Trigonometria aplicada al disseny gràfic

Salvador Linares Mustarós

PID_00215871

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

En aquest mòdul didàctic aprendrem trigonometria elemental. Aquest és un tema bàsic per a dominar els conceptes de distàncies, angles i proporcions. La seva estructuració està pensada per anar aprenent tota la teoria d'una forma gradual i amb un sentit coherent amb el nostre concepte de la realitat.

1. Conceptes bàsics

1.1. Triangles. Definició i classificació

Un triangle és una figura plana formada per tres segments lineals seqüencials. Cadascun d'aquests segments s'anomenen costats del triangle i cada un dels punts on s'uneixen dos costats s'anomena vèrtex del triangle.

Els triangles es poden classificar segons la longitud dels seus costats. Si els tres costats tenen la mateixa llargada, el triangle s'anomena equilàter. Si dels tres costats només dos són iguals, aleshores el triangle s'anomena isòsceles. Finalment, si els tres costats són diferents dos a dos, el triangle s'anomena escalè.

1.2. Angles d'un triangle

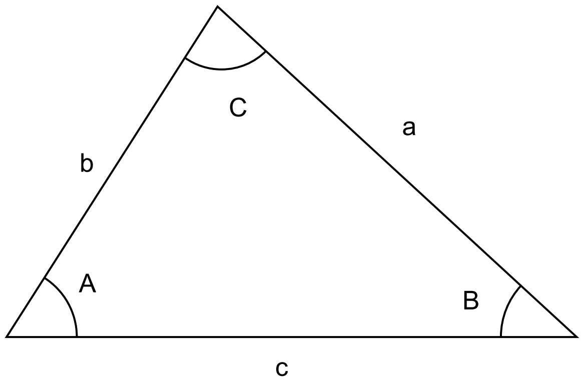
Euclides va definir l'angle en el seu tractat matemàtic anomenat *Elements* com:

> "la inclinació en un pla d'una línia sobre una altra amb la qual es troba i no forma línia recta".

El símbol habitual per identificar un angle és "∠".

La paraula *angle*, però, té relació amb una paraula grega relacionada amb la paraula *doblegar*. No seria estrany, doncs, que antigament es veiés l'angle com el doblegament d'una part del segment. Així, un angle recte es podria identificar com la inclinació o doblegament que es fa a una part d'un segment fins que s'ha aconseguit el quart de volta d'una circumferència. És a dir, aniríem doblegant un tros de segment fins a obtenir una forma tipus "L".

És habitual anomenar els tres angles interns d'un triangle en funció del nom dels costats. Per exemple, si el triangle té per costats a, b i c, els angles oposats a cada costat reben el nom d'angle A, angle B i angle C. El dibuix següent il·lustra aquesta notació.



Cada triangle es pot classificar en un dels conjunt definits anteriorment a partir del nombre d'angles iguals que tingui el triangle, ja que es compleixen les propietats següents:

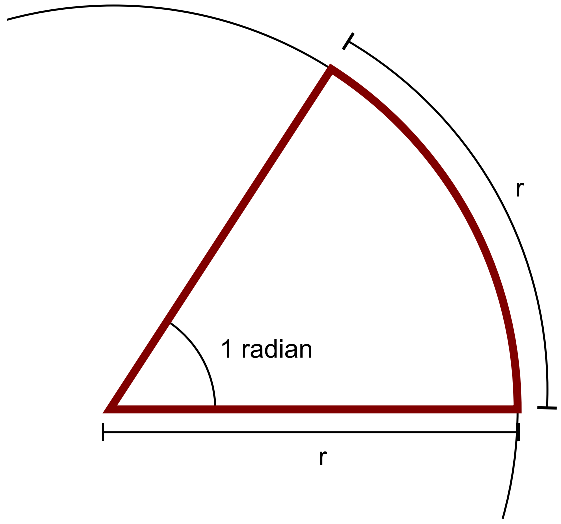
1) Els tres angles interns d'un triangle equilàter són iguals.
2) Un triangle isòsceles té només dos angles interns iguals.
3) Un triangle escalè té tots els angles interns diferents.

Igual que un interval de temps es pot expressar en minuts o en segons, els angles es poden expressar en graus o radiants. No hi ha conveni sobre quin utilitzar normalment i, per tant, és possible que un programa utilitzi graus a l'hora de calcular el sinus, el cosinus i la tangent, mentre que un altre utilitzi radiants. Saber convertir els angles en l'altre tipus d'expressió és, doncs, obligatori per poder programar sense errors.

Un **grau sexagesimal** és una unitat de mesura dels angles del pla definit com la sexagèsima part de qualsevol dels angles d'un triangle equilàter (per tant, els angles d'un triangle equilàter mesuren 60 graus). El seu símbol és º.

El **radian o radiant** és una altra unitat de mesura dels angles del pla definit com l'angle que comprèn un arc de circumferència amb una longitud igual al radi de la circumferència. El seu símbol és rad.

El dibuix següent ens ajuda a fer-nos una idea de la mesura d'un angle d'un radiant o radian:



Atès que la longitud d'una circumferència de radi r és $2 \cdot \pi \cdot r$, sempre tenim l'equivalència entre unitats següent: $360^0 = 2\pi$ rad, o simplificant: $180^0 = \pi$ rad.

Observem que aleshores,

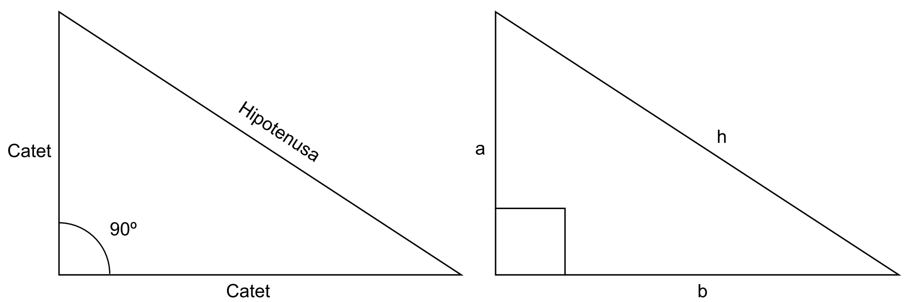
$$1\,rad = 1\,rad \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi\ radiants} = 57{,}295779513082320876798154814 1\ldots^{\circ}$$

1.3. Triangles rectangles

Un **triangle rectangle** és aquell triangle que té un angle de 90º.

