Teoria de nombres per a disseny

Salvador Linares Mustarós

PID_00215870

Universitat Oberta de Catalunya

Índex

Introducció

Els nombres són construccions del nostre pensament. És una noció que anem construint des de la infància a partir de comparar conjunts d'objectes.

Un símbol és la representació d'una idea de forma que aquesta idea pot ser percebuda per algun dels nostres sentits.

Aquí tenim un dibuix d'una poma. Un dibuix d'una poma no és una poma, ja que ni és pot menjar ni fa la mateixa olor. El dibuix és un símbol, una espècie de metàfora que permet evocar una idea de la nostra ment.

Els símbols escrits 1, 2, 3 i 4, permeten evocar la idea dels nombres ú, dos, tres i quatre.

Però també els símbols escrits *one*, 2.10^0, III i 3 + 1 permeten evocar la idea dels nombres ú, dos, tres i quatre.

Com acabem de veure, un mateix nombre pot ser designat per diversos símbols.

Dos símbols o expressions numèriques que evoquen la mateixa idea de nombre s'anomenen símbols o expressions numèriques equivalents.

La teoria de nombres que es va presentant a mesura que se solucionen els exercicis de la secció "Exercicis amb solució" té com a objectiu principal presentar tècniques matemàtiques que permetin obtenir símbols o expressions numèriques equivalents en un format més simple. Per tal d'anar presentant aquestes tècniques es treballarà amb els diferents tipus de nombres presentats en la següent secció.

El darrer exercici presenta una visió global i completa que permet veure en la seva totalitat tots els subconjunts estudiats.

1. Tipus de nombres

1.1. Els nombres naturals

El conjunt dels nombres naturals està format per tots aquells nombres que es poden utilitzar per a comptar objectes semblants de la natura.

Així, el nombre 15 és un nombre natural, ja que si tenim juntes quinze pomes, obtenim aquest nombre en comptar-les.

1.2. Els nombres enters

El conjunt dels nombres enters és el conjunt que agrupa tots els nombres naturals amb signe + o – i el 0. Així, +3, –4 o –100 són nombres enters.

1.3. Els nombres racionals

El conjunt dels nombres racionals és el conjunt que agrupa tots els nombres que es poden escriure com a divisió de dos enters. Així, +3/5, 4/–3 o 0/–100 són nombres racionals.

Els nombres racionals es poden representar en format decimal o de fracció. Per exemple, 1,5 es pot representar com a 3/2.

1.4. Els nombres irracionals

El conjunt dels nombres irracionals és el conjunt que agrupa tots els nombres que no es poden escriure com a divisió de dos enters. Així, $\sqrt{2}$, π o el nombre d'or són nombres irracionals.

1.5. Els nombres reals

El conjunt format per tots els nombres anteriors s'anomena conjunt de nombres reals i se sol identificar amb una recta.

Es possible anotar nombres enters per mitjà de potències de deu, aquesta notació és utilitzada en nombres molt grans o molt petits.

Els nombres compleixen certes propietats que permeten simplificar expressions on apareixen operacions de sumes, restes, multiplicació, divisió o combinacions entre elles.

Les incògnites són nombres reals desconeguts que se solen trobar fent sumes, restes, divisions o multiplicacions en expressions algebraiques.

Una expressió algebraica és una agrupació amb sentit de nombres, parèntesis i lletres separats pels signes de les operacions aritmètiques.

Així, $3x - 5$ és una expressió algebraica tal que en substituir la x pel valor 4, s'obté el valor numèric 7.

Quan es tenen dues expressions algebraiques separades per un signe d'igual, es pot comprovar què passa en substituir les lletres per valors. Si la igualtat de valors numèrics no és certa per a algun valor de les lletres, direm que tenim una equació. Si la igualtat de valors numèrics és certa en substituir qualsevol valor per les lletres, direm que tenim una identitat.

Trobar els valors de les incògnites que compleixen una equació es un dels exercicis més habituals en matemàtiques.

Dues equacions amb les mateixes solucions s'anomenen equivalents.

Una de les grans eines que coneixem per poder trobar les solucions d'una equació és la conversió d'una equació en una altra equació equivalent més fàcil de resoldre a simple cop ull per mitjà de la simplificació, la suma, resta, multiplicació per un nombre diferent de 0 o divisió per un mateix nombre diferent de 0 a cada costat.

Tota equació de l'estil $a x^2 + b x + c = 0$ s'anomena equació de segon grau. Aquest tipus d'equacions tenen per solució els valors $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Cercar dos nombres reals que compleixen dues equacions alhora és un altre dels exercicis més típics en matemàtiques. Habitualment, els trobarem a partir d'aïllar una de les incògnites d'una equació, i substituir l'expressió algebraica que està igualada a la incògnita en l'altra equació. En haver eliminat una de les incògnites, podem resoldre l'equació amb els mètodes anteriors. I en trobar aquest valor, substituint en l'expressió algebraica que iguala l'altra incògnita, obtindrem el valor de la segona incògnita.

1.6. Els nombres algebraics

Una equació de la forma $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$ s'anomena polinomi de grau n. Els nombres c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, ..., c_2, c_1 i c_0 s'anomenen els coeficients del polinomi.

Per exemple, $3x^5 - 2x + 3 = 0$ és un polinomi de grau 5 amb coeficients enters, 3, 0, 0, 0, –2 i 3.

Els nombres algebraics són aquells nombres que són solució d'una equació polinòmica amb coeficients enters. 2, -7, $\frac{1}{6}$, $\sqrt{5}$ i $\sqrt[3]{2}$ són nombres algebraics.

1.7. Els nombres transcendents

Els nombres transcendents són aquells nombres que no són solució de cap equació polinòmica amb coeficients enters.

Hi ha molt pocs nombres transcendents coneguts. Demostrar que un nombre és transcendent pot ser extremadament difícil.

π és un nombre transcendent.

2. Exercicis amb solució

L'objectiu d'aquesta secció és recordar conceptes i tècniques matemàtiques de manera eminentment pràctica a partir d'exemples concrets.

Exercici 1

Calculeu $3 + 2 \cdot (5 + 1)$

Solució:

Donada una expressió que identifica un nombre natural amb nombres i operadors de combinació com parèntesis, suma, resta, multiplicació o divisió, utilitzarem iterativament la regla següent fins a obtenir una expressió formada per un sol nombre.

> Regla de la simplificació d'una expressió en matemàtiques:
>
> **1)** En una expressió matemàtica en que apareixen parèntesis, primer s'han d'eliminar els parèntesis.
>
> **2)** En una expressió matemàtica sense parèntesis, primer s'han d'eliminar les multiplicacions i divisions.
>
> **3)** En una expressió matemàtica sense parèntesis, multiplicacions i divisions, s'han d'eliminar les sumes i les restes.

Com que l'expressió $3 + 2 \cdot (5 + 1)$ té parèntesis, en substituir $(5 + 1)$ pel nombre que representa obtenim l'expressió equivalent $3 + 2 \cdot 6$.

Aquesta nova expressió no té parèntesis, però sí que té una multiplicació. En realitzar-la i substituir-la en l'expressió obtenim l'expressió equivalent $3 + 12$.

Finalment, l'expressió no té parèntesis ni multiplicacions o divisions. Com que té una suma, cal calcular-la. Aleshores obtenim l'expressió numèrica 15.

La regla ens assegura que l'expressió numèrica $3 + 2 \cdot (5 + 1)$ és el nombre 15.

És molt interessant observar que l'expressió inicial té una estructura de nina russa tipus matrioixca, ja que té nombres dins de nombres.

La proporció Àurea

Documental Redes Eduard Punset:

http://www.youtube.com/watch?v=d_7I-uqz_ic

Exercici 2

Calculeu $1 + 3^2 + (8 + 1) + (3 \cdot 2)$

$1 + 3^2 + (8 + 1) + (3 \cdot 2) = 1 + 3^2 + 9 + 6 = 1 + 9 + 9 + 6 = 25$

Nota

Compte que 3^2 és una altra forma de dir $3 \cdot 3$!

Exercici 3

Calculeu $1 + (3 + (2 + 5))$

En aquest exemple tenim un parèntesi dins d'un altre parèntesi. Com que primer s'han d'eliminar els parèntesis, podem començar substituint el més interior pel valor que representa. Així, atès que $(2 + 5)$ representa el valor 7, el parèntesi exterior representa el valor $3 + 7 = 10$.

