció també és $\frac{a}{b}$.

Vegem un exemple: prenent a = 100 i b = 10, obteniu que la proporció és 10.

Els rectangles recíprocs són en un cas 10(= b), 1(= $\frac{b^2}{a}$) i en l'altre cas 100(= a),1.000(= $\frac{a^2}{b}$).

Comprovem, per assegurar-nos que la proporció del primer és 10/1 = 10 i la del segon 1.000/100 = 10, que coincideix amb la del primer rectangle.

Exercici 2

Comproveu que el rectangle que s'obté en reunir els quatre rectangles de la figura també té la mateixa proporció que el rectangle inicial.

Solució:

Aplicant que $a + \frac{b^2}{a} < b + \frac{a^2}{b}$, podem calcular la proporció molt fàcilment:

proporció = costat gran : costat petit = $b + \frac{a^2}{b} : a + \frac{b^2}{a} = \frac{b^2+a^2}{b} : \frac{a^2+b^2}{a} = \frac{(a^2+b^2).a}{(a^2+b^2).b} = \frac{a}{b}$ tal com volíem veure.

Ara haurem de demostrar que $a + \frac{b^2}{a} <$ b + $\frac{a^2}{b}$, o si fem mínim comú múltiple, que $\frac{a^2+b^2}{a} < \frac{a^2+b^2}{b}$.

Com sabem que $b < a$, multiplicant per $k = \frac{1}{a}$ obtenim $\frac{b}{a} < \frac{a}{a}$ o equivalentment $\frac{b}{a} < 1$. Si ara tornem a multiplicar per $k = \frac{1}{b}$ obtenim que $\frac{b}{ab} < \frac{1}{b}$ o simplificant la b en la primera fracció tenim $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Aleshores, multiplicant per $k = (a^2 + b^2)$ obtenim el que volíem veure: $\frac{a^2+b^2}{a} < \frac{a^2+b^2}{b}$.

Nota: aquests dos exercicis són de molt alt nivell. Són demostracions matemàtiques generals de propietats dels rectangles.

Una altra manera de calcular un tant per cent és amb una regla de tres. Per exemple, per a calcular un 16% de 3 metres, hem de fer el següent:

$$\left.\begin{matrix} 16 & \text{—} & 100 \\ x & \text{—} & 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{16}{x} = \frac{100}{3} \Rightarrow 100x = 16 \cdot 3 \Rightarrow x = \frac{48}{100} = 0{,}48 \text{ m}$$

Podem resumir les propietats de la proporció comentades fins ara de la manera següent:

$p(a, b) \geq 1$
$p(a, b) = 1$, solament si $a = b$
$p(a, b) = p(b, a)$
$p(ka, kb) = p(a, b) =$ per a qualsevol valor de k positiu

Exercici 1

D'un negatiu de 24 mm × 36 mm es treu a una fotografia de 40 cm × A cm. Quin pot ser el valor de *A*?

Solució:

En passar d'un negatiu a un positiu amb una ampliadora es mantenen les proporcions del rectangle que emmarca el negatiu i el positiu. La proporció del negatiu és $p(36, 24) = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$. La proporció del positiu és $p(40, A) = \frac{\text{màx}(40, A)}{\text{mín}(40, A)}$. No sabem si el valor del costat *A* és més gran o més petit que 40 cm, per la qual cosa estudiem les dues possibilitats. Si $A \geq 40$, llavors $p(40, A) = \frac{\text{màx}(40, A)}{\text{mín}(40, A)} = \frac{A}{40}$. Imposant que es mantinguin les proporcions, tenim que $\frac{A}{40} = \frac{3}{2} \rightarrow A = 40\frac{3}{2} = 60$ cm.. En cas que $A \leq 40$, tenim que $p(40, A) = \frac{\text{màx}(40, A)}{\text{mín}(40, A)} = \frac{40}{A}$ i, per tant, que $\frac{40}{A} = \frac{3}{2} \rightarrow A = 40\frac{2}{3} = \frac{80}{3} = 26{,}67$ cm.. Així, tenim dues possibilitats com a solució: fer servir un paper de 40 cm × 60 cm o bé un de 26,67 cm × 40 cm.

Exercici 2

Ens donen la imatge següent perquè la inserim en un lloc web. Per qüestions de format la volem reduir fins a una altura d'1,5 cm. Quina amplada li hem de donar?

Solució:

La solució pot variar una mica en funció de les mides que prengueu de la imatge. Per exemple, mesureu amb un regle la impressió dels apunts i calculeu la proporció.

Exercici 3

Per a quins valors x tenim que $p(x, y) = p(x^2, y^2)$ i per a quins tenim que $p(x, y) = p(1/x,1/y)$?

Solució:

Imaginem-nos que $x \geq y$. En cas contrari, s'intercanvien els valors. Llavors veiem que $x^2 \geq y^2$. Així, tenim que $p(x, y) = \frac{x}{y} = (p^2, x^2) = \frac{x^2}{y^2}$. La condició que tenim per a x i y és $\frac{x}{y} = \frac{x^2}{y^2} \rightarrow \frac{x}{y} = 1 \rightarrow x = y$. Així, concloem que aquesta igualtat només es dóna per a proporcions iguals a 1.

En un exercici anterior es pot veure que si $x \geq y$, aleshores $\frac{1}{y} \geq \frac{1}{x}$. Aleshores $P\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} : \frac{1}{x} = \frac{x}{y}$.

Aleshores, com que imposem que $P(x, y) = P\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, tenim que $\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$ i això és veritat sempre, siguin quins siguin els valors de x i y. Per exemple, si tenim $x = 10$ i $y = 2$, observeu que la proporció és 5. Els nombres $\frac{1}{10} = 0{,}1$ i $\frac{1}{2} = 0{,}5$ formen un nou rectangle de proporció = costat gran : costat petit = 0,5:0,1 = 5. La mateixa proporció que el rectangle original.

2. Proporcions racionals i proporcions √*n*

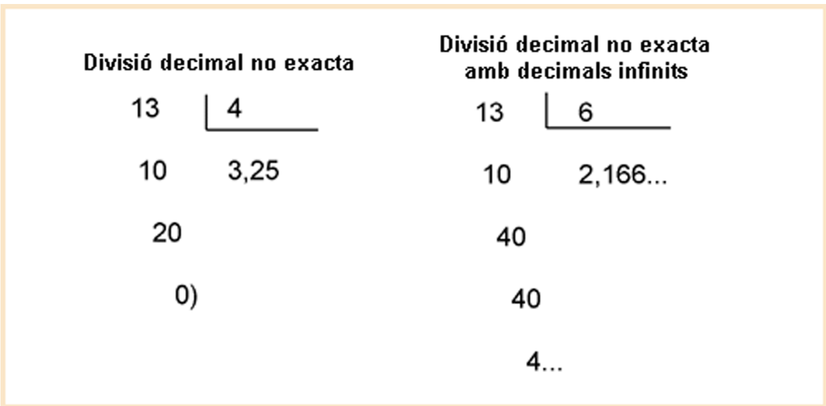
2.1. Proporcions racionals

Ja hem introduït els nombres racionals en definir la proporció i parlar de diferents conjunts de nombres: **naturals**, **enters** i **racionals**. Si en calcular una proporció s'obté un nombre que es pot expressar com a quocient de nombres enters, aquesta proporció s'anomena **proporció racional**. Aquesta mena de proporcions s'han fet servir al llarg de la història en nombroses branques de l'art. Pitàgores va descobrir proporcions racionals en l'escala musical. Els arquitectes i constructors han usat aquestes proporcions en les mides d'unes rajoles, la separació entre unes columnes d'una catedral o a l'hora de dissenyar la divisió d'una finestra per a distribuir-hi els vidres. En dividir un full en terços per a preparar un tríptic publicitari utilitzem proporcions racionals.

Representació decimal i nombres reals

Recordem que tot nombre racional es pot expressar com una fracció de nombres enters; aquesta fracció, a més, es pot representar com un nombre decimal. Donat un nombre racional en forma de fracció, podem fer la divisió per a obtenir l'expressió decimal. En fer aquesta divisió poden passar dues coses. La divisió pot ser exacta o pot tenir decimals. Si és exacta, aquest nombre racional també és enter. Si té decimals, tornem a tenir dues possibilitats diferents: pot ser que la divisió tingui un nombre finit de decimals o pot ser que sigui una divisió amb decimals infinits.

Vegem un parell de divisions a manera d'exemple:



En el primer exemple, el nombre de decimals és finit, ja que en dividir hem arribat a 0 en la resta, amb la qual cosa la divisió s'acaba. En el segon exemple, entrem en una repetició sense sortida, de manera que el nombre de decimals és infinit, però amb una repetició cíclica.

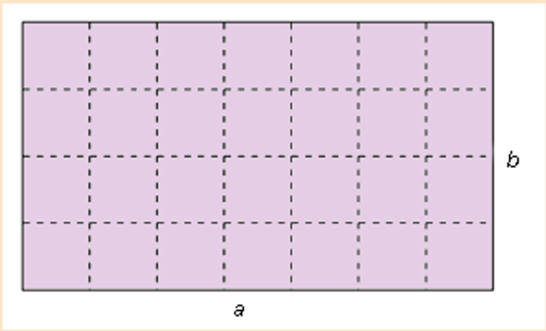
Aquestes dues possibilitats són totes les que hi pot haver amb nombres racionals. Així, podem afirmar que tot nombre racional s'expressa de manera decimal amb un nombre finit de xifres o bé amb una part decimal amb periodicitat. En cas de representació decimal finita, es pot completar aquesta representació amb un període de zeros a la dreta. Per exemple, el nombre racional 3/2 es pot expressar com a 1,5, però també com a 1,5000..., amb el zero com a part periòdica de la part decimal. En resum, tots els nombres racionals tenen representació decimal amb una part decimal periòdica.

És fàcil de veure que hi ha nombres la representació decimal dels quals no és periòdica. Per exemple:

$$0{,}101001000100001000001000000\ldots$$

D'aquests nombres se'n diu **irracionals**. A banda d'aquest exemple, podem posar molts exemples més de nombres irracionals: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, el nombre π, etc. Tots els nombres racionals, juntament amb els irracionals, formen el conjunt dels **nombres reals**, que es representa per ***R***.

Exemple



Per exemple, el rectangle de la figura es pot superposar amb una quadrícula que encaixi perfectament amb els seus vèrtexs, amb la qual cosa la seva proporció es pot calcular de manera directa:

$$p(a, b) = \frac{7}{4}$$

Així, els únics rectangles que es poden enrajolar amb rajoles quadrades són els que tenen proporció racional.

La propietat més interessant dels rectangles de proporció racional és que són els únics que es poden obtenir com a unió de quadrats iguals no encavalcats. Dit altrament, si donat un rectangle podem construir una quadrícula que s'hi adapta ben bé, és a dir, que els vèrtexs del rectangle coincideixen amb els vèrtexs de la quadrícula, la proporció és racional i, recíprocament, si construïm un rectangle sobre una quadrícula, segur que la proporció és racional.