Els costats dels triangle adjunts a l'angle de 90º s'anomenen **catets** i el costat del triangle enfrontat a l'angle de 90º s'anomena **hipotenusa**.

Per tant, dos possibles dibuixos de triangles rectangles són:



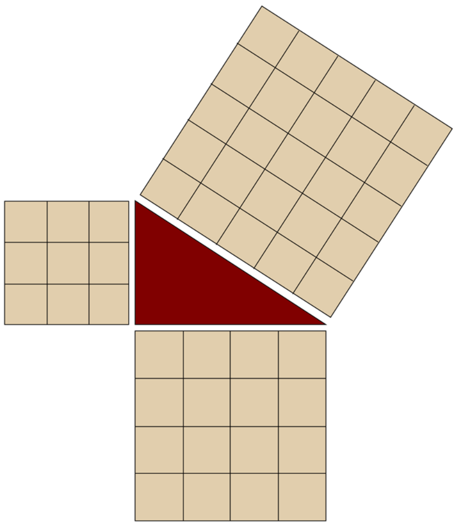
Normalment els angles de 90º, anomenats també angles rectes, els representarem en forma de quadrat o capseta sense posar el valor de 90.

1.4. Teorema de Pitàgores

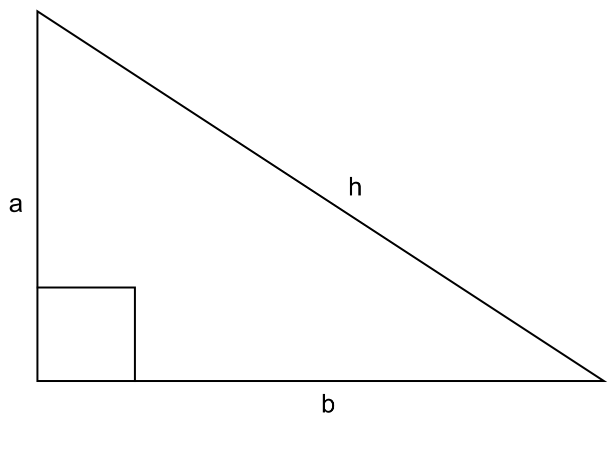
Pitàgores de Samos va ser un filòsof i matemàtic grec que va viure aproximadament entre el 570 i el 495 aC.

Pitàgores va fundar un orde de tipus comunal i secret. Totes les contribucions matemàtiques dels seus membres li eren atribuïdes.

El teorema de Pitàgores afirma que l'àrea del quadrat format amb la hipotenusa coincideix amb la suma de les àrees dels quadrats formats amb els costats.



Aquesta condició es pot expressar algebraicament a partir d'un triangle rectangle general tipus:



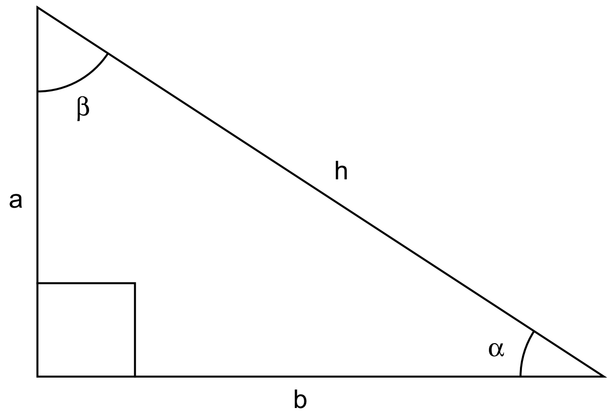
Atès que els catets s'han anomenat a i b i la hipotenusa h, aleshores el **teorema de Pitàgores** afirma que $h^2 = a^2 + b^2$.

Exemple

Nota

És també habitual representar la condició anterior com: $h = \sqrt{a2 + b2}$.

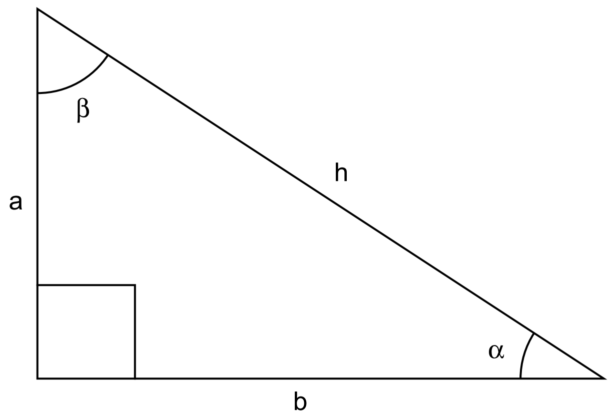
Generalment, en triangles rectangles, l'angle oposat al catet anomenat *a* és denominat alfa i és representat per la lletra grega α. Anàlogament, l'angle oposat al catet *b* és denominat beta i es representat per la lletra grega β.



1.5. Raons trigonomètriques d'un triangle rectangle

Donat un triangle rectangle, es defineix el **sinus d'un angle** com el costat oposat a l'angle dividit per la hipotenusa; el **cosinus d'un angle**, com el costat contigu a l'angle dividit per la hipotenusa, i la **tangent d'un angle**, com el costat oposat a un angle dividit pel costat contigu a l'angle.

Així, per exemple, amb el dibuix següent:



$$\sin\alpha = \frac{a}{h} \qquad \sin\beta = \frac{b}{h}$$

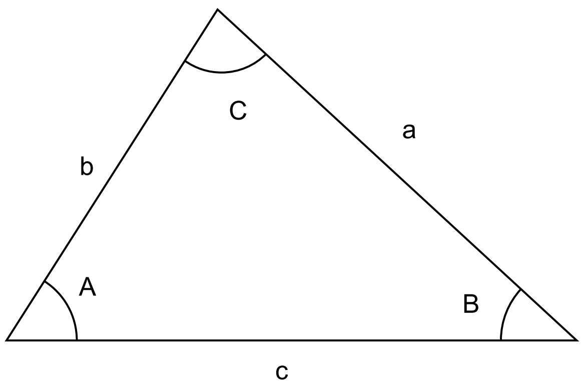
$$\cos\alpha = \frac{b}{h} \qquad \cos\beta = \frac{a}{h}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} \qquad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$$

Ni el sinus ni el cosinus ni la tangent depenen de les mides del triangle triat. És a dir, dos triangles rectangles amb els mateixos angles interns tenen els mateixos valors de sinus, cosinus i tangents dels angles, tot i que les mides dels costats siguin diferents.