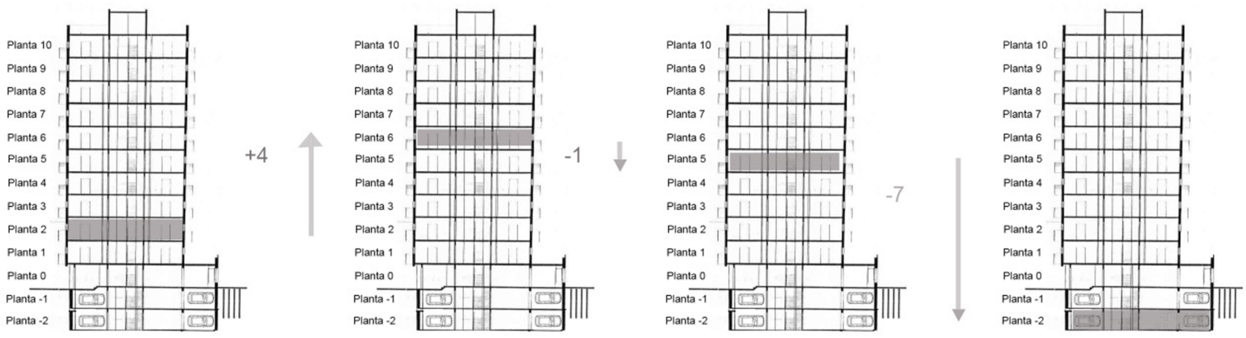
Per tant, $1 + (3 + (2 + 5)) = 1 + 10 = 11$

Exercici 4

Calculeu $(+2) + (+4) + (-1) + (-7)$

És molt fàcil visualitzar les operacions de suma amb nombres enters si pensem que estem en una planta d'un edifici i els enters positius ens fan pujar i els enters negatius ens fan baixar.

Així, $(+2) + (+4) + (-1) + (-7) = -2$, ja que de la planta segona anirem a la sisena, ja que pugem 4 plantes, després anirem a la cinquena i finalment anirem a la planta -2, que es pot visualitzar com la planta d'un pàrquing que està a dues plantes per sota de la planta baixa.



Exercici 5

Calculeu 2 + 4 + (–1) + (–3)

Sol ser habitual eliminar els parèntesis utilitzant la regla de signes següent:

Regla de signes 1:

Donat un nombre natural *a*,

$$+(+a) = +a \qquad -(+a) = -a$$
$$+(-a) = -a \qquad -(-a) = +a$$

Per exemple, si prenem $a = 7$

$$+(+7) = +7 \qquad -(+7) = -7$$
$$+(-7) = -7 \qquad -(-7) = +7$$

Aleshores 2 + 4 + (–1) + (–3) = 2 + 4 – 1 – 3 = +2 (o igual a 2). És molt interessant conèixer el conveni que afirma que tot nombre enter positiu es pot escriure sense signe, de manera que s'identifica amb un nombre natural. Aquest conveni permet que el conjunt de nombres enters contingui el conjunt de nombres naturals.

Exercici 6

Calculeu (–2) · (–3) · (–2) – 3 + 15

Primer, com els parèntesis ja són expressions d'un sol nombre, no cal operar res a dins. Però per eliminar la multiplicació de parèntesis cal utilitzar una altra regla de signes.

Regla de signes 2:

Donats dos nombres naturals *a* i *b*

$$(+a)\cdot(+b) = a\cdot b \qquad (+a)\cdot(-b) = -(a\cdot b)$$
$$(-a)\cdot(-b) = a\cdot b \qquad (-a)\cdot(+b) = -(a\cdot b)$$

Per exemple, si prenem $a = 2$ i $b = 3$

$$(+2)\cdot(+3) = +6 \qquad (+2)\cdot(-3) = -6$$
$$(-2)\cdot(-3) = +6 \qquad (-2)\cdot(+3) = -6$$

També cal recordar que la multiplicació de nombres compleix la propietat associativa:

Propietat associativa de la multiplicació:

$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

La propietat associativa ens assegura que $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Per tal de saber el resultat amb signe de $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$, cal pensar que negatiu per negatiu és positiu, i que, aleshores, aquest signe multiplicat per l'altre negatiu és negatiu. Així, $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) = -24$.

Aleshores $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) - 3 + 27 = -24 - 3 + 27 = 0$

Nota

0 és l'únic nombre positiu i negatiu alhora, és a dir, $-0 = +0 = 0$.

Atès que el nombre representat pel símbol 0 pot considerar-se com el nombre que correspon a comptar cap objecte, sovint és considerat com a nombre natural. No us estranyeu, però, si trobeu algun llibre de text en què l'autor no consideri el 0 com a nombre natural. És una qüestió de conveni.

Exercici 7

Discutiu si les fraccions $\frac{2}{5}$ i $\frac{10}{25}$ són equivalents.

Solució:

Dues fraccions són equivalents quan representen el mateix nombre racional.

Hi ha tres maneres diferents de veure que les fraccions són equivalents.

1) Comprovant que es pot passar d'una fracció a l'altra multiplicant numerador i denominador de la primera per un mateix nombre.

2) Multiplicant en creu les fraccions i comprovant que obtenim el mateix nombre.

3) Representant gràficament els dos nombres com a parts d'un mateix objecte i comprovant que la part representada per cada nombre és la mateixa.

Comprovem de les tres maneres que les fraccions són equivalents.

1) Comprovant que es pot passar d'una fracció a l'altra multiplicant numerador i denominador de la primera per un mateix nombre.

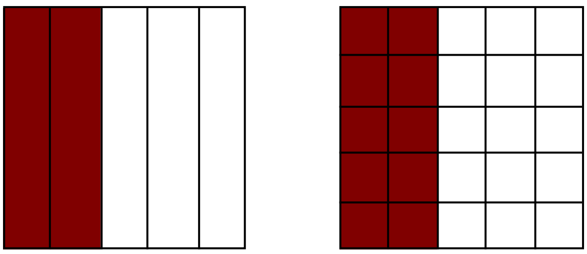
Atès que quan multipliquem el numerador i denominador de la primera per 5 arribem a la segona, les dues fraccions són equivalents.

2) Multiplicant en creu les fraccions i comprovant que obtenim el mateix nombre.

Així, com que $2 \cdot 25$ és 50 i $5 \cdot 10$ també és 50, les dues fraccions són equivalents.

3) Representant gràficament els dos nombres com a parts d'un mateix objecte i comprovant que la part representada per cada nombre és la mateixa.

En el nostre cas, en representar les dues fraccions en un quadrat obtenim la mateixa part de la unitat, tal com es veu en el dibuix següent:



Conseqüentment, $\frac{2}{5}$ i $\frac{10}{25}$ són dues representacions en fraccions del mateix nombre racional.

Nota

Compte que en matemàtiques no hi ha cap fracció amb denominador 0.

Exercici 8

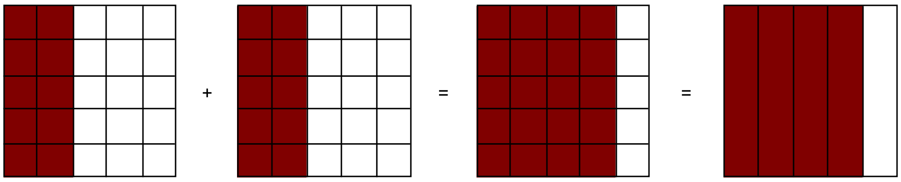
Trobeu el nombre racional simbolitzat per: $\frac{10}{25} + \frac{10}{25}$

Atès que tenim el mateix denominador, amb la regla de càlcul:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

el resultat és $\frac{10}{25} + \frac{10}{25} = \frac{10+10}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$.