Expressió de les proporcions racionals mitjançant quadrícules

Si un rectangle de costats a i b, en què $a \geq b$, té proporció racional, per exemple $\frac{m}{n}$, llavors podem construir una quadrícula els quadrats de la qual fan $\frac{a}{m} \times \frac{a}{m}$. Per veure que aquesta quadrícula s'adapta ben bé al rectangle, només hem de comprovar que la mida $\frac{m}{n}$ s'adapta un nombre enter de vegades als costats del rectangle. Això és així perquè $a = m \cdot \frac{a}{m}$ i $b = n\frac{a}{m}$. La primera igualtat és òbvia, i la segona sorgeix de la igualtat $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

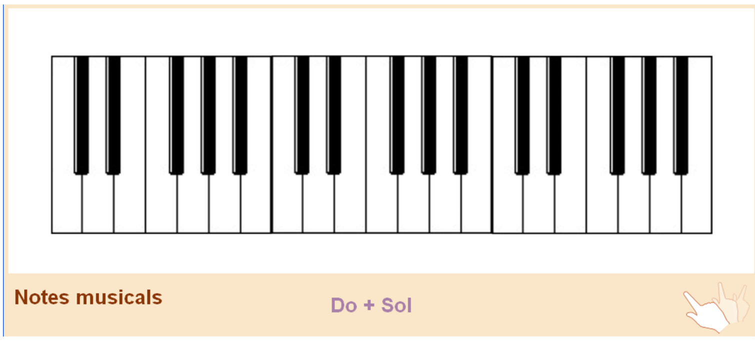
El recíproc d'aquesta propietat és immediat.

2.2. Proporcions racionals i música

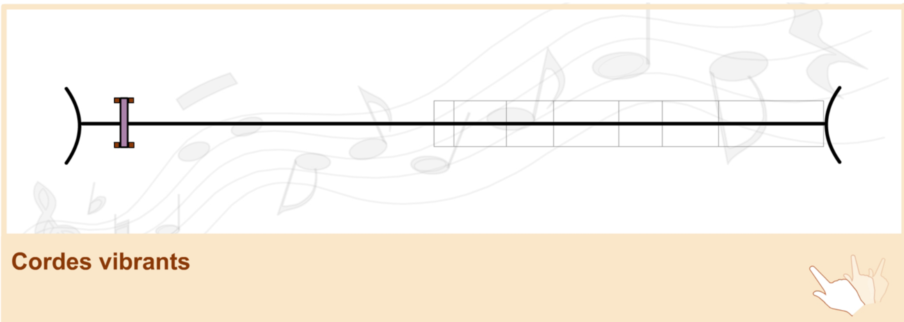
La utilització de la **teoria de la proporció** també s'ha aplicat a la música com a garantia d'harmonia i de bellesa. Pitàgores i els seus seguidors van ser els primers a introduir una **estructura matemàtica** en la música. L'**escala musical** es compon de set notes –do, re, mi, fa, sol, la, si–, que juntament amb el do següent, componen el que se'n diu una **octava**. Cadascuna d'aquestes notes representa una tonalitat de so. Pitàgores es va adonar que en fer vibrar diferents cordes tensades de longituds de **proporcions racionals** senzilles, com 2/3 o 3/4, els tons que s'obtenen són **harmoniosos**, entenent que un so és harmoniós quan és agradable a l'orella.

En aquestes set notes de l'escala musical, se n'insereixen altres d'anomenades **sostingudes** i representades pel signe #. Així, l'escala musical completa es compon de dotze notes. Cadascuna d'aquestes notes està separada de les veïnes per mig to:

... do, do#, re, re#, mi, fa, fa#, sol, sol#, la, la#, si, do...



Notes musicals


Cordes vibrants

En passar d'un do al següent, diem que hem augmentat una octava. Això passa perquè en passar d'una nota a l'altra, sense comptar les notes amb sostingut (#), passem per vuit notes.

En paraules d'ara, Pitàgores diria que, si una corda tensada reprodueix la tonalitat mi en vibrar, aquesta corda, si en doblem la longitud, produeix la mateixa tonalitat, un altre mi, encara que una octava més baixa. A partir de la primera tonalitat de mi es construeixen altres tonalitats. Les altres notes de l'escala musical es produeixen si considerem cordes de longituds intermèdies entre les dues cordes inicials que produeixen els dos mis. Així, si considerem una corda de proporció 16/9 respecte a la primera obtenim un fa, en una de 8/5 obtenim un sol, en una de 3/2 un la, de 4/3 un si, de 6/5 un do i, finalment, de 16/15 un re.

Les proporcions relacionades amb la música van tenir un paper molt important en l'arquitectura gòtica. En aquesta època, la música era considerada una manifestació divina i també una lloança a Déu. Això va fer que les construccions religioses tinguessin mides amb proporcions musicals en els dissenys, per la qual cosa hi ha nombroses proporcions racionals en l'arquitectura gòtica.

Fixeu-vos que la definició de proporció que hem donat considera sempre proporcions més grans que 1. En aquest cas, hem partit cordes en 2/3 i altres fraccions que són més petites que 1. Malgrat això, en considerar la proporció entre dues cordes obtenim un nombre més gran que 1. La proporció entre una corda de longitud 1 i una de longitud 2/3 és la següent:

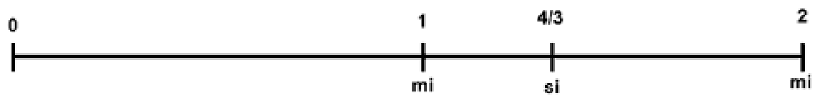
$$p(1, 2/3) = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Exercici

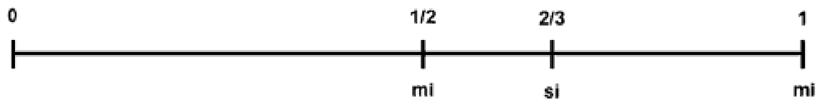
Si en fer vibrar una corda tensada obtenim un mi, quina nota obtenim si considerem només 2/3 de corda? I si agafem la corda de longitud 3/2? Quina relació s'estableix entre un cas i l'altre?

Solució:

Si tenim una corda de longitud 1 que tensada produeix un mi, en doblar-ne la longitud també produeix un mi. Sabem que en agafar 4/3 de la primera produeix un si.



Dividint aquestes cordes per la meitat pugem una octava i obtenim les mateixes notes. Així, 2/3 de la corda inicial produeix un si.

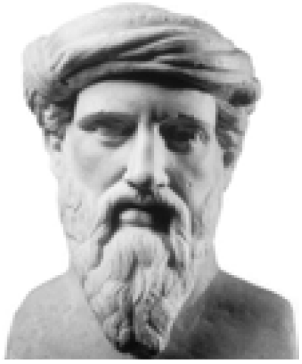


Si agafem 3/2 obtenim, tal com hem explicat, un la, encara que les cordes estan en la mateixa proporció ($p(1, 2/3) = p(1, 3/2) = 3/2$).

Jàmblic, un erudit del segle XIV, en un dels seus nou llibres sobre l'escola pitagòrica, explica la llegenda que diu que Pitàgores va descobrir les proporcions racionals en la música de manera casual, en fixar-se en el so dels martells d'una farga. Pitàgores es va adonar que, en colpejar a la vegada diversos martells, es produïa un so harmònic, excepte quan s'usava un martell concret. Pitàgores va estudiar aquests martells i es va adonar que els pesos dels martells que produïen sons harmònics tenien proporcions del tipus 1/2, 2/3 o 3/4, mentre que el pes del martell que produïa un so desagradable quan el colpejava al costat dels altres no tenia una relació simple amb els altres pesos. A partir d'aquest fet, Pitàgores va aplicar aquestes observacions a la teoria de la música amb cordes vibrants, tal com hem explicat abans.

2.3. Commensurabilitat

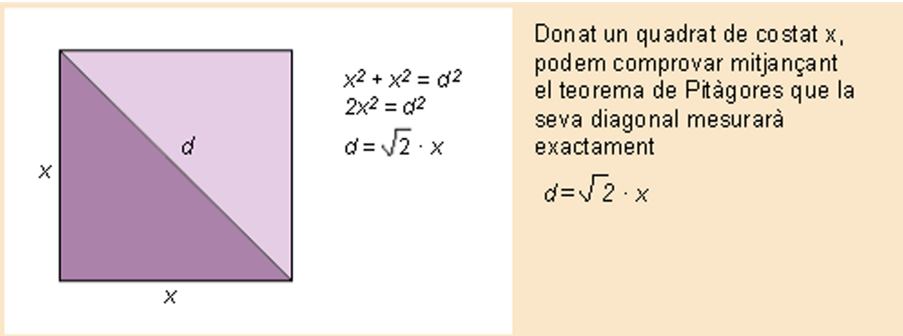
Pitàgores, i també els seus seguidors, que constitueixen l'escola pitagòrica, van basar la seva concepció del món en els nombres. Per als pitagòrics, tot era nombre; d'aquesta manera tractaven de matematitzar la percepció que tenien del seu entorn. Per això, un dels problemes que es van plantejar va ser el següent:



Pitàgores

"Considerem un segment rectilini que s'agafa com a unitat de mesura de longituds. Es pot mesurar qualsevol altre segment rectilini amb aquesta unitat?"

Els pitagòrics mateixos van donar resposta a aquesta pregunta. La seva idea era **mesurar** qualsevol segment a partir d'aquesta unitat de mesura. El significat que donaven a mesurar era que un segment fos la meitat, un terç, cinc quarts, etc., d'aquesta unitat. Per a ells, només es podien mesurar els segments de longituds racionals. D'aquestes mesures en deien **commensurables**. La seva teoria que tot era nombre i, per tant, commensurable es va ensorrar quan van mirar de mesurar la diagonal d'un quadrat.



Si agafem *x* com a unitat, és impossible trobar un nombre racional que mesuri aquesta diagonal. Els grecs van ser capaços de demostrar aquesta afirmació, però aquesta demostració va provocar un gran xoc amb la seva concepció de les matemàtiques. De les mesures que, com $\sqrt{2}$, no podien mesurar en deien **incommensurables**.

Apareixien altres mesures incommensurables en mesurar la longitud d'una circumferència agafant com a unitat de mesura el diàmetre. O el que és el mateix, en calcular la proporció entre la longitud d'una circumferència i el diàmetre. En aquest cas apareix **el nombre π** (lletra de l'alfabet grec que equival a la lletra pe del nostre abecedari i que es llegeix *pi*). Aquest nombre no es pot expressar ni com una fracció (no és racional) ni com cap combinació finita d'arrels quadrades i altres operacions elementals com la suma i el producte. La representació decimal d'aquest nombre és infinita i sense cap període. El valor numèric aproximat que té és

π = 3,14159265358979323846264338327950...

Aquest nombre apareix en molts camps d'aplicació de la matemàtica, però sobretot, d'una manera més freqüent, en geometria. Un exemple curiós és el de la longitud dels rius des del naixement fins a la desembocadura. Fruit de l'atzar i de l'ordre (la llei de la gravetat i l'orografia), el traçat no és rectilini. Tanmateix, la proporció entre la longitud real dels rius i la longitud calculada en línia recta és pròxima al nombre π.

2.4. Proporcions del tipus √n

Les proporcions del tipus $\sqrt{n}$ més usuals són $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ i $\sqrt{5}$. Els rectangles de proporció $\sqrt{2}$ s'han fet molt comuns gràcies a la família de fulls del tipus DIN A, i això és degut a la propietat següent.

Els rectangles de proporció $\sqrt{n}$ són els únics que, en retallar-los en *n* rectangles iguals (com indica la figura), s'obtenen rectangles amb la mateixa proporció $\sqrt{n}$.