1.6. Propietats que es compleixen en un triangle

Donat un triangle tipus:



1) El **perímetre del triangle** o la longitud del seu contorn és $a + b + c$.

2) L'**àrea del triangle** és la meitat del que mesura la base pel que mesura l'alçada.

3) A + B + C = 180

La suma dels tres angles és 180º o π radians, és a dir, A + B + C = 180º o A + B + C = π rad.

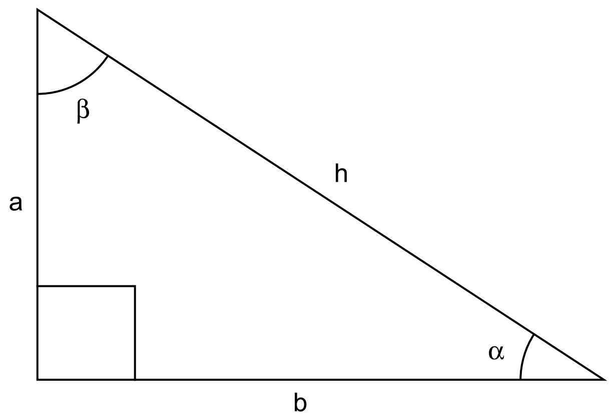
4) $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$

1.7. Propietats que es compleixen en un triangle rectangle

Donat un triangle rectangle tipus:



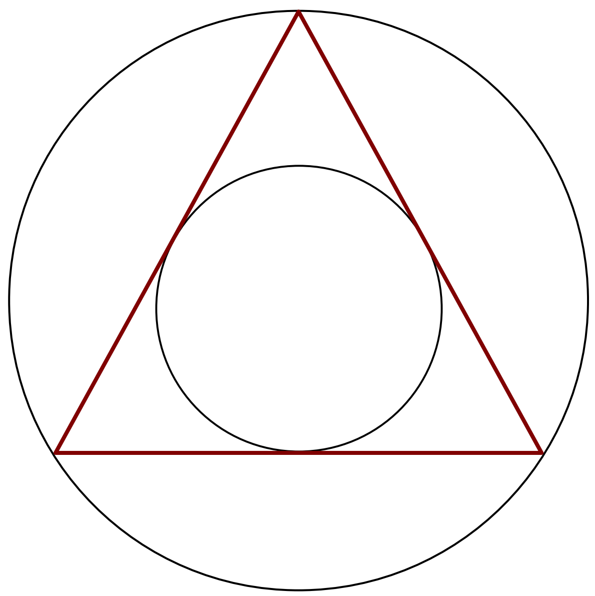
1) El perímetre del triangle o la longitud del seu contorn és $a + b + h$.

2) L'àrea del triangle és la meitat de $a \cdot b$.

3) $\alpha + \beta = 90^\circ$

4) $h^2 = a^2 + b^2$

1.8. Propietats que es compleixen en un triangle equilàter de costat *a*



1) El perímetre del triangle o la longitud del seu contorn és 3a.

2) L'altura del triangle és $\frac{\sqrt{3}}{2}$ a.

3) L'àrea del triangle és $\frac{\sqrt{3}}{4}$ a^2.

4) El radi del cercle inscrit (aquell cercle que es pot dibuixar dins el triangle tocant els tres costats de manera tangencial) és $\frac{\sqrt{3}}{6}$ a.

5) El radi del cercle circumscrit (aquell cercle que es pot dibuixar per fora el triangle i que conté els tres vèrtex) és $\frac{\sqrt{3}}{3}$ a.

2. Exercicis amb solució

L'objectiu d'aquesta secció és recordar conceptes i tècniques matemàtiques de manera eminentment pràctica a partir d'exemples concrets.

Exercici 1

Demostreu que si tenim un triangle rectangle de costats 3 i 4 centímetres, la hipotenusa mesura 5 centímetres.

Solució:

Atès que els catets mesuren 3 i 4 centímetres, la hipotenusa ha de fer necessàriament 5 centímetres, ja que s'ha de complir que $h^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, i l'únic nombre positiu que ell per ell mateix dóna 25 és el nombre 5 (o bé $h = \sqrt{25} = 5$).

Exercici 2

Demostreu que si tenim un triangle rectangle en el qual la hipotenusa mesura 5 centímetres i un dels costats mesura 4 centímetres, l'altre costat ha de mesurar necessàriament 3 centímetres.

Solució:

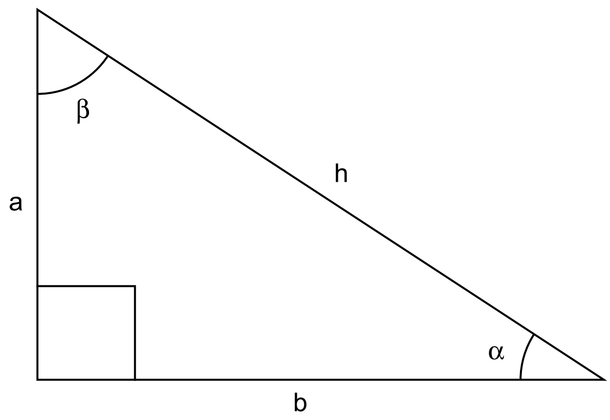
Observeu que si de l'equació $h^2 = a^2 + b^2$ aïllem un dels costats, per exemple a, obtenim $a^2 = h^2 - b^2$ (o bé $a = \sqrt{h^2 - b^2}$). Aleshores si coneixem la hipotenusa i un catet, l'altre catet és molt fàcil de trobar: $a^2 = 25 - 16 = 9$ i aleshores $a = 3$.

Exercici 3

Demostreu que la suma dels angles interiors d'un triangle rectangle és 180º.