Gràficament l'exercici el podríem haver resolt així:



Hi ha moltes altres formes de fer aquest exercici. Per exemple,

$$\frac{10}{25}+\frac{10}{25}=10\cdot\frac{1}{25}+10\cdot\frac{1}{25}=(10+10)\cdot\frac{1}{25}=20\cdot\frac{1}{25}=\frac{20}{25}=\frac{4\cdot 5}{5\cdot 5}=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{5}=\frac{4}{5}\cdot 1=\frac{4}{5}$$

Observeu que per tal d'entendre aquesta forma cal conèixer certes regles per a operar amb nombres racionals i certes propietats de les operacions. Recordem-ne algunes:

$$a+0=a \qquad a\cdot 1=a$$

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \qquad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c)$$

$$a\cdot b+c\cdot b=(a+c)\cdot b \qquad a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Exercici 9

Demostreu analíticament i geomètricament l'expressió:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$$

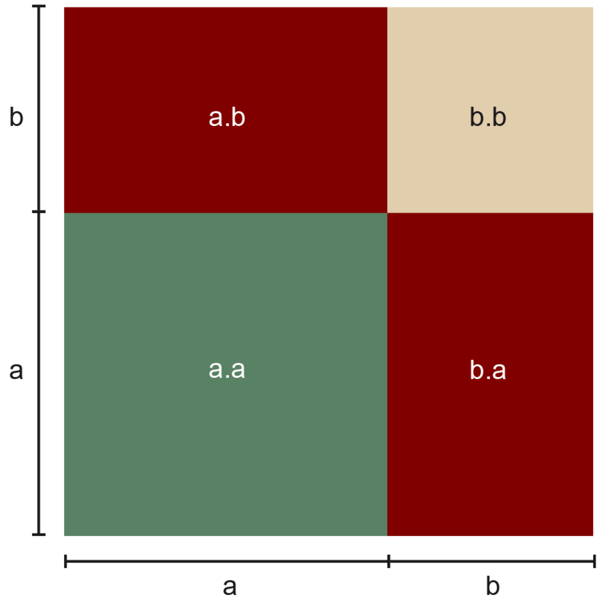
Solució:

Analíticament:

$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b=a^2+b^2+a\cdot b+b\cdot a$
$=a^2+b^2+a\cdot b+a\cdot b=a^2+b^2+2\cdot \mathrm{a}\cdot \mathrm{b}$

Geomètricament:

El quadrat següent té com a costats $(a + b)$ i $(a + b)$. La seva àrea és $(a + b)^2$. Però l'àrea també la podem trencar com $a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$. La igualtat de l'àrea ens permet deduir que $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$.



Nota

$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 - a \cdot b - b \cdot a =$

$= a^2 + b^2 - a \cdot b - a \cdot b = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b$

Exercici 10

Calculeu:

a) 3^3
b) $3^2 \cdot 3^3$
c) $3^5 : 3^3$
d) 3^1
e) 3^0
f) $(3^3)^3$

Solució:

a) $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
b) $3^2 \cdot 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ (Observeu que aleshores $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$)
c) $3^5 : 3^3 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{1} = 3^2 = 9$ (Observeu que aleshores $a^b : a^c = a^{b-c}$)
d) $3^1 = \frac{3^2}{3^1} = \frac{9}{3} = 3$ (Observeu que aleshores tot nombre elevat a 0 és ell mateix)
e) $3^0 = \frac{3^2}{3^2} = \frac{9}{9} = 1$ (Observeu que aleshores tot nombre elevat a 1 és ell mateix)

f) $(3^3)^3 = 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3 = 3^9$ (Observeu que aleshores $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$)

Per tant, tenim les regles:

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$a^b \cdot a^c = a^{b-c}$

$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

Exercici 11

Calculeu la suma següent: $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i$

Solució:

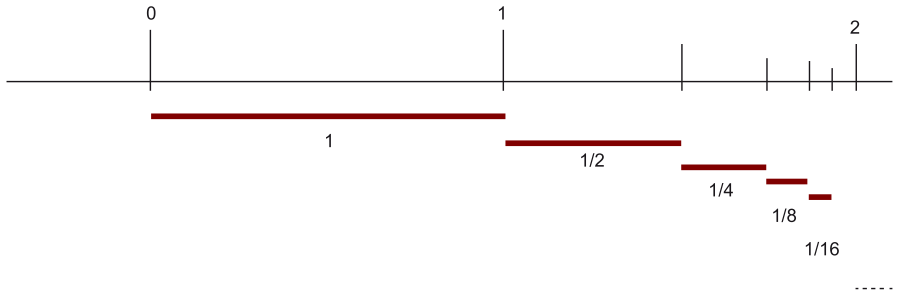
Per conveni, el símbol $\sum$, anomenat *sumatori*, és llegeix com a suma de nombres. La lletra *i* ens indica que a mesura que anem posant el símbol +, hem de canviar la *i* per un nombre enter començant pel 0 i acabant per l'infinit.

Així, $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \ldots$ sempre podem anar jugant amb els nombres de la *i* per a representar molts altres tipus de suma. Així, per exemple, $1 + 2 + 3 + 4 = \sum_{i=1}^{4} i$.

Aleshores, atès que tot nombre elevat a 0 és 1 i que tot nombre elevat a 1 és ell mateix, tenim:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Aquesta suma la podem representar en la recta real per tal de veure que la suma de tots aquests nombres és el nombre 2.



Observem que cada nombre que sumem és la meitat de l'anterior (o l'anterior · 0,5) i que aleshores sempre sumem la meitat de la distància que ens falta per arribar a 2. Per tant, per molt que anem sumant i sumant mai no arribarem a 2. Però com que anem sumant i sumant meitats, mai no ens pararem abans d'arribar al 2. Així,

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=2$$

La fórmula que suma infinits termes de l'estil a, $a \cdot r$, $a \cdot r^2$, ... és:

$$a+a\cdot r+a\cdot r^2+a\cdot r^3+a\cdot r^4+\ldots=\frac{a}{1-r}$$

Observeu que aplicant aquesta fórmula amb r = 0,5 i a = 1 obtenim:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1+1\cdot 0{,}5+1\cdot 0{,}5^2+1\cdot 0{,}5^3+1\cdot 0{,}5^4+\ldots=\left(\frac{1}{1-0{,}5}\right)=\frac{1}{0{,}5}=2$$

tal com ha de ser.

Exercici 12

Demostreu que el nombre decimal periòdic $9,\widehat{9}$ és una representació del nombre 10.

Solució:

Volem veure que 9,9999999999999... = 10

Observeu que podem escriure el nombre $9,\widehat{9}$ com una suma d'infinits nombres de la forma següent:

$$9{,}9999999999999\ldots = 9 + 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + \ldots = 9+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\ldots$$

Observeu que cada nombre del sumatori s'obté com l'anterior dividit per 10.

Anomenem *S* la suma següent:

$$S=9+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\ldots$$

Si dividim per 10 a cada costat, obtenim:

$$\frac{S}{10}=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\ldots$$

Aleshores,

$$S-\frac{S}{10}=\left(9+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\ldots\right)-\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\ldots\right)$$

i per tant,

$$S-\frac{S}{10}=9$$

Si ara multipliquem per 10 a tots dos costats obtenim:

$10S\text{-}S=90$, o simplificant $9S=90$ i, per tant, $S=10$, tal com volíem demostrar.

Nota

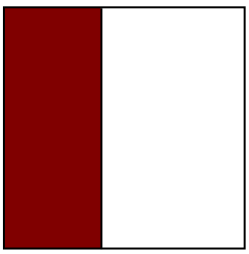
També es pot fer amb la fórmula $\frac{a}{1-r}$ prenent a = 9 i r = 0,1.

Exercici 13

Trobeu el nombre racional simbolitzat per: $\frac{2}{5}+\frac{1}{25}$

Solució:

En aquest exercici veiem la utilitat de trobar diferents representacions per al mateix nombre racional. En l'exercici 6 hem vist que $\frac{2}{5}$ i $\frac{10}{25}$ són dues representacions del mateix concepte de nombre racional que la nostra ment associa a la part ombrejada del total en el dibuix següent:



Aleshores

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{25}=\frac{10}{25}+\frac{1}{25}=\frac{11}{25}$$

Del fet que 11 i 25 no tenen divisors comuns, podem deduir que no es pot trobar cap fracció equivalent simplificada.

Exercici 14

Trobeu el nombre racional simbolitzat per: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1+1+1}{2}=\frac{4}{2}=\frac{2.2}{2.1}=\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{1}=1\cdot\frac{2}{1}=\frac{2}{1}$$

Quan treballem amb expressions de nombres racionals, cal convenir que tot nombre enter es pot escriure com un nombre racional tal que té com a numerador el nombre i com a denominador el nombre natural 1. Així, per exemple, $2=\frac{2}{1}$. Aquest conveni ens permet afirmar que els nombres racionals contenen els nombres enters.

Exercici 15

Trobeu el nombre racional simbolitzat per: $\frac{1}{8}+\frac{-3}{-8}$

Una regla molt útil quan treballem amb nombres racionals és la següent: podem canviar els dos signes dels nombres numeradors i denominadors amb la finalitat que el denominador sempre sigui positiu. És a dir, $\frac{-3}{-8}=\frac{3}{8}$.

Aleshores, $\frac{1}{8}+\frac{-3}{-8}=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$.