Vegem-ho per a *n* = 5. Si en dividir un rectangle de costats *a* i *b* en 5 parts iguals, tal com mostra la figura, obtenim 5 rectangles de la mateixa proporció, podrem afirmar que:

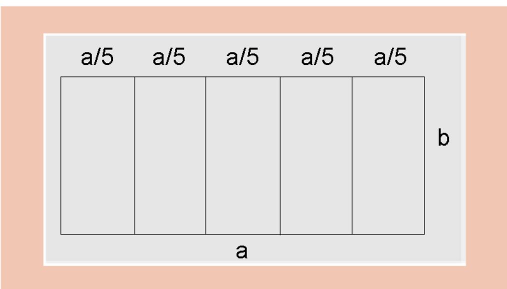
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/5}$$

en què deduïm que:

$$\frac{a^2}{b^2} = 5$$

i, llavors:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{5}$$

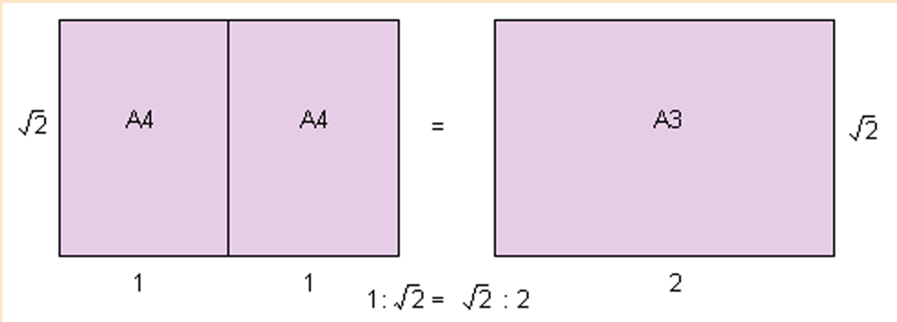


En general, aquesta propietat de les proporcions del tipus $\sqrt{n}$ és deguda al fet que $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Això es pot comprovar calculant el producte en creu: $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n}^2 = n$.

Fixem-nos que, en general, aquests rectangles no tenen proporció racional. Només en tenen en els casos en què n té arrel exacta, com per exemple 4, 9, 16, 25, etc.

2.5. La proporció √2 i la família DIN

Llegim la propietat anunciada abans per a $n = 2$. Si tenim un rectangle de proporció $\sqrt{2}$, en dividir-lo per la meitat, obtenim dos rectangles que també tenen proporció $\sqrt{2}$. A més, com que això només passa amb aquests rectangles, resulta que si en dividir un rectangle per la meitat obtenim dos rectangles que tenen la mateixa proporció que l'inicial, llavors aquest rectangle té proporció $\sqrt{2}$.



Utilitzant aquesta propietat es va crear la sèries de fulls DIN A tan important, com és ben conegut, en les arts gràfiques.

Les regles per les quals es regeix la família de fulls DIN de la sèrie A són les següents:

- Tots els fulls d'aquesta sèrie han de tenir proporció arrel de 2 ($\sqrt{2} \approx 1{,}4142$).
- El full A0 té una superfície d'1 metre quadrat.
- En tallar un full de format A0 per la meitat s'obtenen dos fulls de format A1. Així, l'altura de A1 coincideix amb l'amplada de A0, mentre que l'amplada de A1 és la meitat de l'altura de A0.
- La resta de fulls de la sèrie A es forma de la mateixa manera en dividir el precedent que tenen en dues parts iguals per una línia paral·lela al costat més curt.

- Les mides estàndard d'aquesta sèrie s'arrodoneixen en mil·límetres.

A partir d'aquesta informació, creem una taula amb les mides de la sèrie DIN A, des de A0 fins a A10.

Les mides de la sèrie A s'obtenen imposant que la proporció sigui $\sqrt{2}$, i l'àrea, 1 m^2. Si els costats són x (altura) i y (amplada), tenim:

$$\left.\begin{array}{r} x\cdot y = 1 \\ \dfrac{x}{y} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x\cdot y = 1 \\ x = \sqrt{2}y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \sqrt{2}y^2 = 1 \\ x = \sqrt{2}y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} \\ x = \sqrt{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{\sqrt{2}} \approx 1{,}189 \text{ m} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} \approx 0{,}840 \text{ m} \end{array}\right\}$$

A partir d'aquests resultats, podem crear la taula següent:

Nombre sèrie	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Mides (mm)	841×1189	594×841	420×594	297×420	210×297	148×210	105×148	74×105	52×74	37×52	26×37

Per exemple, un DIN A4, que és el d'ús més comú, fa 210 mm × 297 mm. Es pot comprovar que la proporció que té és aproximadament $\sqrt{2}$. En ajuntar dos fulls DIN A4, obtenim un full DIN A3, que fa 297 mm × 420 mm. En canvi, en dividir-lo per la meitat, obtenim un DIN A5, que fa 148 mm × 210 mm. Les mides d'aquests dos fulls nous també ens donen una proporció pròxima a $\sqrt{2}$.

En usar una fotocopiadora es veu que, quan es vol fotocopiar un full de paper DIN A4 i ampliar-lo a DIN A3, s'ha de posar un factor d'ampliació d'1,414. Justament aquesta és una aproximació de $\sqrt{2}$. En canvi, per a reduir-lo a la meitat, s'ha de posar el factor 0,7071, que és l'invers de $\sqrt{2}$, i també la meitat de $\sqrt{2}$.

Exemple

Som en una biblioteca i volem fotocopiar un article en una revista que s'edita en format DIN A4. Per a estalviar paper, volem fotocopiar cada dues pàgines de la revista en un sol full DIN A4 de la fotocopiadora. En obrir la revista, cada dos fulls de format A4 equivalen a un full de format A3. Així, per a obtenir la reducció volguda, hem d'assenyalar el factor d'ampliació en 71% (que és una aproximació de $1/\sqrt{2}$), o bé pitjar el botó A3→A4 , que tenen moltes fotocopiadores. Les dues pàgines de la revista en format DIN A4 queden exactament fotocopiades en una sola pàgina A4, sense ampliar marges ni perdre text. La reproducció d'un full A4 equival, ara, a un de A5.

Exercici 1

Hi ha una altra sèrie de fulls de la família DIN anomenada *JIS B* o *sèrie japonesa JB* (que és diferent de l'habitual DIN B). Aquesta sèrie es defineix igual que la sèrie A però amb la diferència que el full B0 té una superfície d'1,5 m^2. Construiu la taula de les mides dels fulls des de B0 fins a B10.

Solució:

Aplicant la fórmula per a trobar les mides de la sèrie *A*, a partir de les expressions $x * y = 1{,}5$ i $x/y = \sqrt{2}$ obtenim $x = 1{,}029$ i $y = 1{,}455$. Per tant, un B0 = 1.029 × 1.455 i d'aquí es pot obtenir tota la resta de mides.

La taula de les mides dels fulls des de B0 a B10 son les següents:

B0 = 1.029 × 1.456
B1 = 728 × 1.029
B2 = 514,5 × 728
B3 = 364 × 514
B4 = 257 × 364
B5 = 182 × 257
B6 = 128,5 × 182
B7 = 91 × 128
B8 = 64 × 91
B9 = 45,5 × 64
B10 = 32 × 45

Nota: hem obtingut 1.029 per aproximació per tall però és "més" correcte començar per 1.030 per comptes de 1.029, ja que el primer valor surt 1,029883 i quan s'aproxima per arrodoniment per comptes de per tall el primer valor és 1.030.

Exercici 2

Quin factor d'ampliació hem de posar a la fotocopiadora per a reproduir un full A5 en una B5?

Solució:

Aquí tenim un petit problema. Podem fer el següent:

$p(\text{A5}) = p(148, 210) = \sqrt{2}$
$p(\text{B5}) = p(182, 257) = \sqrt{2}$

Si mirem la proporció de les longituds respectives és:

$p(148, 182) = 182/148 = 1{,}23$
$p(210, 257) = 257/210 = 1{,}23$

Aleshores l'ampliació del 123% seria la solució correcta.

El que passa és que en haver fet aproximacions hem perdut que $p(148, 210) = \sqrt{2}$ i $p(\text{B5}) = \text{p}(182, 257) = \sqrt{2}$.

Aleshores és "més" correcte fer:

Un full A5 té dimensions 148 × 210.

Un full B5 té dimensions 182 × 257.

El factor d'ampliació es del 122,9% per a l'altura i del 122,3% per a l'amplada:

$X = (182/148) \times 100 = 122{,}9$
$Y = (257/210) \times 100 = 122{,}3$

I ara, podem pensar que l'ampliació ha de ser del 122% (no estem segurs que en una fotocopiadora valguin els decimals; si valen hem d'agafar 122,3 i mai 122,9), ja que amb una ampliació del 123% ens passaríem de les mides del full de B5. Comprovem-ho:

123% de 148 = 182,04

Exercici 3

Una altra sèrie de la família DIN serveix per a les dimensions de sobres de correu. Aquesta sèrie es diu *DIN C*. A banda que la proporció que té torna a ser $\sqrt{2}$, les dimensions del sobre C0 s'obtenen imposant que el quadrat de l'àrea també sigui $\sqrt{2}$. Calculeu les mides de la família de sobres DIN C, des de C0 fins a C10.

Solució:

Sabent que $(x * y) \wedge 2 = \sqrt{2}$, i $x/y = \sqrt{2}$, podem aplicar l'equació de l'exercici 1 i el resultat que obtenim és: $x = 1{,}294$ i $y = 0{,}918$. Per tant, la mida d'un DIN C0 és 918 × 1.294, i així successivament, C1 és 647 × 918, C2 és 459 × 647, etc.

Nota: és més correcte començar per 917 en comptes de 918. Vegeu: http://www.gusgsm.com/sobres_iso

La majoria de les fotocopiadores modernes tenen tecles per a ampliacions i reduccions per als formats A4→B5, A3→A4, etc., de manera que és fàcil fer reproduccions d'uns fulls a uns altres pitjant una tecla i prou.

Els usos més freqüents dels fulls d'aquestes famílies DIN que hem presentat són els següents:

Sèrie	S'usa en
A0, A1	Pòsters, dibuix tècnic, plànols d'arquitectes
A2, A3	Dibuix, taules de format gran, diagrames

Sèrie	S'usa en
A4	Cartes, revistes, formularis, catàlegs, etc. És la mida més comuna per a impressores i fotocopiadores.
A5	Llibres de notes, agendes
A6	Postals
B5, A5, B6, A6	Llibres
C4, C5, C6	Sobres per a cartes en format A4: sense doblegar (C4), amb un doblec (C5), amb dos doblecs (C6)
B4, A3	Diaris. És la segona sèrie més usada en impressores i fotocopiadores després de la sèrie A4.

Exercici 1

Quant pesa el contingut d'una carta de 15 fulls de paper de format DIN A4, sabent que el pes d'aquest paper és de 80 g/m^2? Quant pesa en total si posem els 15 fulls en un sobre de format C4 fet amb paper de la mateixa qualitat?

Solució:

Un A0 pesa 80 g. Dos A1 posats junts formen un A0, aleshores el A1 ha de pesar 40 g. Dos A2 fan un A1, aleshores un A1 té un pes de 20 g. Dos A3 fan un A2, aleshores el A3 pesa 10 g. Finalment, com que dos A4 fan un A3, el A4 pesa 5 g.

Aleshores:

Sabent que un DIN A0 pesa 80 g, un DIN A4 pesa 5 g, 15 fulls de DIN A4 pesen 75 g.