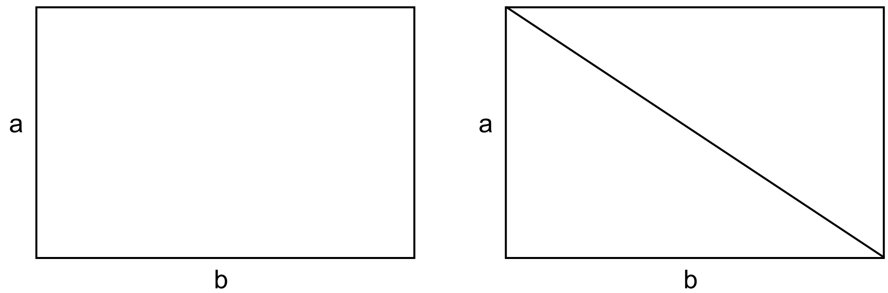
Demostració:

Donat un triangle rectangle tipus,

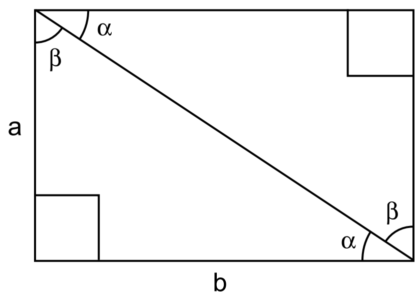


Per demostrar que els angles interiors d'un triangle rectangle sumen 180, només cal demostrar que $\alpha + \beta = 90$, ja que en sumar a aquest valor l'angle recte de 90, obtindrem 180.

Per veure que $\alpha + \beta = 90$ es divideix un rectangle de costats *a* i *b* per la seva diagonal.



Aleshores obtenim dos triangles exactament iguals al triangle rectangle de partida, els quals construeixen el rectangle de la manera següent:

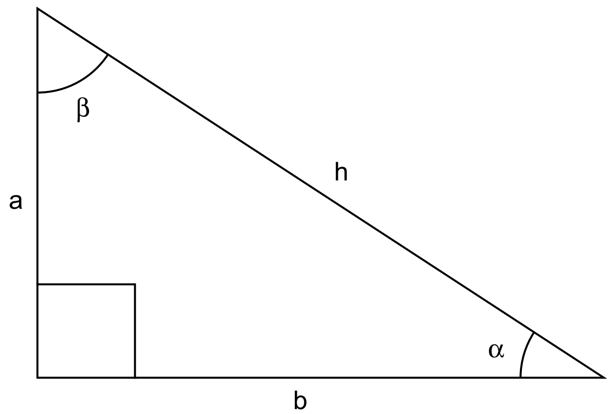


I aleshores $\alpha + \beta = 90$, ja que tot angle interior d'un rectangle mesura 90º.

Exercici 4

Trobeu el tercer angle d'un triangle si sabem que un dels angles és 60º i l'altre és 90º.

Solució:



Sabem que en tot triangle rectangle amb els angles en graus es compleix que $\alpha + \beta = 90$.

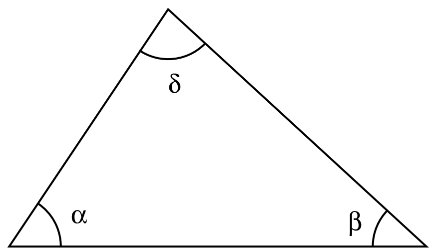
Atès que un dels angles és 60, aleshores l'altre angle ha de ser 30, ja que 30 és l'únic nombre que compleix que la seva suma amb 60 és 90.

Exercici 5

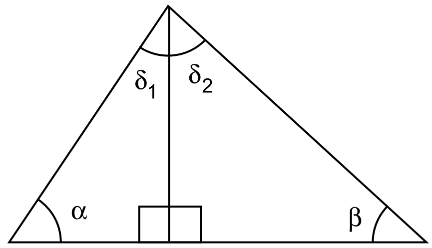
Demostreu que la suma dels angles interiors de qualsevol triangle és 180º.

Solució:

Donat un triangle qualsevol d'angles α, β i δ com el representat a continuació,



es pot construir com a suma de dos triangles rectangles seguint la idea següent:



Observem que $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

Com que tenim dos triangles rectangles, també sabem que necessàriament $\alpha + \delta_1 = 90$ i $\beta + \delta_2 = 90$.

Aleshores $\alpha + \beta + \delta = \alpha + \beta + \delta_1 + \delta_2 = \alpha + \delta_1 + \beta + \delta_2 = 90 + 90 = 180$.

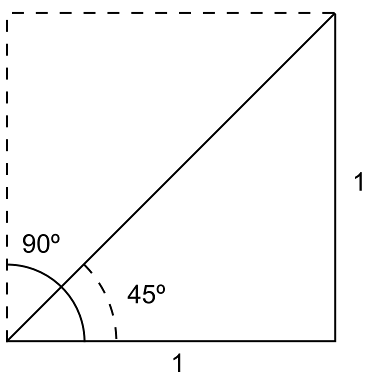
Exercici 6

Trobeu el sinus, el cosinus i la tangent de l'angle de 45º.

Solució:

Primer hem de construir un triangle rectangle amb un angle de 45º.

A partir del dibuix d'un quadrat de costats 1 i 1, la diagonal partirà el quadrat en dos triangles rectangles amb angles de 45º.



Aleshores, per Pitàgores la seva hipotenusa serà $\sqrt{2}$.

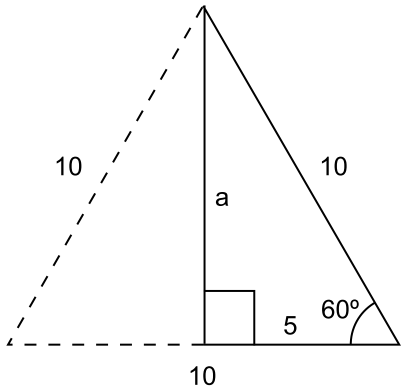
Per tant, $\sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $tg\, 45 = \frac{1}{1} = 1$ tal com s'ha definit en la secció 1.5.

Amb una calculadora podem comprovar els resultats. Si no obtenim aquests valors és que la calculadora, per tal d'obtenir el sinus, el cosinus i la tangent d'un angle, està programada per obtenir-los a partir d'un angle expressat en radiants en comptes de graus.

Exercici 7

Trobeu el sinus, el cosinus i la tangent de l'angle de 60º.

Primer hem de construir un triangle rectangle amb un angle de 60º. La forma més senzilla és construir-lo a partir d'un triangle equilàter (= un triangle amb els tres costats iguals) de costat 10. Per simetria, sabem que si el partim per la meitat tal com mostra el dibuix següent, la hipotenusa mesura 10 i un dels costats 5.