Observem que com tenim divisors comuns a 4 i 8, sabem que dividint cada nombre per un dels divisors, trobarem fraccions simplificades. Així, si dividim per 2 numerador i denominador obtenim una altra fracció equivalent a la primera. Ara bé, per conveni sempre dividirem pel màxim comú divisor i així trobarem la fracció més simplificada possible. En el cas d'aquest exercici, hem dividit numerador i denominador per 4 i així obtenim que $\frac{1}{8}+\frac{-3}{-8}=\frac{1}{2}$.

Exercici 16

Trobeu el nombre racional simbolitzat per: $\frac{1}{8}-\frac{4}{-8}$

Una altra regla fonamental per a treballar amb racionals és la que afirma que tot nombre racional sempre pot ser escrit com: $\pm$ divisió de dos naturals. La regla afirma:

Regla de signes 3

Donats dos nombres naturals *a* i *b*,

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b} \qquad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} \qquad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$$

A partir d'aquest fet podem aplicar les mateixes regles de signes 1 i 2 amb nombres racionals en comptes de nombres enters. Per exemple,

$$\frac{-1}{-2}\cdot\frac{3}{-4}$$

$$= \left[+\left(\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[-\left(\frac{3}{4}\right)\right] = -\left[\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\right] = -\frac{3}{4}$$

Aleshores,

$$\frac{1}{8} - \frac{4}{-8} = \frac{1}{8} - \left[-\left(\frac{4}{8}\right)\right] = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$$

Exercici 17

Expresseu en notació decimal els nombres racionals referenciats en les fraccions següents:

a) $\frac{4}{2}$

b) $\frac{63}{20}$

c) $\frac{31257}{99}$

d) $\frac{312740478}{990000}$

Solució:

Tota fracció es pot expressar sempre amb un nombre decimal limitat o il·limitat periòdic. Si fem la divisió, obtenim uns quocients en forma decimal. Aquest quocient és la representació del nombre racional en format decimal. Així:

a) $\frac{4}{2}=2$. En aquest cas es diu que $\frac{4}{2}$ admet una **representació decimal limitada o exacta** en forma de nombre enter.

b) $\frac{63}{20}=3.15$. En aquest cas es diu que $\frac{63}{20}$ admet una representació decimal limitada o exacta amb dues xifres decimals i part entera 3.

c) $\frac{31257}{99}=315.7272727272\ldots=315.\overline{72}$. En aquest cas es diu que $\frac{31257}{99}$ admet una **representació decimal il·limitada periòdica pura** amb part entera 315 i un període de dues xifres.

d) $\frac{312740478}{990000}=315.8994727272727272\ldots=315.899\overline{472}$. En aquest cas es diu que $\frac{312740478}{990000}$ admet una **representació decimal il·limitada periòdica mixta** amb part entera 315 i un període de dues xifres.

Nota important

No hi ha un conveni únic per a l'expressió de decimals! A vegades s'utilitza punt i a vegades s'utilitza coma. En l'ús de qualsevol programari, el lector ha de tenir en compte aquest detall per tal de no treballar incorrectament amb les quantitats numèriques amb decimals. Per exemple, en Flash s'ha de treballar amb punts per a representar decimals.

Exercici 18

Expresseu en fracció els nombres racionals referenciats en la forma decimal següent:

a) 5
b) 1.52
c) $315.\overline{72}$
d) $3.8994\overline{735}$

Solució:

Tot decimal limitat o il·limitat periòdic es pot expressar sempre en forma de fracció. Per tal de trobar una fracció que representi el nombre decimal hi ha uns procediments mecànics molt simples d'aprendre.

1) Procediment si el nombre és una representació decimal limitada o exacta en forma de nombre enter:

Atès que tot nombre enter es pot escriure en forma de fracció amb denominador el nombre 1, posarem el nombre dividit per 1.

2) Procediment si el nombre és una representació decimal limitada o exacta amb una xifra decimal o diverses:

Podem escriure'l en forma de racional com el nombre sense la coma dividit per un 1 seguit de tants zeros com dígits hi ha rere la coma.

3) Procediment si el nombre és una representació decimal il·limitada periòdica pura:

Com a denominador posem el nombre sense coma fins on acaba el període menys el nombre fins on comença el període. Per denominador posem tants nous com dígits tingui el període.

4) Procediment si el nombre és una representació decimal il·limitada periòdica mixta:

Com a denominador posem el nombre sense coma fins on acaba el període menys el nombre sense coma fins on comença el període. Per denominador posem tants nous com dígits tingui el període seguits per tants zeros com dígits hi hagi entre la coma i el període.

Seguint el procediment 1)

$$5 = \frac{5}{1}$$

Seguint el procediment 2)

$$1.52 = \frac{152}{100}$$

Seguint el procediment 3)

$$315.\overline{72} = \frac{31572 - 315}{99} = \frac{31257}{99}$$

Finalment, seguint el procediment 4)

$$3.8994\overline{735} = \frac{38994735 - 38994}{9990000} = \frac{38955741}{9990000}$$

Exercici 19

Expresseu en forma de fracció irreductible els nombres racionals referenciats en la forma decimal següent:

a) 5
b) 1.52

c) $315.\overline{72}$

Solució:

Un nombre racional es pot escriure com una infinitat de fraccions diferents, ja que només cal multiplicar o dividir numerador i denominador per un mateix nombre. Així, $\frac{152}{100} = \frac{304}{200} = \frac{608}{400} = \frac{1520}{1000} = \ldots$

Es diu que un nombre racional està expressat en la seva **fracció irreductible** quan es té una expressió del tipus $\frac{a}{b}$ en la qual a i b no tenen cap divisor comú excepte l'1.

Tot nombre racional diferent de zero té una i només una expressió en fracció irreductible amb denominador positiu. Aquesta representació és la que s'utilitza habitualment per a presentar resultats finals.

Conseqüentment, amb la teoria anterior, la solució de l'exercici és:

a) $5 = \frac{5}{1}$ i com MCD(1,5) = 1, ja tenim la fracció irreductible.

b) Sabem que $1.52 = \frac{152}{100}$. Si dividim numerador i denominador pel màxim comú divisor dels dos nombres, obtenim sempre la fracció irreductible equivalent.

Per tal de trobar el MCD de dos nombres, començarem escrivint cada nombre com a producte de primers.

Recordeu que un **nombre primer** és aquell nombre que només és divisible per ell mateix i pel nombre 1. Un exemple de nombre primer és el nombre 2. Un exemple de nombre que no és primer el trobem amb el nombre 6, ja que es pot dividir a més de per 6 i per 1, per 2 i per 3.

Atès que $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ i que $152 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 19$, veiem que els nombres que es repeteixen a les dues descomposicions és $2 \cdot 2$. Aleshores el MCD dels dos nombres és $2 \cdot 2 = 4$.

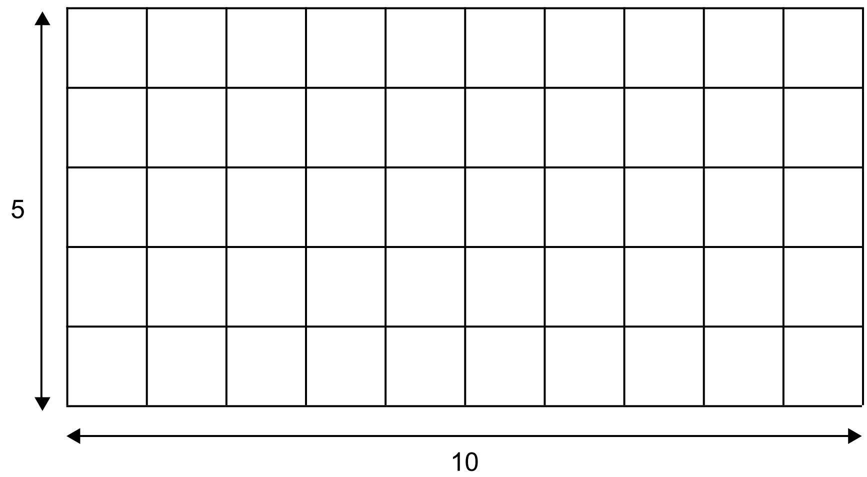
Atès que $1.52 = \frac{152}{100}$ i que MCD(152,100) = 4, la fracció irreductible és $\frac{38}{25}$.

c) Una altra forma de trobar la fracció irreductible és anar dividint numerador i denominador per un mateix nombre fins que trobem que cap nombre que divideix l'un, ja no pot dividir l'altre. Per exemple, $315.\overline{72} = \frac{31257}{99} = \frac{10419}{33} = \frac{3473}{11}$.