Per a la segona pregunta, no tenim prou dades per respondre. Podríem, però, trobar uns valors que asseguressin que en superen el pes. Per exemple, 75 g és una cota mínima per al pes del sobre amb els 15 fulls.

Sembla que 75 + el pes de dues mides de paper C4 pot ser un valor força aproximat, però no el correcte (penseu que amb dos papers de mida C4 no podeu fer un sobre perquè necessiteu més paper, ja que cal fer llengüetes...).

La mida d'un sobre C4 és 229 × 324.

L'àrea total de les dimensions d'un sobre en paper de mida C4 en m^2 és: 0,229 × 0,324 = 0,0742. Com que necessitem dos fulls per a fer el sobre tenim una àrea de paper de 0,1484 m^2.

Si fem una regla de 3 per tal de trobar-ne el pes:

x -> 0,1484 m^2
80g -> 1 m^2

Obtenim que x = 11,872 g.

Aleshores el pes total és de: 75 + 11,872 = 86,872 g.

Exercici 2

Si partim un full DIN A4 en tres rectangles iguals, quina proporció tenen els tres rectangles obtinguts? I si el partim en quatre rectangles?

Solució:

Si la proporció d'un DIN A4 és √2, per a conservar aquesta mateixa proporció cal dividir el rectangle en dues parts iguals, aleshores:

297/2 = 148,5 i $p(210, 148{,}5) = \sqrt{2}$

A cap lloc de l'enunciat diu que hagin de conservar la mateixa proporció una vegada dividit el rectangle en 3 o 4 parts, no?

Penseu que si $x/y = \sqrt{2}$ o equivalentment $x = \sqrt{2}\,y$), com que $\sqrt{2}$ = 1,4142, aleshores tenim que $x > y$, ja que $x = 1{,}4142 * y$.

Si dividim totes dues bandes per 3 obtenim: $\frac{x}{3} = 0{,}4714\ldots y$. Si penseu una mica, veieu que pràcticament $\frac{x}{3}$ és la meitat de y. Aleshores podem concloure que $\frac{x}{3} < y$.

Aleshores la proporció dels rectangles = costat llarg/costat petit = $y \,/\, \frac{x}{3} = \frac{3y}{x}$.

Pensem que si $x/y = \sqrt{2}$, aleshores $y/x = 1/\sqrt{2}$ i aleshores tenim:

proporció dels rectangles = costat llarg/costat petit = $y \,/\, \frac{x}{3} = \frac{3y}{x} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Nota: si repetiu per 4 obtindreu $\frac{4}{\sqrt{2}}$.

Recursos

Si esteu interessats en mides estàndards per a paper, entreu als webs següents:

Article molt complet sobre la família DIN (en anglès):
http://www.cl.cam.ac.uk/~mgk25/iso-paper.html

Lloc web oficial de DIN (en alemany):
http://www.din.de/

Lloc web oficial de l'Organització Internacional per a l'Estandardització (International Organization for Standardization, ISO). Aquesta organització treballa per globalitzar totes les mides:
http://www.iso.ch/

Llista de la majoria de formats de paper que es fan servir al món:
http://www.twics.com/~eds/paper/papersize.html

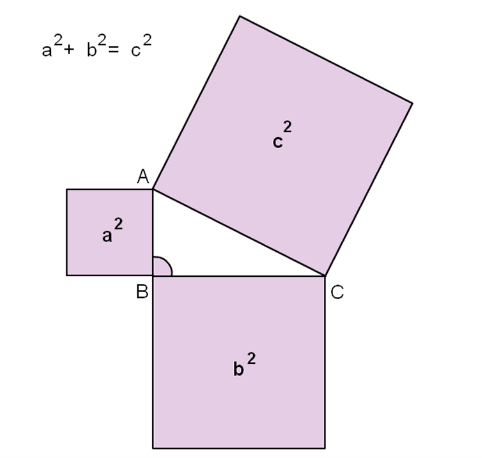
2.6. Construcció geomètrica de la proporció $\sqrt{n}$

Ara treballarem una mica altres proporcions del tipus $\sqrt{n}$. Per a $n = 3$, la propietat estudiada abans s'ha de llegir de la manera següent:

Un rectangle de proporció $\sqrt{3}$, en dividir-lo en tres informes iguals per talls paral·lels al costat més petit, proporciona tres rectangles de proporció $\sqrt{3}$.

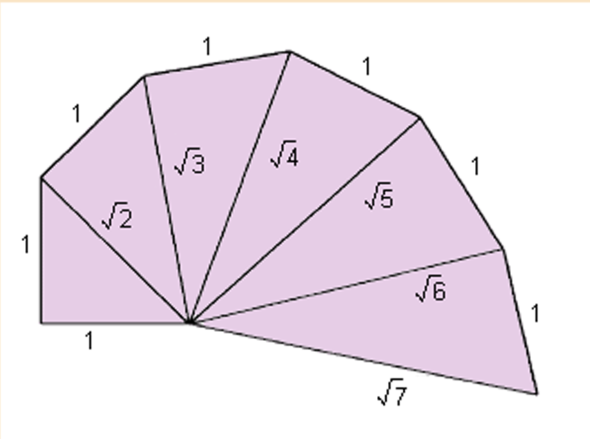
Aquests rectangles són els únics que tenen aquesta propietat, la qual pot fer un bon servei a l'hora de dissenyar un tríptic. Així, en doblegar o desdoblegar el tríptic obtenim formats de la mateixa proporció. Aquest fet ens produeix un efecte agradable estèticament perquè es mantenen les proporcions de les diverses formes del tríptic. La mateixa cosa es pot aplicar si volem editar un fullet que es doblegui en més parts, com per exemple 4, 5 o 6.

Com a dada curiosa, remarquem que per a construir rectangles de proporcions del tipus $\sqrt{n}$ podem usar el teorema de Pitàgores. Recordem-ne l'enunciat:



Els triangles rectangles són els únics que verifiquen que la hipotenusa al quadrat coincideix amb la suma dels quadrats dels catets.

Considerem ara un triangle que té un catet de longitud $\sqrt{n}$ i un catet de longitud 1. Per tant, la hipotenusa és $\sqrt{n+1}$. Això es pot comprovar usant el teorema de Pitàgores: si ***h*** és la longitud de la hipotenusa, tenim que $h^2 = (\sqrt{n})^2 + 1^2 = n+1$ i, per tant, $h = \sqrt{n+1}$. Així, podem construir rectangles de proporció $\sqrt{n}$ amb la successió següent:

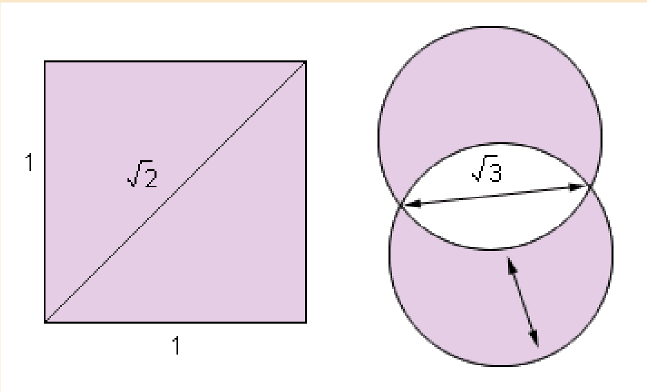


Successió de triangles construïts a partir d'un triangle rectangle.

Aquesta successió de triangles s'ha construït a partir d'un triangle de rectangle els catets del qual són de la mateixa longitud i que agafarem com a unitat. La hipotenusa fa $\sqrt{2}$. Agafem aquesta hipotenusa com a catet d'un altre triangle rectangle l'altre catet del qual té una longitud 1. Per tant, la hipotenusa és $\sqrt{3}$. Repetint el mateix procés obtenim la resta de triangles i, d'aquesta manera, anem construint mesures de longitud $\sqrt{n}$ per a qualsevol valor de n natural. Una vegada creat el triangle els catets del qual estan en proporció $\sqrt{n}$, podem construir un rectangle amb aquests dos costats del triangle.

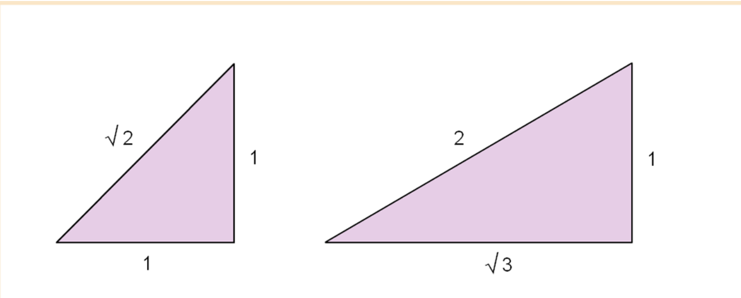
Totes les proporcions del tipus $\sqrt{n}$ per a valors de n que no ens donin una arrel exacta són proporcions no racionals, és a dir, són proporcions a les quals els grecs anomenaven *incommensurables*, ja que no les podien expressar com a fraccions de nombres enters.

Les raons d'aquest tipus més usades al llarg de la història han estat, sens dubte, $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$, en part perquè són bastant simples si s'ha de construir de manera geomètrica. El nombre $\sqrt{2}$ apareix com la diagonal d'un quadrat de costat 1, mentre que $\sqrt{3}$ apareix com la longitud del costat d'un triangle inscrit en una circumferència de radi 1, i també com la distància entre els dos punts d'intersecció de dues circumferències de radi 1 quan cadascuna passa pel mig de l'altra.



El nombre $\sqrt{2}$ apareix com la diagonal d'un quadrat de costat 1, mentre que $\sqrt{3}$ apareix com la longitud del costat d'un triangle inscrit en una circumferència de radi 1, i també com la distància entre els dos punts d'intersecció de dues circumferències de radi 1 quan cada una passa pel centre de l'altra.

Aquesta manera de construir $\sqrt{2}$ ens condueix al **cartabó**. El cartabó és una eina de dibuix en forma de triangle rectangle isòsceles (els dos catets de la mateixa longitud), amb la qual cosa la hipotenusa té proporció $\sqrt{2}$ respecte als catets. Una altra eina de dibuix és l'**escaire**, que té forma de triangle rectangle, però ara la hipotenusa té proporció 2 respecte a un dels catets. Això obliga l'altre catet a tenir una proporció de $\sqrt{3}$ respecte al primer catet.



El cartabó i l'escaire

Fixem-nos que unint dos cartabons per la hipotenusa obtenim un quadrat i que unint dos escaires pel catet més gran obtenim un triangle equilàter.

Aquestes dues proporcions estan relacionades íntimament amb quatre dels cinc **sòlids platònics**. Els sòlids platònics, que també anomenem **poliedres regulars**, són figures geomètriques en l'espai tridimensional formades de polígons regulars. Els cinc que hi ha són el **tetraedre**, el **cub**, l'**octaedre**, el **dodecaedre** i l'**icosaedre**. Les cares del tetraedre, de l'octaedre i de l'icosaedre són triangles equilàters, i per això la relació que tenen amb la proporció $\sqrt{3}$. Les cares del cub són quadrades i, per tant, està relacionat amb $\sqrt{2}$. Els filòsofs grecs associaven aquests quatre sòlids als quatre elements bàsics de la naturalesa –terra, aire, aigua i foc– i hi atribuïen, per combinació, el poder de crear totes les coses que ens envolten. Les cares del dodecaedre són pentagonals. Més endavant us proporcionarem una relació de proporció.