Atès que els tres angles interiors d'un equilàter han de ser iguals i que la suma dels tres és 180, cada angle d'un equilàter és 60.

Per la fórmula de Pitàgores podem obtenir el costat que ens falta en el triangle i que hem denotat a. Aleshores $a^2 = 100 - 25$ i per tant $a = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

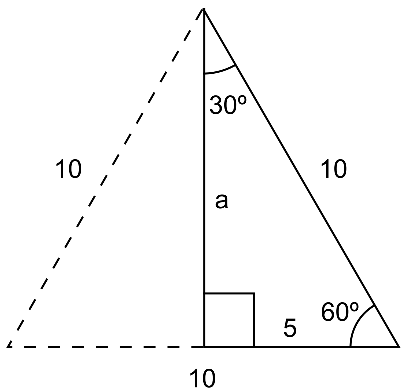
Aleshores, $\sin 60 = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ i $tg\, 60 = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}$.

Exercici 8

Trobeu el sinus, el cosinus i la tangent de l'angle de 30º.

Solució:

A partir del mateix dibuix de l'exercici anterior, l'altre angle interior del rectangle ha de ser 30.



Aleshores $\sin 30 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $\cos 30 = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $tg\ 30 = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Amb una calculadora podem comprovar els resultats.

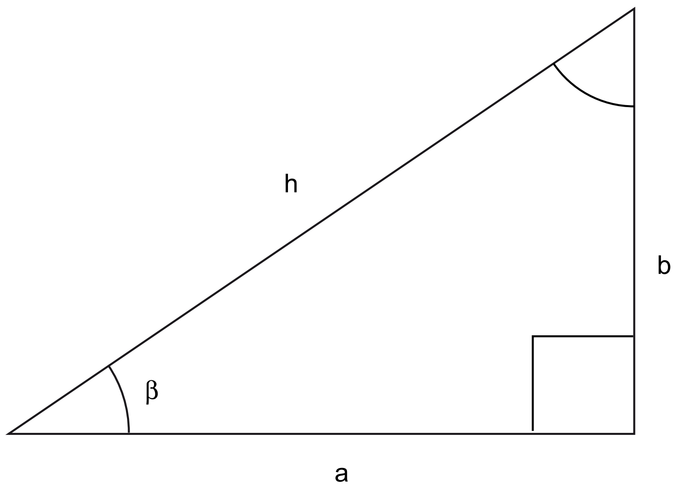
Exercici 9

Prenent dos triangles semblants, comproveu que el valor del sinus, el cosinus i la tangent d'un dels angles no depèn de la mida dels triangles.

Solució:

Dos triangles són **semblants** si tenen els mateixos angles interiors.

Partim d'un triangle rectangle qualsevol. Per exemple, el del dibuix següent:



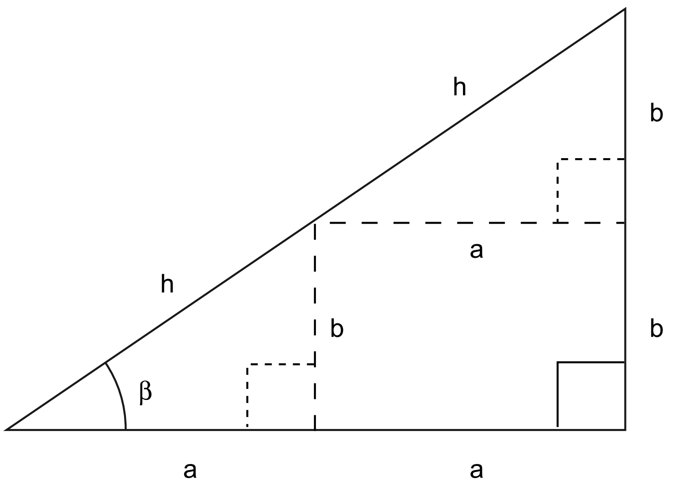
Aleshores sabem que per definició:

$$\sin \beta = \frac{b}{h}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{h}$$

$$tg\ \beta = \frac{b}{a}$$

A partir del triangle anterior es construeix un triangle amb el doble de la base i el doble de l'alçada, tal com mostra el dibuix següent. El triangle té els mateixos angles interiors i per tant és semblant al primer.



Aleshores, si construïm el sinus, el cosinus i la tangent del mateix angle β amb les noves mides dels costats que acabem de trobar obtenim:

$\sin\beta = \frac{b+b}{h+h} = \frac{2b}{2h} = \frac{b}{h}$, valor que coincideix exactament amb el sinus de β de l'altre triangle.

$\cos\beta = \frac{a+a}{h+h} = \frac{2a}{2h} = \frac{a}{h}$, valor que torna a coincidir amb el cosinus de β de l'altre triangle.

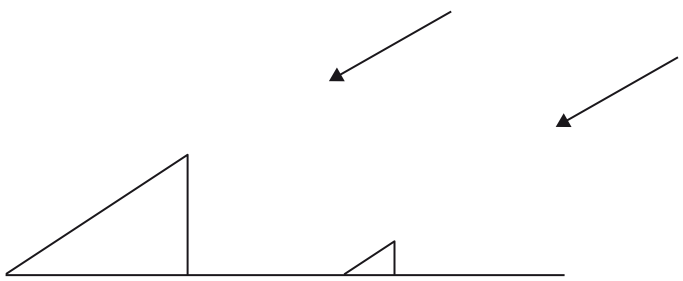
$tg\,\beta = \frac{b+b}{a+a} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$, valor que coincideix exactament amb la tangent de β anterior.

Exercici 10

Calculeu l'alçada d'un arbre que fa una ombra de 15 m a la mateixa hora que un rètol de 2 m fa una ombra de 2 m.

Solució:

Com que els rajos del sol s'estan projectant amb el mateix angle a una hora donada, els triangles rectangles formats pels objectes i la seva ombra són proporcionals.



Tal com ja sabem, el sinus, el cosinus i la tangent dels angles interns de cada triangle coincideixen.

Aleshores, si anomenem x l'alçada de l'edifici en metres ha de passar que en tenir el mateix valor de tangent $\frac{x}{15} = \frac{2}{2}$.

Aleshores aïllant x, obtenim que x = 15 metres.