Observeu que primer hem dividit numerador i denominador per 3, ja que el 3 divideix el 99 i el 31257. Després hem tornat a dividir per 3, ja que el 3 divideix el 33 i el 10419 a la vegada. Finalment, com que l'únic nombre que divideix al denominador és l'11 i l'11 no divideix el numerador, ja no podem continuar simplificant i, per tant, hem arribat a la fracció irreductible.

Exercici 20

Expliqueu què significa que el rectangle següent de costats 5 i 10 unitats tingui una àrea de 50.



Solució:

Observeu que tenim un rectangle de costats 5 i 10 unitats. L'àrea d'un rectangle es defineix com la multiplicació de la base i l'alçada (en el cas que el rectangle sigui un quadrat, l'àrea és el costat al quadrat). Una àrea de $5 \cdot 10 = 50$ vol dir que necessitem 50 quadrats de mides 1×1 per enrajolar tota la superfície del rectangle. L'àrea, doncs, ens diu la quantitat de quadradets de mida 1×1 necessaris per a construir la figura.

Exercici 21

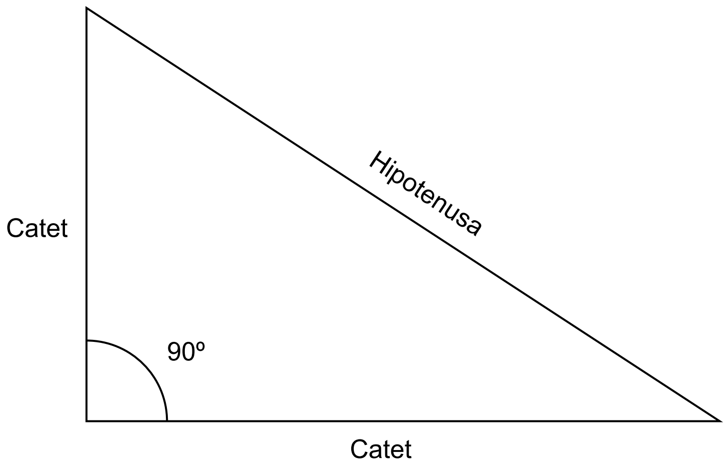
Expliqueu el significat geomètric del teorema de Pitàgores:

$$\text{hipotenusa}^2 = \text{catet}_1^{\,2} + \text{catet}_2^{\,2}$$

Solució:

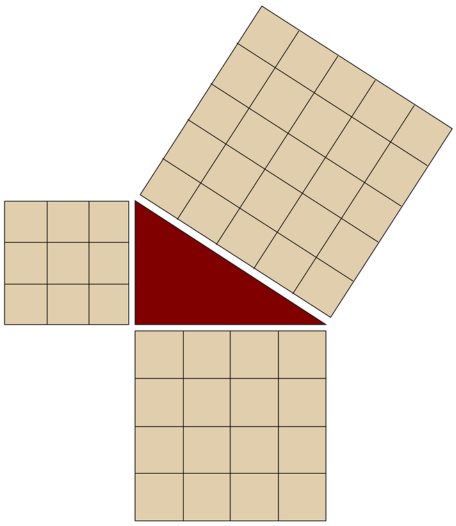
Recordem que un triangle rectangle és aquell que té un angle de 90º.

En un triangle rectangle els costats adjunts a l'angle de 90º s'anomenen catets, i el costat enfrontat a l'angle de 90º, hipotenusa.



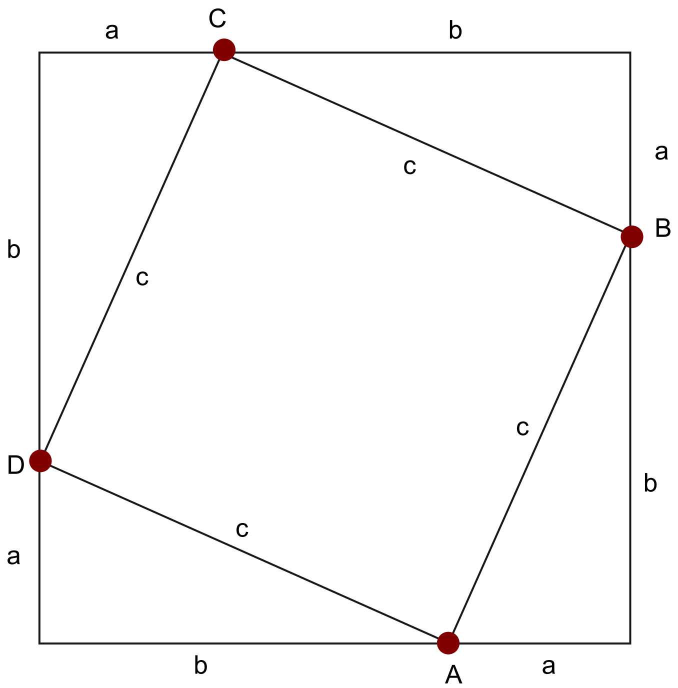
El teorema de Pitàgores afirma que l'àrea del quadrat format amb la hipotenusa coincideix amb la suma de les àrees dels quadrats formats amb els costats.

Per exemple, si els catets mesuren 3 i 4 centímetres, la hipotenusa ha de fer necessàriament 5 centímetres, ja que s'ha de complir que $h^2 = 3^2 + 4^2$.



Exercici 22

Demostreu el teorema de Pitàgores utilitzant el dibuix següent:



Solució:

Observem que si igualem les àrees obtenim $c^2 + 2 \cdot a \cdot b = (a + b)^2$

Aleshores $c^2 + 2 \cdot a \cdot b = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b$, amb la qual cosa es dedueix que $c^2 = a^2 + b^2$

Exercici 23

Expresseu en notació decimal els nombres següents:

a) $\sqrt{4}$
b) $\sqrt{1}$
c) $\sqrt{0}$
d) $\sqrt{400}$
e) $\sqrt[3]{125}$
f) $\sqrt{5}$

Solució:

Per conveni, donats dos nombres a i b positius, direm que $\sqrt[n]{a} = b$ si i només si és cert que $b^n = a$. En el cas particular $n = 2$, $\sqrt{a} = b$ si i només si és cert que $b^2 = a$.

a) $\sqrt{4}$ és el nombre 2, ja que 2 és l'únic nombre positiu que ell multiplicat per ell mateix dóna 4.

b) $\sqrt{1}$ és el nombre 1, ja que 1 és l'únic nombre positiu que ell multiplicat per ell mateix dóna 1.

c) $\sqrt{0}$ és el nombre 0, ja que 0 és l'únic nombre positiu que ell multiplicat per ell mateix dóna 0.

d) $\sqrt{400} = 20$, ja que 20 és l'únic nombre positiu que ell multiplicat per ell mateix dóna 400.

e) $\sqrt[3]{125} = 5$, ja que 5 és l'únic nombre positiu que ell multiplicat per ell mateix i multiplicat per ell mateix dóna 125.

f) $\sqrt{5} = ???$. Observem que el que podem dir segur és que no és 2, ja que 2 per 2 dóna 4 i no 5. També podem assegurar que no és 3, ja que 3 per 3 dóna 9 i no 5. Sembla evident que el nombre que cerquem està entre 2 i 3. Això ens assegura que la part entera del nombre $\sqrt{5}$ és 2.

Atès que 2,2 per 2,2 dóna 4,84, i que 2,3 per 2,3 dóna 5,29, el nombre que cerquem es troba entre 2,2 i 2,3.

Atès que 2,23 per 2,23 dóna 4,9729, i que 2,24 per 2,24 dóna 5,0176, el nombre que cerquem es troba entre 2,23 i 2,24.

Atès que 2,236 per 2,236 dóna 4,999696, i que 2,237 per 2,237 dóna 5,004169, el nombre que cerquem es troba entre 2,236 i 2,237. De moment tenim segur que les dues primeres xifres decimals del nombre són 2 i 3.

Per tant, de moment $\sqrt{5} = 2{,}23\ldots$

En aplicar aquesta tècnica un cop rere un altre, comprovem que obtenim el nombre decimal $\sqrt{5} = 2{,}2360679774997896964091736687 31\ldots$

Exercici 24

És el nombre $\sqrt{5} = 2{,}236067977499789696409173668731\ldots$ un nombre racional? És a dir, es pot escriure de la forma $\frac{a}{b}$ amb *a* i *b* nombres naturals?