3. El nombre d'or i aplicacions

3.1. La proporció àuria

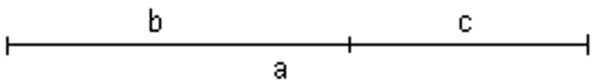
Una de les proporcions més usades al llarg de la història per tota mena d'artistes i dissenyadors ha estat la **proporció àuria**, també dita **proporció divina**. Encara que només tinguem intenció de crear un rectangle, ens podem demanar quin és el rectangle que no és ni massa allargat ni massa quadrat.

Exemple

Els grecs van crear la façana del Partenó amb unes mides concretes, de manera que la proporció entre l'amplada i l'altura de la façana fos el **nombre d'or**. Per posar un exemple més actual, les mides de les targetes de crèdit es van escollir de manera que la proporció fos el nombre d'or.

A l'hora de dividir un segment en dues parts, podem fer-ho d'una infinitat de maneres. Potser l'estàndard és dividir-lo per la meitat. Estudiem ara algunes maneres possibles de dividir un segment segons les proporcions que obtenim.

Considerem un segment de longitud a que dividim en dos segments, i anomenem b la longitud del segment més gran i c la del més petit. Fixem-nos que $a = b + c$. Les úniques proporcions que podem fer amb aquests tres segments són $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{c}$.



Les relacions possibles d'igualtat entre aquestes proporcions ens condueixen als tres casos següents:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{c} \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \qquad \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

Del primer cas deduïm que $b = c$, amb la qual cosa obtenim la divisió del segment per la meitat. En aquest cas, el valor d'aquestes proporcions és 2. El segon cas ens condueix a la igualtat $a = b$, de manera que no dividim el segment. El cas més interessant és, sens dubte, el tercer. Aquest cas ens condueix a la **proporció en raó mitjana i extrema d'un segment**. S'anomena *proporció en raó mitjana i extrema d'un segment* la divisió d'un segment de manera que la proporció entre el total i el segment més gran de tots dos coincideix amb la raó entre el més gran i el més petit.

Calculem el valor d'aquesta proporció. Com que $a = b + c$, tenim:

$$\frac{b+c}{b} = \frac{b}{c} \qquad \text{i per tant} \qquad 1 + \frac{c}{b} = \frac{b}{c}$$

Si x és la proporció $\frac{b}{c}$, tenim que $1 + \frac{1}{x} = x$.

Això ens condueix a l'equació de segon grau $x^2 - x - 1 = 0$, que té les solucions $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

El segon d'aquests valors és negatiu, de manera que no pot ser la solució del nostre problema. Així, l'única solució és el nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, al qual anomenarem **nombre d'or** i que assenyalarem amb la lletra Φ, en honor de Fídies, escultor grec que va fer servir aquest nombre en la seva obra. Aquesta lletra grega correspon a la nostra lletra efa i es pronuncia *fi*. El valor numèric aproximat que té és

$$\Phi \approx 1{,}6180339887498948482045868343656...$$

Com que és un nombre irracional, l'expressió decimal té infinites xifres decimals i no és periòdica.

Resolució de l'equació de segon grau

Recordem la fórmula general per a resoldre una equació de segon grau. Donada l'equació $ax^2 + bx + c = 0$, en què $a \neq 0, b$ i c són tres nombres reals qualssevol, la fórmula per a determinar la incògnita x és $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. En general, obtenim dos valors per a la incògnita, en cas que el nombre que obtenim dins de l'arrel sigui positiu. Si és zero, només tenim una solució i, si és negatiu, no en tenim cap.

L'equació es resol tenint en compte que $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$, i s'obté:

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

3.2. Propietats del nombre d'or

Les primeres propietats curioses d'aquest nombre provenen de la mateixa equació de què hem obtingut el valor. Sabem que Φ és solució de l'equació $x^2 - x - 1 = 0$, que també podem escriure com a $x^2 = x + 1$. Per tant, podem afirmar que $\Phi^2 = \Phi + 1$. Així, tenim que el nombre d'or al quadrat coincideix amb el nombre d'or més un. Multiplicant aquesta expressió per Φ;, tenim:

$$\Phi^3 = \Phi^2 \cdot \Phi = (\Phi + 1)\,\Phi = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\,\Phi + 1$$

i, així, successivament, veiem que:

$$\Phi^1 = \Phi$$

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$

$$\Phi^5 = 5\Phi + 3$$

$$\Phi^6 = 8\Phi + 5$$

$$\Phi^7 = 13\Phi + 8$$

Fixant-nos en aquesta sèrie d'igualtats, ens adonem que els coeficients que hi ha davant de cada Φ a la part dreta de cada igualtat són 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, etc., i que els termes independents a partir la segona igualtat són aquests mateixos nombres. D'aquesta successió de nombres se'n diu **successió de Fibonacci**:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...

Nombres de Fibonacci

Us proposarem un problema que relaciona el nombre d'or amb la successió de Fibonacci i la cria de conills. Imaginem-nos que tenim una granja de conills, però d'una mena de conills que es comporten de manera molt mecànica pel que fa a la reproducció. Imaginem-nos també que el període de gestació és d'un mes i que cada embaràs porta una parella de conills que és productiva al cap d'un mes de vida. Comencem l'empresa amb una parella de conills acabats de néixer. Quan una parella ha conillat, de seguida està a punt de tornar a quedar prenyada per a continuar reproduint-se. A més, imaginem-nos que tots aquests conills viuen indefinidament. Vegem ara quantes parelles de conills tenim al cap de 12 mesos. Com que comencem amb una parella de conills acabats de néixer, al cap d'un mes continuem tenint una parella i prou, però ara adulta. Al cap d'un altre mes naixerà la primera parella de conills, amb la qual cosa al cap de dos mesos tenim 2 parelles de conills. El tercer mes tenim 3 parelles de conills: la primera parella més la seva primera i segona parella de fills. El quart mes tenim 5 parelles de conills, ja que la primera parella nascuda a l'empresa ja té la seva primera parella de fills. Així, successivament, de manera que obtenim la successió

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...

Fixem-nos que aquesta successió segueix una regla, que anomenem **recurrència**. Cada nombre d'aquesta successió s'obté de la suma dels dos predecessors. Per tant, a partir dels dos primers termes i amb aquesta recurrència podem crear tots els termes de la successió. Així, al cap de 12 mesos tenim 233 parelles de conills.

Aquest problema el va formular Leonardo de Pisa, més conegut com a *Fibonacci*, el 1202. I per això aquesta successió de nombres es diu com ell.

Fibonacci

http://www-history.mcs.st-and.acuk/history/PictDisplay/Fibonacci.html

Acabem de veure una relació entre el nombre d'or i la successió de Fibonacci. Encara n'hi ha més, però.

En calcular el quocient entre un terme i el següent, obtenim nombres que cada vegada s'acosten més al nombre d'or. La taula següent reflecteix els càlculs detallats:

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
1/1	2/1	3/2	5/3	8/5	13/8	21/13	34/21	55/34	89/55	144/89	233/144	377/233
1	2	1,5	1,6667	1,6	1,625	1,61538	1,61905	1,61765	1,61818	1,61798	1,61798	1,61805

Aquests quocients ens serveixen per a fer una aproximació tan bona com vulguem del nombre d'or utilitzant una fracció.

A més, es pot comprovar que es poden calcular els nombres de la successió de Fibonacci substituint n per 1, 2, 3, etc., en l'expressió següent:

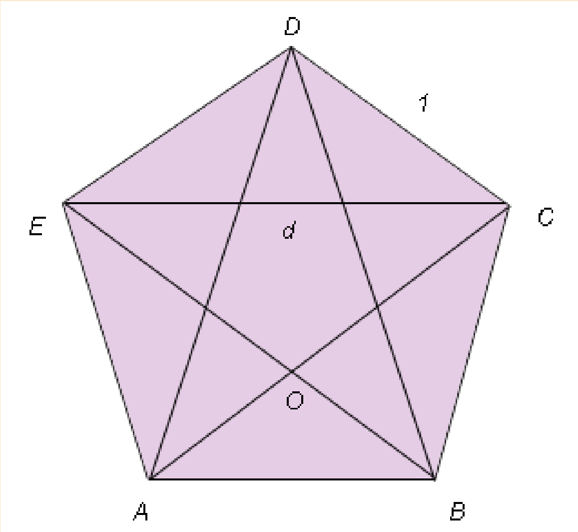
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

És sorprenent que una successió de termes en què tots els nombres són naturals s'expressi de manera general amb una fórmula amb nombres irracionals. Fixeu-vos que el nombre que hi ha en el primer parèntesi és el nombre d'or.

Web complementari

Més informació sobre la successió de nombres de Fibonacci:
http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html

Geomètricament, el nombre d'or està lligat al pentàgon regular. Un pentàgon regular és un polígon pla de cinc costats iguals, amb els angles interiors iguals, també.



Donat un pentàgon regular, podem traçar cinc diagonals principals que formaran una estrella de cinc puntes.

Si l és la longitud de cada costat del pentàgon i d és la longitud de les diagonals del pentàgon, la proporció entre aquests dos segments és el nombre d'or.

Justificació de la relació del nombre d'or amb el pentàgon

La justificació d'aquesta informació es basa en el teorema de Tales. Fixem-nos que cadascun dels costats del pentàgon és paral·lel a una de les diagonals. Així, podem afirmar que els triangles *EOC* i *AOB* són triangles semblants. Aquests dos triangles són isòsceles, és a dir, tenen dos costats iguals. Com que el quadrilàter *EOCD* és un paral·lelogram, podem afirmar que el segment *EO* té una longitud igual que el costat del pentàgon l. Així, els costats del triangle *EOC* són l, l i d, mentre que els costats del triangle *AOB* tenen longituds $d - l$, $d - l$ i l. Per això, del teorema de Tales deduïm que:

$$\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$$

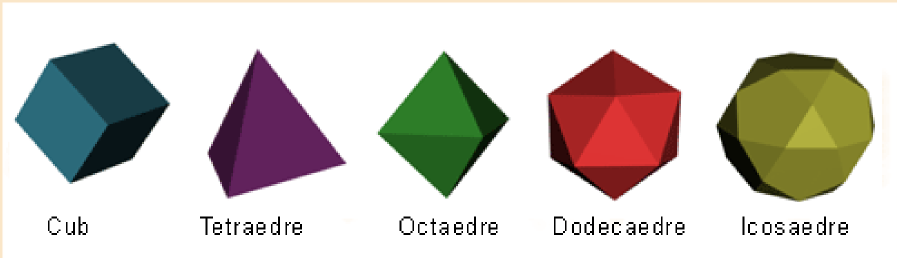
Si anomenem x l'expressió $\frac{d}{l}$, l'equació anterior es pot escriure de la manera següent:

$$\frac{d}{l} = \frac{1}{\frac{d-l}{l}} \rightarrow \frac{d}{l} = \frac{1}{\frac{d}{l}-1} \rightarrow x = \frac{1}{x-1} \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

i, com hem vist abans, aquesta equació ens condueix al nombre d'or.