Si pensem una mica, deduirem que l'angle ha de ser de 45°, ja que si els costats són iguals (2 i 2), és que tenim la meitat d'un quadrat. Per tant, l'alçada de l'arbre ha de ser òbviament 15 metres.

Exercici 11

Expliqueu la utilitat de la circumferència goniomètrica.

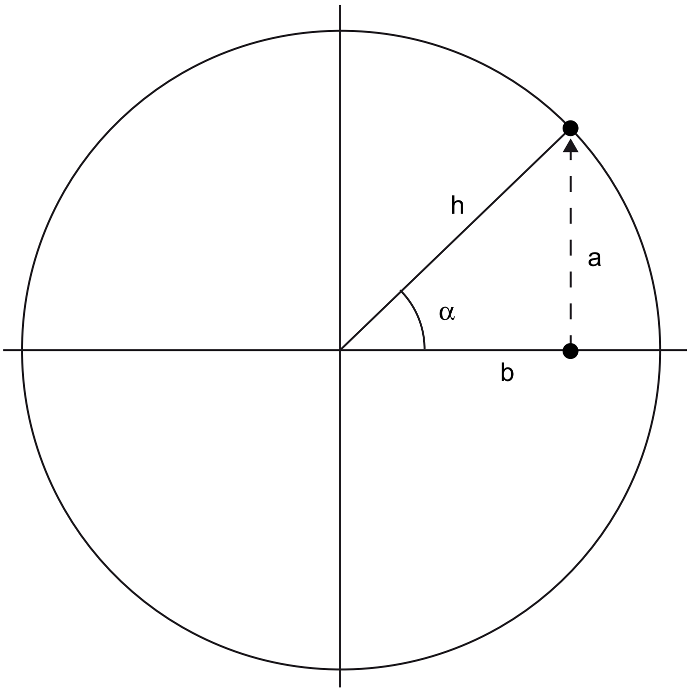
Nota

La circumferència goniomètrica és una circumferència de radi 1.

Solució:

La circumferència goniomètrica permet determinar molt fàcilment el sinus i el cosinus d'un angle, només mesurant distàncies.

Observem, per exemple,



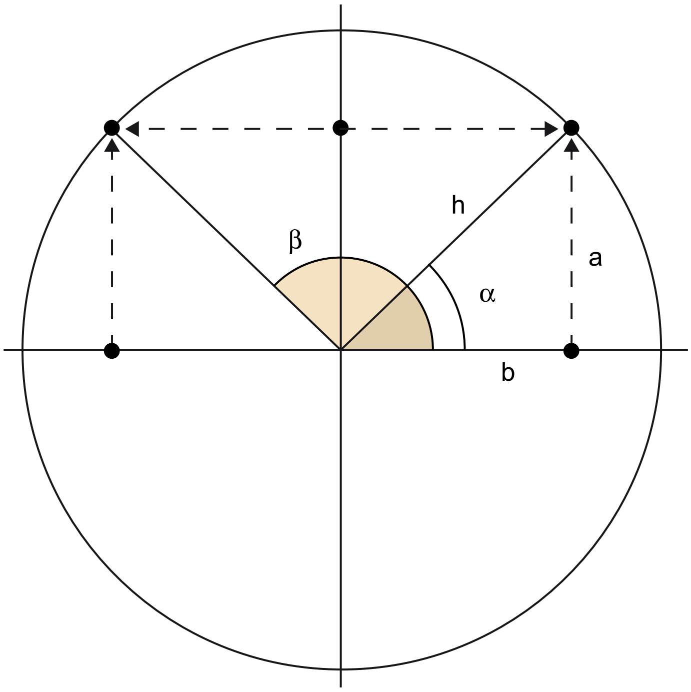
Atès que el radi és 1, la hipotenusa ha de ser 1.

Aleshores $\sin\alpha = \frac{a}{1} = a$ i $\cos\alpha = \frac{b}{1} = b$.

Aleshores amb una regla de mesurar, trobem si mesurem b i si mesurem a, el valor del sinus i el cosinus d'aquest angle.

Si triem un angle més gran que 90, podem utilitzar la comparació de triangles següent per trobar el sinus i el cosinus d'aquest nou triangle.

Per exemple, amb la construcció següent,



podem deduir que $\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$ i que $\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$.

Amb construccions semblants podem trobar el sinus i el cosinus de qualsevol angle entre 0º i 360º.

Atès que a partir de 360º tornem a iniciar la circumferència, és evident que $\sin(360+\alpha) = \sin\alpha$ i que $\cos(360+\alpha) = \cos\alpha$.

Observeu que, per conveni, l'angle sempre es mesura en sentit antihorari començant per les 3 de la tarda.

Exercici 12

Reduïu al primer gir els angles següents:

a) 390º
b) 2.500º

Solució:

a) 390º = 360º + 30º. Aleshores l'angle de 390º identifica l'angle de 30º

b) Atès que

$$\begin{array}{r|l} 2.500 & 360 \\ \cline{2-2} 340 & 6 \end{array}$$

per la regla de comprovació de la divisió sabem que 2.500º = 360º · 6 + 340º. És a dir, per obtenir l'angle de 2.500º, cal fer 6 voltes completes a la circumferència goniomètrica i avançar 340º més.

Així, 2.500º = 340º

Exercici 13

Expresseu en radians les mesures dels angles següents:

a) 30º
b) 40º
c) 122º
d) 150º
e) 310º

Solució:

a) $30\,° \cdot \dfrac{\pi \; radiants}{180\,°} = \dfrac{\pi}{6} \; radiants$

b) $40\,° \cdot \dfrac{\pi \; radiants}{180\,°} = \dfrac{2\pi}{9} \; radiants$

c) $122\,° \cdot \dfrac{\pi \; radiants}{180\,°} = \dfrac{61\pi}{90} \; radiants$

d) $150\,° \cdot \dfrac{\pi \; radiants}{180\,°} = \dfrac{5\pi}{6} \; radiants$

e) $310\,° \cdot \dfrac{\pi \; radiants}{180\,°} = \dfrac{31\pi}{18} \; radiants$