Solució:

Els nombres irracionals són aquells nombres que no es poden escriure de la forma $\frac{a}{b}$ amb *a* i *b* nombres enters.

Una característica que identifica els nombres no racionals és que tenen forma de nombre decimal il·limitat no periòdic.

Tots els nombres amb expressió $\sqrt{p}$ amb *p* un nombre primer són irracionals.

Així $\sqrt{5} = 2{,}2360679774997896964091736687 31\ldots$ és un nombre irracional si acceptem l'afirmació anterior.

π, e, $\log_2 3$ i el nombre d'or φ també són nombres irracionals.

Demostrar que un nombre no és racional és complicat i l'estudi de les tècniques per a fer-ho van molt més enllà de les tècniques que es presenten en aquest curs de matemàtiques.

Tot i que és una tasca molt complicada, la comprensió d'una demostració d'aquest estil és altament satisfactòria. Aquesta és la raó per la qual la deixarem escrita a continuació. Potser algun dia us hi voldreu atrevir...

En el cas concret que ens ocupa, veurem la demostració que $\sqrt{5}$ no es racional amb un argument que s'anomena *Reductio ad absurdum*. La idea és molt simple, però l'argument és d'una bellesa tan extrema, que hi té dedicat un annex al magnífic llibre de Carl Sagan *Cosmos*.

La idea de la reducció a l'absurd és que al principi se suposi una cosa, i quan amb regles validades i demostrades s'arribi a una situació impossible i inacceptable per ningú, aleshores es conclogui que el que hem suposat a l'inici és completament fals i ha de passar necessàriament la cosa contrària al supòsit de partida.

Com a supòsit inicial suposarem que $\sqrt{5}$ és un nombre racional.

Atès que suposem que $\sqrt{5}$ és un nombre racional, aquest nombre es pot escriure en forma de fracció irreductible tipus $\frac{a}{b}$ amb *a* i *b* nombres naturals. Com que hem triat la fracció irreductible, sabem que obligatòriament MCD(*a,b*) = 1, és a dir, no pot haver cap nombre diferent de 1 que divideixi a la vegada els nombres *a* i *b*.

Com que $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, aleshores sabem que $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = 5$ o el que és el mateix $a^2 = 5 \cdot b^2$.

Aleshores, com a la banda dreta hi surt un 5, *a* ha de ser un múltiple de 5, ja que si la seva descomposició en forma de primers no conté el nombre 5, no podríem tenir una banda múltiple de 5 i l'altra no múltiple de 5 i dir que tenim el mateix nombre.

Aleshores podem suposar que $a = 5 \cdot k$.

Aleshores $a^2 = 5 \cdot b^2$ és el mateix que $25 \cdot k^2 = 5 \cdot b^2$ o bé $5 \cdot k^2 = b^2$.

Aleshores, com que a la banda esquerra surt el 5, *b* ha de ser un múltiple de 5.

Aquí acabem d'arribar a un fet impossible, ja que MCD(*a,b*) = 1 i acabem de veure que el 5 divideix *a* i el 5 divideix *b*!

El fet d'arribar a un fet impossible indica que el supòsit de partida és incorrecte. Per tant, $\sqrt{5}$ no és un nombre racional, ja que si ho fos arribaríem a un fet inacceptable.

Demostrar que certs nombres no són racionals és un dels grans divertiments dels matemàtics!

Hi ha demostracions precioses com la que demostra que el nombre *e* no és racional. Si feu un recorregut per la web en trobareu un munt més!

Exercici 25

Quan demanem $\sqrt{5}$ a una calculadora, un full de càlcul tipus Excel o un programa informàtic tipus Flash, ens ofereixen un valor numèric per a l'expressió tipus 2,23606797749979. És aquest valor el valor real de l'expressió $\sqrt{5}$?

Solució:

No. Sempre és una aproximació. De fet, atès que 2,23606797749979 $= \frac{223606797749979}{100000000000000}$ és un nombre racional, si fos el valor exacte, $\sqrt{5}$ seria racional, i tal com hem vist a l'exercici anterior, $\sqrt{5}$ no es racional!

Exercici 26

És possible obtenir l'expressió decimal exacte del nombre representat per $\sqrt{5}$?

Solució:

No. És impossible que cap màquina ens pugui oferir els infinits dígits del nombre $\sqrt{5}$, ja que necessitaria un temps infinit per a calcular-los. No obstant això, sí que és possible obtenir una representació mental exacta del valor $\sqrt{5}$.

Per exemple, si utilitzem el teorema de Pitàgores amb costats 1 i 2, la hipotenusa mesura exactament el valor $\sqrt{5}$.

Exercici 27

Simplifiqueu els nombres racionals següents:

a) $\sqrt{8}$
b) $\sqrt[3]{54}$
c) $\sqrt{72}$
d) $\frac{\sqrt{18}}{2}$
e) $\frac{3}{\sqrt{18}}$

Solució:

Una de les propietats més útils per a simplificar equacions és la següent:

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$$

En el cas particular $n = 2$,

$\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$.

La segona propietat que cal tenir present és que:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$.

a) $\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$
b) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$
c) $\sqrt{72} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
d) $\frac{5\sqrt{18}}{2} = \frac{5\sqrt{3^2 \cdot 2}}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$
e) $\frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 \cdot 2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercici 28

Expresseu en forma de notació científica els nombres reals següents:

a) 5 320 000
b) 0.0000023

Solució:

La **notació científica** és una forma còmode de representar un nombre molt gran o molt petit utilitzant potències de base deu.

Així

a) 5 320 000 = $5.32 \cdot 10^6$

Observeu que si el nombre és gran, s'escriu el nombre amb un sol decimal seguit d'un 10 elevat a tants dígits com nombres hi ha rere la primera xifra. Així, com que rere el 5 hi ha 6 dígits, el 10 ha d'estar elevat a 6.

b) 0.0000023 = $2.3 \cdot 10^{-6}$

Observeu que si el nombre és petit, s'escriu el nombre que comença després dels zeros amb un sol decimal seguit d'un 10 elevat a tants dígits zeros com hi hagi abans del de l'esquerra amb signe negatiu. Així, com que tenim 6 zeros fins al 2, el 10 ha d'estar elevat a –6.

Exercici 29

Expresseu en forma de nombre decimal els nombres reals següents expressats en notació científica:

a) $6,3 \cdot 10^8$
b) $2,315 \cdot 10^{-4}$

Solució:

La idea que hi ha rerefons de la notació científica és que sempre que multipliquem per 10 es mou la coma cap a la dreta, i sempre que dividim per 10 es mou la coma cap a l'esquerra. Recordem, a més, que un negatiu a l'exponent és un conveni que el 10 elevat a l'exponent està dividint.

Així, $6,3 \cdot 10^8$ = 630 000 000 i $2,315 \cdot 10^{-4}$ = 0,0002315.

Exercici 30

Representeu en una recta horitzontal els punts 0, 1, 2, 3, –1, –2, –3, $\frac{1}{2}$, –2.8 i $\sqrt{2}$.

Solució:

Una recta és un objecte geomètric de la nostra ment format per un conjunt d'infinits punts infinitament llarg, i infinitament prim que no té cap mena de curvatura.

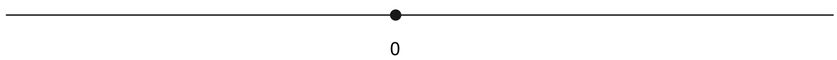
Quan representem la recta, només som capaços de fer una aproximació a aquesta idea.

Atès que mai no es pot representar la idea de recta com a objecte infinitament llarg, el que farem és suposar que el tros de recta que dibuixem es pot allargar pels dos extrems fins a l'infinit.

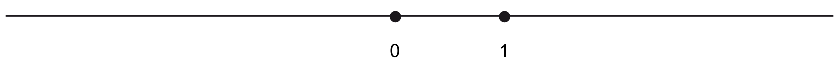
Atès que si fos infinitament prima, els nostres ulls no la veurien, ens imaginarem que quan la representem amb un llapis o amb l'ordinador a través dels píxels el gruix del dibuix és 0.

Si acceptem aquests fets no tenim problemes perquè el nostre cervell interpreti el dibuix següent com un objecte geomètric ideal conegut com a recta.

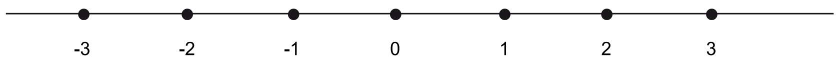
Per tal de representar el 0 en la recta, triem un punt qualsevol d'aquesta recta.