3.3. La proporció en l'art

L'escola pitagòrica coneixia perfectament la proporció àuria i la relació que tenia amb el pentàgon regular. Abans hem relacionat les proporcions $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ amb quatre dels cinc poliedres regulars. Amb aquesta propietat del pentàgon tenim una relació del dodecaedre amb la proporció àuria, ja que a les cares hi ha el nombre d'or. Si els quatre primers sòlids representaven els quatre elements bàsics, el dodecaedre era el símbol de l'univers. Aquest sòlid és el que formava la matèria del lloc on vivien els déus, que ells anomenaven *firmament immutable*. El paper sagrat del dodecaedre es va estendre a la raó àuria de manera que només s'utilitzava en el disseny de les parts més especials o fins i tot sagrades en el cas de l'arquitectura religiosa, per la qual cosa es donava a la proporció àuria una simbologia molt especial, i predominava sobre les altres proporcions. La secció àuria representava l'harmonia i l'equilibri màxims, comportava ritme i bellesa a tot el que tingués relació amb aquesta proporció. Durant l'edat mitjana va ser la proporció més secreta i envoltada de càrrega mística i simbòlica.



L'esquema còsmic que els grecs van idealitzar amb cinc poliedres regulars va meravellar la humanitat durant segles

Com acabem de veure, el nombre d'or apareix en el dodecaedre, ja que té les cares pentagonals, però també apareix en un altre poliedre regular, l'icosaedre. Un icosaedre està format de vint cares triangulars, amb dotze vèrtexs en total. En cadascun dels vèrtexs conflueixen cinc arestes i, per tant, cinc triangles equilàters. Fixant-nos en un vèrtex qualsevol, les arestes oposades de cadascun dels cinc triangles que té al voltant formen un pentàgon regular. Les diagonals d'aquest pentàgon són interiors a l'icosaedre, i la proporció que tenen respecte a l'aresta de l'icosaedre és el nombre d'or. Si ens fixem ara en una de les diagonals d'aquest pentàgon, podem formar un rectangle de proporció àuria juntament amb dues arestes de l'icosaedre i una altra diagonal d'un altre pentàgon. En total, es poden formar tres rectangles d'aquest tipus, que, a més, són perpendiculars entre si i passen pel mig de l'icosaedre. Aquesta propietat ens permet construir un icosaedre de manera molt simple. Agafem els dotze vèrtexs de l'icosaedre de quatre en quatre, de manera que es poden formar adequadament tres rectangles interiors i centrats en l'icosaedre de proporcions àuries; aquests rectangles són perpendiculars dos a dos. Així, per a construir un icosaedre, podem crear tres rectangles de proporció àuria perpendiculars dos a dos i que s'intersequin al mig; unint els dotze vèrtexs mitjançant arestes creem un icosaedre.

Com hem dit abans, la teoria de la proporció i, en especial, la proporció àuria s'han fet servir en l'art: pintura, escultura, arquitectura, etc.

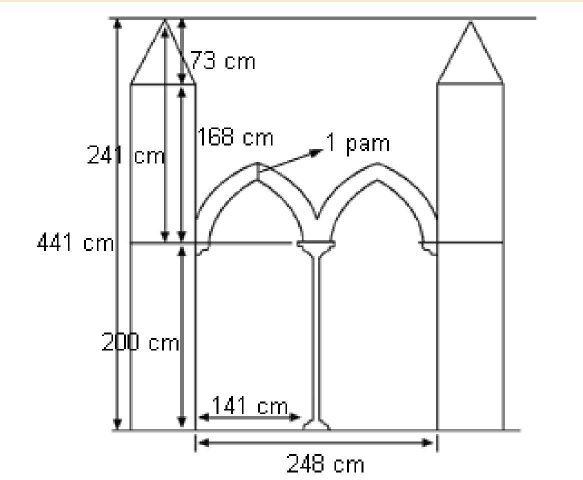
3.4. Exemples de proporció àuria

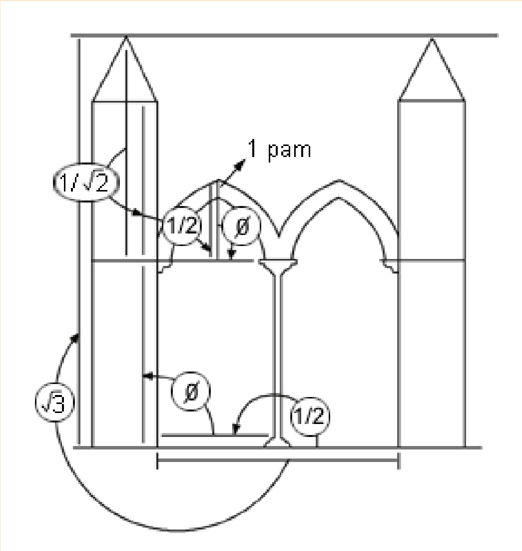
Miss Helen de Leonardo da Vinci. L'última imatge reflecteix les proporcions àuries al rostre de Miss Helen.

Imatges escanejades del llibre de Matila C. Ghyka. *El número de oro*. Vol. I. Los ritmos (pàg. 71-73). Ed. Poseidón

El monestir de Sant Jeroni de la Murtra, construït als voltants de Badalona, és un altre bon exemple de l'aplicació de la teoria de la proporció en l'art, en aquest cas en l'arquitectura. Es tracta d'una de les construccions principals del gòtic català tardà.

Mesures principal en el disseny de la primera plana del Monestir de Sant Jeroni de la Murtra.



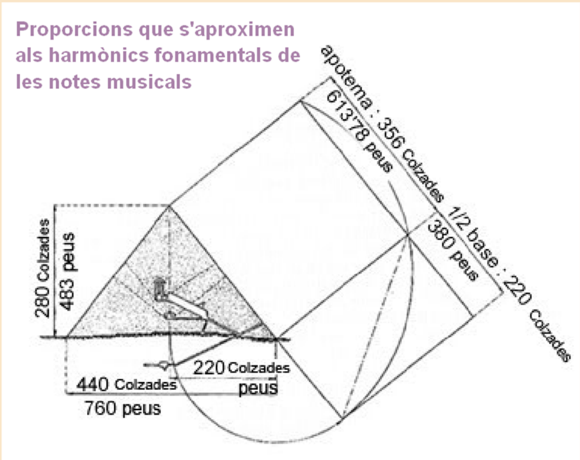


Proporcions que es dedueixen dels càlculs corresponents.

Amb aquest estudi de les proporcions s'obté, a més, un model per a construir i dissenyar la façana d'aquest monestir.

El misticisme en la utilització de les proporcions en la construcció religiosa va fer que en l'edat mitjana es presentés Crist com un geòmetra que dissenya l'univers amb compàs.

Un darrer exemple en què trobem la raó àuria és el del quocient entre l'apotema d'una cara qualsevol de la Gran Piràmide de Gizeh i la meitat de la base de la piràmide. En la figura següent hi ha els càlculs:



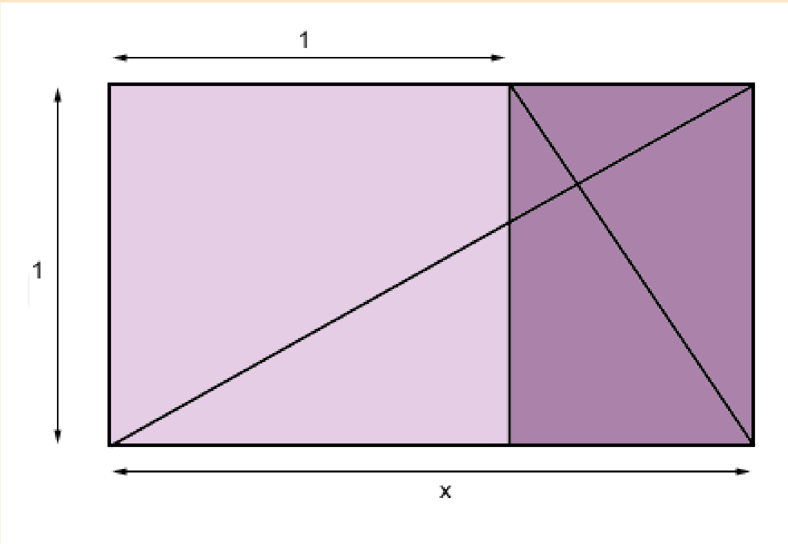
En mesures egípcies (en colzades) la meitat de la base mesura 220 i l'apotema mesura 356. El quocient 356 / 220 = 1,618 és una bona aproximació del nombre d'or

De tota manera, s'han desenvolupat diverses llegendes entorn de la construcció de les piràmides. Com a exemple tenim la que diu que la Gran Piràmide es va construir de manera que la raó del perímetre de la base a l'altura és igual a 2 π. Pel que se sap actualment dels coneixements de geometria dels egipcis, aquesta llegenda és infundada.

També l'arquitecte Le Corbusier va dur a terme diversos estudis sobre proporció en el cos humà que va reflectir en el llibre *El modulor*. La raó àuria apareix en la seva obra escrita, i també en els seus edificis. Per exemple, la façana de l'edifici de les Nacions Unides a Nova York és rectangular i la proporció és àuria.

Exercici 1

Demostreu que, si les dues diagonals dels rectangles de la figura són perpendiculars, la proporció és àuria. Considereu que el valor de x és sempre més gran que 1.



Solució:

Igual que les seves diagonals perpendiculars, els dos rectangles tenen la mateixa proporció. El rectangle més gran té proporció $p(1,\ x) = \frac{x}{1} = x$, mentre que el rectangle més petit té proporció $p(1, x-1) = \frac{1}{x-1}$. Igualant les proporcions, tenim l'equació següent:

$$x = \frac{1}{x-1} \rightarrow x(x-1) = 1 \rightarrow x^2 - x = 1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Com s'ha vist abans, aquesta equació té una sola solució positiva, que és el nombre d'or, i que coincideix amb la proporció d'aquests rectangles.

Exercici 2

Calculeu quina proporció té un rectangle de costats 1 i *x*, amb 1 < x < 2, si hi retallem el quadrat màxim i al rectangle que queda hi retallem un altre quadrat màxim i obtenim un rectangle que té la mateixa proporció que l'inicial.

Solució:

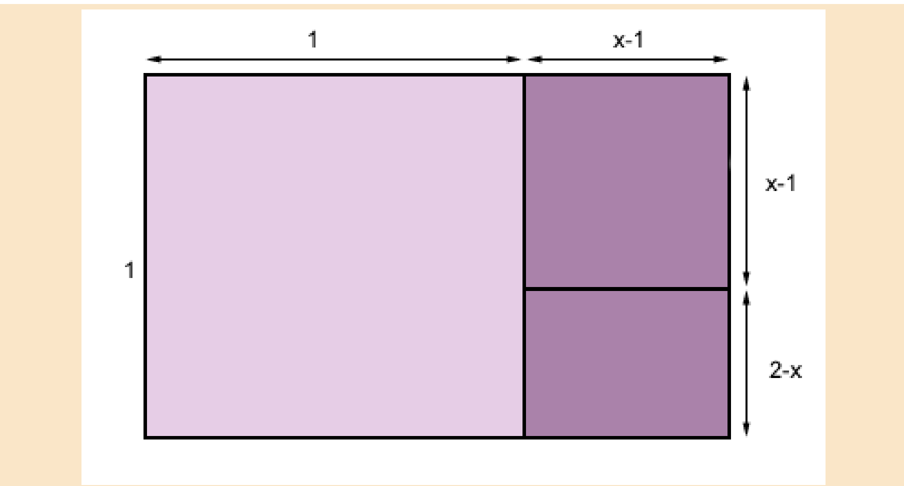
Com que $1 < x < 2$, podem calcular les proporcions segons els rectangles que s'indiquen en la figura adjunta:

$$p(1,\ x) = \frac{x}{1} = x \quad p(x-1, 2-x) = \frac{x-1}{2-x}$$

Igualant aquestes dues proporcions, tenim l'equació següent:

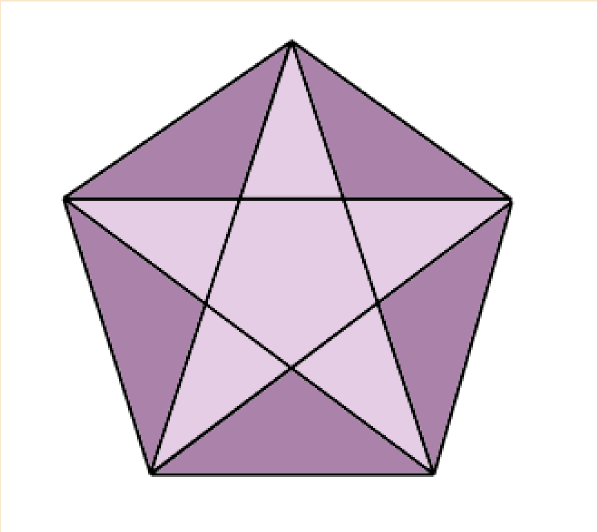
$$x = \frac{x-1}{2-x} \rightarrow 2x - x^2 = x - 1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Que té com a solució positiva el nombre d'or.