Exercici 14

Expresseu en graus sexagesimals els angles següents:

a) $\frac{\pi}{2}$ rad

b) $\frac{3\pi}{4}$ rad

c) $\frac{9\pi}{2}$ rad

d) $\frac{6\pi}{5}$ rad

Solució:

a) $\frac{\pi}{2}\ rad \cdot \frac{180\,^{\circ}}{\pi\ radiants} = 90\,^{\circ}$
b) $\frac{3\pi}{4}\ rad \cdot \frac{180\,^{\circ}}{\pi\ radiants} = 135\,^{\circ}$
c) $\frac{9\pi}{2}\ rad \cdot \frac{180\,^{\circ}}{\pi\ radiants} = 810\,^{\circ}$
d) $\frac{6\pi}{5}\ rad \cdot \frac{180\,^{\circ}}{\pi\ radiants} = 216\,^{\circ}$

Exercici 15

Utilitzeu la calculadora per obtenir el sinus, el cosinus i la tangent dels angles següents:

a) $\frac{8\pi}{6}$ rad
b) 420º

Solució:

a) Si la calculadora fa els càlculs en radiants, com π = 3,14159..., cal fer:

Sinus (4,18...) = –0,86602540378443864676372317075294
Cosinus (4,18...) = –0,5
Tangent (4,18...) = 1,7320508075688772935274463415059

Si la calculadora fa els càlculs en graus, atès que en graus l'angle és 240, fem:

Sinus (240) = –0,86602540378443864676372317075294
Cosinus (240) = –0,5
Tangent (240) = 1,7320508075688772935274463415059

b) Si la calculadora fa els càlculs en radiants, com π = 3,14159..., cal fer:

Sinus (7,33037666...) = 0,866...
Cosinus (7,33037666...) = 0,5
Tangent (7,33037666...) = 1,73...

Si la calculadora fa els càlculs en graus cal fer:

Sinus (420) = 0,866...
Cosinus (420) = 0,5
Tangent (420) = 1,73...

Nota

L'angle de 420 és el mateix que fer una volta(360) i sumar-hi 60. Per tant, també podem fer-ho com:

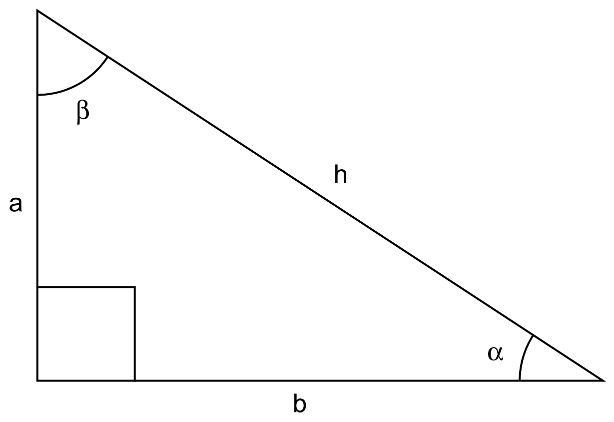
Sinus (60) = 0,866...
Cosinus (60) = 0,5
Tangent (60) = 1,73...

Nota

Per saber si la calculadora o el programa informàtic està en graus o en radiants, calculem $\operatorname{tg} 45$. Si està en graus hauríem d'obtenir $\operatorname{tg} 45 = 1$. Si en comptes d'1 obtenim 1,619775190543861549982 7965..., vol dir que està en radiants.

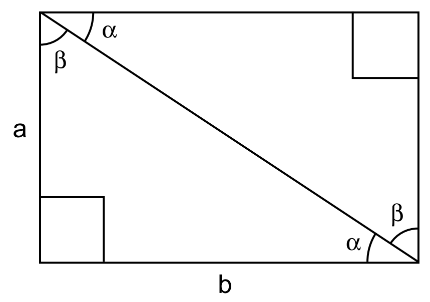
Exercici 16

Demostreu que l'àrea d'un triangle rectangle del tipus següent és $\frac{a \cdot b}{2}$.



Solució:

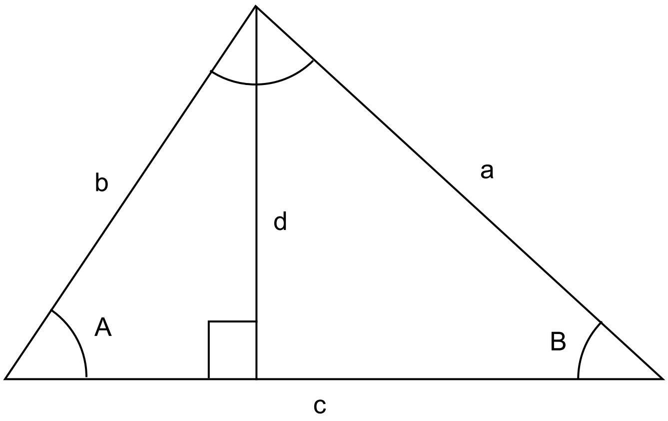
Sabem que l'àrea del rectangle següent és $a \cdot b$.



Atès que conté exactament dos triangles iguals, l'àrea d'un ha de ser $\frac{a \cdot b}{2}$.

Exercici 17

Demostreu que l'àrea d'un triangle del tipus següent és $\frac{c \cdot d}{2}$.

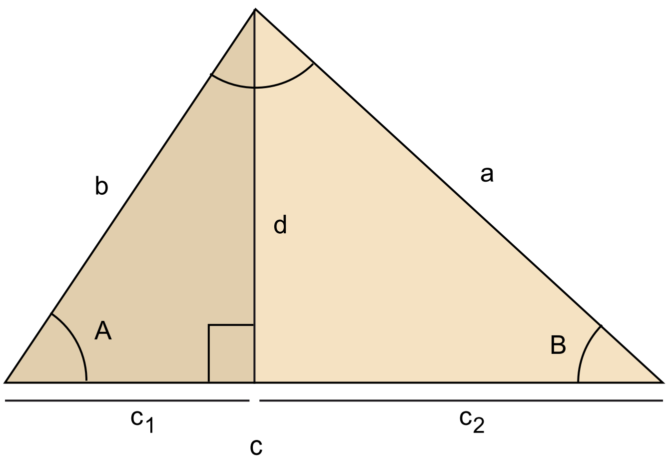


Nota

És habitual en comptes d'utilitzar lletres dir que l'àrea d'un triangle és la base per la seva alçada dividit per 2. En el dibuix la base és *c*, l'alçada *d* i, per tant, hem de demostrar que l'àrea del triangle és $\frac{c \cdot d}{2}$.