Per tal de representar l'1, triem un punt qualsevol a la banda dreta del zero. Compte que això és per conveni. Posem els positius normalment a la dreta però no té per què ser així.

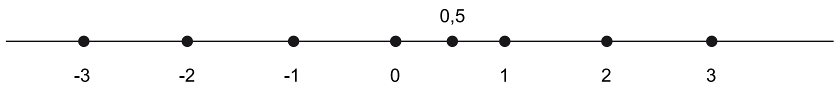


Un cop assignat el 0 i l'1, tots els enters queden determinats. El 2, per exemple, ha d'estar a la mateixa distància de l'1 que l'1 del 0. El –1 ha d'estar a la mateixa distància que l'1 del 0 però a l'esquerra del 0. I així anem trobant la representació dels enters...

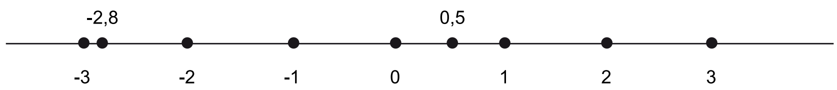


La representació del nombre $\frac{1}{2}$ es troba a mig camí entre el 0 i l'1, ja que dividim la unitat en dues parts i en prenem una.

A la pràctica, però, se sol fer dividint la unitat en 10 parts i prenent 5, ja que $5 \cdot \frac{1}{10} = 5 \cdot 0\,.\,1 = 0.5 = \frac{1}{2}$.

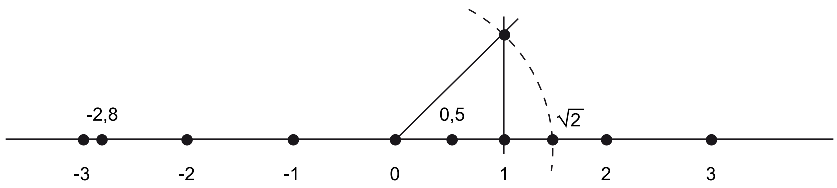


Podem representar directament –2.8 dividint en 10 parts la unitat que va de –2 a –3 i prenent-ne 8.



Finalment, per a representar $\sqrt{2}$ podem utilitzar Pitàgores amb un triangle rectangle de costats 1 i 1. La mida de la hipotenusa és el nombre $\sqrt{2}$. Amb un compàs podem marcar el nombre sobre la recta tal seguint la idea del dibuix següent.

De totes maneres, a la pràctica, atès que $\sqrt{2}$ = 1,4142..., dividim el segment que va d'1 a 2 en 10 parts i marquem una mica més de 4 parts.



Exercici 31

Expliqueu quins nombres formen part dels conjunts de nombres següents:

a) $1 \leq x \leq 5$ ó [1,5]
b) $1 \leq x < 5$ ó [1,5)
c) $1 < x \leq 5$
d) $1 < x < 5$
e) $\mathbb{Z}$

f) $\mathbb{R}$

Solució:

> Recordeu que l'expressió *a* $a < b$ simbolitza que *a* és més petit que *b*, i l'expressió $a \leq b$ simbolitza que *a* és més petit o igual que *b*.

a) Aquí trobem tots els nombres reals des de l'1 fins al 5, ambdós inclosos. Observeu que els claudàtors tancats indiquen que els nombres dels extrems de l'interval pertanyen al conjunt.

b) Aquí trobem tots els nombres reals des de l'1 fins al 5, amb l'1 inclòs però el 5 no.

c) Aquí trobem tots els nombres reals des de l'1 fins al 5, amb el 5 inclòs però l'1 no.

d) Aquí trobem tots els nombres reals des de l'1 fins al 5, però ni l'1 ni el 5 estan inclosos.

e) En $\mathbb{Z}$ tenim tots els nombres enters.

f) En $\mathbb{R}$ tenim tots els nombres reals.

Exercici 32

Justifiqueu si les igualtats d'expressions algebraiques següents són equacions o identitats:

a) $3x - 5 = x - 1$
b) $x + 1 = x + 1$

Solució:

Si substituïm la x per 4 en l'expressió $3x - 5 = x - 3$, obtenim en la primera expressió algebraica el valor numèric 7, i en la segona, 1. Com que hem trobat valors de les lletres pels quals la igualtat no és certa, podem dir que tenim una equació.

Si substituïm la x per qualsevol nombre en l'expressió $x + 1 = x + 1$, obtenim tant en la primera expressió algebraica, com en la segona, el mateix valor numèric. Com que no podem trobar valors que en ser substituts de les lletres la igualtat no sigui certa, podem dir aleshores que tenim una identitat.

Exercici 33

Esbrineu si les equacions següents són equivalents:

a) $x - 1 = 4$ i $x = 4 + 1$

b) $3 \cdot x = 12$ i $x = \frac{12}{3}$

c) $x + 1 = 2$ i $x^2 = 1$

Solució:

Les equacions $x - 1 = 4$ i $x = 4 + 1$ són equivalents, ja que totes dues tenen per única solució el nombre 3.

Les equacions $3 \cdot x = 12$ i $x = \frac{12}{3}$ són equivalents, ja que totes dues tenen per única solució el nombre 4.

Les equacions $x + 1 = 2$ i $x^2 = 1$ no són equivalents, ja que la primera només té per única solució el nombre 1, mentre que la segona té dues solucions, el nombre 1 i el nombre –1.

Exercici 34

Trobeu la solució de l'equació següent: $3x - 2x - 1 = 3 + 2$.

Solució:

Per comptes de cercar les solucions de l'equació $3x - 2x - 1 = 3 + 2$, cercarem la solució de l'equació $3x - 2x = 1 + 3 + 2$, la qual és equivalent a l'anterior ja que només hem sumat 1 a cada costat. I per comptes de trobar la solució de $3x - 2x = 1 + 3 + 2$ cercarem les de l'equació simplificada $x = 6$, en la qual i d'un sol cop d'ull podem veure que té per única solució el nombre 6. Així trobant la solució de l'equació equivalent $x = 6$, hem trobat la solució de l'equació $3x - 2x - 1 = 3 + 2$. Es pot comprovar que hem trobat el valor correctament amb el fet que en substituir la x de l'equació inicial pel valor 6 obtenim a tots dos costats el mateix valor numèric: $3 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 1 = 18 - 12 - 1 = 5$ i $3 + 2 = 5$ a l'altre.

Exercici 35

Trobeu les solucions de les equacions següents:

a) $x^2 + x - 20 = 0$

b) $x^2 = 20 - x$

c) $-x^2 - x + 20 = 0$

d) $2x^2 + 2x - 40 = 0$

e) $x \cdot (x + 1) = 20$

f) $(x + 5)(x - 4) = 0$

Solució:

a) De l'equació $x^2 + x - 20 = 0$, prenent $a = 1, b = 1$ i $c = -20$, obtenim les solucions $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2+80}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2} = \frac{-1+9}{2} ; \frac{-1-9}{2} = \frac{8}{2} ; \frac{-10}{2} = 4; -5$, segons s'explica en la secció 1.5.

Comprovem, doncs, que 4 és solució: $4^2 + 4 - 20 = 16 + 4 - 20 = 20 - 20 = 0$.

Comprovem ara que –5 també és solució: $(-5)^2 + (-5) - 20 = 25 - 5 - 20 = 25 - 25 = 0$.

b) $x^2 = 20 - x$ és una equació equivalent a una equació de la forma $a x^2 + b x + c = 0$.

Concretament a l'equació $x^2 + x - 20 = 0$. Per l'apartat a) ja sabem que les solucions d'aquesta són els valors 4 i – 5.

c) $-x^2 - x + 20 = 0$ és una equació de segon grau. Prenent $a = -1, b = -1$ i $c = 20$,, obtenim les solucions 4 i – 5. Una segona forma, però, de fer aquest exercici és canviar els signes i obtenir l'equació equivalent de l'apartat a).

d) $2x^2 + 2x - 40 = 0$ és una equació de segon grau. Prenent $a = 2, b = 2$ i $c = -40$, obtenim les solucions 4 i – 5. Una segona forma, però, de fer aquest exercici és dividir tots dos costats per 2, amb la qual cosa obtenim l'equació equivalent de l'apartat a).

e) $x \cdot (x + 1) = 20$ és una equació equivalent a l'equació $x^2 + x = 20$, la qual és a la vegada equivalent a l'equació de l'apartat a). Per tant, les solucions són els valors 4 i – 5.

f) $(x + 5)(x - 4) = 0$ és una equació equivalent a l'equació $x^2 + 5x - 4x - 20 = 0$, equació equivalent a l'equació de l'apartat a). Per tant, les solucions també són els valors 4 i – 5. Una segona forma molt més ràpida de fer aquest exercici és cercant directament quan $(x + 5)$ és 0, o quan $(x - 4)$ és 0. Del primer traiem la solució –5. Del segon, traiem la solució 4.