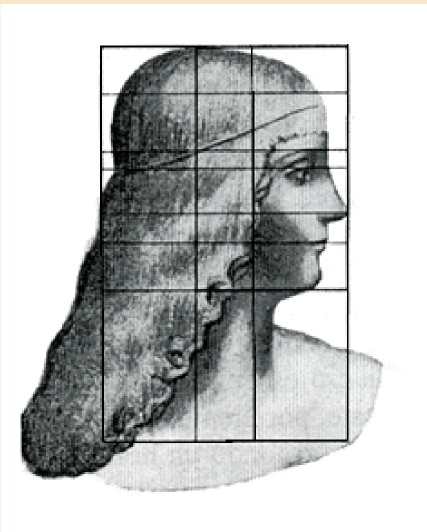
Exercici 3

Calculeu la proporció entre el costat d'un pentàgon regular i el costat del pentàgon interior de l'estrella inscrita. Es poden mesurar les distàncies construint el pentàgon regular i l'estrella inscrita amb el 3D Studio o amb algun altre programa gràfic per a calcular les proporcions.



Exercici 4

Estudieu les proporcions d'aquesta làmina de Leonardo da Vinci titulada Isabella d'Este.



Isabel d'Este

Imatge escanejada del llibre de Matila C. Ghyka. *El número de oro*. Vol. I. *Los ritmos* (pàg. 75). Ed. Poseidon.

Exercici 5

Fixeu-vos en el fullet següent i analitzeu quin ús de la proporció s'hi ha fet.

3.5. Proporció en la naturalesa

Les proporcions clàssiques que hem estudiat són presents, també, en la naturalesa. Un exemple d'això és la proporció àuria en el cos humà, com hem vist en els exemples de Leonardo da Vinci. Un dels fenòmens més interessants és el conegut com a **fil·lotaxi**, que estudia el creixement de plantes, d'arbres, de fruits, etc.

Els nombres de Fibonacci apareixen de manera natural en el fenomen biològic de la fil·lotaxi, que estudia la distribució de les fulles en una branca d'una planta o d'un arbre. En alguns arbres, com per exemple l'om, les fulles de les branques apareixen alternativament en dos costats oposats a mesura que creixen aquestes fulles. D'aquest fet se'n diu fil·lotaxi de relació 1/2. En altres arbres, com el faig o la noguera, el pas d'una fulla a l'altra es dóna fent un gir d'un terç de volta, com si fessin una espiral; se'n diu fil·lotaxi de relació 1/3. Hi ha relacions de fil·lotaxi de 2/5, per al roure i l'albercoc; de 3/8, per a l'àlber i la perera; de 5/15, per al salze i l'ametller; etc. Totes aquestes fraccions estan formades de nombres alterns de la successió de Fibonacci. Aquesta observació també es pot fer amb nombres consecutius en la successió de Fibonacci, ja que un gir de 2/5 en un sentit equival a un gir de 3/5 en sentit contrari. Això es justifica perquè la suma d'aquestes dues fraccions és la unitat. Passa la mateixa cosa en la resta de les fraccions que hem dit.

De relacions semblants entre la successió de Fibonacci i la natura se'n poden trobar en la distribució de les pipes en una flor de gira-sol, o en les petites rajoles que es poden apreciar en la pell d'una pinya tropical.

3.6. Mesures, proporció i tipografia

Fins ara no hem utilitzat unitats de mesura en els càlculs de proporcions. Això és degut al fet que la proporció no depèn de les unitats de mesura amb què treballem. Òbviament, si volem calcular la proporció d'un rectangle, hem de mesurar els costats amb la mateixa unitat de mesura, però tant se val quina unitat fem servir. Només és important que fem servir la mateixa unitat per a mesurar els dos costats.

Les unitats de mesura més habituals ens les proporciona el sistema mètric decimal. La unitat bàsica, el **metre**, és la deumilionèsima part del quadrant meridià terrestre. Aquesta mesura la va instaurar l'Assemblea Nacional Francesa el 1792 amb la intenció d'uniformar la gran varietat d'unitats de mesura que hi havia en l'època segons la regió o el país. A partir del metre i multiplicant o dividint successivament per 10 obtenim la resta d'unitats de mesura de longitud del sistema mètric decimal.

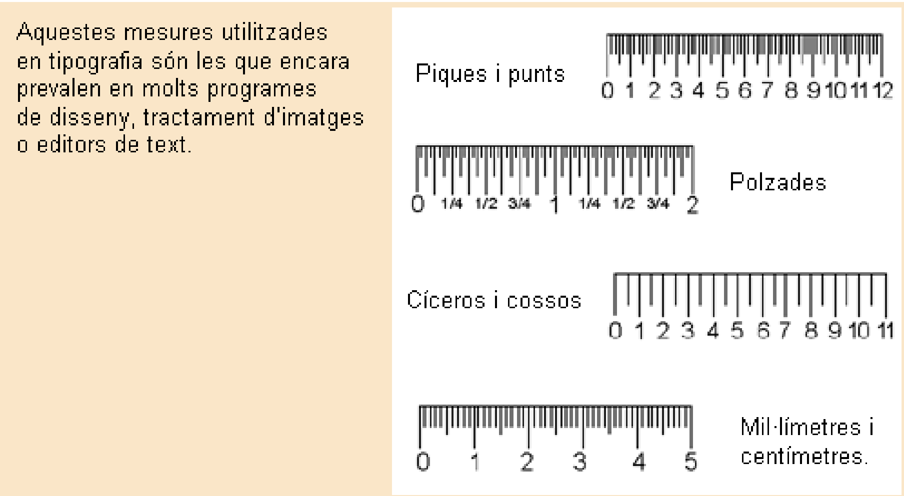
Taula d'equivalències		
Miriàmetre	1 mam	10.000 m
Quilòmetre	1 km	1.000 m
Hectòmetre	1 hm	100 m
Decàmetre	1 dam	10 m
Metre	1 m	1 m
Decímetre	1 dm	0,1 m
Centímetre	1 cm	0,01 m
Mil·límetre	1 mm	0,001 m
Micra	1 µ	0,000001 m
Àngstrom	1 Å	0,0000000001 m

En determinades àrees de treball, el sistema mètric no s'ha imposat, de manera que es manté el sistema tradicional, encara que també s'hagi mirat d'unificar d'un país a l'altre. Aquest és el cas de les mesures que es fan servir en tipografia.

Les unitats de mesura per als caràcters de textos tipogràfics són el **punt**, la pica i el cícero. Aquestes mesures difereixen de l'Europa continental als Estats Units i el Regne Unit. Aquesta diferència prové de les diverses mesures que utilitzaven les foneries per a les impremtes. Al començament del segle XVIII, un francès dit Pierre Fournier va proposar una unitat estàndard a la qual va anomenar *punt*. Més endavant, un altre francès, Firmin Didot, va desenvolupar les innovacions que havia proposat Fournier amb la finalitat d'instaurar una unitat comuna europea, encara que aquest sistema no va ser adoptat ni pel Regne Unit ni pels Estats Units. El sistema angloamericà es basa en la divisió de la polzada en 72 punts. La pica està formada de 12 punts, és a dir, una polzada són 6 piques. El punt europeu, també dit *punt Didot*, té un valor de 0,37592 mm, de manera que és una mica més gran que el punt usat als Estats Units i al Regne Unit; 12 punts Didot equivalen a un cícero (aquesta mesura té noms diferents segons el país).

WEB

Recurs interactiu
accessible només al web.

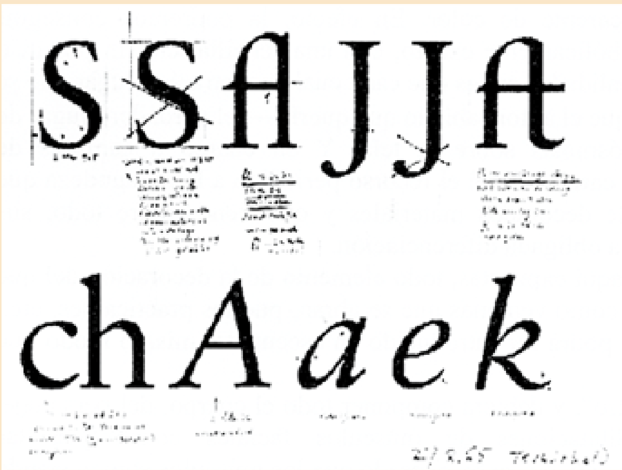


Equivalències	Mil·límetres (mm)	Polzades (in)
1 punt (angloamericà)	0,35146 mm	1/72 in
1 punt Didot (europeu continental)	0,37592 mm	0,0148 in
1 pica (angloamericà)	4,223 mm	1/6 in
1 cícero (europeu continental)	4,512 mm	0,1776 in

Un personatge molt important pel que fa a disseny de publicacions i tipografies va ser Jan Tschichold, nascut a Leipzig, a Alemanya, el 1902. Va conviure amb el dit **moviment Bauhaus** i, encara que ell mateix no en va formar part, aquest moviment el va influir molt. El moviment Bauhaus va ser un moviment arquitectònic i de disseny que es va formar a Alemanya entre 1919 i 1933. Aquest moviment va néixer amb la idea d'aplicar una simplicitat radical al disseny, tractant que totes les formes tinguessin una funció. Les tipografies més importants que es van crear per la influència de la Bauhaus no les va crear cap dels seus membres directament. Jan Tschichold va ser un dissenyador de tipografies i un dels responsables del disseny tipogràfic dins del moviment Bauhaus; Herbert Bayer, va crear el tipus de lletra universal.

Tschichold va dedicar la vida sencera a la filosofia del disseny, que ha deixat reflectida a dos llibres. El 1928 va publicar *Die Neue Typographie* ("La nova tipografia"), en què defensa la asimetria rectilínia en la composició del disseny i en què defensa les tipografies del tipus Sans Serif. El 1935 va publicar *Typographische Gestaltung* (·Arranjaments tipogràfics'), en què es va oposar radicalment a les afirmacions que havia fet abans i en què va defensar la tipografia tradicional i equilibrada. En aquesta obra va estudiar i defensar l'ús de la proporció àuria en el disseny tipogràfic. Per aquesta raó es va conèixer Tschichold com un dissenyador perfeccionista i contradictori. Una de les tipografies més conegudes creades per Tschichold va ser l'anomenada **Sabon**, actualment en ús i comercialitzada per l'Adobe.