Solució:

A partir de la figura següent,



per l'exercici anterior i simplificant les fraccions tenim que l'àrea del triangle és $\frac{c_1 \cdot d}{2} + \frac{c_2 \cdot d}{2} = \frac{c_1 \cdot d + c_2 \cdot d}{2} = \frac{(c_1 + c_2) \cdot d}{2} = \frac{c \cdot d}{2}$.

Nota

Una segona forma de fer-ho és veient que l'àrea demanada és la meitat que la del rectangle de costats *c* i *d*.

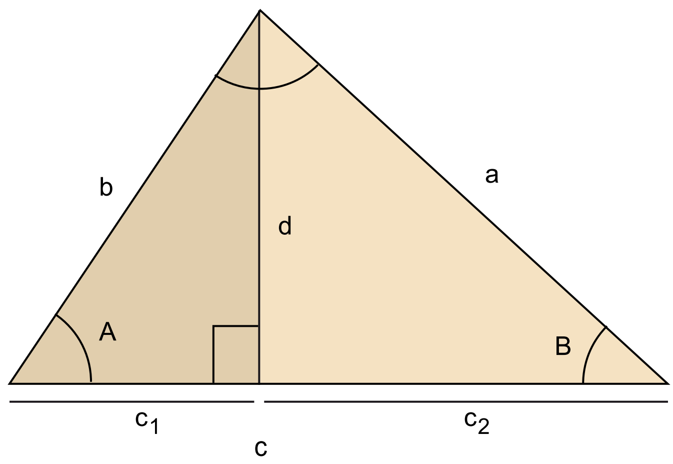
Exercici 18

Demostreu que en tot triangle de costats *a*, *b* i *c* es compleix que:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$

Solució:

A partir d'un dibuix tipus,



pel teorema de Pitàgores sabem que $a^2 = d^2 + c_2^2$ i que $d^2 = b^2 - c_1^2$.

Ara bé, com que $c_2 = c - c_1$ tenim que $a^2 = d^2 + (c - c_1)^2 = b^2 - c_1^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot c_1 + c_1^2$ o el que és el mateix, $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot c_1$.

Però com que també és cert que $\cos A = \frac{c_1}{b}$, tenim que $c_1 = b \cdot \cos A$.

Aleshores $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$

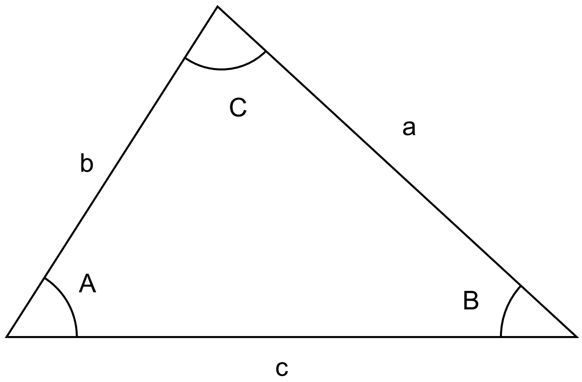
Nota

Aquesta fórmula pot servir per trobar els angles d'un triangle si coneixem els tres costats.

Exercici 19

En un triangle de costats $a = 7$ cm, $b = 5$ cm i $c = 8$ cm, trobeu els angles del triangle.

Sabem que tot triangle de l'estil



compleix que $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$.

Aquesta relació entre els costats i l'angle del costat que està aïllat a l'esquerra permet trobar en primer lloc l'angle A.

Així, aïllant cosA, tenim $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{25 + 64 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$

Per tal de trobar l'angle utilitzem la funció inversa cosinus de la calculadora.

Atès que cerquem un angle tal que tingui per cosinus el valor 0,5, fem:

A = `invcos`(0,5) = 60º.

Tenint en compte que amb demostracions similars a les de l'exercici anterior podem demostrar també que $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$ i que $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$, tenim prou fórmules per trobar els altres angles demanats.

$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{49 + 64 - 25}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{88}{112} = \frac{11}{14}$ i per tant B = 38,2132107...º

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} = \frac{49 + 25 - 64}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$ i per tant C = 81,786789...º

Nota

Per tal de comprovar que ho hem fet bé, es pot verificar que A + B + C = 180º.

Exercici 20

El radi de les rodes d'un cotxe és 40 cm. Digueu:

a) Quants metres recorre el cotxe si les rodes fan 10 voltes completes.

b) Quin angle hem de fer girar les rodes si el vehicle fa un recorregut de 80 cm. Doneu-lo en graus i en radiants.

c) Si al vehicle se li enganxa un xiclet en una de les rodes i aquest recorre 0,4π metres (1,256 m), a quina alçada quedarà el xiclet del terra?

Solució:

a) Aquest tipus d'exercici serveix per donar realisme a una animació tipus joc. Les matemàtiques ens permeten obtenir el valor correcte.

La fórmula del perímetre d'una circumferència de radi r és $2\cdot \pi \cdot r$.

Això vol dir que si el radi és d'un metre, una formiga que caminés per la vora de la circumferència goniomètrica caminaria una mica més de 6 metres. Equivalentment, un cotxe amb rodes d'1 m avança 6 m per cada volta que fa la roda.

En el nostre cas tenim que en tenir rodes de 40 centímetres, el cotxe es mou per cada volta prop de 251,3 cm, que és una mica més de 2 metres i mig.

Com que la roda fa 10 voltes completes, els metres que s'ha mogut el cotxe els podem calcular multiplicant la distància que avança el cotxe en un gir de roda per 10:

$10*2*\pi*40 = 2513{,}27$ cm = 25,13 m

b) L'arc de circumferència es calcula amb radiants. La idea és trobar quants cops hi ha el radi en la distància que s'ha mogut el cotxe (recordem que, per definició, aquest nombre serà l'angle en radiants, ja que la definició de l'angle en radiants és precisament això).

Així, α = 80 cm / 40 cm = 2 radiants.

Per convertir-ho a graus sexagesimals multipliquem pel factor 180/π: 2 rad * 180º / π rad = 114,6º

c) L'angle de gir serà ara α $40 \cdot \pi / 40 = \pi$ rad.

Atès que π radiants és mitja volta o 180º, el xiclet estarà a la part superior de la roda, que representa una alçada de 80 cm.