Exercici 36

Demostreu que les equacions $a x^2 + b x + c = 0$ i $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ són equivalents.

Solució:

Multiplicant per 2a l'equació $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, obtenim l'equació equivalent $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$. Sumant a totes dues bandes b obtenim l'equació equivalent $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$. Si elevem al quadrat totes dues bandes, sabem que la igualtat s'ha de mantenir. Així $(2ax + b)^2 = \left(\pm\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2$. Desenvolupant el quadrat, i atès que positiu o negatiu al quadrat sempre és positiu obtenim l'equació: $4a^2x^2 + b^2 + 4abx = b^2 - 4ac$. Restant b^2 i sumant $4ac$ a totes dues bandes, obtenim l'equació $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$. Si traiem factor comú $4a$ obtenim: $4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 0$. Atès que a ha de ser diferent de 0, ja que sinó no tindríem una equació de segon grau, podem dividir per $4a$ (recordeu que en matemàtiques està completament prohibit dividir per 0!) a totes dues bandes per a obtenir l'equació equivalent: $ax^2 + bx + c = 0$.

Com que hem passat d'una de les equacions a l'altra amb transformacions que respecten l'equivalència de les equacions, tenim que les dues equacions són equivalents i que, per tant, si coneixem les solucions de l'una coneixerem les solucions de l'altra.

Atès que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ té per solucions els valors $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ i $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ té per solucions els valors $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ i $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Exercici 37

Trobeu les solucions de les equacions següents:

a) $x - 2 = 0$
b) $x + 7 = 0$
c) $2x - 5 = 0$
d) $x^2 - 5 = 0$
e) $x^3 - 2 = 0$

Solució:

a) $x - 2 = 0$ té per solució el nombre natural 2.
b) $x + 7 = 0$ té per solució el nombre enter -7.
c) $6x - 1 = 0$ té per solució el nombre racional $\frac{1}{6}$.
d) $x^2 - 5 = 0$ té per solucions els nombres irracionals $\sqrt{5}$ i $-\sqrt{5}$.

e) $x^3 - 2 = 0$ té per solució el nombre irracional $\sqrt[3]{2}$.

El fet que aquests nombres són solució d'una equació polinòmica amb coeficients enters permet afirmar que 2, –7, $\frac{1}{6}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ i $\sqrt[3]{2}$ són nombres algebraics, tal com s'ha definit en la secció 1.6.

Exercici 38

Resoleu el sistema següent: $\begin{cases} 2x+3y=11 \\ x-2y=2 \end{cases}$

Solució:

De la segona equació tenim que $x=2+2y$.

Aleshores en la primera equació substituïm la x per l'expressió $2+2y$. Per conveni posarem entre parèntesis l'expressió encara que en certs casos concrets potser no caldria.

Així, tenim que $2 \cdot (2+2y)+3y=11$ o el que és el mateix, $4+4y+3y=11$, restant 4 a tots dos costats, obtenim l'equació equivalent: $4y+3y=11-4$, que simplificant és $7y=7$, la qual té per solució $y=1$. Atès que $x=2+2y$ i la y és 1, la x necessàriament és 4.

Exercici 39

Demostreu que tots els nombres naturals, enters, racionals i alguns nombres que contenen arrels són nombres algebraics.

Solució:

Si n és un nombre natural, n és algebraic, ja que l'equació $x - n = 0$ té per solució el nombre n.

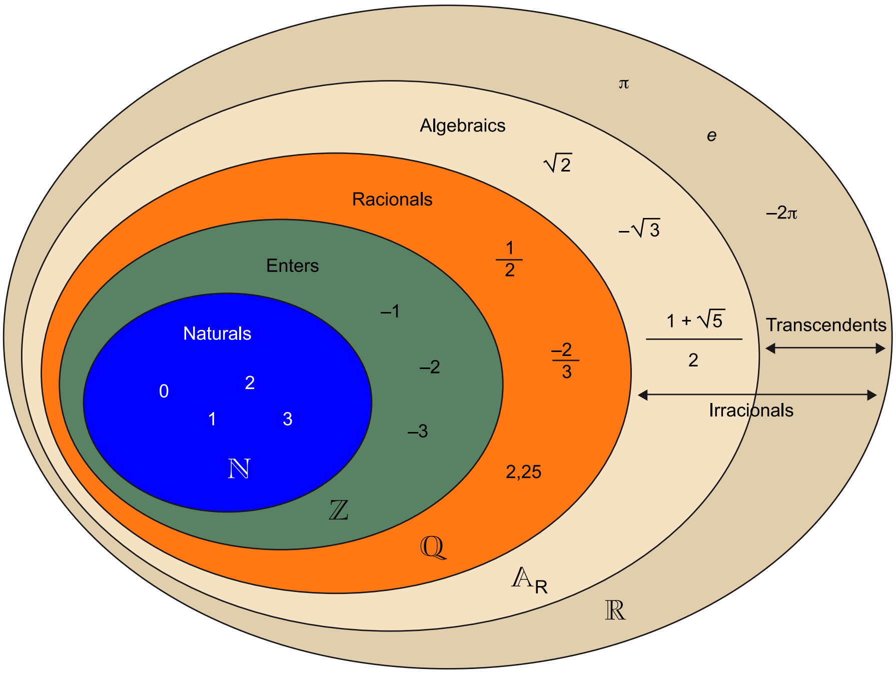
Si z és un nombre natural, z és algebraic, ja que l'equació $x - z = 0$ té per solució el nombre z.

Si $r = a/b$ és un nombre racional, r és algebraic, ja que l'equació $ax - b = 0$ té per solució el nombre r.

Tot nombre de l'estil $+\sqrt{p}$ o $-\sqrt{p}$ amb p primer és un nombre algebraic, ja que l'equació $x^2 - p = 0$ té per solucions els nombres $+\sqrt{p}$ i $-\sqrt{p}$.

Exercici 40

Expliqueu el dibuix següent:



Solució:

El dibuix és una representació dels diferents subconjunts de nombres estudiats fins ara. Té una estructura tipus matrioixca que permet entendre el perquè de tots els exercicis treballats.

En l'oval més petit trobem el conjunt dels nombres naturals amb alguns exemples de nombres naturals, com ara el 0, l'1, el 2 i el 3. Una $\mathbb{N}$ denota aquest conjunt. Observem que el 0 és considerat aquí com a nombre natural.

El conjunt dels enters és denotat per $\mathbb{Z}$. En la imatge és possible observar clarament que l'oval de $\mathbb{N}$ és una part inclosa dins de l'oval de $\mathbb{Z}$. Recordem que per conveni tot nombre natural és a la vegada un nombre enter. Fora de l'oval dels naturals però dins del oval dels nombres enters trobem els exemples de nombres enters negatius, –1, –2 i –3.

El conjunt dels racionals és denotat per $\mathbb{Q}$. En la imatge també és possible observar clarament que l'oval dels enters és una part inclosa dins de l'oval dels racionals. Recordem que per conveni ja sabíem que tot nombre enter és un nombre racional amb divisor el nombre 1.

Els exemples triats com a nombres racionals que no són enters són el ½, el –2/3 i el 2,25. El fet de posar un decimal permet recordar que tot nombre racional també es pot escriure en forma de decimal limitat o il·limitat periòdic.

El conjunt següent que inclou els racionals és el conjunt dels nombres algebraics. En un exercici anterior ja hem vist que els racionals són nombres algebraics i que $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{3}$ són nombres algebraics. L'altre nombre és anomenat el nombre auri. En els apunts de l'assignatura es demostrarà que aquest també és un nombre algebraic. El símbol que els denota és $\mathbb{A}_R$.

Com a exemples de nombres transcendents trobem els nombres π, e i -2π.

Aquests tres nombres, juntament amb $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$ i $\frac{1+\sqrt{4}}{2}$, són els exemples de nombres irracionals, és a dir, aquells que no es poden escriure en forma de a/b amb a i b enters.

Finalment trobem que l'oval que inclou tots els nombres està denotat per una $\mathbb{R}$ de real. Qualsevol nombre que ens puguem imaginar de la recta real està en alguna part d'aquest dibuix.