Dibuix de Tschichold per al tipus de lletra Sabon



Imatge extreta de la web: http://slip.net/~graphion/tschetch.html

Tschichold també va proposar els seus dissenys per a l'edició de llibres. Va dedicar molt de temps a estudiar manuscrits medievals i renaixentistes, i va descobrir l'ús les proporcions 2, 3, 4 i 6 per a les mides dels marges interior, superior, exterior i inferior, respectivament. També va descobrir que, en molts d'aquests manuscrits, si la proporció de la pàgina entre l'altura i l'amplada era de 3/2, la proporció que es feia servir en el tipus de lletra seguia aquesta mateixa proporció entre altura i amplada.

Aquest cànon que va descobrir Tschichold el va usar Gutenberg, entre d'altres. Després d'aquests estudis, Tschichold es va encarregar de remodelar el disseny de totes les publicacions de la Penguin Books.

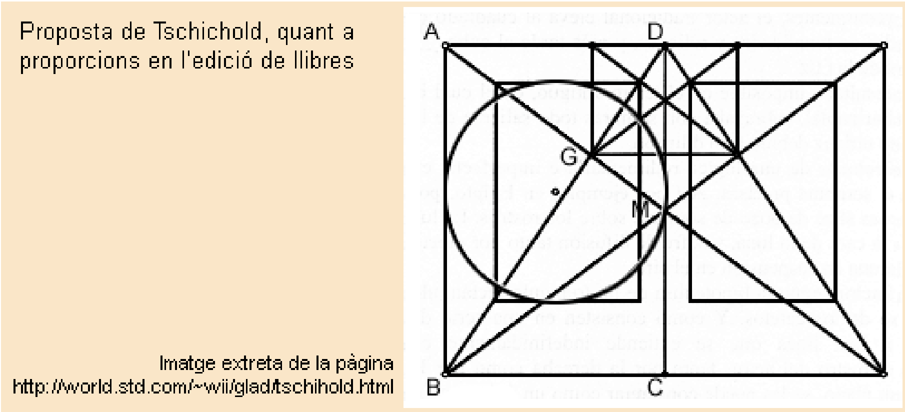
La proporció en la impressió de llibres segons Tschichold (hi ha una miniaplicació que permet variar les dimensions de la pàgina):
http://world.std.com/~wij/glad/tschichold.html

Per a més informació sobre el moviment Bauhaus:
http://rhythm.iinet.net.au/~cmc010/99/0bauhaus/

http://www2.ucsc.edu/people/gflores/bauhaus/b1.html

Diverses tipografies de la casa Adobe:
http://www.adobe.com/type/browser/F/P_088/F_SABO-10005000.html

Museu de Tipografia en línia:
http://www.slip.net/~graphion/museum.html



Activitat

Exercici 1

Useu la miniaplicació de la pàgina web http://world.std.com/~wij/glad/tschichold.html per a estudiar com va dissenyar Tschichold el seu cànon per a publicacions.

Exercici 2

Dissenyeu una lletra *A*, majúscula, utilitzant construccions geomètriques i alguna de les proporcions estudiades.

Exercicis d'autoavaluació

1. Un client ens encarrega el seu lloc web. El logotip que ens proporciona l'empresa és un dibuix en forma rectangular de 12 cm de base per 15 cm d'altura. En el lloc web que dissenyem, la imatge té 8 cm de base. Quant fa d'altura el lloc web?

a) 10 cm
b) 11 cm
c) 6,4 cm

2. Un cilindre creat en 3D Studio fa 15 cm d'altura per 4 cm de diàmetre de la base. Fent una reducció de l'objecte a un 25% obtenim un cilindre de...

a) 7,5 cm d'altura per 2 cm de diàmetre de la base.
b) 3,75 cm d'altura per 1 cm de diàmetre de la base.
c) 1,875 cm d'altura per 0,5 cm de diàmetre de la base.

3. Si ampliem una fotografia un 300% amb un programa de tractament d'imatges, llavors...

a) les longituds dels costats de la fotografia es multipliquen per 300.
b) l'àrea de la fotografia es multiplica per 3.
c) les longituds dels costats de la fotografia es multipliquen per 3.

4. Una pantalla d'un monitor d'un televisor fa 28 cm × 21 cm. La proporció de la pantalla és...

a) de 0,75.
b) d'1,33.
c) de 7.

5. Un negatiu de 24 mm × 36 mm es pot positivar en paper...

a) de 25 cm × 37 cm.
b) de 13 cm × 18 cm.
c) 30 cm × 45 cm.

6. La proporció d'una imatge és 1; llavors, podem dir que...

a) la imatge és un rectangle amb la base més gran que l'altura.
b) la imatge és quadrada.
c) la imatge és un rectangle amb la base més petita que l'altura.

7. Inserim una imatge de 3 cm × 4 cm en un text amb un processador de textos. Per fer-la ressaltar, incorporem un marc de 0,5 cm de gruix al voltant de tota la imatge. Llavors podem afirmar que...

a) la proporció de la imatge coincideix amb la proporció del marc.
b) la proporció de la imatge és més gran que la proporció del marc.
c) la proporció de la imatge és més petita que la proporció del marc.

8. Considerem una corda tensada que, en fer-la vibrar, té una tonalitat de do; llavors, en pressionar just per la meitat de la corda i fer-la vibrar, obtenim...

a) una altra tonalitat de do però una octava més alta.
b) una altra tonalitat de do però una octava més baixa.
c) una tonalitat de fa dins de la mateixa octava.

9. La superfície d'un full de mida DIN A4 fa...

a) una quarta part d'un full de mida DIN A0.
b) una vuitena part d'un full de mida DIN A1.
c) el doble d'un full de mida DIN A6.

10. En dividir un full qualsevol de la família DIN A en tres trossos iguals per línies paral·leles al costat més curt, obtenim tres rectangles de proporció...

a) igual que la del full DIN A inicial.

b) $\sqrt{3}/2$.
c) $3/\sqrt{2}$.

11. La proporció entre la diagonal d'un full qualsevol de la família DIN A i el costat més petit és...

a) $\sqrt{2}$.
b) v3.
c) 2.

12. Donat un rectangle de costats a i b, amb $a < b < 2a$, hi retallem un quadrat màxim, és a dir, de costat a. El rectangle que sobra té les mides a i $b - a$. Si aquest rectangle té la mateixa proporció que el rectangle inicial, podrem afirmar que la proporció és...

a) un nombre racional.
b) àuria.
c) $\sqrt{2}$.

13. El nombre d'or està relacionat directament amb...

a) la successió de Fibonacci, el pentàgon i l'icosaedre.
b) la família de fulls DIN A i DIN B.
c) les mides del tipus de lletra Arial.

14. L'empresa Pantallonics ha creat una pantalla especial de cinema per a projectar curtmetratges sobre art. Les mides de la pantalla són 6,10 m × 3,77 m. La proporció és aproximadament...

a) $\sqrt{2}$.
b) el nombre d'or.
c) el nombre π.

15. Un cícero equival a...

a) 6 piques.
b) 12 punts.
c) 1 centímetre.

Solucionari

Exercicis d'autoavaluació

1. a
b) Incorrecta. Si es manté la proporció s'hauria de satisfer la igualtat 15/12 = 11/8, però això no és cert.
c) Incorrecta. Si es manté la proporció s'hauria de satisfer la igualtat 15/12 = 6,4/8, però això no és cert.

2. b
a) Incorrecta. S'han de multiplicar les dues longituds per 25%, és a dir, per 25/100 = 0,25.
c) Incorrecta. S'han de multiplicar les dues longituds per 25%, és a dir, per 25/100 = 0,25.

3. c
a) Incorrecta. En aquest cas, l'ampliació és de 30.000%.
b) Incorrecta. L'àrea es multiplica per (300/100)2 = 32 = 9 i no per 3.

4. b
a) Incorrecta. La proporció es calcula dividint el costat més gran entre el més petit. El que passa és que feu la divisió al revés.
c) Incorrecta. La proporció es calcula dividint el costat més gran entre el més petit, i el resultat no és aquest.

5. c
a) Incorrecta. La proporció del negatiu i del positiu han de coincidir. En aquest cas no coincideixen.
b) Incorrecta. La proporció del negatiu i del positiu han de coincidir. En aquest cas no coincideixen.

6. b
a) Incorrecta. Un rectangle amb la longitud de la base diferent de la de l'altura té la proporció estrictament més gran que 1.
c) Incorrecta. Un rectangle amb la longitud de la base diferent de la de l'altura té la proporció estrictament més gran que 1.

7. b
a) Incorrecta. La proporció de la imatge és de 4/3, mentre que la proporció del marc és de 5/4. Compareu aquests dos nombres.
c) Incorrecta. La proporció de la imatge és de 4/3, mentre que la proporció del marc és de 5/4. Compareu aquests dos nombres.

8. a
b) Incorrecta. En pressionar una corda per la meitat s'obté la mateixa tonalitat, que és justament l'observació que va fer Pitàgores. Com que la corda és més curta, la tonalitat és una octava de més alta.
c) Incorrecta. En pressionar una corda per la meitat s'obté la mateixa tonalitat, que és justament l'observació que va fer Pitàgores. Com que la corda és més curta, la tonalitat és una octava més alta.

9. b
a) Incorrecta. En dividir un DIN A0 en quatre parts obtenim fulls de mida DIN A2.
c) Incorrecta. El doble d'un DIN A6 és un DIN A5.

10. c
a) Incorrecta. La proporció dels DIN A es manté en dividir per la meitat, no en dividir en terços.
b) Incorrecta. La proporció ha de ser un nombre més gran o igual que 1, i aquest no ho és.

11. b
a) Incorrecta. Tots els fulls DIN A tenen proporció √2. Si les mides del full són i √2 · , podem calcular la diagonal utilitzant el teorema de Pitàgores.
c) Incorrecta. Tots els fulls DIN A tenen proporció √2. Si les mesures del full són i √2 · , podem calcular la diagonal utilitzant el teorema de Pitàgores.

12. b
a) Incorrecta. Si és la proporció del rectangle original, 1/x-1 és la proporció del rectangle retallat. Igualant-ho obtenim una equació de segon grau les solucions de la qual no són racionals.
c) Incorrecta. Si és la proporció del rectangle original, 1/x-1 és la proporció del rectangle retallat. Igualant-ho obtenim una equació de segon grau les solucions de la qual no són √2.

13. a
b) Incorrecta. Les famílies DIN A estan relacionades amb el nombre √2, però no amb el nombre d'or.
c) Incorrecta. Les proporcions en la lletra Arial no són àuries.

14. b
a) Incorrecta. Compareu la proporció 6,10/3,77 amb el nombre $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.
c) Incorrecta. Compareu la proporció 6,10/3,77 amb el nombre $\pi \approx 3{,}14$.

15. b
a) Incorrecta. Un cícero es divideix en 12 punts en el sistema europeu continental d'unitat de mesures en tipografia.
c) Incorrecta. Un cícero es divideix en 12 punts en el sistema europeu continental d'unitat de mesures en tipografia.